



# Потенциальная точность эциклической теории

К.В. Холшевников, В.Ш. Шайдулин

21-25 сентября 2015

Пулково

# Эпициклическая модель

Эпициклическая модель представляет движение каждой планеты в виде

$$\mathbf{r} = \sum_{n=1}^N R_n (\mathbf{P}_n \cos \varphi_n + \mathbf{Q}_n \sin \varphi_n), \quad (1)$$

где

$$R_n > 0, \quad |\mathbf{P}_n| = |\mathbf{Q}_n| = 1, \quad \mathbf{P}_n \mathbf{Q}_n = 0, \\ \varphi_n = \omega_n t, \quad \omega_n \geq 0.$$

## Эпициклическая модель

Создатели теории считали  $N$  конечным числом, но мы допускаем  $N = \infty$  при условии сходимости ряда с общим членом  $R_n$ . Важно, что представление (1) есть *весьма частный случай* ряда Фурье: амплитуды при синусах и косинусах совпадают. Или иначе: каждая гармоника ряда Фурье вектора в  $\mathbb{R}^3$  определяется в общем случае шестью параметрами, а в эпициклической модели — лишь четырьмя независимыми параметрами.

## Свойства эпициклической модели

1. Порядок следования эпициклов безразличен (очевидно). Древние упорядочивали последовательность  $R_n$  по убыванию, что сыграло отрицательную роль в становлении гелиоцентризма (отражением движения Земли для нижних планет служил деферент, а для верхних — первый эпицикл).

## Свойства эпициклической модели

2. Слагаемые, отвечающие  $\omega_n = 0$ , можно объединить в одно (очевидно) и представить (1) в виде

$$\mathbf{r} = R_0 \mathbf{P}_0 + \sum_{n=1}^N R_n (\mathbf{P}_n \cos \varphi_n + \mathbf{Q}_n \sin \varphi_n). \quad (2)$$

где к прежним ограничениям добавлено  $\omega_n > 0$ .

## Свойства эпициклической модели

3. Два эпицикла можно заменить одним тогда и только тогда, когда их частоты совпадают, а орты  $P$ ,  $Q$  лежат в одной плоскости и имеют одинаковую ориентацию.

4. Два эпицикла с совпадающими частотами и лежащими в одной плоскости ортами, имеющими противоположную ориентацию, описывают движение по эллипсу с равномерно возрастающей эксцентрической аномалией. Верно и обратное. Эллипс вырождается в отрезок, если и только если радиусы эпициклов совпадают.

**Следствие.** Ряд Фурье можно представить эпициклической моделью, удвоив число гармоник.

## Свойства эпициклической модели

Доказательство свойств **2**, **3** несложно, хотя и громоздко. Любопытно, что свойство **3** (и только оно) опирается на трехмерность нашего мира. Уже в  $\mathbb{R}^4$  оно не имеет места.

# Точность эпициклической теории произвольного движения

Справедливы следующие теоремы о возможности представления движения эпициклической моделью.

- Пусть вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  почти-периодична по Г.Бору и представима абсолютно сходящимся рядом Фурье. Тогда ее можно **точно** представить эпициклической моделью.
- Пусть вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  непрерывна и почти-периодична по Г.Бору. Тогда ее можно представить эпициклической моделью с конечным числом эпициклов на бесконечном промежутке  $-\infty < t < \infty$  с погрешностью, меньшей любого наперед заданного  $\varepsilon$ .



## Точность эциклической теории произвольного движения

- Пусть вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  почти-периодична по Г.Бору и представима абсолютно сходящимся рядом Фурье. Тогда ее можно **точно** представить эциклической моделью.
- Пусть вектор-функция  $\mathbf{r}(t)$  непрерывна и почти-периодична по Г.Бору. Тогда ее можно представить эциклической моделью с конечным числом эциклов на бесконечном промежутке  $-\infty < t < \infty$  с погрешностью, меньшей любого наперед заданного  $\varepsilon$ .

## Эпициклическая теория кеплерова движения

В орбитальных осях эллиптическое движение описывается рядами Фурье

$$\xi = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt, \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt. \quad (3)$$

причем ряды сходятся абсолютно и равномерно при  $0 \leq e \leq 1$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Здесь большая полуось и среднее движение приняты за единицу. Коэффициенты выражаются через функции Бесселя

$$a_0 = -\frac{3}{2}, \quad a_n = \frac{2}{n} J'_n(ne), \quad b_n = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{ne} J_n(ne). \quad (4)$$

# Эпициклическая теория кеплерова движения

Эллиптическое движение **ТОЧНО** описывается эпициклической моделью:

$$\begin{aligned}\xi &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \cos nt, \\ \eta &= \sum_{n=1}^{\infty} R_n \sin nt - \sum_{n=1}^{\infty} R^n \sin nt.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь

$$2R_n = a_n + b_n, \quad 2R^n = a_n - b_n.$$

## Эпициклическая теория кеплерова движения

Свойства  $a_n, b_n$  исследованы в:

**Холшевников К.В.** Свойства коэффициентов основных рядов кеплеровского движения // Кинематика и физика небесных тел, 4, 6, 79-83, 1988

**Холшевников К.В., Тублина О.К.** Суммы коэффициентов основных рядов кеплеровского движения // Кинематика и физика небесных тел, 7, 3, 3-8, 1991

Из них вытекает, что:

$$R_n > R^n > 0,$$

при данном  $e$  величины  $R_n, R^n$  убывают с ростом  $n$ .

## Эпициклическая теория кеплерова движения

Какова точность при конечном числе слагаемых? Следует взять  $m + 1$  элементов первого ряда и  $m - 1$  элементов второго ряда при некотором натуральном  $m$ .

Чебышевская (равномерная) норма  $\varepsilon_0(m)$  погрешности эпициклической модели равна

$$\varepsilon_0 = \frac{m^{m-1} + (m+2)^m}{2^{m+1}(m+1)!} e^{m+1} \times \left\{ 1 + \frac{(m+1)^m + (m+3)^{m+1}}{2(m+2)[m^{m-1} + (m+2)^m]} e + \dots \right\}. \quad (6)$$

## Эпициклическая теория кеплерова движения

Евклидова (среднеквадратическая) норма  $\varepsilon_2(m)$  погрешности эпициклической модели равна

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{m^{2m-2} + (m+2)^{2m}}}{2^{m+1}(m+1)!} e^{m+1} \times \left\{ 1 + \frac{\sigma(m)}{8(m+2)^2[m^{2m-2} + (m+2)^{2m}]} e^2 + \dots \right\} \quad (7)$$

где

$$\sigma = -2(m+2)(m^2 - 3m - 2)m^{2m-2} + (m+1)^{2m} - 2(m+3)(m+2)^{2m+2} + (m+3)^{2m+2}.$$

## Эпициклическая теория кеплерова движения

Например, при  $m = 2$  (4 эпицикла)

$$\varepsilon_0(2) = \frac{3}{8} e^3 \left( 1 + \frac{67}{72} e + \dots \right),$$

$$\varepsilon_2(2) = \frac{\sqrt{65}}{24} e^3 \left( 1 - \frac{12563}{16640} e^2 + \dots \right).$$

Таким образом, движение Земли (Солнца) описывается двумя окружностями с точностью лучше достигнутой Тихо Браге.

Движение Марса описывается четырьмя окружностями с точностью выше достигнутой Гиппархом и шестью окружностями с точностью лучше достигнутой Тихо Браге.

## Движение на небесной сфере

Кажется правдоподобным, что представление движения планет *на небесной сфере* земного наблюдателя (а не в  $\mathbb{R}^3$ ) требует при той же точности вдвое меньше эпициклов.

Пока это удалось доказать только для движения Солнца относительно земного наблюдателя (т.е. для наблюдателя в фокусе эллипса).



## Движение на небесной сфере

Задача сведена к линейной системе уравнений в гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}$ :

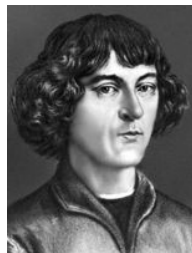
$$\mathcal{H}\mathbf{R} = \mathbf{c}. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{R} = (R_i) \in \mathbb{H}$  — искомый вектор радиусов эпициклов,  $\mathbf{c} = (c_i)$  и  $\mathcal{H} = (h_{ik})$  — известные вектор и матрица; индексы  $i, k$  пробегает значения от нуля до бесконечности. Величины  $c_i$  и  $h_{ik}$  составлены из  $a_s, b_s$  и быстро убывают с ростом  $i, k$ . Можно показать, что матрица  $\mathbb{H}$  близка к диагональной и обратима без особого труда.

Движение Солнца *на небесной сфере* земного наблюдателя описывается *одной окружностью* с точностью лучше достигнутой Тихо Браге.

## Заключение

Построенная в древности и работавшая вплоть до начала XVII века эпициклическая теория была громоздкой только потому, что ее параметры были определены из наблюдений катастрофически плохо. Причина — отсутствие теории обработки наблюдений. Но *нельзя винить наших предшественников в том, что они не знали метода наименьших квадратов* и многого другого. При правильном же определении параметров достаточно совсем небольшого числа эпициклов для обеспечения точности, достигнутой Тихо Браге.



Thanks!  
Спасибо!

