

Определение орбиты по двум векторам положения методом продолжения по параметру с наилучшей параметризацией

В. Б. Кузнецов

ИПА РАН

Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково - 2015»
21 – 25 сентября 2015 г.
г. Санкт-Петербург

Задача:

Нахождение орбиты небесного тела по двум известным его положениям в два момента времени.

1. Уравнения.
2. Метод решения.

- 1) Гаусс (1809)
- 2) Херрик (1971)
- 3) Данчик (2008)
- 4) Шефер (2010)

1. Введение в определение орбит по двум векторам положения

Гаусс (1809) (Шефер (2010)): $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(\mathbf{t}_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(\mathbf{t}_2)$. $\eta = \frac{2\tau p}{\phi\sigma}$, (1)
где $\tau = k(t_2 - t_1)$, $k = 0.01720209895$ – постоянная Гаусса,

$$\phi = 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sigma = 2\sqrt{r_1 r_2} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta = \theta_2 - \theta_1.$$

где $\eta^3 - \eta^2 = mX$ или $\eta = 1 + (l + x)X$, $x = \frac{m}{\eta^2} - l$, (2)
 $m = \frac{\tau^2}{\phi^3}$, $l = \frac{\bar{r}}{\phi} - \frac{1}{2}$, $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Эллипс: $X = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}$, $2g = E_2 - E_1$, $x = \sin^2 \frac{g}{2}$, $0 < x < 1$.

Гипербола: $X = \frac{\sinh 2h - 2h}{\sinh^3 h}$, $2h = H_2 - H_1$, $x = -\sinh^2 \frac{h}{2}$, $-\infty < x < 0$.

Парабола: $X = 4/3$, $x = 0$.

1. Введение в определение орбит по двум векторам положения (продолжение)

$X(x) = \frac{4}{3} F\left(1, 3, \frac{5}{2}; x\right)$ - гипергеометрическая функция (Субботин (1968)).

Система (2) трансцендентная относительно x и η .

Метод итераций (Дубяго (1949), Субботин (1968), Эскобал (1965)):

- 1) Первое приближение $\eta=1$.
- 2) Из второго уравнения (2) x .
- 3) Из первого уравнения (2) получаем новое значение η .
- 4) Повторяем шаги 2) – 3) пока не достигнем требуемой точности η .
- 5) p из (1).

Быстрая линейная сходимость для малых θ и $\eta \approx 1$.

Потеря сходимости для $\theta > \pi/2$ (Эскобал (1965)).

Для $\theta = \pi$, $\eta = \infty$ - нет решения.

1. Введение в определение орбит по двум векторам положения (продолжение)

Хэррик (1971): Универсальное решение

Новая переменная $S_h = \sqrt{ax}$, где “a” – большая полуось.

Преимущества:

- Итерации метода Ньютона-Рафсона с квадратичной сходимостью.
- Гибкий выбор начального приближения.
- Исключение главной особенности метода Гаусса при $\theta = \pi$.

Ограничения:

- Численное дифференцирование для вычисления производной.
- Мультивариантность выбора начального приближения.

Введение в определение орбит по двум векторам положения (продолжение)

- Danchick R. (2008) “Gauss meets Newton again: How to make more efficient and robust with Newton-Raphson iterations”// Appl. Mathem. and Comput. Vol. 195, pp. 364-375.
- Метод для эллиптических орбит с $0 < \theta < \pi$.
- Начальное приближение для $0 < \theta < \pi/2$: $\eta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{m/(l+1)} + \sqrt{m/l} \right]$, (4)
- затем из (2) вычисляем x ;
- для $\pi/2 < \theta < \pi$: $x = 1/2$,
- затем из (2) вычисляем η .
- Не применим при $\theta = \pi$.

2. Метод Шефера

Шефер (2010) “Новый метод определения орбиты по двум векторам положения, основанный на решении уравнений Гаусса”

Астрономический Вестник, Том 44, No. 3, стр. 273-288.

Одно уравнение с одним неизвестным:

$$\left(\bar{r} + \phi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \left(\phi + \left(\bar{r} + \phi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) X(x) \right)^2 = \tau^2. \quad (5)$$

Для эллипса:

$$X(x) = \frac{\arcsin \sqrt{x} - (1-2x)\sqrt{x(1-x)}}{2 \left(\sqrt{x(1-x)} \right)^3}. \quad (6)$$

Для гиперболы:

$$X(x) = \frac{(1-2x)\sqrt{x(x-1)} - \operatorname{Arsh} \sqrt{-x}}{2 \left(\sqrt{x(x-1)} \right)^3}. \quad (7)$$

Метод Ньютона-Рафсона:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (8)$$

2. Метод Шефера (продолжение)

$$p = \frac{\sigma^2}{4 \left(\bar{r} + \phi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right)}. \quad (9)$$

- Альтернативное решение для гиперболических орбит ($x < -1$):

$$\xi = \frac{x}{1-x} = -th^2 \frac{h}{2}; \quad -\infty < x < 0, \quad -1 < \xi < 0. \quad (10)$$

- Метод Ньютона-Рафсона: $\xi_{j+1} = \xi_j - \frac{g(\xi_j)}{g'(\xi_j)}; \quad j = 1, 2, \dots \quad (11)$

- Более одного орбитального периода ($\theta > 2\pi$):

$$\left(\bar{r} + \phi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \left(\phi + \left(\bar{r} + \phi \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) X(x) \right)^2 = \left(\tau - 2\pi\lambda \left(\frac{\bar{r} + \phi \left(x - \frac{1}{2} \right)}{4x(1-x)} \right)^{\frac{3}{2}} \right)^2, \quad (12)$$

где λ число полных оборотов тела.

2. Метод Шефера (продолжение)

Начальные приближения:

$$y = 2\sqrt{ax}, \quad \eta = \frac{\tau}{\phi y \sqrt{1-x}}.$$

Тогда (2) можно записать как

$$(1-x)^{3/2} X(x) y^3 + \phi (1-x)^{1/2} y = \tau, \quad x = \frac{y^2 - \bar{r} + 0.5\phi}{y^2 + \phi}. \quad (13)$$

Заменим $(1-x)^{3/2} X(x)$ и $(1-x)^{1/2}$ на первые два члена их разложения в ряды по степеням x :

$$\frac{4}{3} y^3 + \phi y - \frac{1}{2} x \left(\frac{4}{5} y^2 + \phi \right) y = \tau, \quad (14)$$

или алгебраическое уравнение 5-ой степени относительно y .

2. Метод Шефера (продолжение)

- Однако $y^2 + \phi \approx \frac{4}{5} y^2 + \phi$ и мы можем записать простое кубическое уравнение:

$$y^3 + \frac{3}{5} \left(\bar{r} + \frac{3}{2} \phi \right) y - \frac{6}{5} \tau = 0. \quad (15)$$

- Есть как минимум один положительный корень, а при $0 < \theta < \pi$ он единственный.

- Для параболических орбит:

$$y = \sqrt{\bar{r} - 0.5\phi}. \quad (16)$$

- Для гипербол:

$$\left(\frac{5}{3} - \xi \right) y^3 + \left[\bar{r} + \frac{3}{2} \phi + \xi \left(\bar{r} - \frac{1}{2} \phi \right) \right] y = 2\tau. \quad (17)$$

- Для многооборотных случаев:

$$y^3 + \frac{3}{5} \left(\bar{r} + \frac{3}{2} \phi \right) y - \frac{6}{5} \left(\tau - 2\pi\lambda \left(\frac{\bar{r} + \phi \left(\frac{y^2 - \bar{r} + 0.5\phi}{y^2 + \phi} - \frac{1}{2} \right)}{4 \frac{y^2 - \bar{r} + 0.5\phi}{y^2 + \phi} \left(1 - \frac{y^2 - \bar{r} + 0.5\phi}{y^2 + \phi} \right)} \right)^{\frac{3}{2}} \right) = 0. \quad (18)$$

2. Метод Шефера (продолжение)

Преимущества:

- 1) Высокая скорость сходимости метода Ньютона-Рафсона.
- 2) Хорошие начальные приближения.
- 3) Широкий диапазон для θ .
- 4) Алгоритм свободен от особенностей при $\theta = \pi$.

Ограничения:

- 1) Необходимо начальное приближение.
- 2) Используются различные формулы для эллиптического и гиперболического движений.

3. Универсальные уравнения

- $X(x) = 4/3 F(1, 3, 5/2; x)$ – гипергеометрическая функция.
- $x \in [-1, 1]$ – область сходимости.
- Область определения $x : (-\infty, 1]$.
- $x \rightarrow x/(x-1)$
- $x \in (-\infty, 0.5]$ – область сходимости.

$$F\left(1, 3, \frac{5}{2}; x\right) = \frac{1}{(1-x)^3} F\left(3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{x}{x-1}\right). \quad (19)$$

3. Универсальные уравнения (продолжение)

- Уравнения для $x \in (-\infty, 1]$.
- L. A. D'Amaro and S. P. Synnott (1969)

$$X(x) = \frac{4}{3} F\left(1, 3; \frac{5}{2}; x\right) = \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} \left(1 - \frac{1}{5} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{7}{2}; \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) \right) \right). \quad (20)$$

$$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{7}{2}; \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) = \frac{5}{4(\sqrt{1-x}+1)^2} \left(1-x+\sqrt{1-x}+3\Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) \right), \quad (21)$$

где Φ - Фи-функция Лерха (M. Lerch (1887)). $\Phi(z, s, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\nu+n)^s}. \quad (22)$

$$\frac{d\Phi\left(x, 1, \frac{5}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{x(1-x)} - \frac{5}{2} \frac{\Phi\left(x, 1, \frac{5}{2}\right)}{x}, \quad z \in [-1, 1]$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+5} \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right)^n.$$

$$\frac{4}{3} F\left(1, 3; \frac{5}{2}; x\right) = \frac{\sqrt{1-x}(6x^2-51x+64)+4(6x^2-21x+16)}{6(1-x)^{3/2}(\sqrt{1-x}+1)^4} + \frac{3(1-\sqrt{1-x})}{6(1-x)^{3/2}(\sqrt{1-x}+1)^4} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right). \quad (23)$$

3. Метод продолжения по параметру с наилучшей параметризацией

Давиденко Д.Ф. (1953) “Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений”// ДАН СССР. Т. 88, No 4, с. 601-602.

Kubicek M. Dependence of solution of nonlinear systems on a parameter // ACM Trans. Math. Software. 1976. Vol. 2, No. 1. P. 98–107.

Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. (1999) “Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике”. Эдиториал УРСС. Москва.

Кузнецов Е.Б. (2004) “Наилучшая параметризация при построении кривых”// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 44, No 9, с. 1540-1551.

Sharaf M.A., Saad A.N., Nouh M.I. (2003) “Lambert universal variable algorithm”// The Arabian Journal for Science and Engineering. Vol. 28, No 1A, pp. 87-97.

Метод продолжения по параметру с наилучшей параметризацией (продолжение)

$$H(x)=0 \quad (24)$$

Глобальная гомотопия: $G(x, \mu)=H(x)-\mu H(x_0)=0, \quad (25)$

где $\mu \in [0,1]$ и x_0 - начальное приближение ($x_0=0$).

Если $\mu=0$ тогда $G(x,0)=H(x)=0$ – начальное уравнение.

Если $\mu=1$ тогда $G(x,1)=H(x)-H(x_0)=0$ и $x=x_0$. Теорема о неявной функции.

Новый параметр $s \in [0,L]$, $L=\text{const.}$: $(ds)^2=(dx)^2+(d\mu)^2, \quad (26)$

где s – длина дуги интегральной кривой.

$$G(x(s), \mu(s))=H(x(s))-\mu(s)H(x_0)=0. \quad (27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{ds} - H(x_0) \frac{d\mu}{ds} = 0. \quad (28)$$

$$\frac{dx}{ds} = H(x_0) \left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]^{-1} \frac{d\mu}{ds}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \sqrt{1 - \frac{(dx)^2}{(ds)^2}}. \quad (29)$$

Следует интегрировать (29) в направлении роста параметра “s” пока не будет достигнуто $\mu=0$.

5. Метод Шефера & метод продолжения с наилучшей параметризацией

- Запишем (5) с учётом (23) как:

$$\sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} (2x-1) + r_2} \left(\sqrt{2r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{2} \frac{r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} (2x-1) + r_2}{24(1-x)^{3/2} (\sqrt{1-x} + 1)^4} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(\sqrt{1-x} (6x^2 - 51x + 64) + 4(6x^2 - 21x + 16) + 3(1 - \sqrt{1-x}) \Phi \left(\frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x} + 1}, 1, \frac{5}{2} \right) \right) \right) - \tau = 0. \quad (30)$$

Тогда мы получим систему ОДУ (29):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \tau - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} + r_2} \left(r_1 + \sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} + r_2 \right), \\ \frac{d\mu}{ds} &= - \frac{A \cdot \Phi \left(\frac{\sqrt{1-x} - 1}{\sqrt{1-x} + 1}, 1, \frac{5}{2} \right) + B}{8\sqrt{2} (1-x)^{5/2} (\sqrt{1-x} + 1)^5 \sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} (2x-1) + r_2}} \end{aligned} \right\}, \quad (31)$$

5. Метод Шефера & метод продолжения с наилучшей параметризацией (продолжение)

$$\text{где } A = 12r_1r_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left[4x^3 - 6x^2 + 4x - 1\right] + 12(r_1 + r_2)\sqrt{r_1r_2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(3x^2 - 3x + 1) + 3(r_1 + r_2)^2(2x - 1),$$

$$B = 4r_1r_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left[\left(22x^3 - 116x^2 + 123x - 25\right) - \sqrt{1-x}(62x^2 - 110x + 25)\right] + 4\sqrt{r_1r_2}(r_1 + r_2) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\sqrt{1-x}(10x^3 - 55x^2 + 43x + 25) - (2x^4 - 29x^3 + 78x^2 - 30x - 25)\right] + (r_1 + r_2)^2 \cdot$$

$$\cdot \left[\sqrt{1-x}(20x^2 - 100x + 103) - 4x^3 + 56x^2 - 151x + 103\right].$$

Для более чем одного оборота (12) может быть записана как:

$$(8x(1-x))^{\frac{3}{2}} \sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} \cos \frac{\theta}{2}(2x-1) + r_2} \left(\sqrt{2r_1r_2} \cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{2} \frac{\left(r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} \cos \frac{\theta}{2}(2x-1) + r_2\right)}{24(1-x)^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1-x}+1)^4} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sqrt{1-x}(6x^2 - 51x + 64) + 4(6x^2 - 21x + 16) + 3(1 - \sqrt{1-x}) \Phi \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2} \right) \right) -$$

$$-\tau(8x(1-x))^{\frac{3}{2}} + 2\pi\lambda \left(r_1 - 2\sqrt{r_1r_2} \cos \frac{\theta}{2}(2x-1) + r_2 \right)^{\frac{3}{2}} = 0. \quad (32)$$

5. Метод Шефера & метод продолжения с наилучшей параметризацией (продолжение)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= 48\sqrt{2}\pi\lambda \left(r_1 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} + r_2 \right)^{\frac{3}{2}}, \\ \frac{d\mu}{ds} &= \frac{A \cdot \Phi \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2} \right) + B + C\lambda\pi + D\tau}{\sqrt{1-x}\sqrt{2}\sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\theta}{2} (2x-1) + r_2}} \end{aligned} \right\} \cdot (33)$$

$$\begin{aligned} A = & 6\sqrt{x} \left(4r_1 r_2 \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \left[\sqrt{1-x} (32x^3 - 70x^2 + 43x - 8) - (48x^3 - 86x^2 + 47x - 8) \right] + \right. \\ & \left. + 4(r_1 + r_2) \sqrt{r_1 r_2} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[\sqrt{1-x} (13x^2 - 24x + 8) - (21x^2 - 28x + 8) \right] + (r_1 + r_2)^2 \left[\sqrt{1-x} (5x - 8) - 9x + 8 \right] \right), \end{aligned}$$

5. Метод Шефера & метод продолжения с наилучшей параметризацией (продолжение)

$$\begin{aligned}
 B &= 8r_1r_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \sqrt{x} \left[\sqrt{1-x} (220x^3 - 643x^2 + 484x - 96) + 392x^3 - 824x^2 + 524x - 96 \right] - \\
 &- 8\sqrt{r_1r_2} (r_1 + r_2) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{x} \left[\sqrt{1-x} (60x^4 - 483x^3 + 838x^2 - 428x + 48) + 216x^4 - 876x^3 + 1076x^2 - \right. \\
 &- 460x + 48 \left. \right] - 2\sqrt{x} (r_1 + r_2)^2 \left[\sqrt{1-x} (54x^3 - 399x^2 + 572x - 192) + 192x^3 - 672x^2 + 676x - 192 \right], \\
 C &= 4r_1r_2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left[\sqrt{1-x} (336x^3 - 984x^2 + 840x - 216) - (96x^4 - 738x^3 + 1377x^2 - 948x + 216) \right] + \\
 &+ 4(r_1 + r_2) \sqrt{r_1r_2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\sqrt{1-x} (132x^2 - 300x + 144) - (39x^3 - 264x^2 + 372x - 144) \right] + \\
 &+ (r_1 + r_2)^2 \left[24\sqrt{1-x} (2x - 3) - 3(5x^2 - 28x + 24) \right], \\
 D &= -24\sqrt{2}\sqrt{x} \sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} \cos\frac{\theta}{2} (2x - 1) + r_2} \cdot \\
 &\cdot \left[\sqrt{1-x} (11x^4 - 90x^3 + 175x^2 - 120x + 24) + 4(10x^4 - 41x^3 + 58x^2 - 33x + 6) \right].
 \end{aligned}$$

6. Примеры

1) Астероид (145) Адеона

(эпоха 2009 06 18.0 ET = 2455000.5 JDT):

$a=2.6731467$ а.е.,

$e=0.1451418$,

$i=12.63591^\circ$,

$\Omega=77.45404^\circ$,

$\omega=44.68635^\circ$,

$M_0=6.56089^\circ$,

$p=2.61683381$ а.е.

2) Астероид (1566) Икар

(эпоха 2009 06 18.0 ET = 2455000.5 JDT):

$a=1.0778777$ а.е.,

$e=0.8269526$,

$i=22.83892^\circ$,

$\Omega=88.05419^\circ$,

$\omega=31.32973^\circ$,

$M_0=69.67377^\circ$,

$p=0.34077039$ а.е.

3) Комета Галлея

(эпоха 1994 02 16.5 ET = 2449400.0 JDT):

$q=0.58597811$ а.е.,

$e=0.96714291$,

$i=162.26269^\circ$,

$\Omega=58.42008^\circ$,

$\omega=111.33249^\circ$,

$T_0=1986\ 02\ 05.89532$,

$p=1.15270268$ а.е.

4) Комета Боуэлла

(эпоха 1982 02 16.5 ET = 2449400.0 JDT):

$q=3.36394251$ а.е.,

$e=1.05743550$,

$i=1.66174^\circ$,

$\Omega=114.55566^\circ$,

$\omega=135.08525^\circ$,

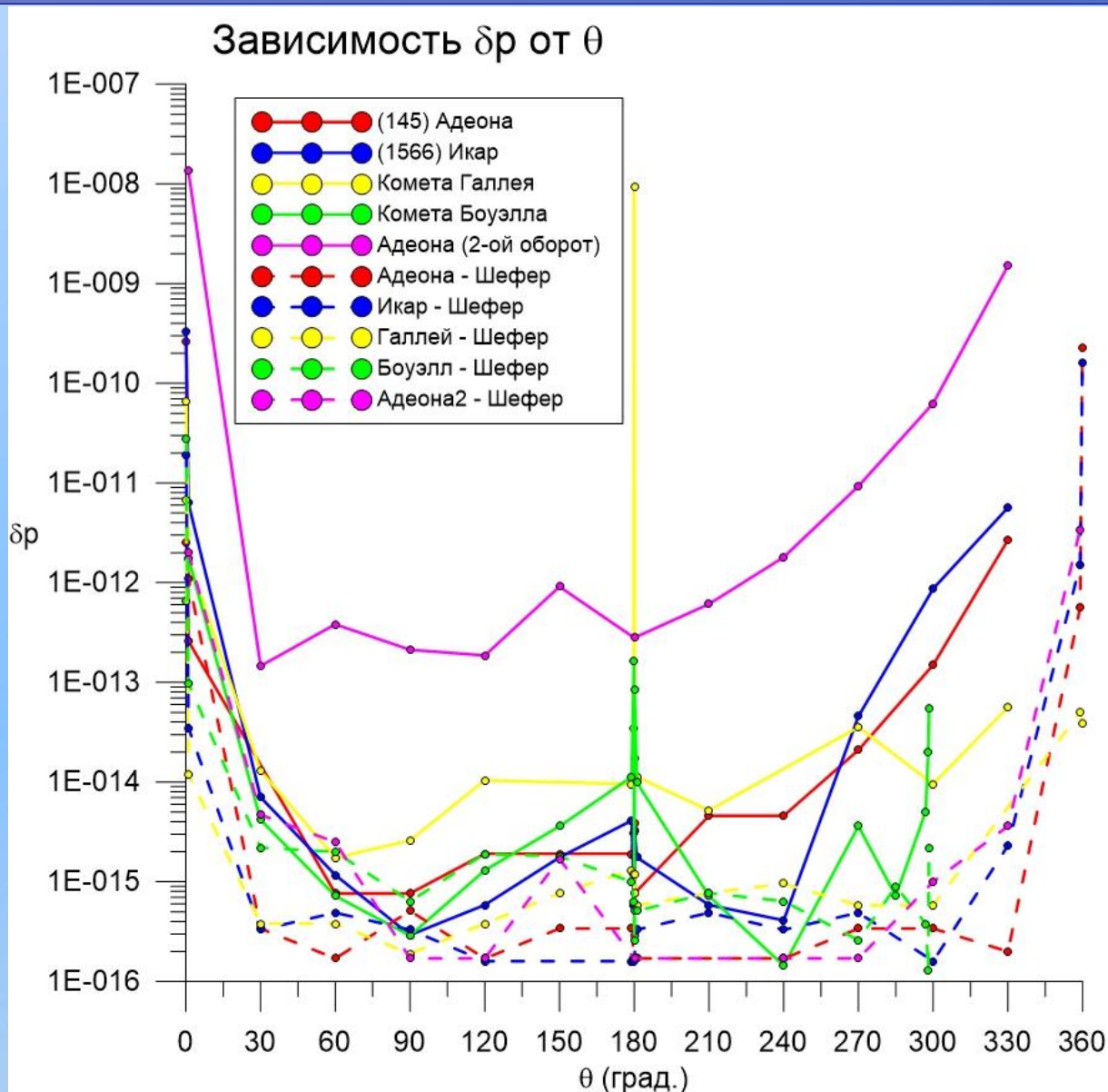
$T_0=1982\ 03\ 12.29118$,

$p=6.92109474$ а.е.

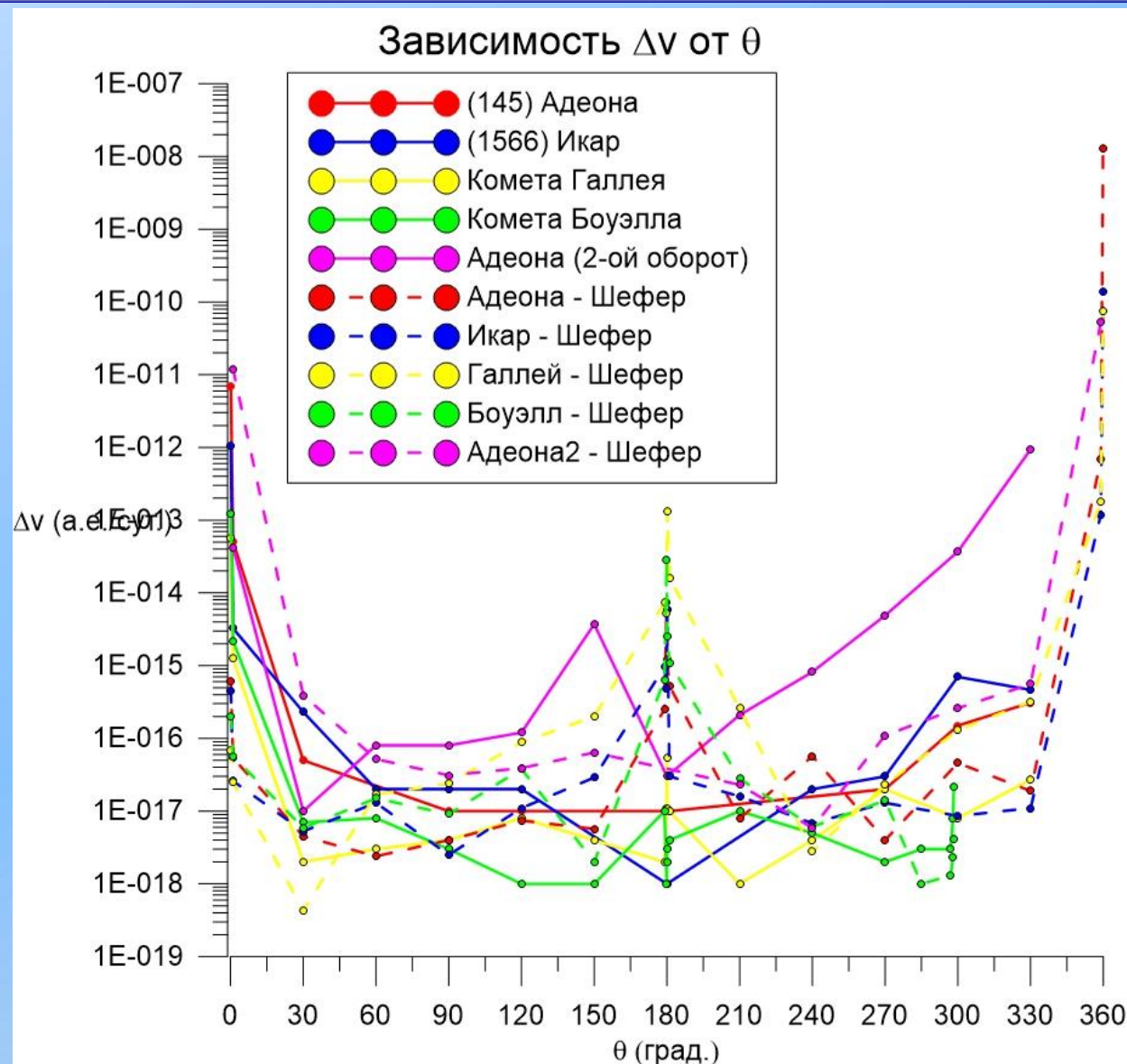
Метод Каш-Карпа (Рунге-Кутты) 4-5 порядка с интерполяцией 4-ой степени.

Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2015»

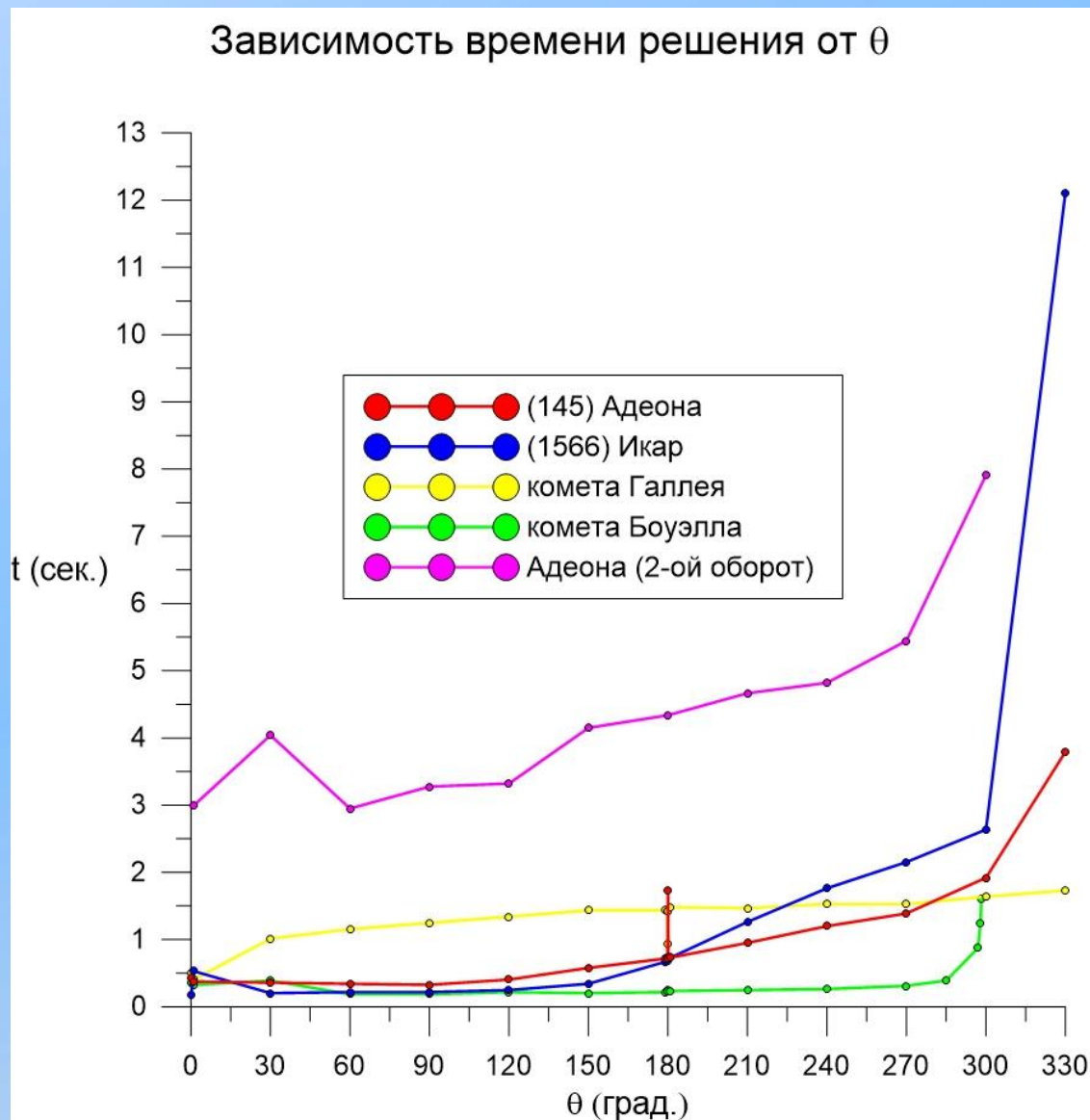
21 – 25 сентября 2015 г., г. Санкт-Петербург



$$\delta p = \left| \frac{p - p_c}{p_c} \right|$$



$$\Delta v = |v - v_c|$$



Заключение

- 1. Использование Φ -функции Лерха позволяет получить универсальные формулы для всех типов орбит.
- 2. Производная Φ -функции Лерха выражается через неё же. Это повышает скорость вычислений.
- 3. Метод продолжения решения по параметру (МПРП) использует стандартные начальные данные.
- 4. МПРП позволяет последовательно находить все возможные решения.
- 5. МПРП теряет эффективность при $x \rightarrow 1$ ($\theta \rightarrow 2\pi$).
- 6. МПРП для данной задачи уступает возможностям итерационного метода Ньютона-Рафсона по точности и скорости вычислений.

Заключение

- 7. Для многооборотных случаев существует более одного решения. При этом для первой половины оборота нужно брать первое решение, а для второй второе.
- 8. В некоторых случаях решения могут быть близки к друг другу, что нужно учитывать при использовании итерационных методов.
- 9. МПРП может быть использован для локализации решений, с их дальнейшим уточнением итерационными методами.
- 10. МПРП представляет интерес как мощный инструмент исследования уравнений без наличия какой-либо априорной информации.

С днём осеннего равноденствия!



Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково-2015»

21 – 25 сентября 2015 г., г. Санкт-Петербург