

ФГУП «Всероссийский научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений»

УПРОЩЁННАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ УТОЧНЕНИЯ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА СИЛ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО СЦЕПЛЕНИЯ МАНТИИ И ЯДРА ЗЕМЛИ

С.Л. Пасынок

e - mail: pasynok@vniiftri.ru

Пулково-
2015

2015



ВВЕДЕНИЕ

Анализ измерений последних лет показал, что принятая теория МАС2000 (IAU2000) обладает наилучшими характеристиками в сравнении с другими моделями нутации. Однако, из анализа остаточных расхождений углов нутации модели МАС2000 и измерений видно, что остаточные расхождения имеют довольно сложную структуру в отличие от предсказаний теории, что может привести к необходимости уточнения теории в связи с приближением точности определения параметров вращения Земли (ПВЗ) к субмикросекундному, а в перспективе и к микросекундному уровню. В связи с этим, Международным астрономическим союзом (IAU) в 2013 году была создана рабочая группа №19 по уточнению принятой теории нутации.

Предложенная Пасынком и Кузнецовой интерпретация остаточных расхождений (Пасынок С.Л., Кузнецова Л.А., 2014), в принципе, позволяет объяснить структуру остаточных расхождений теории и измерений. Однако, для построения высокоточной модели необходимо уточнить временную зависимость момента сил электромагнитного сцепления мантии и ядра Земли. Для этого нужно решить уравнения магнитной гидродинамики и определить временную зависимость возмущений магнитного поля, обусловленных дифференциальным вращением. Поскольку точные уравнения магнитной гидродинамики очень сложны, приходится делать ряд упрощений и допущений, позволяющих прийти к сравнительно простой форме уравнений. Эта процедура проводилась ранее в работах зарубежных авторов, например, в (В. А. Buffett, Р. М. Mathews, Т. А. Herring, 2002) и (Berangere Deleplace and Philippe Cardin, 2000). Однако, вопрос о временной зависимости не стоял так остро, пока ею пренебрегали, но теперь для корректного определения точного вида этой зависимости, который необходимо определить для дальнейшего уточнения теории нутации, необходимо более детально рассмотреть какие упрощения и допущения возможно сделать и какие есть для этого основания.

В докладе рассматривается переход от точных уравнений магнитной гидродинамики к приближённым, обсуждаются допущения, приближения и упрощения, которые могут быть сделаны. Полученные упрощённые уравнения гидродинамики выносятся на обсуждение. Результаты работы планируется использовать для уточнения временной зависимости момента магнитных сил с целью дальнейшего уточнения теории нутации Земли.



УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ МОМЕНТА СИЛ

Точные уравнения магнитной гидродинамики имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{B} = (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{v}_f - \bar{B} \operatorname{div} \bar{v}_f - \nabla \otimes (\bar{v}_m \nabla \otimes \bar{B})$$

$$\frac{\partial \bar{v}_f}{\partial t} + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{v}_f + 2 \bar{\Omega} \otimes \bar{v}_f + \dot{\bar{\Omega}} \otimes \bar{x} + \bar{\Omega} \otimes (\bar{\Omega} \otimes \bar{x}) = \bar{f} + \bar{j} \otimes \bar{B} + \nu \Delta \bar{v}_f$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}_f) = 0 \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

$$\bar{f} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \varphi_g \quad - \text{часть ускорения, обусловленная давлением и гравитационным потенциалом};$$

$$\bar{j} = \frac{1}{\mu} (\nabla \otimes \bar{B}) \quad - \text{плотность тока проводимости}; \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

Если уравнения магнитной гидродинамики решены и найден вектор индукции магнитного поля, то момент сил электромагнитного сцепления может быть вычислен по формуле **(M.G. Rochester, 1962)**:

$$\bar{L}_m^{EM} \approx - \oint_{S_{\text{границы раздела}}} \frac{1}{\mu} ((\bar{x} \otimes \bar{B})(\bar{B} \bar{n})) dS$$



4
и, поэтому
м количественных
нитной

на поверхностях
данные модели
использовались
для Земли, которая
международной

- | (SU) | DGRF | DGRF | DGRF | DGRF | DGRF | DGRF | DGRF | IGR |
|--------|--------|--------|--------|----------|-----------|-----------|---------|-----|
| 1980.0 | 1985.0 | 1990.0 | 1995.0 | 2000.0 | 2005.0 | 2010.0 | 2015.0 | |
| -29992 | -29873 | -29775 | -29632 | -29619.4 | -29554.63 | -29496.57 | -29442. | |
| -1956 | -1905 | -1848 | -1784 | -1728.2 | -1669.05 | -1586.42 | -1501. | |
| 5604 | 5500 | 5406 | 5306 | 5186.1 | 5077.99 | 4944.26 | 4797. | |
| -1997 | -2072 | -2131 | -2200 | -2267.7 | -2337.24 | -2396.06 | -2445. | |
| 3027 | 3044 | 3059 | 3070 | 3068.4 | 3047.69 | 3026.34 | 3012. | |
| -2129 | -2197 | -2279 | -2366 | -2481.6 | -2594.50 | -2708.54 | -2845. | |
| 1663 | 1687 | 1686 | 1681 | 1670.9 | 1657.76 | 1668.17 | 1676. | |
| -200 | -306 | -373 | -413 | -458.0 | -515.43 | -575.73 | -641. | |
| 1281 | 1296 | 1314 | 1335 | 1339.6 | 1336.30 | 1339.85 | 1350. | |
| -2180 | -2208 | -2239 | -2267 | -2288.0 | -2305.83 | -2326.54 | -2352. | |
| -336 | -310 | -284 | -262 | -227.6 | -198.86 | -160.40 | -115. | |
| 1251 | 1247 | 1248 | 1249 | 1252.1 | 1246.39 | 1232.10 | 1225. | |
| 271 | 284 | 293 | 302 | 293.4 | 269.72 | 251.75 | 244. | |
| 833 | 829 | 802 | 759 | 714.5 | 672.51 | 633.73 | 582. | |
| -252 | -297 | -352 | -427 | -491.1 | -524.72 | -537.03 | -538. | |

$$\overline{B}_{(0)} = -\overline{\nabla} V$$

Adam M. Dziewonski¹ and Don L. Anderson²

² Seismological Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, CA 91125 (U.S.A.)

(Received December 3, 1980; accepted for publication December 5, 1980)

Dziewonski, A.M. and Anderson, D.L., 1981. Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25: 297-356.

A large data set consisting of about 1000 normal mode periods, 500 summary travel time observations, 100 normal mode Q values, mass and moment of inertia have been inverted to obtain the radial distribution of elastic properties, Q values and density in the Earth's interior. The data set was supplemented with a special study of 12 years of ISC phase data which yielded an additional 1.75×10^6 travel time observations for P and S waves. In order to obtain satisfactory agreement with the entire data set we were required to take into account anelastic dispersion. The introduction of transverse isotropy into the outer 220 km of the mantle was required in order to satisfy the shorter period fundamental toroidal and spheroidal modes. This anisotropy also improved the fit of the larger data set. The horizontal and vertical velocities in the upper mantle differ by 2–4%, both for P and S waves. The mantle below 220 km is not required to be anisotropic. Mantle Rayleigh waves are surprisingly sensitive to compressional velocity in the upper mantle. High S_p velocities, low P_p velocities and a pronounced low-velocity zone are features of most global inversion models that are suppressed when anisotropy is allowed for in the inversion.

The Preliminary Reference Earth Model, PREM, and auxiliary tables showing fits to the data are presented.

$$V(r, \theta, \lambda, t) = R \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \left[g_n^m(t) \cos m\lambda + h_n^m(t) \sin m\lambda \right] \hat{P}_n^m(\theta)$$

[illegible]

ВЫБОР НЕВОЗМУЩЁННОГО СОСТОЯНИЯ

Поскольку задача об определении момента сил электромагнитного сцепления не ставит себе целью решение задачи о генерации всего магнитного поля Земли, а только о его возмущениях, обусловленных дифференциальным вращением жидкого ядра вблизи его границ, то разумно искать решение системы уравнений методом теории возмущений.

$$\bar{B} = \bar{B}_{(0)} + \bar{b}, \quad \rho = \rho_{(0)} + \delta\rho, \quad p = p_{(0)} + \delta p, \quad \varphi_g = \varphi_{g0} + \delta\varphi_g$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{B} = (\bar{B} \cdot \nabla) \bar{v}_f - \bar{B} \operatorname{div} \bar{v}_f - \nabla \otimes (\bar{v}_m \nabla \otimes \bar{B})$$

$$\frac{\partial \bar{v}_f}{\partial t} + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{v}_f + 2\bar{\Omega} \otimes \bar{v}_f + \dot{\bar{\Omega}} \otimes \bar{x} + \bar{\Omega} \otimes (\bar{\Omega} \otimes \bar{x}) = \bar{f} + \bar{j} \otimes \bar{B} + \nu \Delta \bar{v}_f$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}_f) = 0 \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

Сначала в качестве невозмущённого состояния было принято состояние гидростатического равновесия. В результате для поправок были получены уравнения для определения поправок к невозмущённым значениям. Количественные оценки входящих в них членов показали, что если считать, что скорости в жидком ядре обусловлены только приливными течениями, то полученные уравнения содержат члены различного порядка малости, отличающихся приблизительно на 3 порядка (оценки проводились по порядку величины).



СОСТОЯНИЕ МАГНИТОСТРОФИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Однако, оказалось, что если положить, что невозмущённые величины удовлетворяют уравнениям, известным как уравнения магнитострофического равновесия (R. Hide, 2007), то оказывается, что уравнения для возмущений содержат члены приблизительно одного порядка малости. Таким образом, было показано, что состояние гидростатического равновесия является плохим выбором невозмущённого состояния для метода последовательных приближений. В состоянии магнитострофического равновесия скорости отнюдь не равны нулю и обусловленные ими члены уравнений превосходят члены с приливными скоростями примерно на 3 порядка.

Факт того, что более близкими приближениями к реальному состоянию жидкого ядра Земли являются состояния геострофического (аналог магнитострофических течений для случая баланса сил Кориолиса и давления при отсутствии магнитного поля) и магнитострофического (а не гидростатического) равновесия хорошо известен в теории геодинамо (М.Ю. Решетняк, 2010).

Конечно же сразу возникает вопрос: если поле скоростей магнитострофических течений действительно достаточно велико, то почему его не учитывают в теории вращения Земли. Следует заметить, что это не совсем так: дискуссия о возможности влияния геострофических течений на вращение Земли ведётся, начиная с работы (У. Манк, Г. Макдональд, 1964).



В этой работе (У. Манк, Г. Макдональд, 1964) рассматривается влияние геострофических течений на вращение атмосферы. Там показано, что момент сил, возникающий из-за одних лишь геострофических течений равен нулю и, таким образом, они не оказывают влияния на возбуждение вращения Земли. Кроме того, геострофические течения не имеют гармоник в нутационном частотном диапазоне и поэтому сразу же исключаются из уравнений нутации, если нелинейными членами можно пренебречь, как это и имеет место быть для атмосферы.

В более поздней работе (J.M. Wahr, 1982), на основе проведенного в ней детального анализа, напротив, показано, что, хотя для атмосферы часть углового момента, обусловленная геострофическими течениями и равна нулю, однако, если бы атмосфера была достаточно протяжённой оболочкой (как жидкое ядро, например), то это бы, вообще говоря, не выполнялось. Кроме того, для атмосферы как для малого возмущающего фактора можно пренебречь нелинейными членами в уравнениях движения в сравнении с остальными членами, и совсем другая ситуация наблюдается в жидком ядре Земли, в котором нелинейные члены достаточно велики. Нелинейные члены, содержащие магнитогеострофические скорости дадут гармоники в приливном частотном диапазоне и, таким образом, повлияют на решение возмущённых уравнений магнитной гидродинамики.

Таким образом, при применении метода возмущений в качестве невозмущённого состояния следует выбирать состояние магнитогеострофического равновесия.

Пулково-
2015



ВНИИФТРИ

СРАВНЕНИЕ МАГНИТНЫХ ЧЛЕНОВ: НЕВОЗМУЩЁННОЕ ПОЛЕ

Поскольку токи, генерирующие геомагнитное поле сосредоточены, в основном, в жидком ядре Земли, то для проведения оценок величины магнитного поля и соотношения его составляющих вблизи границы ядро-мантия, воспользуемся аналитическим продолжением этого поля до этой границы.

Можно показать, что первые три члена потенциала магнитного поля Земли могут быть представлены в виде:

$$V(\bar{x}, t) = -\frac{R^3}{r^3} M_p^{(B)} x_p - \frac{1}{2} \frac{R^5}{r^5} M_{\langle pi \rangle}^{(B)} x_p x_i - \frac{1}{3} \frac{R^7}{r^7} M_{\langle ijp \rangle}^{(B)} x_i x_j x_p + \dots$$

Что же касается поля внутри твёрдого ядра, то здесь для достоверной оценки необходимо иметь решение уравнений полных уравнений магнитной гидродинамики, приводящих к генерации главного магнитного поля Земли.

Поскольку токи, генерирующие геомагнитное поле сосредоточены, в основном, в жидком ядре Земли, то можно провести следующую композитную оценку. Будем полагать, что угловая зависимость определяется внешним полем, а амплитуда редуцирована к значению, полученному в (Kuang, W. J., and J. Bloxham, 1999), которая составляет 20 мТл.

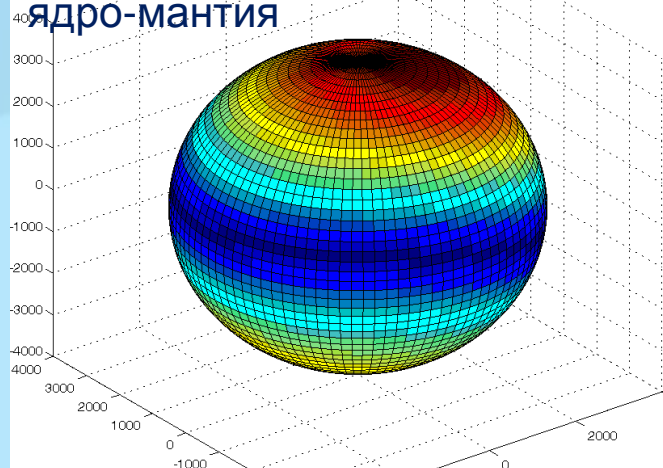
Тогда для магнитного потенциала поля внутреннего ядра получим:

$$V_{in}(\bar{x}, t) = -V_p^{(B)} x_p - \frac{1}{2} V_{\langle pi \rangle}^{(B)} x_p x_i - \frac{1}{3} V_{\langle ijp \rangle}^{(B)} x_i x_j x_p + \dots$$

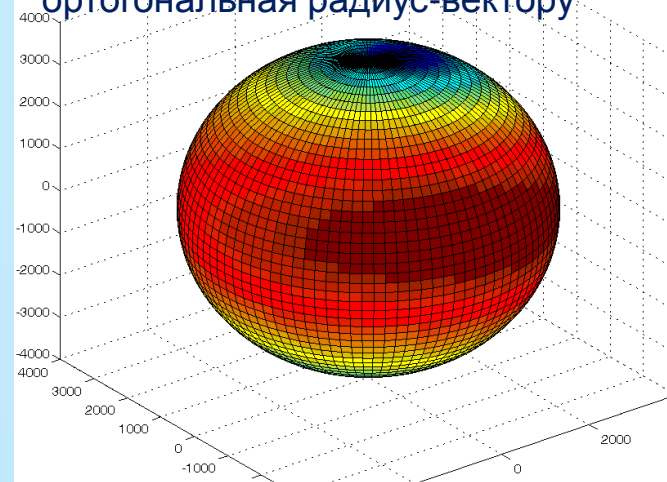


СРАВНЕНИЕ МАГНИТНЫХ ЧЛЕНОВ

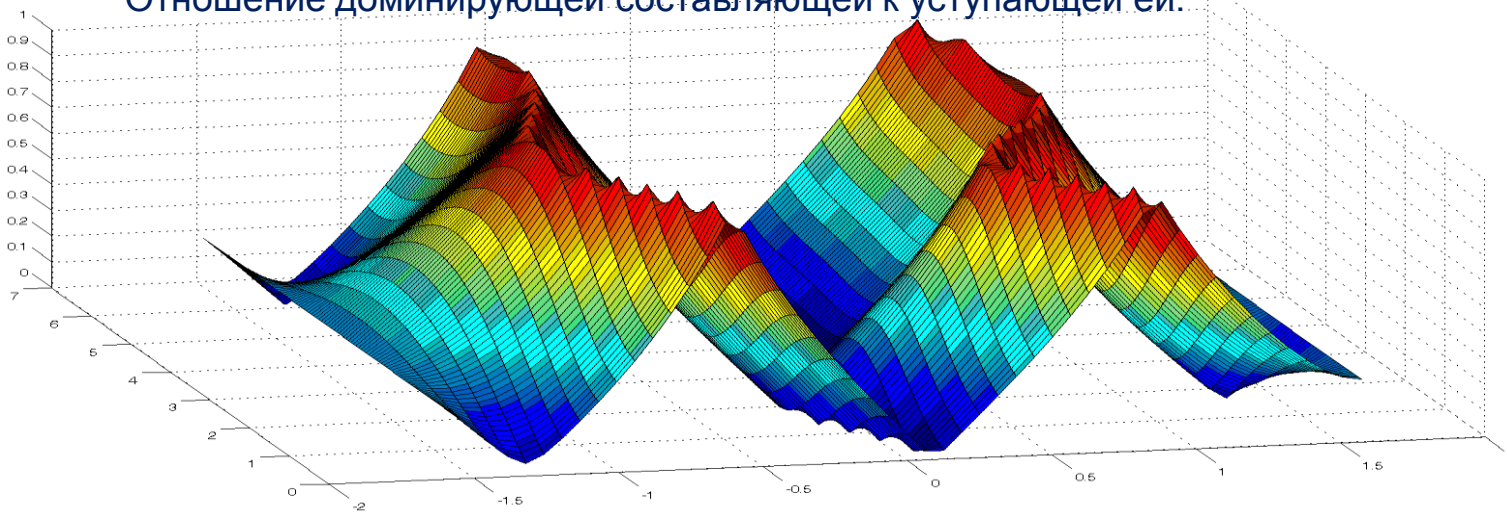
Радиальная составляющая
магнитной индукции на границе
ядро-мантия

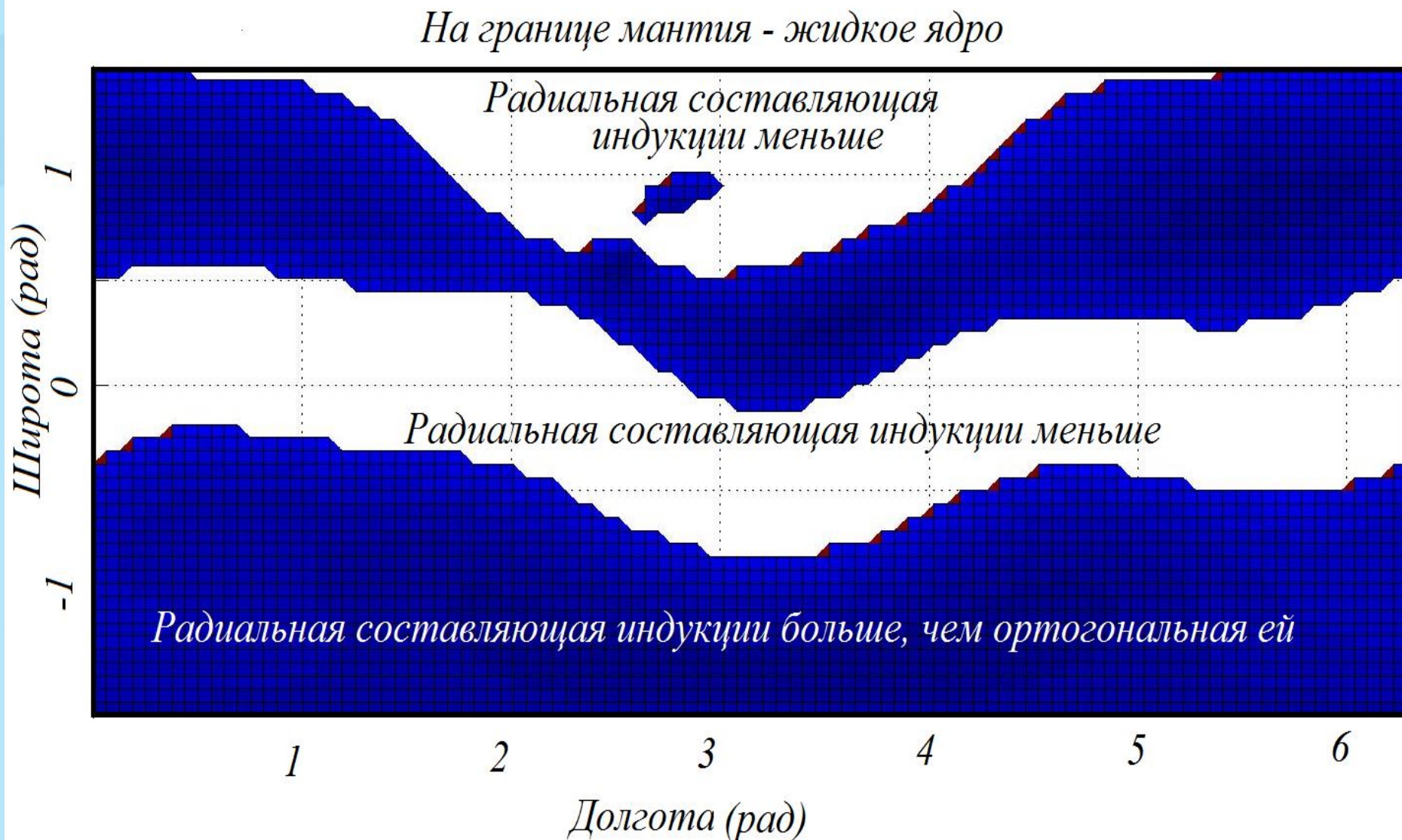


Составляющая магнитной индукции
на границе ядро-мантия,
ортогональная радиус-вектору

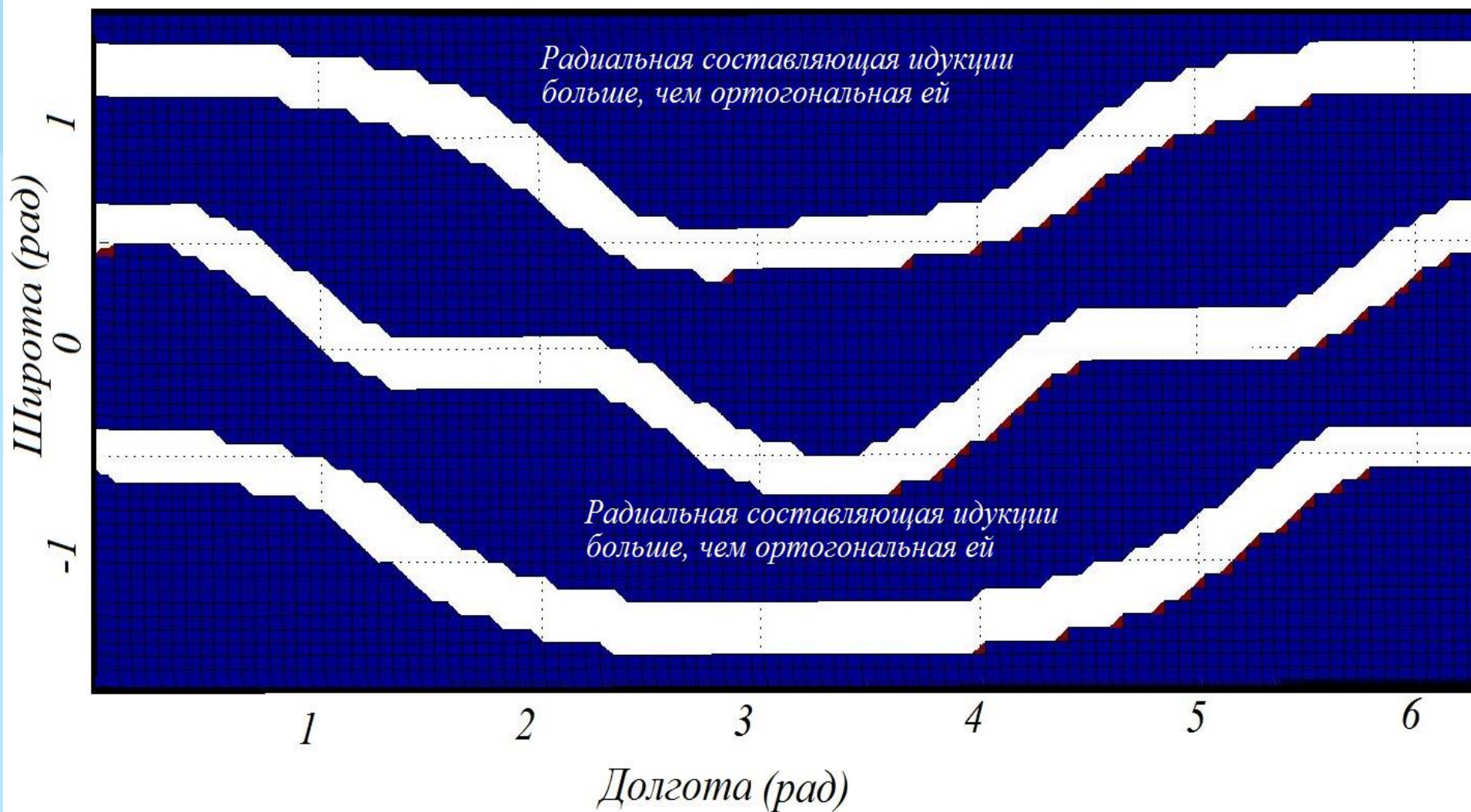


Отношение доминирующей составляющей к уступающей ей.





На границе жидкое ядро - твёрдое ядро



СРАВНЕНИЕ МАГНИТНЫХ ЧЛЕНОВ: ВЫВОДЫ

- 1) Для приближённых оценок величины невозмущённого магнитного поля достаточно первых трёх членов разложения магнитного потенциала;
- 2) Таким образом, сразу же исключать из уравнений составляющую индукции магнитного поля, ортогональную радиальной (до решения уравнений магнитной гидродинамики) нельзя.

УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Будем искать решение системы уравнений гидродинамики методом теории возмущений. Величины, соответствующие невозмущённому состоянию будем помечать индексом (0). Тогда:

$$\bar{B} = \bar{B}_{(0)} + \bar{b}, \quad \rho = \rho_{(0)} + \delta\rho, \quad p = p_{(0)} + \delta p, \quad \varphi_g = \varphi_{g0} + \delta\varphi_g$$

Анализ порядка величины членов уравнений магнитной гидродинамики показал, что удобно в качестве невозмущённого состояния выбрать состояние, описываемое уравнениями:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_{f(0)} \cdot \bar{\nabla}) \bar{B}_{(0)} &= (\bar{B}_{(0)} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}_{f(0)} - \bar{B}_{(0)} \operatorname{div} \bar{v}_{f(0)} \\ (\bar{v}_{f(0)} \bar{\nabla}) \bar{v}_{f(0)} + 2\Omega_0 \bar{e}_z \otimes \bar{v}_{f(0)} &= -\frac{1}{\rho_{(0)}} \bar{\nabla} p_{(0)} - \bar{\nabla} (\varphi_{g(0)} + \varphi_{c(0)}) + \frac{1}{\mu \rho_{(0)}} (\bar{\nabla} \otimes \bar{B}_{(0)}) \otimes \bar{B}_{(0)} \\ \operatorname{div} (\rho_{(0)} \bar{v}_{f(0)}) &= (\bar{\nabla} \rho_{(0)} \bar{v}_{f(0)}) + \rho_{(0)} \operatorname{div} \bar{v}_{f(0)} = 0 \end{aligned}$$



УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ: УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} - v_m \Delta \bar{b} &\approx (\bar{B}_{(0)} \cdot \bar{\nabla}) \delta \bar{v}_f - (\delta \bar{v}_f \cdot \bar{\nabla}) \bar{B}_{(0)} - \bar{B}_{(0)} \operatorname{div} \delta \bar{v}_f + \\
 &\quad + (\bar{b} \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}_{f(0)} - (\bar{v}_{f(0)} \cdot \bar{\nabla}) \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{v}_{f(0)} \\
 \frac{\partial \delta \bar{v}_f}{\partial t} - v \Delta \delta \bar{v}_f + (\bar{v}_{f(0)} \cdot \bar{\nabla}) \delta \bar{v}_f + (\delta \bar{v}_f \cdot \bar{\nabla}) \bar{v}_{f(0)} + 2\Omega_0 \bar{e}_z \otimes \delta \bar{v}_f &\approx -2\Omega_0 \bar{m} \otimes \bar{v}_{f(0)} + \\
 + \frac{\delta \rho}{(\rho_{(0)} + \delta \rho) \rho_{(0)}} \bar{\nabla} \left(p_{(0)} + \frac{B_{(0)}^2}{2\mu} \right) - \frac{1}{\rho_{(0)}} \bar{\nabla} \left(\delta p + \frac{\bar{\nabla}(\bar{B}_{(0)} \bar{b})}{\mu \rho_{(0)}} \right) - \bar{\nabla}(\delta \varphi_g + \delta \varphi_c) + \\
 + \frac{1}{\mu \rho_{(0)}} (\bar{B}_{(0)} \bar{\nabla}) \bar{b} + (\bar{b} \bar{\nabla}) \bar{B}_{(0)} - \frac{\delta \rho}{\mu (\rho_{(0)} + \delta \rho) \rho_{(0)}} (\bar{B}_{(0)} \cdot \bar{\nabla}) \bar{B}_{(0)} \\
 \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + (\bar{\nabla} \rho_{(0)} \delta \bar{v}_f) + \rho_{(0)} \operatorname{div} \delta \bar{v}_f + (\bar{\nabla} \delta \rho \bar{v}_{f(0)}) + \delta \rho \operatorname{div} (\bar{v}_{f(0)}) &\approx 0
 \end{aligned}$$



ВЫВОДЫ

В результате проведенных оценок и вычислений можно сделать следующие выводы:

- 1) Для решения уравнений магнитной гидродинамики необходимо, прежде всего, решить уравнения магнитострофического равновесия. Только после этого можно будет решить уравнения для возмущений;**
- 2) Сразу же исключать из уравнений составляющую индукции магнитного поля, ортогональную радиальной (до решения уравнений магнитной гидродинамики) нельзя.**

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-02-00735

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецова Л.А., Пасынок С.Л., Расщепление частоты свободной нутации ядра в магнитном поле Земли // Измерительная техника, 2014, N 6, С. 8.
2. B. A. Buffett, P. M. Mathews, T. A. Herring, Modeling of nutation and precession: Effects of electromagnetic coupling, J. Geophys. Res., 2002, 107(B4), 2070, 10.1029/2000JB000056.
3. Berangere Deleplace and Philippe Cardin, Visco-magnetic torque at the core mantle boundary, Geophys. J. Int. (2000) 142.
4. M.G. Rochester, Geomagnetic core-mantle coupling, J. Geophys. Res., 1962, V. 67, № 12, pp. 4833-4836.
5. Dziewonski A.M., Anderson D.L., Preliminary reference Earth model, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 25 (1981) 297-356.
6. S. Maus, S. Macmillan, T. Chernova, S. Choi, D. Dater, V. Golovkov, V. Lesur, F. Lowes, H. Luhr, W. Mai, S. McLean, N. Olsen, M. Rother, T. Sabaka, A. Thomson, and T. Zvereva, The 10th-Generation International Geomagnetic Reference Field, Geophys. J. Int. (2005) 161, P. 561–565.
7. R. Hide, Proudman-Taylor theorem \ \ Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism, edited by D. Gubbins and E. Herrero-Bervera, pp. 852–853, Springer, 2007, Dordrecht, electronic publication under ISBN 978-1-4020-4423-6.
8. М.Ю. Решетняк, Анизотропия в геострофической турбулентности, Геофизические исследования (2010), Том 11, №4, с. 5–19.
9. У. Манк, Г. Макдональд, Вращение Земли, (перевод с англ. В.В. Нестерова, под ред. П.Н. Успенского), из-во «Мир», 1964, стр. 140-142.
10. J.M. Wahr, The effects of the atmosphere and oceans on the Earth's wobble - I. Theory, Geophys., J. R. Astr. Soc. (1982) 70, 349-372.
11. Kuang, W. J., and J. Bloxham, Numerical modelling of magnetohydrodynamic convection in a rapidly rotating spherical shell: Weak and strong field dynamo action, J. Comput. Phys., 153, 51– 81, 1999.

