

Уточнение параметров орбиты и либрации Луны на основе модели JPL DE430

Д. А. Павлов
ИПА РАН



Всероссийская астрометрическая конференция Пулково-2015
23 сентября 2015



Численные теории движения Луны

- **JPL DE**

Standish, Williams (2003);

Williams, Boggs, Folkner, Park, Kuchynka (2013)

- **IMCCE INPOP**

Fienga, Manche, Laskar, Gastineau, Verma (2014)

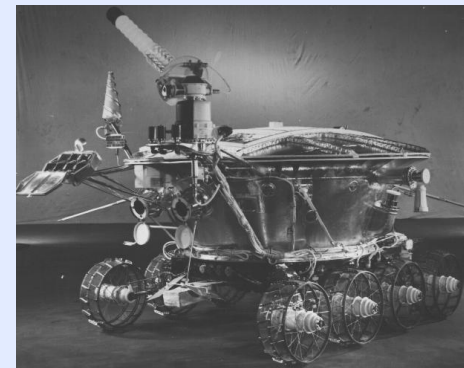
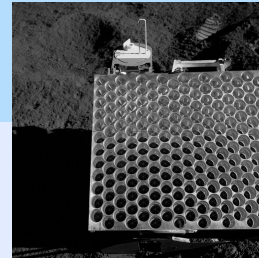
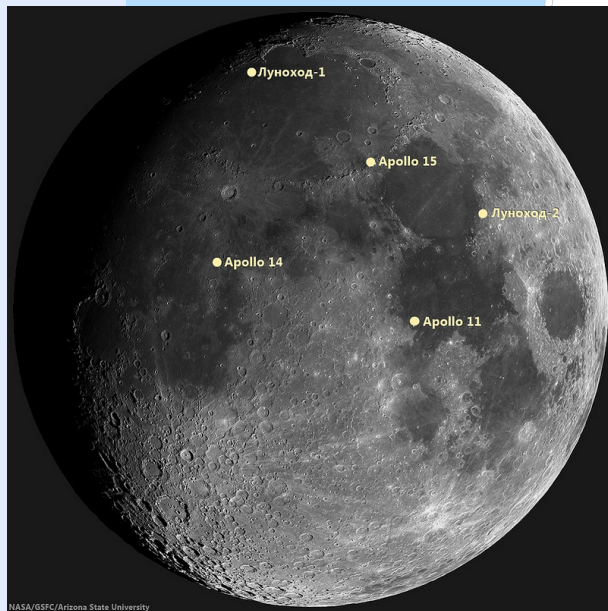
- **ЕРМ, ИПА РАН**

Красинский, Прохоренко, Ягудина (2010);

Васильев, Ягудина (2014)

Цель работы – реализация уравнений движения Луны DE430 в эфемеридах ЕРМ и обработка LLR-наблюдений с использованием моделей, рекомендованных IERS2010 и результатов эксперимента GRAIL по изучению гравитационного поля Луны.

Лунная лазерная локация (LLR)



Модель орбитального движения Луны

- Релятивистские уравнения движения материальных точек (EIN).
- Возмущения в гравитационном поле Земли. Используется модель геопотенциала EGM2008 до 6-й степени с динамическими значениями C20, C30, C40, C21, S21, рекомендованными IERS2010.
- Возмущение орбиты Земли в гравитационном поле Луны.
- Возмущения от твердотельных и океанических приливов на Земле (только 2-я степень). Модель DE430 упрощена по сравнению с IERS2010.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}}_A = & \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B \vec{n}_{BA}}{r_{AB}^2} \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B \vec{n}_{BA}}{r_{AB}^2} \left[v_A^2 + 2v_B^2 - 4(\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B) - \frac{3}{2}(\vec{n}_{AB} \cdot \vec{v}_B)^2 \right. \\ & \left. - 4 \sum_{C \neq A} \frac{Gm_C}{r_{AC}} - \sum_{C \neq B} \frac{Gm_C}{r_{BC}} + \frac{1}{2}((\vec{x}_B - \vec{x}_A) \cdot \vec{a}_B) \right] \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B}{r_{AB}^2} [\vec{n}_{AB} \cdot (4\vec{v}_A - 3\vec{v}_B)] (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \\ & + \frac{7}{2c^2} \sum_{B \neq A} \frac{Gm_B \vec{a}_B}{r_{AB}} + O(c^{-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{bmatrix} = & -\frac{GM}{r^2} \left\{ \sum_{n=2}^{n_1} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n \begin{bmatrix} (n+1)P_n(\sin \varphi) \\ 0 \\ -\cos \varphi P'_n(\sin \varphi) \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{n_2} \left(\frac{R}{r} \right)^n \sum_{m=1}^n \begin{bmatrix} -(n+1)P_n^m(\sin \varphi)[+C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \\ m \sec \varphi P_n^m(\sin \varphi)[-C_{nm} \sin m\lambda + S_{nm} \cos m\lambda] \\ \cos \varphi P_n^m(\sin \varphi)[+C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Table 6.2: Low-degree coefficients of the conventional geopotential model

Coefficient	Value at 2000.0	Reference	Rate / yr ⁻¹	Reference
$\bar{C}_{20}$ (zero-tide)	$-0.48416948 \times 10^{-3}$	Cheng <i>et al.</i> , 2010	11.6×10^{-12}	Nerem <i>et al.</i> , 1993
$\bar{C}_{30}$	0.9571612×10^{-6}	EGM2008	4.9×10^{-12}	Cheng <i>et al.</i> , 1997
$\bar{C}_{40}$	0.5399659×10^{-6}	EGM2008	4.7×10^{-12}	Cheng <i>et al.</i> , 1997

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{M,tide} = & \frac{3}{2} \left(\frac{m_E + m_M}{m_E} \right) \frac{Gm_T R_E^5}{r^5} \left\{ \frac{k_{20,E}}{r_0^{*5}} \left([2z_0^{*2} \mathbf{z} + \rho_0^{*2} \boldsymbol{\rho}] - \frac{5[(z z_0^*)^2 + \frac{1}{2}(\rho \rho_0^*)^2] \mathbf{r}}{r^2} \right) + r_0^{*2} \mathbf{r} \right\} \\ & + \frac{k_{21,E}}{r_1^{*5}} \left(2[(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_1^*) \mathbf{z}_1^* + z_1^* \boldsymbol{\rho}_1^*] - \frac{10 z z_1^* (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_1^*) \mathbf{r}}{r^2} \right) \\ & + \frac{k_{22,E}}{r_2^{*5}} \left([2(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_2^*) \boldsymbol{\rho}_2^* - \rho_2^{*2} \boldsymbol{\rho}] - \frac{5[(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}_2^*)^2 - \frac{1}{2}(\rho \rho_2^*)^2] \mathbf{r}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Модель физической либрации Луны (I)

Часть 1. Луна – твёрдое тело

- Уравнения для эйлеровых углов либрации с наличием внешнего крутящего момента.
- Момент от материальных точек Земли, Солнца, Венеры, Меркурия, Марса, Юпитера в гравитационном поле Луны.
- Момент от взаимодействия фигуры Земли (только J_2) с гравитационным полем Луны.

$$\mathbf{r}_I = \mathcal{R}_z(-\phi_m) \mathcal{R}_x(-\theta_m) \mathcal{R}_z(-\psi_m) \mathbf{r}_{PA}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_m &= (\omega_{m,x} \sin \psi_m + \omega_{m,y} \cos \psi_m) / \sin \theta_m \\ \dot{\theta}_m &= \omega_{m,x} \cos \psi_m - \omega_{m,y} \sin \psi_m \\ \dot{\psi}_m &= \omega_{m,z} - \dot{\phi}_m \cos \theta_m.\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1} \{ \Sigma_i \mathbf{N}_{fig-pm} + \mathbf{N}_{fig-fig} - \dot{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \}$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_{fig-fig} = \frac{15 \mu_e \mathcal{R}_e^2 J_{2e}}{2 r_e^5} \{ & (1 - 7 \sin^2 \phi) [\hat{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{I} \hat{\mathbf{r}}_e] \\ & + 2 \sin \phi [\hat{\mathbf{r}}_e \times \mathbf{I} \hat{\mathbf{P}}_e + \hat{\mathbf{P}}_e \times \mathbf{I} \hat{\mathbf{r}}_e] \\ & - \frac{2}{5} [\hat{\mathbf{P}}_e \times \mathbf{I} \hat{\mathbf{P}}_e] \} \end{aligned}$$

Модель физической либрации Луны (II)

Часть 2. Луна – эластичное тело

- Динамическая матрица инерции с учётом приливной и вращательной деформаций (с задержкой τ).
- Динамические коэффициенты гравитационного потенциала C20, C22, C21, S21, S22.

$$\mathbf{I}_m(t) = \tilde{\mathbf{I}}_m - \frac{k_{2,M} m_E R_M^5}{r^5} \begin{bmatrix} x^2 - \frac{1}{3}r^2 & xy & xz \\ xy & y^2 - \frac{1}{3}r^2 & yz \\ xz & yz & z^2 - \frac{1}{3}r^2 \end{bmatrix} + \frac{k_{2,M} R_M^5}{3G} \begin{bmatrix} \omega_{m,x}^2 - \frac{1}{3}(\omega_m^2 - n^2) & \omega_{m,x}\omega_{m,y} & \omega_{m,x}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\omega_{m,y} & \omega_{m,y}^2 - \frac{1}{3}(\omega_m^2 - n^2) & \omega_{m,y}\omega_{m,z} \\ \omega_{m,x}\omega_{m,z} & \omega_{m,y}\omega_{m,z} & \omega_{m,z}^2 - \frac{1}{3}(\omega_m^2 + 2n^2) \end{bmatrix}$$

Часть 3. Луна с жидким ядром

- Уравнения вращения ядра в системе координат коры.
- Вклад ядра в матрицу инерции.
- Момент, сообщаемый коре трением на границе с ядром.
- Момент, сообщаемый коре из-за сплюснутости ядра.

$$J_{2,M}(t) = \frac{I_{33,T}(t) - \frac{1}{2}[I_{11,T}(t) + I_{22,T}(t)]}{m_M R_M^2}$$

$$C_{22,M}(t) = \frac{I_{22,T}(t) - I_{11,T}(t)}{4m_M R_M^2}$$

$$C_{21,M}(t) = -I_{13,T}(t)/m_M R_M^2$$

$$S_{21,M}(t) = -I_{32,T}(t)/m_M R_M^2$$

$$S_{22,M}(t) = -I_{21,T}(t)/2m_M R_M^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_m = \mathbf{I}_m^{-1} \left\{ \sum_{A \neq M} \mathbf{N}_{M,figM-pmA} + \mathbf{N}_{M,figM-figE} - \dot{\mathbf{I}}_m \boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{I}_m \boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{N}_{cmb} \right\}$$

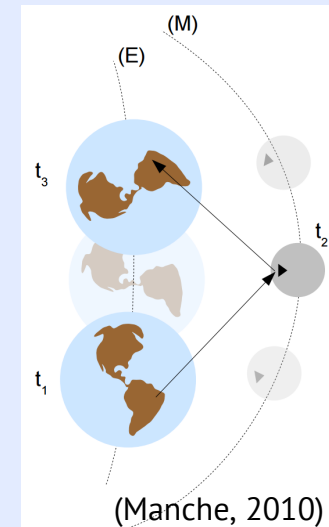
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_c = \mathbf{I}_c^{-1} \left\{ -\boldsymbol{\omega}_m \times \mathbf{I}_c \boldsymbol{\omega}_c - \mathbf{N}_{cmb} \right\}$$

$$\mathbf{I}_c = \alpha_c C_T \begin{bmatrix} 1-f_c & 0 & 0 \\ 0 & 1-f_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{cmb} = k_v (\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_m) + (C_c - A_c) (\hat{\mathbf{z}}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_c) (\hat{\mathbf{z}}_m \times \boldsymbol{\omega}_c)$$

Редукции LLR-наблюдений

- Итерационное решение уравнения для определения времени отражения луча.
- Учёт релятивистской задержки сигнала (Копейкин, 1990).
- Учёт тропосферной задержки (Mendes, Pavlis, 2004).
- Преобразование UTC к динамическому времени TDB, интегрируемому совместно с эфемеридами EPM.
- Преобразование TDB к собственному времени станции.



$$\begin{aligned}
 TDB - TT = & \frac{L_G - L_B}{1 - L_B} (TDB - T_0) + \frac{1 - L_G}{1 - L_B} TDB_0 \\
 & + \frac{1 - L_G}{1 - L_B} \int_{T_0 + TDB_0}^{TDB} \frac{1}{c^2} \left(\frac{v_E^2}{2} + w_{0E} + w_{LE} \right) dt + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E) \\
 & - \frac{1 - L_G}{1 - L_B} \int_{T_0 + TDB_0}^{TDB} \frac{1}{c^4} \left(-\frac{v_E^4}{8} - \frac{3}{2} v_E^2 w_{0E} + 4 \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{w}_{AE} + \frac{1}{2} w_{0E}^2 + \Delta_E \right) dt \\
 & + \frac{1}{c^4} \left(3 w_{0E} + \frac{v_E^2}{2} \right) \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_E)
 \end{aligned}$$

- Преобразование CRS → TRS с моделью IAU2000/2006 и поправками к ПВЗ IERS C04 (+ KEOF).
- Релятивистское преобразование положений станции и отражателя в BCRS.
- Смещение станции из-за твердотельных (Dehant, Matthews, 2000), океанических (FES2004) и полюсных приливов.
- Лунные твердотельные приливы от Земли и Солнца.

Различия с реализацией JPL

	JPL	ИПА РАН
Модель вращения Земли	Модифицированная IAU1980 с дополнительными уточняемыми параметрами, собственный ряд ПВЗ	IAU2000/2006 (SOFA), ряд ПВЗ IERS C04 (но до 1980 – JPL KEOF)
Модель приливных возмущений орбиты	Упрощённая, с 3 фиксированными и 2 уточняемыми параметрами	ERS2010 (до 2 степени)
Модель гравитационного потенциала Луны	Решение, близкое к GL660b; $C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0$ с периодическими приливными возмущениями. C_{32} , S_{32} , C_{33} уточняются.	GL660b, включая C_{21} , S_{21} и S_{22} ; возмущения также учитываются. C_{32} , S_{32} , C_{33} уточняются.

Уточняемые параметры

Начальные параметры (15)

- Положение и скорость Луны ($x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$)
- Начальные углы либрации (ϕ, θ, ψ) и скорости их изменения
- Угловая скорость жидкого ядра (ω_c)

Динамические параметры (9)

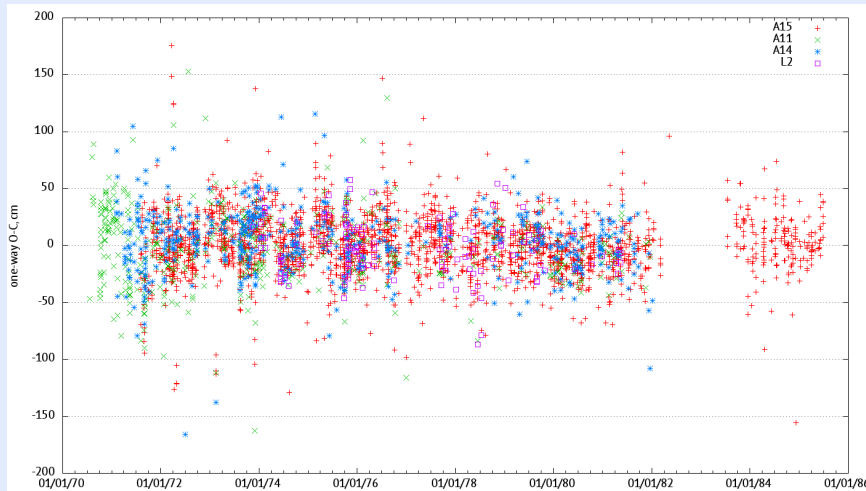
- Сумма GM Земли и Луны
- Параметры инерции $\beta = (C-A)/B, \gamma = (B - A)/C$
- Приливная задержка τ
- Коэффициенты гравитационного потенциала Луны C_{32}, S_{32}, C_{33}
- Коэффициент сжатия жидкого ядра f_c , коэффициент трения K_v/C

Редукционные параметры (72)

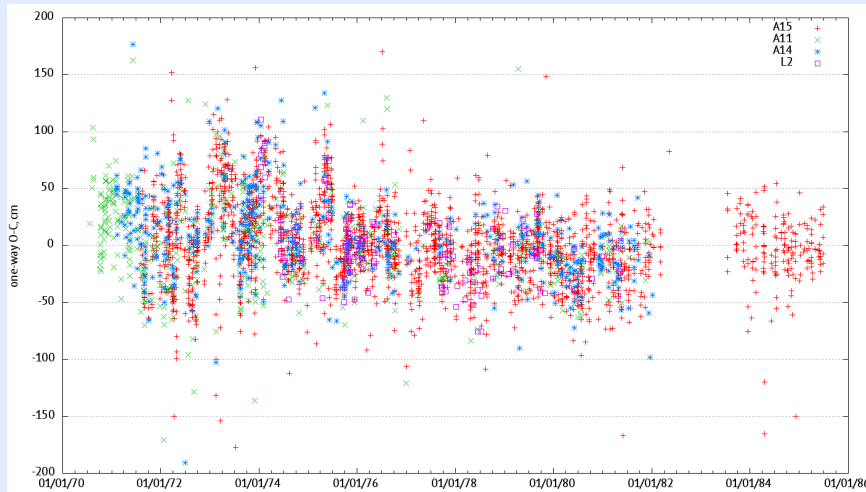
- Положения 5 отражателей и 7 станций
- Скорости станций CERGA и Apache/McDonald/MLRS1/MLRS2
- h_2 Луны
- Амплитуды немоделируемых колебаний ψ : $\cos l', \cos(2l-2D), \cos(2F-2l)$
- Сдвиги (5 для Apache, 7 для CERGA, 8 для Haleakala, 6 для McDonald)

Непригодность IERS C04 для LLR ранних лет

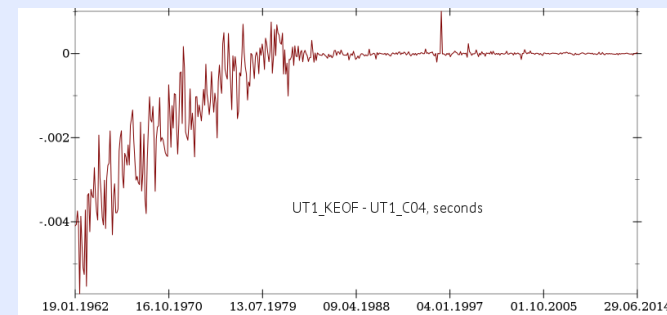
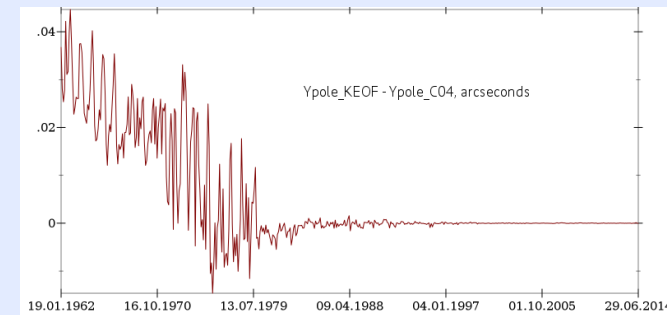
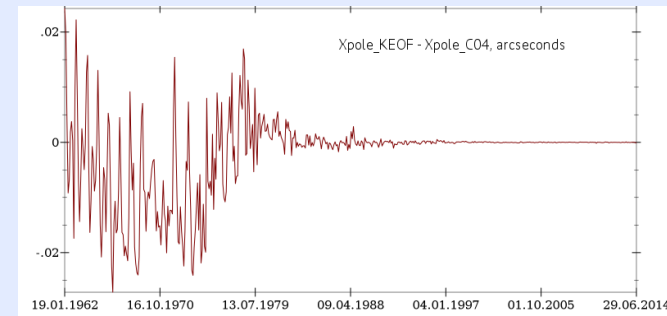
О-С для наблюдений McDonald (1970-1985):



JPL KEOF
wrms = 22 см



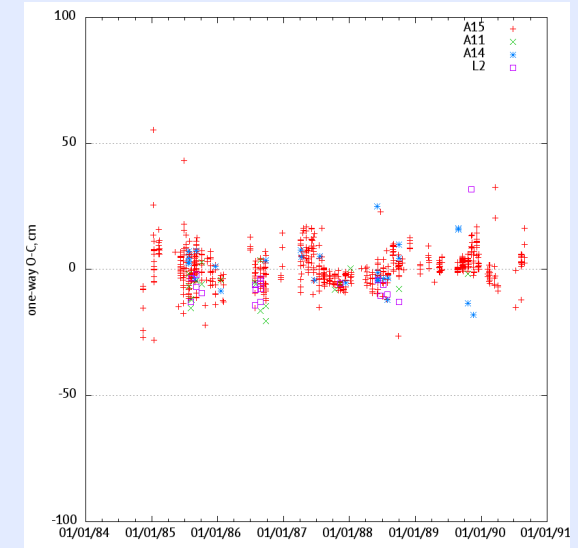
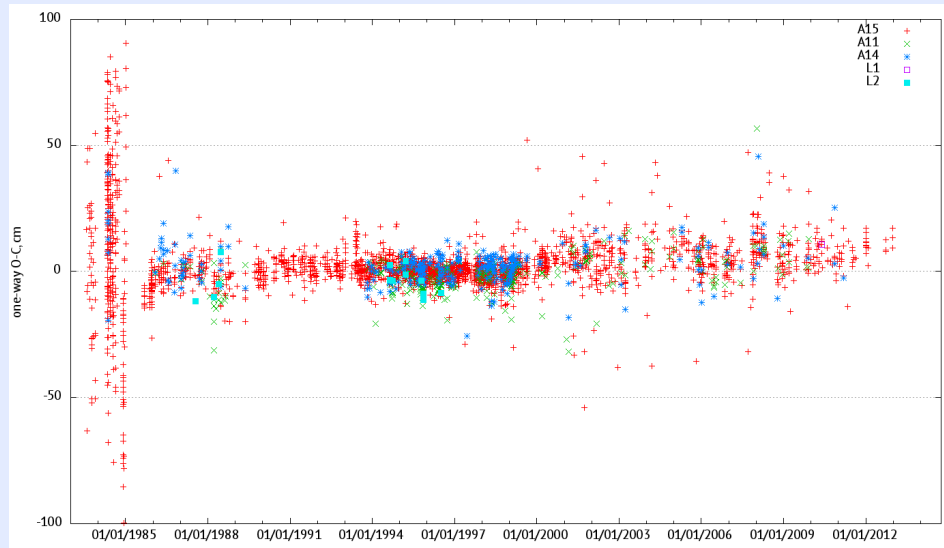
IER S C04
wrms = 33 см



JPL KEOF vs IERS C04,
1962-2014

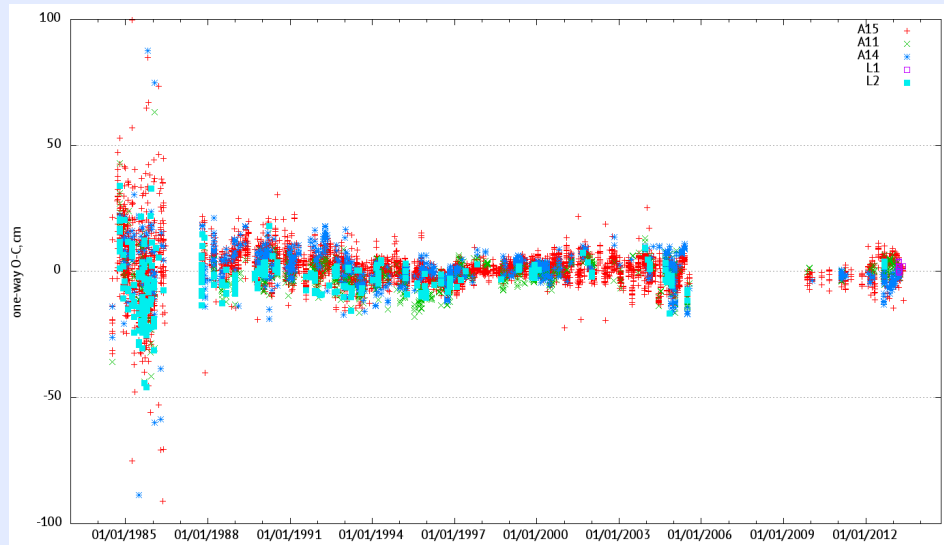
Остаточные O-C MLRS, CERGA, Haleakala

MLRS

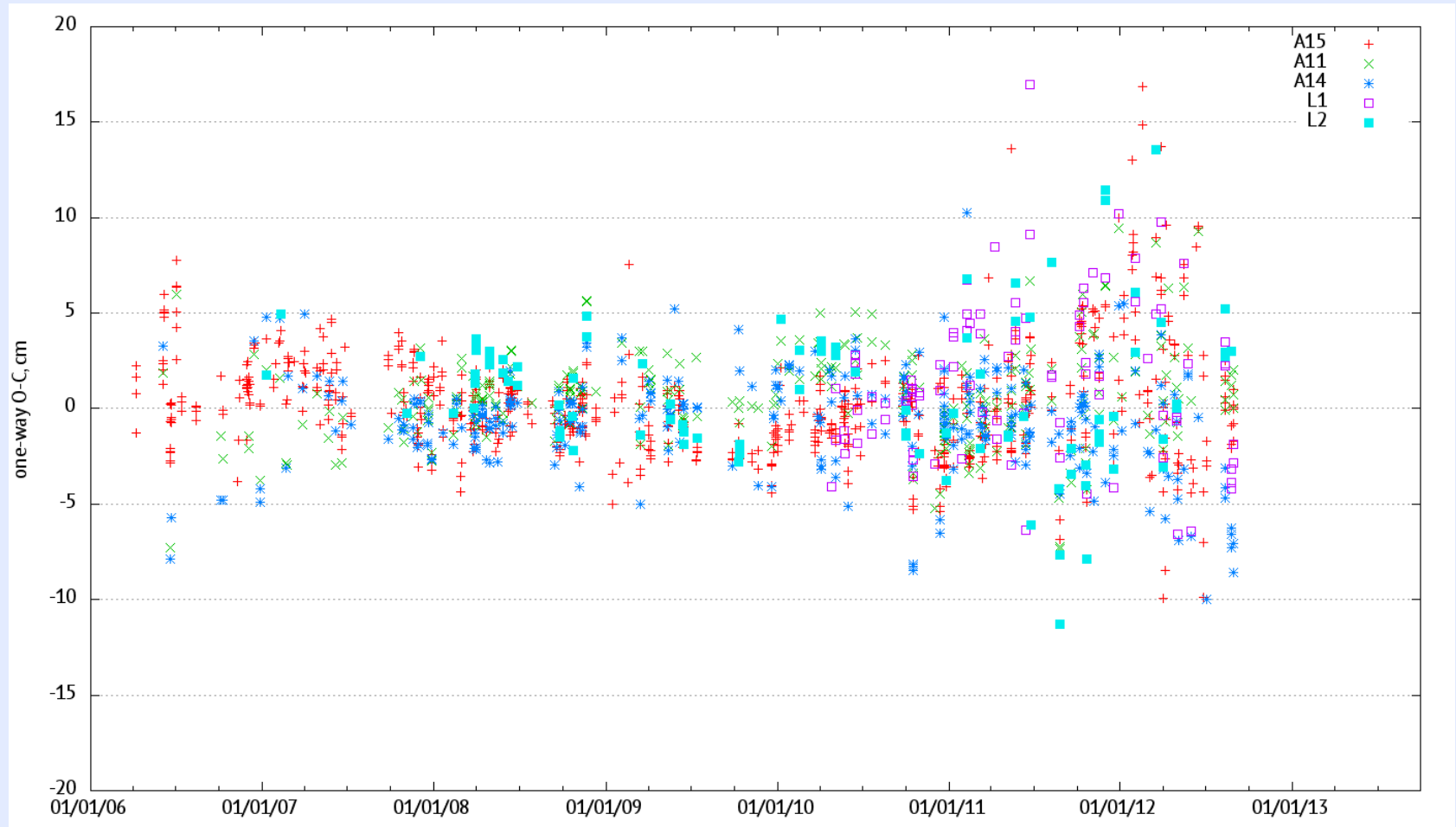


Haleakala

CERGA



Остаточные разности Apache



Статистика представления наблюдений

Станция	Период	Норм. точек	использовано	отброшено	One-way wrms, см
McDonald	1970-1985	3604	3545	59	22.1
MLRS1	1983-1988	631	580	51	8.2
MLRS2	1988-2013	3653	3197	456	3.6
Haleakala	1984-1990	770	750	20	5.9
Cerga (Ruby)	1984-1986	1188	1109	79	17.4
Cerga (YAG)	1987-2005	8324	8271	53	3.2
Cerga (MeO)	2009-2013	654	645	9	3.7
Matera	2003-2013	83	68	15	13.9
Apache	2006-2012	1573	1557	16	2.1

Нормальные точки:

<http://polac.obspm.fr/llrdatae.html>, http://physics.ucsd.edu/~tmurphy/apollo/norm_pts.html

Дальнейшее развитие

- Обработка свежих наблюдений.
- Уточнение скорости Apache отдельно от McDonald.
- Исследование влияния моделей тропосферы и океанической нагрузки на представление наблюдений.
- Исследование немоделируемого векового изменения эксцентриситета Луны (extra de/dt) в свете модели приливных возмущений IERS2010.
- Исследование причин расхождений решений GRAIL и EPM LLR в C22, C23, S32, S33.
- Улучшение модели лунных твердотельных приливов (Williams, 2014).



Спасибо за внимание