ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ВИНЕРА – ЛИУВИЛЛЯ К АНАЛИЗУ ВОЗМУЩАЮШИХ ФУНКЦИЙ АТМОСФЕРЫ И НАБЛЮДАЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА

Цуркис И.Я. (ИФЗ РАН),
Кучай М.С. (ГС РАН), Рыбин А.А.(ИФЗ РАН),

Ур-ние Лиувилля:

$$\left(1-i/2Q\right)\dot{x}-i\omega x = f.$$

f – комплесная нагрузка:

$$f = f_1 + i\,f_2 = \frac{1}{\Omega\cdot C}\left(M_1 + i\,M_2\right).$$

Решение:

$$x(t) = x(0)\exp\left(\omega'\left(i-1/2Q\right)t\right)+$$

$$+\frac{1+i/2Q}{\beta}\int_0^t f(\tau)\exp\left(\omega'\left(i-1/2Q\right)(t-\tau)\right)d\tau,$$

где

$$\beta = 1+\frac{1}{4Q^2},\ \omega' = \frac{\omega}{\beta}\ .$$

Модель Колмогорова:

$$\mathrm{M}f(t)=0, \mathrm{M}f(t_1)\,\overline{f(t_2)}=a\delta(t_1-t_2),$$

где a – интенсивность белого шума.

$x(t)$ – решение уравнения Лиувилля–

нормальный марковский процесс!! (т. Дуба).

При $Q=\infty$ уравнение Лиувилля – это прямое обобщение

простейшего стохастического уравнения Винера

$$\dot{x}=f(t),$$

где $f(t)$ – одномерный белый шум.

что есть марковский процесс?

$$p(z_3 \mid z_2, z_1) = p(z_3 \mid z_2), \quad z_n = z(t_n), \; t_1 < t_2 < t_3.$$

$$\Downarrow$$

$$p(z_1, z_2, .., z_N \mid z_0) = p(z_N \mid z_{N-1}) \cdot p(z_{N-1} \mid z_{N-2}) \cdot \ldots \cdot p(z_1 \mid z_0),$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУРЬЕ

Спектр Фурье: $X_F(\sigma) = \int\limits_0^T x(t)e^{-i\sigma t}\,dt$.

$\mathrm{M}\left|X_F(\sigma)\right|^2$ максимально при $\sigma = \omega'$:

$$\mathrm{M}\,|X_F(\omega')|^2 = 4a\,\frac{Q^2}{\omega'^2}\left(T + 2\,\frac{Q}{\omega'}\left(\exp(-\frac{\omega'}{2Q}T) - 1\right)\right).$$

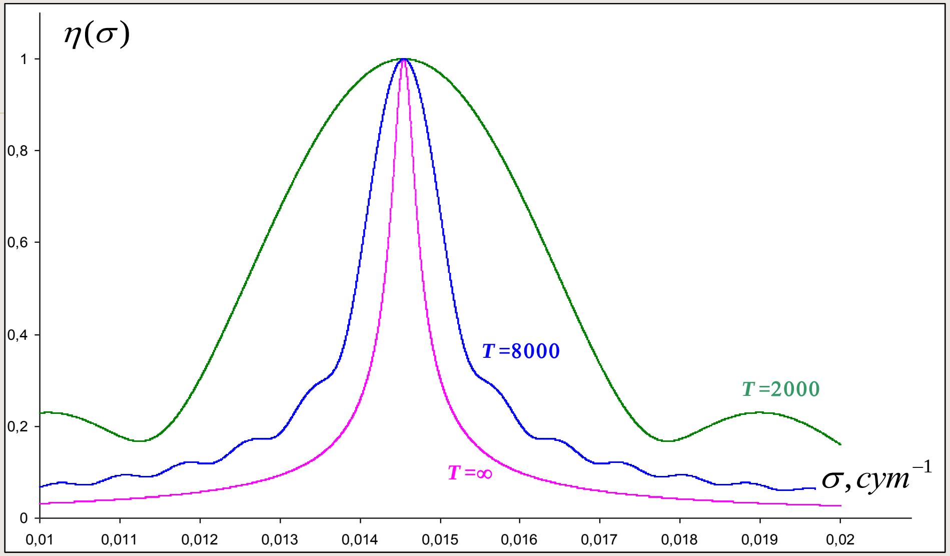
При $T \to \infty$:

$$\sqrt{\mathrm{M}\,|X_F(\omega')|^2} \approx \frac{2Q}{\omega'}\sqrt{aT} \; .$$

При $Q \to \infty$:

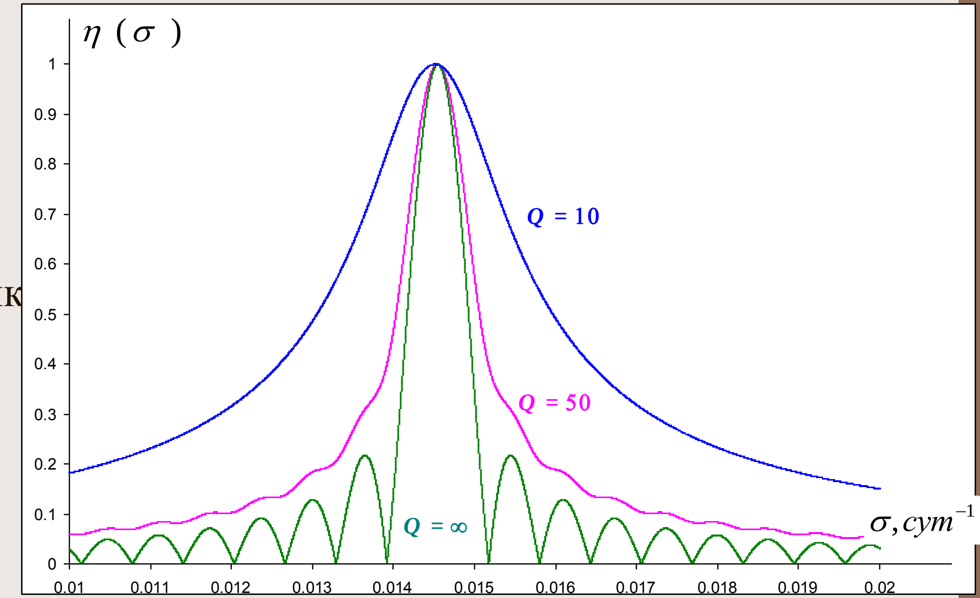
$$\sqrt{\mathrm{M}\,|X_F(\omega')|^2} = T\,\sqrt{\frac{2Q\,a}{\omega'}} \; .$$

ЧАНДЛЕРОВСКИЙ МАКСИМУМ



Ордината – отношение

$$\eta(\sigma) = \sqrt{\frac{\mathrm{M}\,|\,X_F(\sigma)\,|^2}{\mathrm{M}\,|\,X_F(\omega')\,|^2}}\,.$$



Максимум на частоте $\sigma = \omega'$

тем резче, чем больше T и Q. Чандлеровское движение полюса - отклик на случайную составляющую нагрузки .

$g(t)=\exp(i\lambda t)$

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ

Пусть $g(t)$ – регулярная мода :

$$g(t)=\exp(i\lambda t)\,;$$

$G_F(\sigma)$ – её Фурье-образ:

$$G_F(\sigma)=\frac{\exp(i(\lambda-\sigma)T)-1}{i(\lambda-\sigma)}.$$

Модуль $|G_F(\sigma)|$ достигает максимума при $\lambda=\sigma$:

$$G_F(\lambda)=T.$$

Если $\lambda\approx\omega$, то

$$\text{"сигнал/шум"}\sim|G_F(\lambda)|\Big/\sqrt{\mathrm{M}|X_F(\omega)|^2}\,.$$

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ (окончание)

При $T \to \infty$:

$$|G_F(\lambda)|/\sqrt{\mathrm{M}\,|x(\omega')|^2} \sim \frac{\omega'}{Q}(T/a)^{1/2}.$$

При $Q \to \infty$:

$$|G_F(\lambda)|/\sqrt{\mathrm{M}\,|x(\omega')|^2} \sim \left(\frac{\omega}{aQ}\right)^{1/2}.$$

Если $Q >> 1$, то для идентификации близчандлеровской моды необходим другой математический аппарат.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВИНЕРА – ЛИУВИЛЛЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

$$\langle z, w\rangle = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1}(z_{n+1} - e^{i\omega\Delta} z_n)(\overline{w}_{n+1} - e^{-i\omega\Delta}\,\overline{w}_n),$$

где

$$z_n = z(n\Delta), \quad w_n = w(n\Delta), \quad N = T/\Delta.$$

Ядро скалярного произведения Винера – Лиувилля - чандлеровская гармоника:

$$\langle e^{i\omega t}, w\rangle = \langle w, e^{i\omega t}\rangle = 0.$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВИНЕРА – ЛИУВИЛЛЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

При $\Delta \to 0$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\langle z,w\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d}{dt}e^{-i\omega t}z(t)\cdot\frac{d}{dt}e^{i\omega t}\,\overline{w(t)}\,dt\,.$$

Если $\omega=0$, то справа – произведение Соболева.

Если $x(t)$ – процесс Винера – Лиувилля, то

$$e^{i\omega t}x(n\Delta)=\mathrm{M}\big(x(n+1)\Delta\big),$$

и разность $\left(x_{n+1}-e^{i\omega t}x_n\right)$ – это приращение функции относительно среднего значения. В этом случае

$$\mathrm{M}\,\langle x,x\rangle=a,$$

где a – коэффициент диффузии.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВИНЕРА – ЛИУВИЛЛЯ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Если $x(t)$ – процесс Винера – Лиувилля ($Q=\infty$), то

$$e^{i\omega t}x(n\Delta)=\mathrm{M}\big(x(n+1)\Delta\big),$$

и разность $\left(x_{n+1}-e^{i\omega t}x_n\right)$ – это приращение функции относительно среднего значения. В этом случае

$$\mathrm{M}\,\langle x,x\rangle=a,$$

где a – коэффициент диффузии. И ещё:

$$\mathrm{D}\langle x,w\rangle=\mathrm{M}\left|\langle x,w\rangle\right|^2=\frac{a\Delta}{T}\langle w,w\rangle,$$

где $w(t)$ – произвольная детерминированная ф – я.

Если $Q<\infty$, то $\dfrac{\mathrm{M}\left|\langle x,w\rangle\right|^2}{\langle w,w\rangle}\to 0$ равномерно по Q.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВИНЕРА – ЛИУВИЛЛЯ (ОКОНЧАНИЕ)

На больших временах нормальный марковский процесс и любая детерминированная ф-я ортогональны в смысле V.-L.!!

Нормированная гармоника: если $\sigma \neq \omega + 2\pi\, m / \Delta$, где $m = 0, \pm 1, ..,$ то

$$h_\sigma = h(\sigma, t) = e^{i\sigma t} / \sqrt{\langle e^{i\sigma t}, e^{i\sigma t} \rangle} = \frac{e^{i\sigma t}\sqrt{\Delta}}{2\,|\sin\big((\sigma - \omega)\Delta / 2\big)|};$$

если $\sigma = \omega$, то

$$h_\omega = te^{i\sigma t} / \sqrt{\langle te^{i\sigma t}, te^{i\sigma t} \rangle} = \frac{t}{\sqrt{\Delta}} e^{i\omega t}.$$

Важно, что

$$\lim_{\sigma \to \omega} \left| \langle z, h_\sigma \rangle \right| = \left| \langle z, h_\omega \rangle \right| \quad \forall z(t).$$

СПЕКТР ВИНЕРА - ЛИУВИЛЛЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ :

$$Z_{V.-L}(\sigma)=\sqrt{\frac{T}{\Delta}}\langle z,h_{\sigma}\rangle.$$

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ:

$$z(t)=\frac{\sqrt{T\Delta}}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta}Z_{V.-L.}(\sigma+\omega)h_{\sigma+\omega}(t)\,d\sigma \quad + \quad \frac{1}{2}\big(z(0)+\exp(-i\omega T)z(T)\big)\exp(i\omega t).$$

ТОЖДЕСТВО ПАРСЕВАЛЯ:

$$\langle z,z\rangle=\frac{\Delta}{2\pi}\int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta}|Z_{V.-L.}|^2\,d\sigma\,.$$

ДРУГИЕ СВОЙСТВА:

1. Периодичность :

$$Z_{V.-L.}(\sigma + 2\pi / \Delta) = Z_{V.-L.}(\sigma).$$

2. Амплитудный спектр $\left| Z_{V.-L.}(\sigma) \right|$ непрерывен при всех знач. σ

3. Если $x(t)$ процесс Винера - Лиувилля,

$$\mathrm{M}\left| X_{V.-L.} \right|^2 = a \ \ \forall \sigma.$$

4. Если $Q < \infty$, то

$$\mathrm{M} \, | \, X_{V.-L.}(\sigma) \, |^2 = \frac{2aQ}{\omega' \Delta} \mathrm{Re}\Big(1 - k_0 e^{i(\omega' - \omega)\Delta} -$$

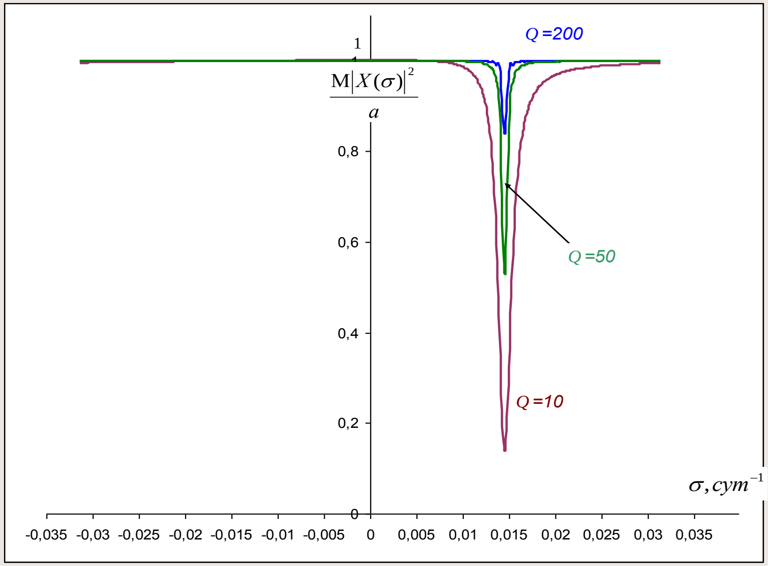
$$- \frac{1}{N} e^{i(\omega - \sigma)\Delta} \left(\frac{k_0 e^{i(\omega' - \omega)\Delta} - 1}{k_0 e^{i(\omega' - \sigma)\Delta} - 1} \right)^2 (k_0^N e^{i(\omega' - \sigma)T} - N k_0 e^{i(\omega' - \sigma)\Delta} + (N - 1))\Big),$$

где $k_0 = e^{-\frac{\omega' \Delta}{2Q}}$ – параметр, близкий к 1.

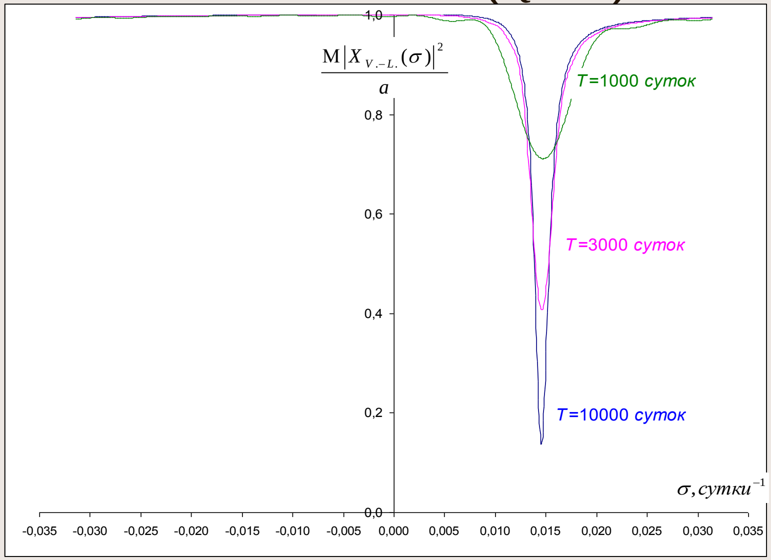
ЗАВИСИМОСТЬ $\mathrm{M}\,|X_{V.-L.}(\sigma)|^2$ ОТ Q И T

(при знач. $\Delta = 100$ *суток*)

Зависимость от Q $(T=10000\ \textit{суток})$



Зависимость от T $(Q=10)$



Из формулы для $\mathrm{M}\left|X_{V.-L.}(\sigma)\right|^2$:

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{M}\left|X_{V.-L.}(\omega)\right|^2 = 0 \quad \forall Q.$$

Поэтому при $\sigma = \omega$ на обоих графиках - впадина. Она тем уже, чем больше Q, и тем глубже, чем больше T.

При всех σ справедливо неравенство $\mathrm{M}\left|X_{V.-L.}(\sigma)\right|^2 \le a$.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕГУЛЯРНОЙ МОДЫ I

Пусть $f(t)$ – регулярная мода в нагрузке

$$f(t) = F\exp(i\lambda t),$$

$g(t)$ – "ответ":

$$g(t) = A\exp(i\lambda t),$$

где

$$A = \frac{F}{\sqrt{(\lambda-\omega')^2 + \dfrac{\omega'^2}{4Q^2}}};$$

$|G_{V.-L.}(\sigma)|$ – амплитудный спектр Винера - Лиувилля:

$$|G_{V.-L.}(\sigma)| = \frac{2A}{\sqrt{T}}\left|\frac{\sin\dfrac{\lambda-\omega}{2}\Delta\cdot\sin\dfrac{\lambda-\sigma}{2}T}{\sin\dfrac{\lambda-\sigma}{2}\Delta}\right|.$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ II

$|G_{V.-L.}(\sigma)|$ максимален при $\sigma = \lambda$:

$$|G_{V.=L.}(\lambda)| = \frac{2A\sqrt{T}}{\Delta}.$$

Амплитуда спектр. шума ~ $\sqrt{\mathrm{M}|X(\sigma)|^2} \Rightarrow$ "сигнал/шум" $\approx |G_{V.-L.}(\lambda)| \Big/ \sqrt{\mathrm{M}|X(\sigma)|^2}$.

Иначе:

$$|G_{V.-L.}(\lambda)| \Big/ \sqrt{\mathrm{M}|X(\sigma)|^2} = 2\frac{F}{\sqrt{a}\,\Delta}\left|\sin\frac{(\lambda-\omega)\Delta}{2}\right|\sqrt{\frac{T}{(\lambda-\omega')^2+\omega'^2/4Q^2}}.$$

Если $\sigma \neq \omega$, то

$$\lim_{T\to\infty}|G_{V.-L.}(\lambda)| \Big/ \sqrt{\mathrm{M}|X(\sigma)|^2} = \infty.$$

Если $Q = \infty$, условие $\sigma \neq \omega$ становится необязательным.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ III

В этом случае

$$"\textit{сигнал/шум}" = |G_{V.-L.}(\lambda)| \Big/ \sqrt{\mathrm{M}|X(\sigma)|^2} = F \left| \frac{\sin\dfrac{(\lambda-\omega)\Delta}{2}}{\dfrac{(\lambda-\omega)\Delta}{2}} \right| \sqrt{\frac{T}{a}}.$$

Мы можем "просмотреть" рег. моду с частотой $\sigma \in \Lambda \subset [-\pi/\Delta,\ \pi/\Delta]$, только если

$$F < \frac{\Delta}{2\sqrt{T}} \max_{\sigma\in\Lambda} \frac{\sqrt{a\cdot\left((\sigma-\omega')^2 + \omega'^2/4Q^2\right)}}{\sin\dfrac{|\sigma-\omega|\Delta}{2}}$$

Если $Q = \infty$, это условие выглядит проще:

$$F < \sqrt{\frac{a}{T}} \max_{\sigma\in\Lambda} \left| \frac{\sin\dfrac{(\sigma-\omega)\Delta}{2}}{\dfrac{(\sigma-\omega)\Delta}{2}} \right|^{-1}.$$

ВКЛАД РЕГУЛЯРНОЙ МОДЫ

Постановка задачи: пусть рег. сост. нагрузки- сумма гармоник с частотами $\sigma_1,...,\sigma_q$. Тогда

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \sum_{k=1}^{q} \mu_k h_k, \qquad (1)$$

где $\tilde{x}(t)$ – случ.процесс с нулевым средним, h_k – нормированные гармоники с частотами $\sigma_k, k = 1,...,q$. Требуется найти коэффициенты μ_k.

Решение: обозначим через $\mathbf{V}$ матрицу Грамма - Шмидта : $V_{mk} = \langle h_m, h_k \rangle; m, k = 1,...,q,$ через $\mathbf{U}$ обратную к ней м - цу : $\mathbf{U} = \mathbf{V}^{-1}$. Функции $g_m = \sum_{k=1}^{q} U_{mk} h_k, m = 1,...,q$ образуют дуальный базис :

$$\langle g_m, h_k \rangle = \delta_{mk}.$$

Умножим (1) на g_m :

$$\mu_m = \langle x, g_m \rangle - \langle \tilde{x}, g_m \rangle.$$

ВКЛАД II

Расчётная формула

$$\mu_m = \langle x, g_m \rangle = \sum_{k=1}^{q} U_{mk} \langle x, h_k \rangle \qquad (2)$$

даёт ошибку

$$\delta\mu_m \sim \sqrt{\mathrm{M}\left|\langle \tilde{x}, g_m \rangle\right|^2}.$$

При $T \to \infty$ величина $\delta\mu_m \sim 1/\sqrt{T}$ $\Rightarrow$ оценка (2) состоятельна. Модус частотой σ_m наз. уединённой, или изолированной, если при $l \neq m$ эл-ты м-цы Грамма $|V_{ml}| << 1$. В этом случае

$$\mathrm{M}\left|\langle \tilde{x}, g_m \rangle\right|^2 = \mathrm{M}\left|\langle \tilde{x}, h_m \rangle\right|^2 + O(\beta^2) + O(\beta / Q),$$

где $\beta = \max_{l \neq m} |V_{ml}|$, след-но,

$$\delta\mu_m \sim \sqrt{\mathrm{M}\left|\langle \tilde{x}, h_m \rangle\right|^2} = \sqrt{\frac{\left|\tilde{X}(\sigma_m)\right|^2}{N}} \leq \sqrt{a / N}.$$

ВКЛАД РЕГ. МОДЫ III

Амплитуда моды с частотой σ_m : в наблюдаемом движении полюса :

$$A_m = |\mu_m||h_m| = \frac{|\mu_m|\sqrt{\Delta}}{2\left|\sin\left(\frac{\sigma_m - \omega}{2}\Delta\right)\right|};$$

в нагрузке:

$$F_m = A_m\sqrt{(\sigma_m - \omega')^2 + \frac{\omega'^2}{4Q^2}}.$$

Если $\frac{\omega'^2}{4Q^2} << (\sigma_m - \omega')^2,$

$$F_m = A_m|\sigma_m - \omega|.$$

Если помимо этого $(\sigma_m - \omega)\Delta << 1,$ то :

$$\Downarrow$$

См. следующий слайд

ВКЛАД РЕГУЛЯРНОЙ МОДЫ (ОКОНЧАНИЕ)

$$\Downarrow$$

$$F_m = |\mu_m| / \sqrt{\Delta}.$$

Допустим, все предыдущие условия соболюдены, и, плюс к этому, мода с частотой σ_m изолирована. Тогда

$$\delta F_m \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sqrt{\mathrm{M} \left| \langle \tilde{x}, h_m \rangle \right|^2} < \sqrt{a/T}$$

и

$$\delta A_m \sim \frac{\delta F_m}{|\sigma_m - \omega|} < \sqrt{\frac{a}{T}} \frac{1}{|\sigma_m - \omega|}.$$

ВОЗМУЩАЮЩИЕ ФУНКЦИИ АТМОСФЕРЫ

Возмущающие функции [Barnes et al., 1983]:

$$M_1 = \frac{C}{C-A}\omega\left(\chi_2 - \frac{\dot{\chi}_1}{\Omega}\right); \qquad M_2 = \frac{C}{C-A}\omega\left(-\chi_1 - \frac{\dot{\chi}_2}{\Omega}\right),$$

$$A = 7.02\times 10^{37}\ кг\cdot м^2;\ C = 7.04\times 10^{37}\ кг\cdot м^2;\ \Omega = 1.0\ сут^{-1}.$$

$$\chi = \chi_1 + i\chi_2 = \chi^P + \chi^W, \text{ где}$$

$$\chi^p = \chi_1^p + i\chi_2^p = -\frac{\Omega R^4}{g}\int p\sin\varphi\cos^2\varphi\exp(i\lambda)\,d\lambda\,d\varphi$$ (IB: $p \to p\text{-}\rho\, g\, \delta h$);

$$\chi^w = \chi_1^w + i\chi_2^w = -\frac{R^3}{g}\iint(u_1\sin\varphi + iu_2\cos\varphi)\exp(i\lambda)\,d\lambda\,d\varphi\,dp\,.$$

АТМОСФЕРНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА

Атмосферная нагрузка через возмущающие функции:

$$f = -\frac{1}{C-A}\frac{\omega}{\Omega}\left(i\chi + \frac{\dot{\chi}}{\Omega}\right).$$

Решение ур-ния Лиувилля в терминах возмущающих функций (вклад атмосферы в движение полюса):

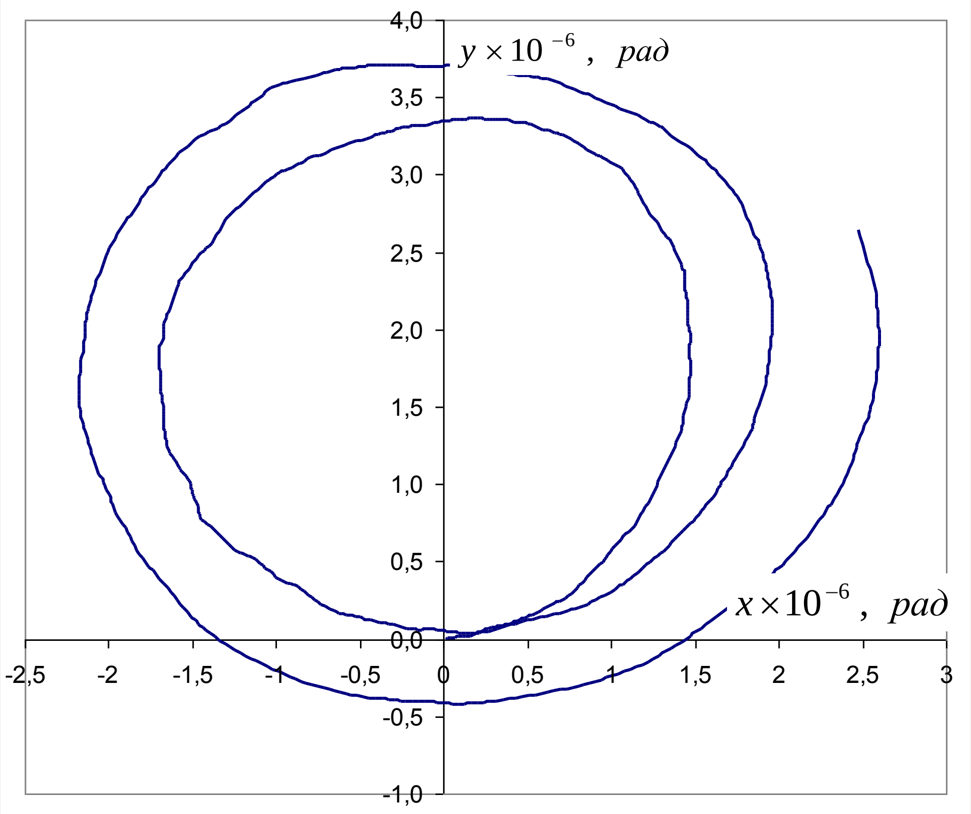
$$x(t) = x(0)e^{\omega'\left(i-1/2Q\right)t} -$$

$$-\frac{\omega}{(C-A)\Omega}\left(\frac{1}{\Omega}(\chi(t)-\chi(0)e^{\omega'(i-\frac{1}{2Q})t}) + \left(i+\frac{\omega}{\Omega}(i-\frac{1}{2Q})\right)\int_0^t \chi(\tau)e^{\omega'(i-\frac{1}{2Q})(t-\tau)}d\tau\right). \qquad (3)$$

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е: Атмосферная составляющая движения полюса – рещение (3) ур-ния Лиувилля при $x(0)=0$ и $Q=\infty$:

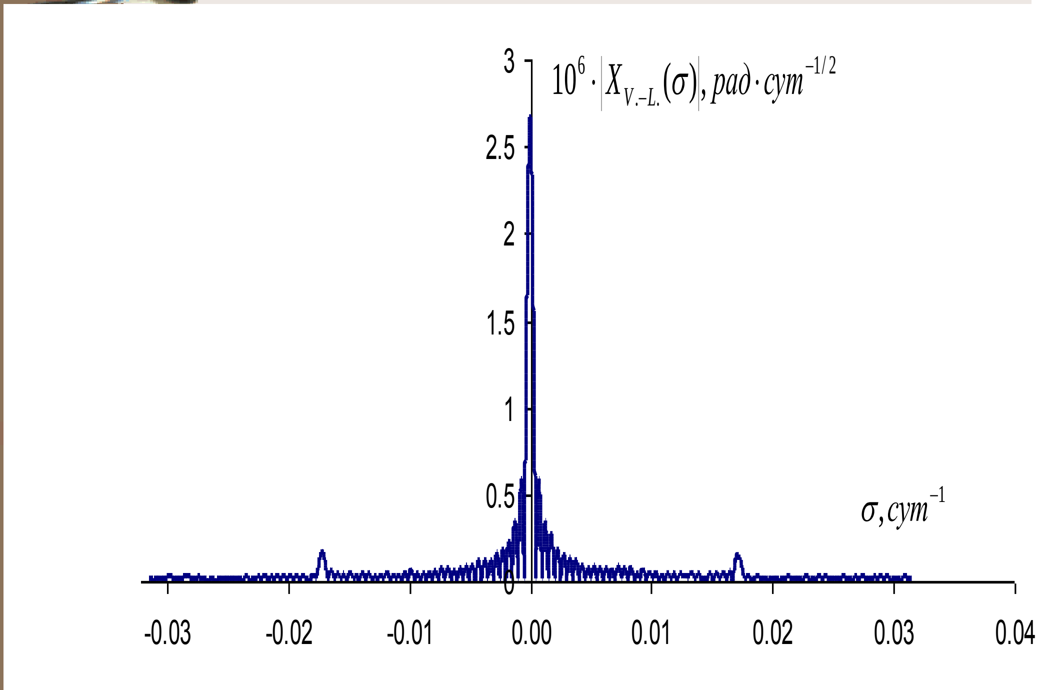
$$x(t) = -\frac{\omega}{(C-A)\Omega}\left(\frac{1}{\Omega}(\chi(t)-\chi(0)e^{i\omega t}) + i\left(1+\frac{\omega}{\Omega}\right)\int_0^t \chi(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau\right).$$

БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА $(\chi \to \chi^P)$

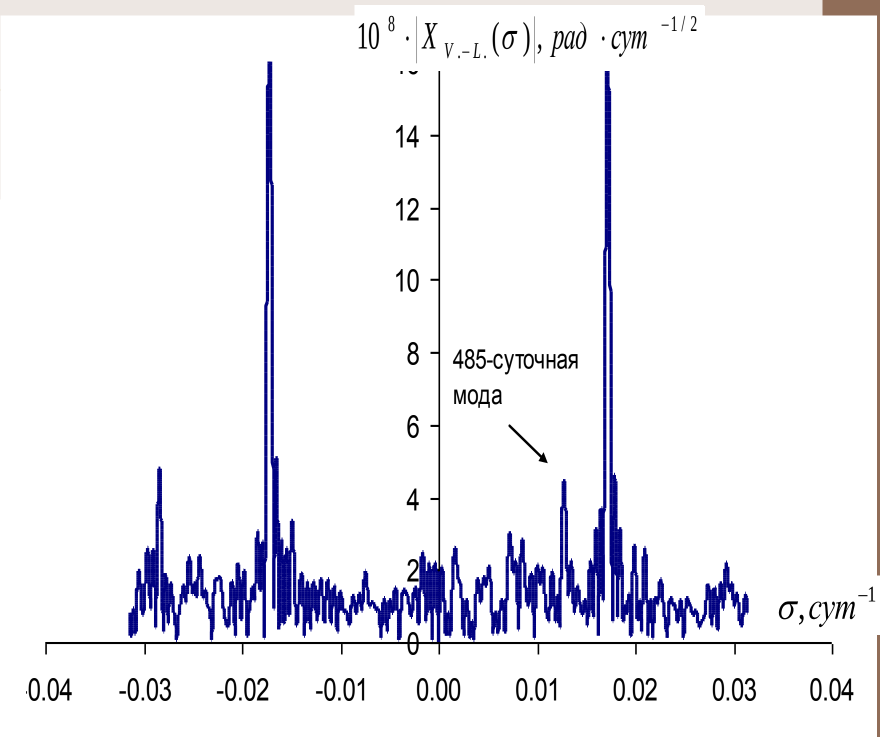


БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА ЗА 1000 СУТОК, НАЧИНАЯ С 01.01.1980 (ДАННЫЕ NON-IB)

БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА



Амплитудный спектр В.-Л. барической составляющей движения полюса (по данным IB за период с 01.01.1980 по 20.06.2014).

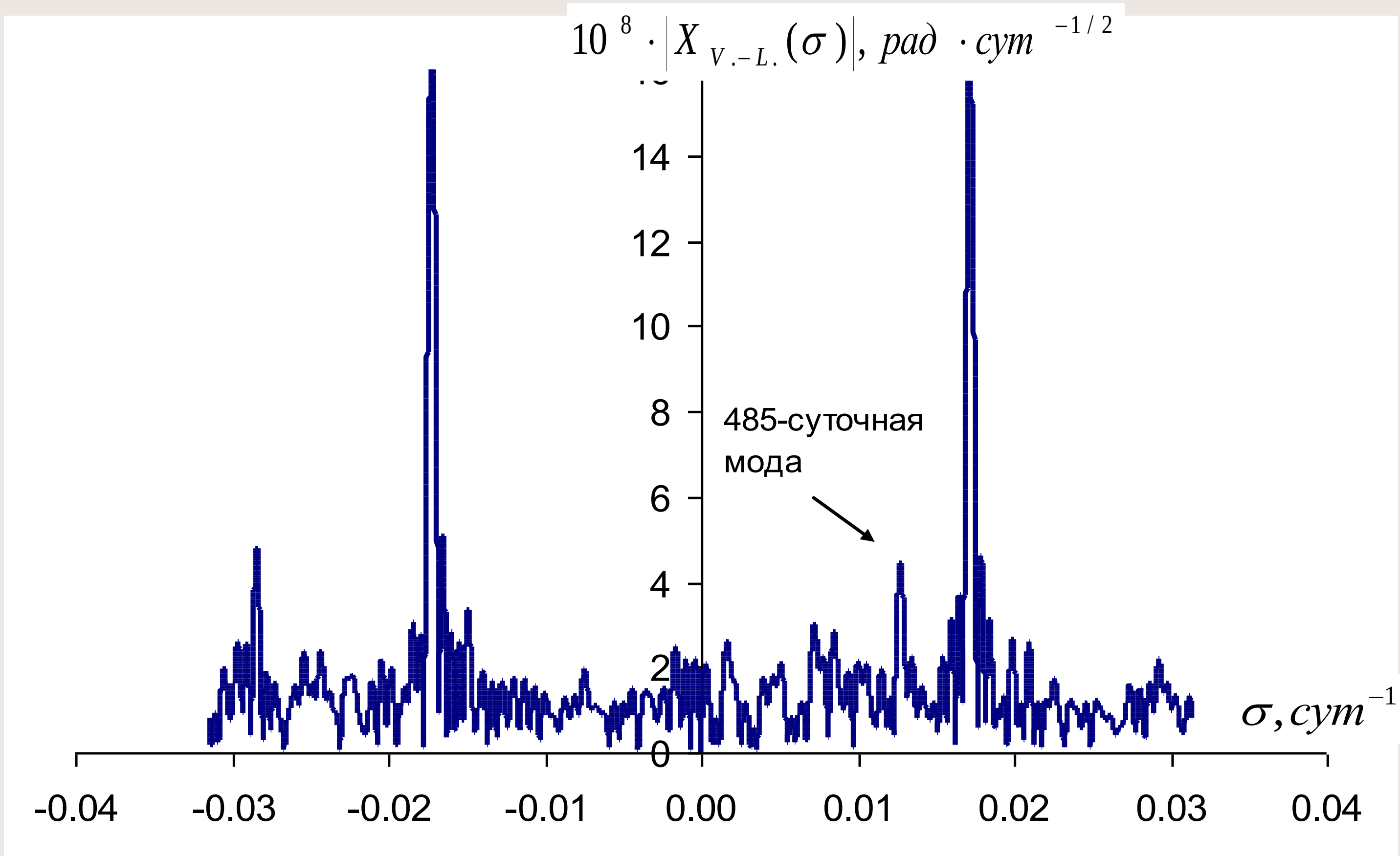


Спектр барической составляющей с исключённой константой:

$$x \to x - \langle x, h_1 \rangle h_1, \text{ где } h_1 = \sqrt{\Delta} \Big/ \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \Delta \right)$$

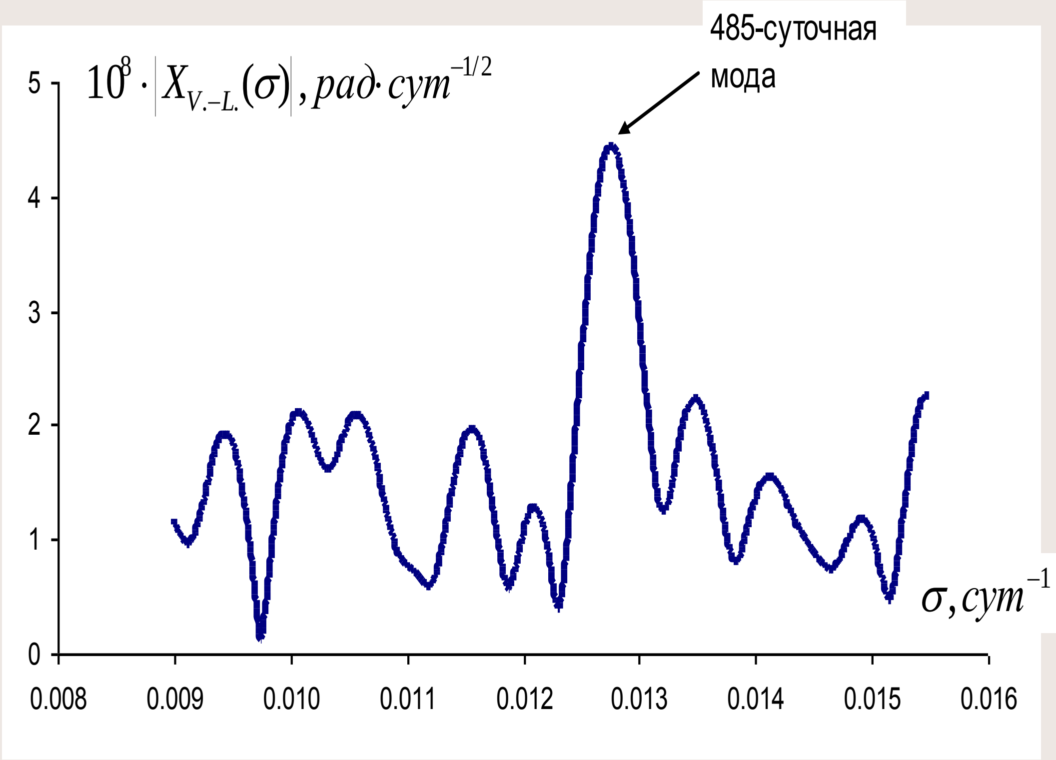
(тонкая структура спектра).

КРУПНЫМ ПЛАНОМ:



БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА (продолжение)

Регулярные частоты: $\sigma_1 = 0$ – основной максимум; $\sigma_2 = 0.0172$ *сутки* $^{-1}$ и $\sigma_3 = = -0.0172$ *сутки* $^{-1}$ – годичные пики; $\sigma_4 = 2\sigma_2$ – сезонная мода; $\sigma_5 = \sigma_{485} = 0.0128$ *сутки* $^{-1}$ – мода с периодом 485 суток, или 16 месяцев.



Фрагмент спектра Винера – Лиувилля, содержащий частоту

$\Leftarrow$

$\omega_{485} = 1.28 \cdot 10^{-2}$ *сутки* $^{-1}$.

БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА

Коэффициенты при нормированных гармониках:

$$|\mu_1| = 2.39\cdot 10^{-7};\quad |\mu_2| = 1.46\cdot 10^{-8};\quad |\mu_3| = 1.52\cdot 10^{-8};\quad |\mu_4| = 4.07\cdot 10^{-9};$$
$$|\mu_5| = 3.94\cdot 10^{-9}\, рад\cdot сутки^{-1/2}.$$

Эту погрешность – одна для всех регулярных мод, т.к. их можно считать изолированными. При вычислении *δμ* пользуемся тем, что коэффициент диффузии для составляющей движения полюса, вычисленный по данным Non-IB, равен

$$a \sim 1.8\cdot 10^{-16}\ рад^2 / сутки$$

[Цуркис и др., 2012]. Результат:

$$\delta\mu \approx 1.2\cdot 10^{-9}\, рад\cdot сутки^{-1/2}$$

БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА

Для 485-суточной моды отношение «сигнал/шум»:

$$"\textit{сигнал/шум}" \sim \delta\mu / \mu_5 \approx 3.5\,.$$

Амплитуда 485 – суточной моды в барической составляющей движения полю

$$A_{485} = (2.2 \pm 0.6) \cdot 10^{-7}\ \textit{рад}\,.$$

.

Амплитуда чандлеровской (случайной) компоненты движения полюса ~

$\approx 1.5 \cdot 10^{-6}$ *рад* - примерно в 7 раз больше. Амплитуды годичных гарм

$A_{+} = (5.6 \pm 0.5) \cdot 10^{-7}$ и $A_{-} = (7.5 \pm 0.6) \cdot 10^{-8}$ *рад*; сезонной - $A_{1/2} = (2.4 \pm 0.7) \cdot 10^{-8}$ *рад*.

ВЫВОД: вклад 16 – месячной моды в барическую составляющую движения полюса в 2.5 – 3 раза меньше доли солнечной компоненты и на порядок больше, чем вклад сезонной моды.

БАРИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЛЮСА

Обозначим через F_{485} и M_{485} амплитуду 485 – суточной моды

соответственно в атмосферной нагрузке и в угловом моменте атмосферы:

$$F_{485} = A_5 \cdot (\omega - \sigma_{485}) = (3.9 \pm 1.2) \cdot 10^{-10}\ \text{сутки}^{-1}; \quad M_{485} = F_{485} \cdot \Omega \cdot C = (3.7 \pm 1.1) \cdot 10^{18}\ н \cdot м.$$

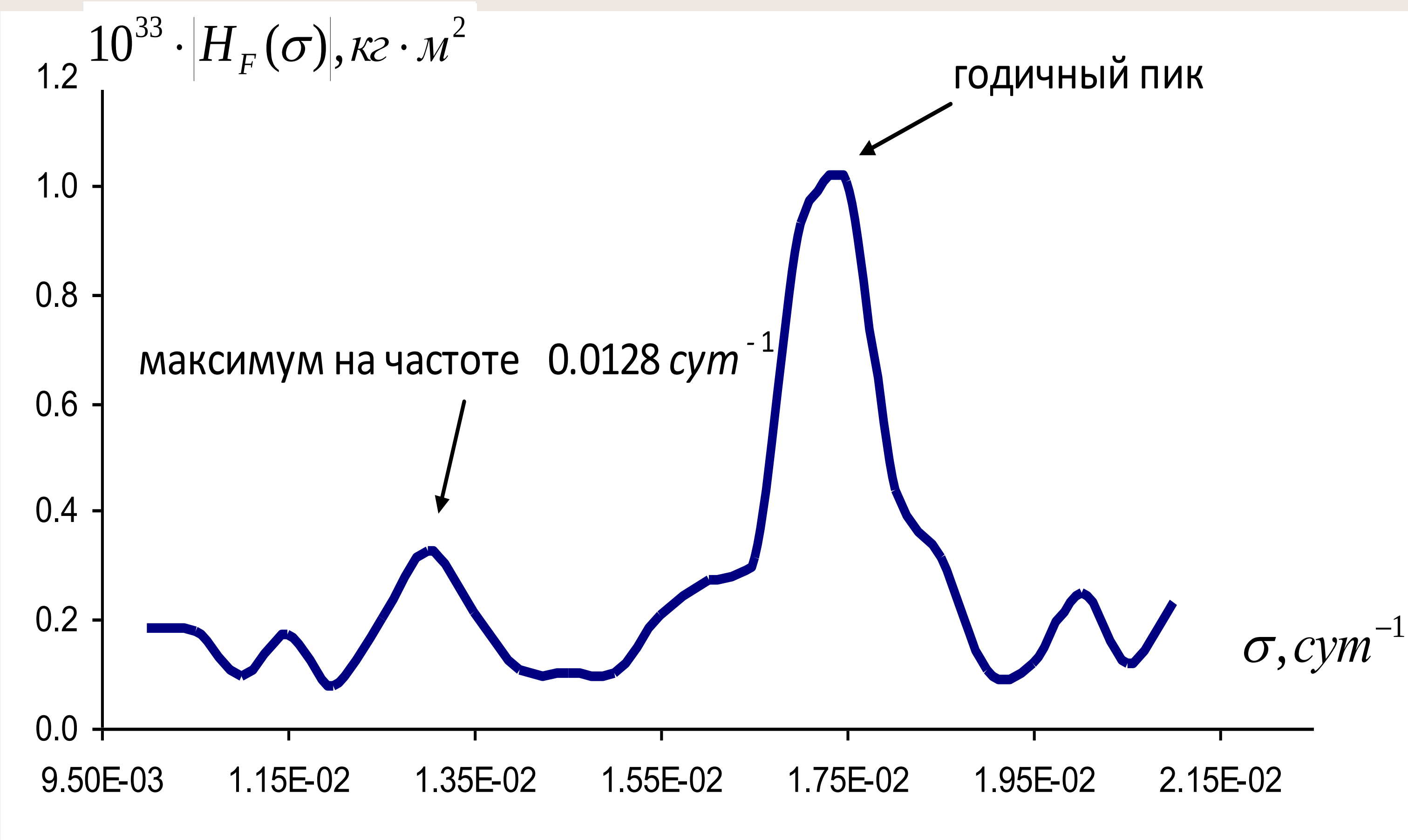
Если в нагрузке есть ещё одна близчандлеровская мода, с периодом в промежутке от 485-суточной до года, то её амплитуда *F*

$$F < \sqrt{\frac{a}{T}} = 1.2 \cdot 10^{-10}\ \text{сутки}^{-1};$$

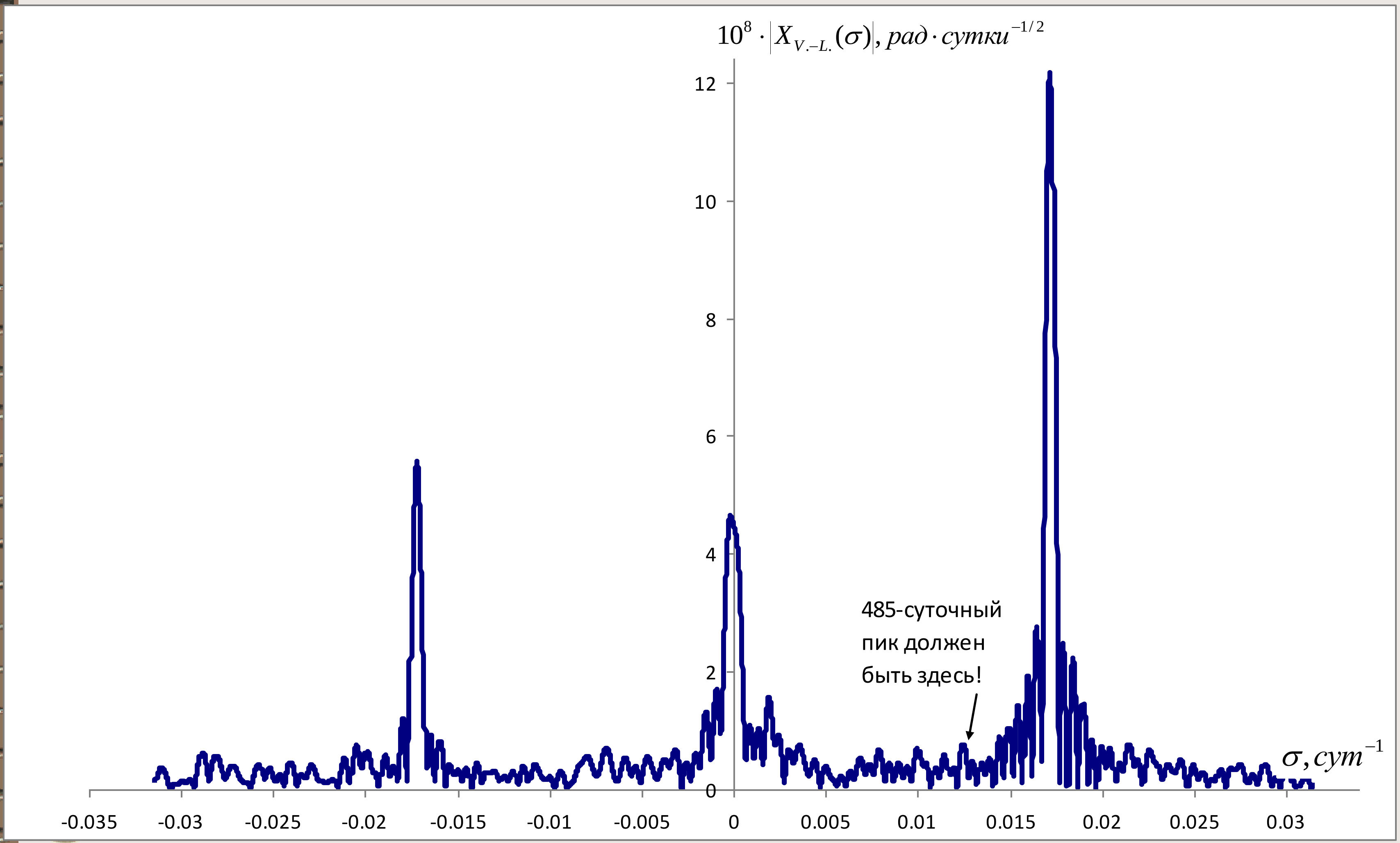
Соответственно, угловой момент

$$M = F \cdot \Omega \cdot C < 1.1 \cdot 10^{18}\ н \cdot м.$$

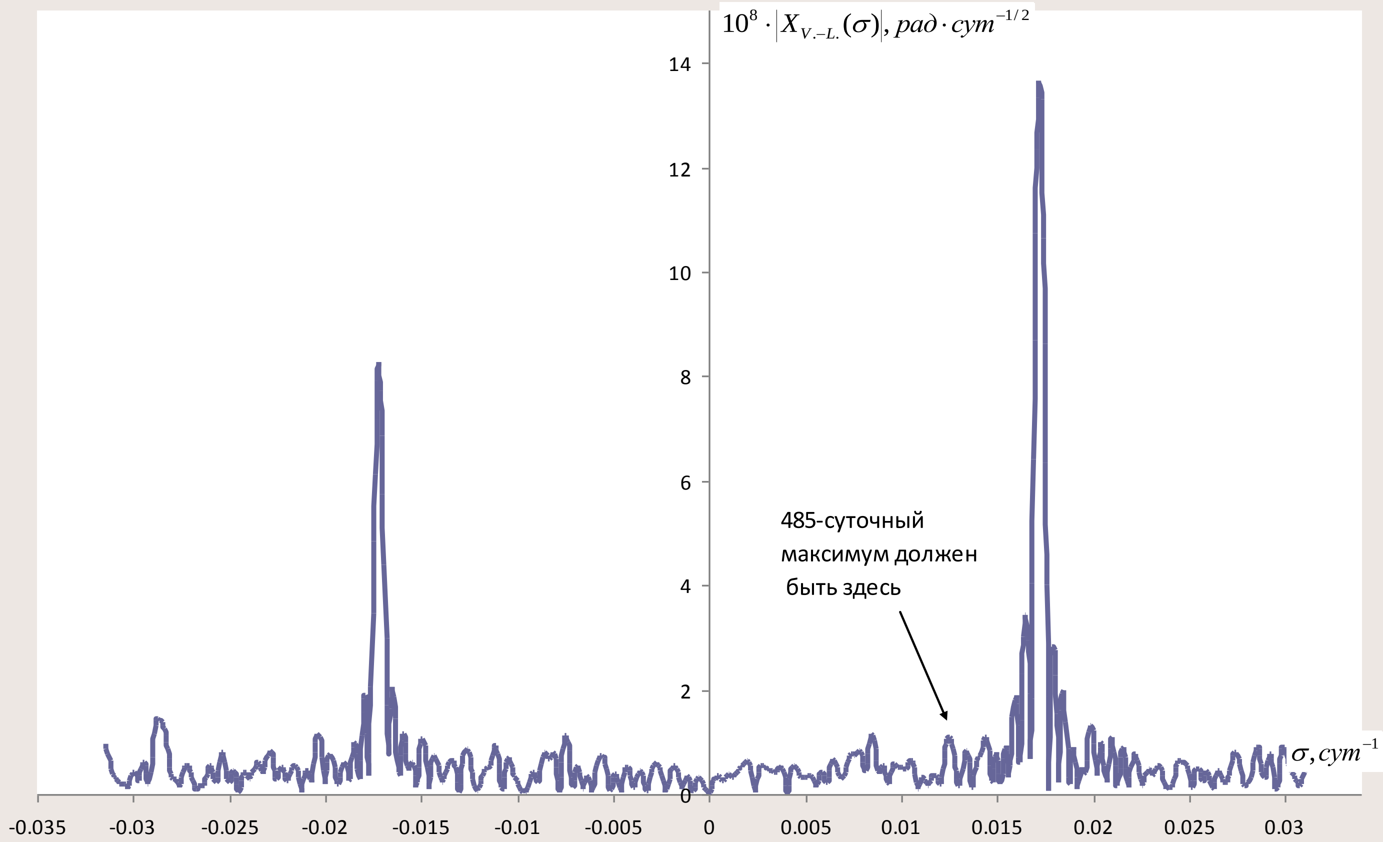
СПЕКТР ФУРЬЕ:



В ВЕТРОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ 485-СУТОЧНОЙ МОДЫ НЕТ:

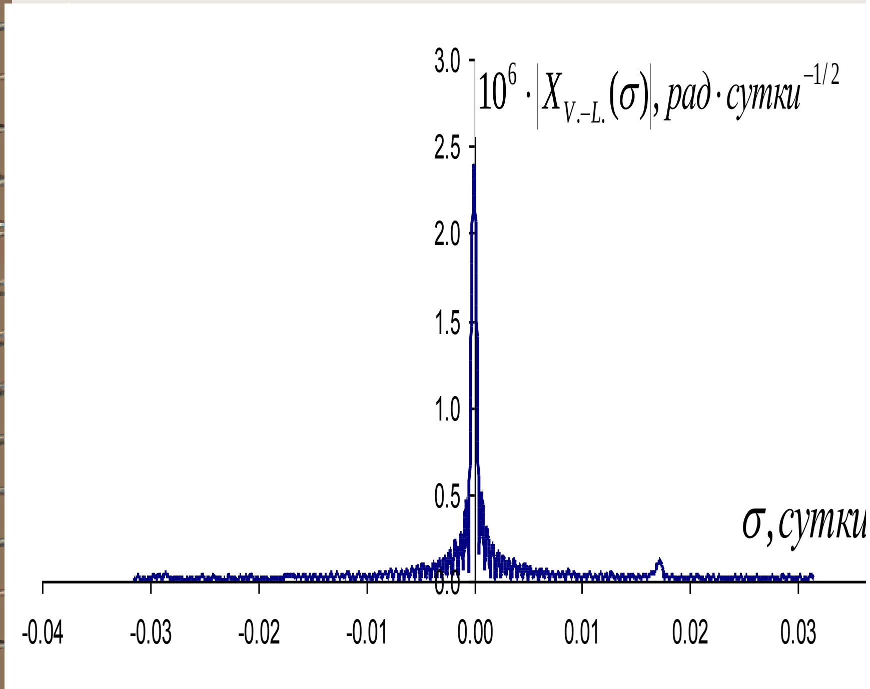


В БАРИЧЕСКОЙ, ПОСТРОЕННОЙ ПО ДАННЫМ IB - ТОЖЕ:

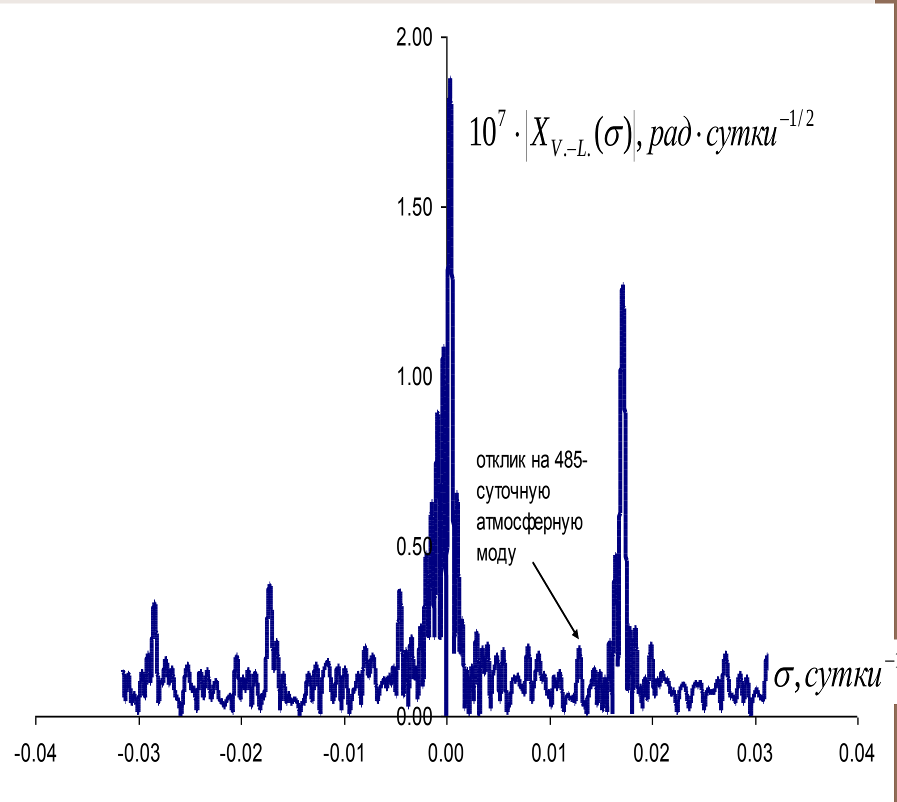


НО В ДВИЖЕНИИ ПОЛЮСА ОТКЛИК НА ЭТУ МОДУ ПРИСУТСТВУЕТ !

Амплитудный спектр наблюдаемого движения полюса с исключённой константой (по данным IERS за 1980-2014 гг.):



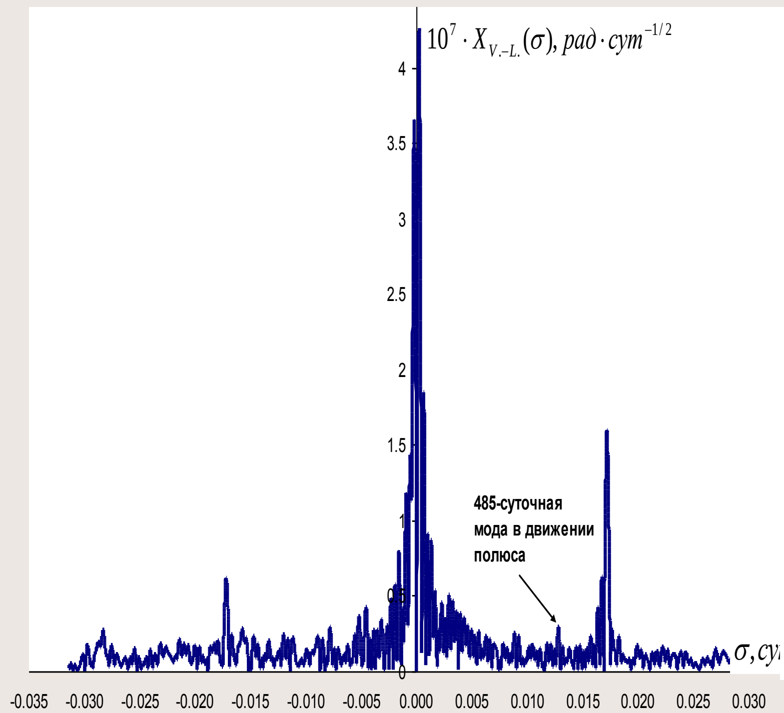
Тонкая структура спектра:



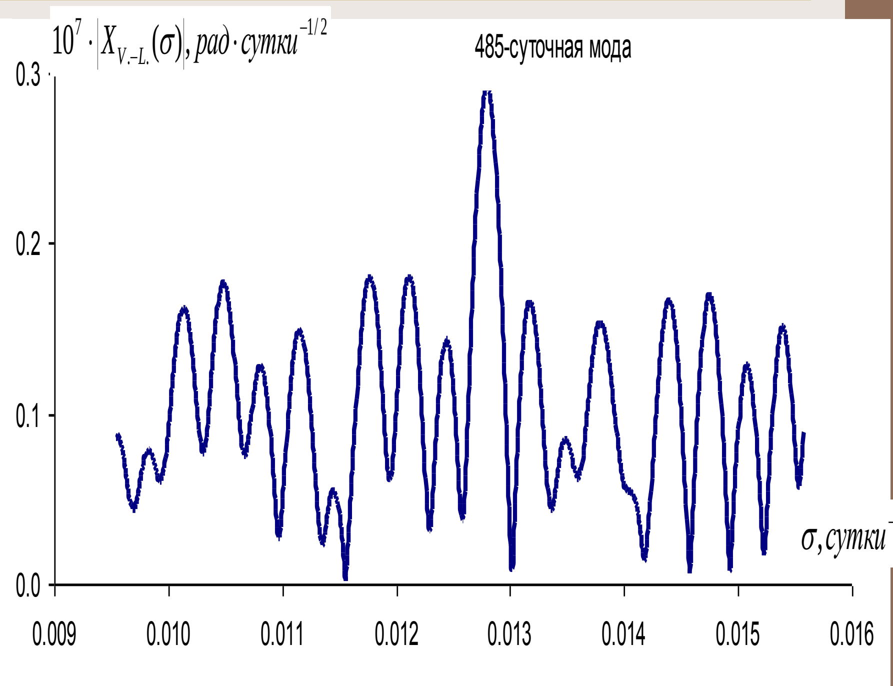
Случайным такое совпадение быть не может!

- Фрагмент спектра, содержащий частоту 0.0128 *сут*$^{-1}$:

И ВОТ ПОДТВЕРЖДЕНИЕ:



Тонкая структура спектра наблюдаемого движения полюса (по данным IERS за 1962-2014 гг.).



Фрагмент, содержащий частоту 0.0128 *сут*$^{-1}$.

В спектре Фурье максимум на этой частоте тоже есть!

(данные за 1962-2014 гг.).

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА & ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Амплитуда 485-суточной моды:

	A, рад	*A, сек.дуги*	*сигнал/шум*
атмосферн. сост. движ. полюса, 1980 – 2014	$(2.2 \pm 0.6) \cdot 10^{-7}$	$(4.5 \pm 1.2) \cdot 10^{-2}$	3.6
наблюдаемое движение полюса, 1980 – 2014	$(7.4 \pm 6.1) \cdot 10^{-8}$	$(1.5 \pm 1.2) \cdot 10^{-2}$	1.2
наблюдаемое движение полюса, 1962 – 2014	$(7.5 \pm 4.9) \cdot 10^{-8}$	$(1.5 \pm 1.0) \cdot 10^{-2}$	1.5

РЕЗУЛЬТАТЫ:

1). Разработан вариант спектрального анализа, специально предназначенный для исследования движения полюса (более общо – процессов, являющихся решением уравнения Лиувилля со случайной правой частью).
2). Продемонстрирована эффективность этого метода – с его помощью показано, что в угловом моменте атмосферы присутствует мода с периодом 485 суток. Получена оценка вклада 485 суточной моды в движение полюса.

ЛИТЕРАТУРА

- *Арато, М., Колмогоров, А.Н., Синай, Я. Г.* Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса.// Доклады Академии наук СССР. Том 146. №4. 1962. С. 13-17.

- *Максимов, И.В., Карклин, В.Н., Саруханян, Э.И., Смирнов, Н.И.* Нутационная миграция исландского минимума атмосферного давления.// Доклады Академии наук СССР. Том 177, №1. 1967. С. 88-91.

- *Тихонов, В.И., Миронов, М.А.* Марковские процессы. М., Советское радио, 1977, 488 с.

ЛИТЕРАТУРА

- *Цуркис, И.Я, Спиридонов, Е.А.* Вероятностный анализ данных о моменте импульса атмосфуры за период с 1980 по 2003.//Физика Земли, №4, 2012 С. 57-71

- *Plag, H.-P.* Chandler wobble and pole tide in relation to interannual atmosphere-ocean dynamics, in Tidal Phenomena. Lecture Notes in Earth Sciences, 66, pp. 183– 218, Springer, Berlin, 1997.