

Integration of Liouville equations over geological time scales and modelling the secular pole drift

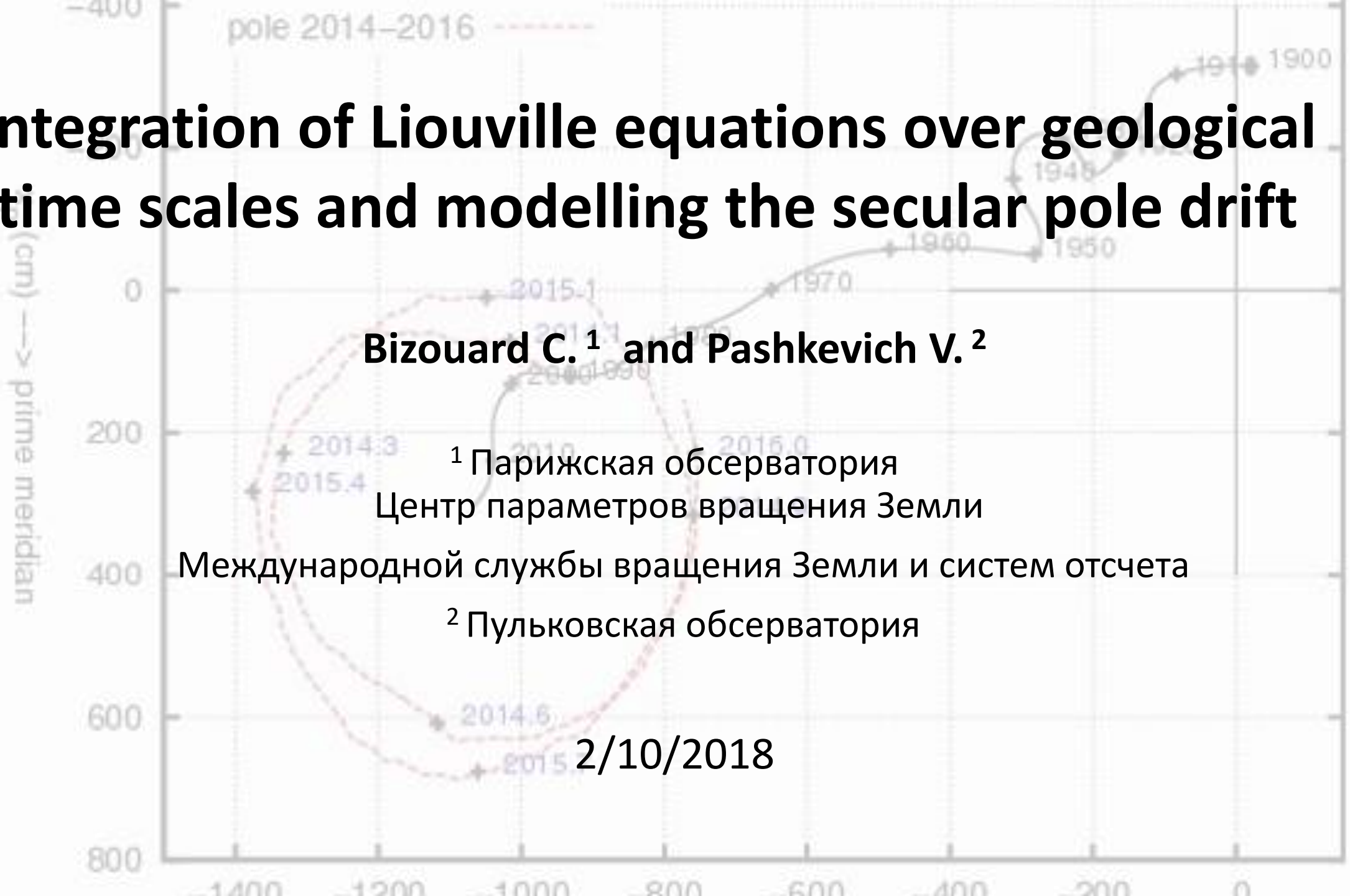
Bizouard C.¹ and Pashkevich V.²

¹ Парижская обсерватория
Центр параметров вращения Земли

Международной службы вращения Земли и систем отсчета

² Пулковская обсерватория

2/10/2018



Мотивация

Реология Земли и моделирование вариаций вращения Земли

Ряды параметров Вращения Земли

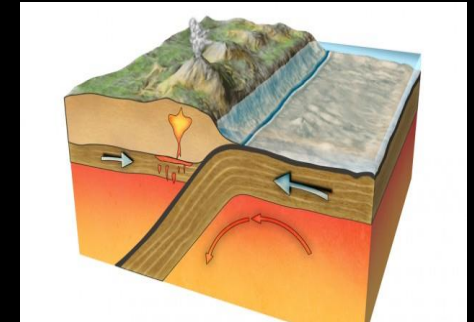
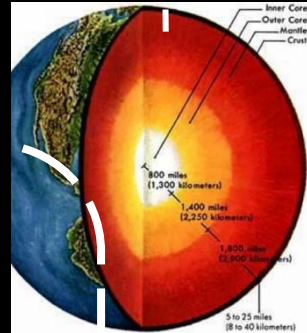
Геодезисты / астрономы

Квазиупругое приближение

хорошо моделируются

геофизики

Вязкая-упругая земля



лунно-солнечные приливы

12 ч 1 дней 365 дней 10 год

влияние атмосферы и океанов

изменения водных масс на континентах

взаимодействие между ядром и мантией

10^2 год

10^3 год

10^4 год

10^5 год

10^6 год

оледенения

тектоника

- I. Теория движения полюса с периодами < 100 лет для **квазиупругой твердой Земли**
- II. Теория субсекулярного движения полюса с периодами > 100 лет для **вязкоупругой твердой Земли**
- III. Линейное решение для движения полюса с периодами $\sim 10^2$ - 10^5 лет
- IV. Нелинейное решение для движения полюса с периодами $> 10^6$ лет

I- Теория движения полюса < 100 лет : квазиупругая твердая Земля

В земной системе отсчета (относительно коры) мы применяем пертурбативный подход:

- Составляющие вектора мгновенного вращения: $\underline{\omega} = \Omega \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \quad m_i \leq 10^{-6} \text{ rad}$
- Gxyz очень близки к главным осям инерции: матрица инерции квазидиагональна

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} A + c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & A + c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & C + c_{33} \end{pmatrix}$$

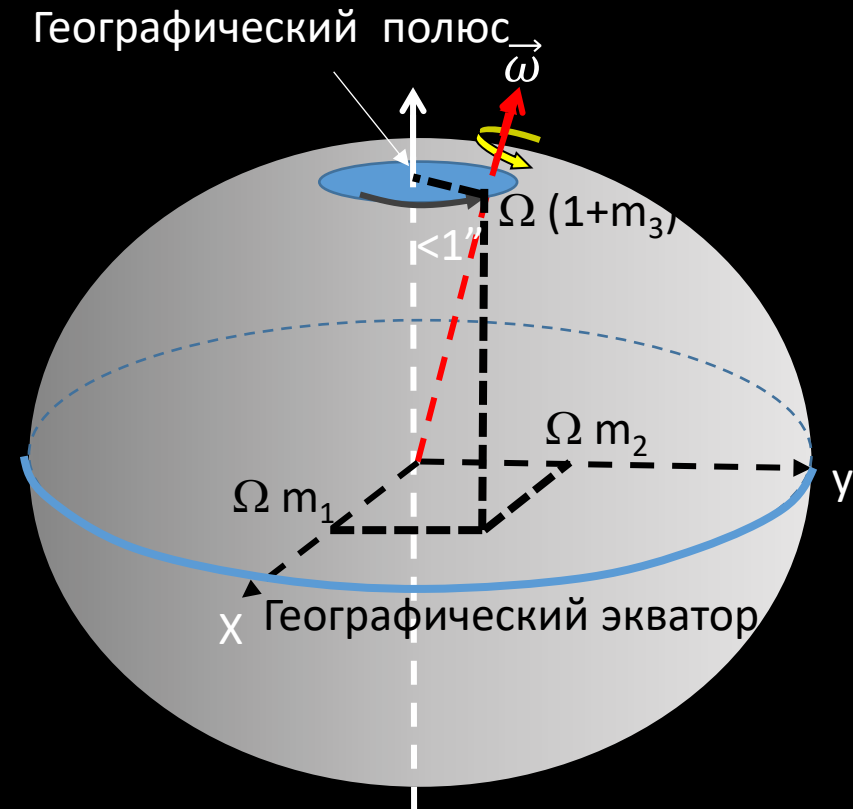
$$A = 8,0101 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2 \quad A < C$$

$$C = 8,0365 \cdot 10^{37}$$

- двухосная земля: $\frac{C-A}{A} \approx 3 \cdot 10^{-3} \quad c_{ij} \leq 10^{-7} A$

- относительный угловой момент : $\underline{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$

- общий угловой момент : $\underline{H} = \bar{I} \underline{\omega} + \underline{h}$



Gxyz : наземная система отсчета

I- Теория движения полюса < 100 лет

- Закон изменения углового момента земли

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{L} \quad \vec{H} : \text{угловой момент} \quad \vec{L} : \text{момент внешних сил}$$

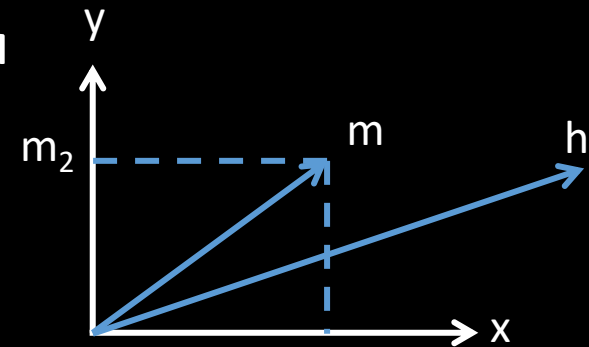
- Проекция на оси вращающейся системы отсчета связанной с Землей

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} + \underline{\omega} \otimes \mathbf{H} = \mathbf{L} \quad \text{с} \quad \mathbf{H} = \bar{\mathbf{I}} \underline{\omega} + \mathbf{h} : \text{уравнения Эйлера-Лиувилля}$$

Линеаризация (экваториальная часть)

$$\rightarrow m + i \frac{1}{\sigma_e} \dot{m} = \frac{\Omega c + h}{(C-A)\Omega} - i \frac{\Omega \dot{c} + \dot{h}}{(C-A)\Omega^2} + i \frac{L}{(C-A)\Omega^2}$$

$$\text{с} \quad \sigma_e = \frac{C-A}{A} \Omega = \frac{\Omega}{304,5}$$



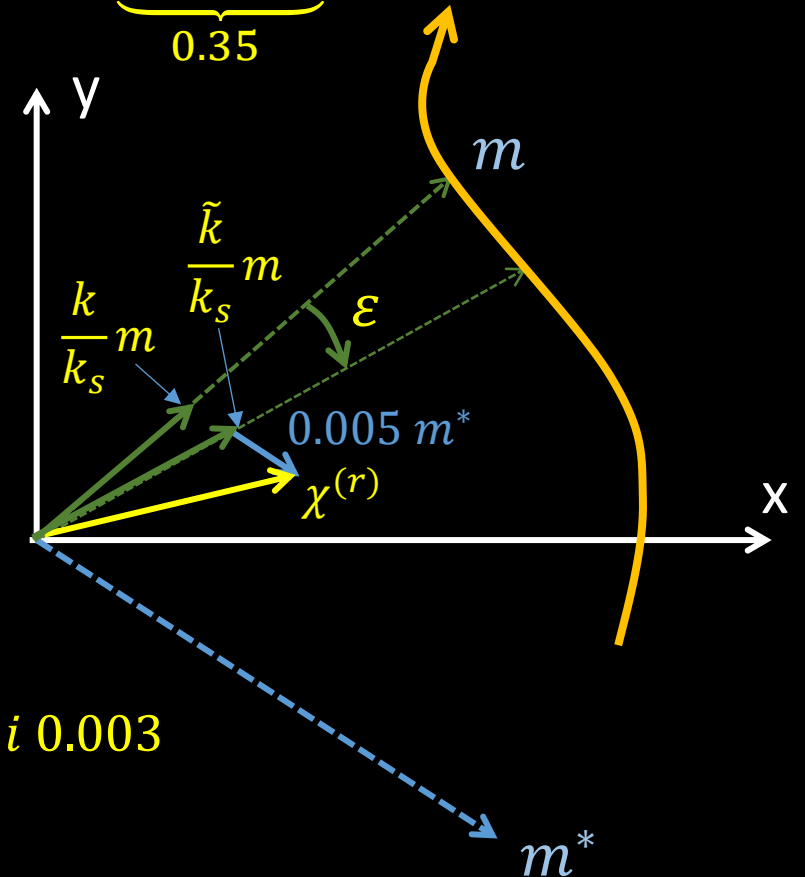
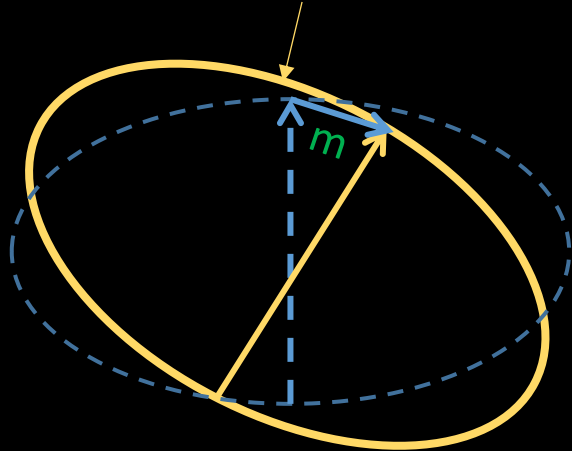
$$\begin{aligned} m &= m_1 + i m_2 \\ c &= c_{13} + i c_{23} \\ h &= h_1 + i h_2 \\ L &= L_1 + i L_2 \end{aligned}$$

I- Теория движения полюса < 100 лет : **Полюсный прилив**

Полюсный прилив: изменение центробежного потенциала, пропорциональное смещению полюса m :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Упругая Земля} \\ + \text{гидростатический океан} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\Delta c^{(p)}}{C-A} = \frac{(\Delta c_{13} + i\Delta c_{23})}{C-A} = \underbrace{\frac{k_2 + k_o}{k_s}}_{0.35} m + 0.005 m^*$$

деформированная земля m



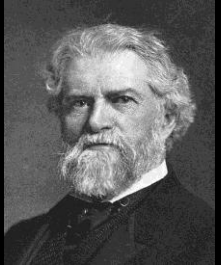
диссипация $\rightarrow$ квазиупругость

$$\chi^{(r)} = \frac{\Delta c^{(r)}}{C-A} = \frac{(\Delta c_{13} + i\Delta c_{23})}{C-A} = \frac{\tilde{k}}{k_s} m + 0.005 m^* \quad \tilde{k} = k e^{i\varepsilon} \sim 0.35 - i 0.003$$

I-колебание Чендлера является осцилляцией Эйлера для нетвердой земли

полюсный прилив 'rotational r': $\Delta C^{(r)} = \frac{\tilde{k}_2}{k_s} (C - A)m$

Обратная связь (Newcomb 1892)



S. Newcomb
(1835-1909)

$$m + i \frac{1}{\sigma_e} \dot{m} = \frac{\Omega C + h}{(C - A)\Omega} - i \frac{\Omega \dot{C} + \dot{h}}{(C - A)\Omega^2}$$

→ $m + i \frac{1}{\tilde{\sigma}_c} \dot{m} = \frac{1}{1 - \frac{\tilde{k}_2}{k_s}} \left[\frac{\Omega C^{\text{"pure"}} + h^{\text{"pure"}}}{(C - A)\Omega} - i \frac{\Omega \dot{C}^{\text{pure}} + \dot{h}^{\text{"pure"}}}{(C - A)\Omega^2} \right]$ Геофизическое возбуждение

$\tilde{\sigma}_c = \left(1 - \frac{\tilde{k}}{k_s}\right) \sigma_e \cong \frac{\Omega}{480} \left(1 + \frac{i}{200}\right)$ чандлеровская частота (480 д)

Жидкое ядро не возмущенное полюсным приливом → $\tilde{\sigma}_c \cong \frac{A}{A_m} \left(1 - \frac{\tilde{k}}{k_s}\right) \sigma_e = \frac{\Omega}{433} \left(1 + \frac{i}{200}\right)$ (433 д)

II- Вязкая-упругая земля на масштабах времени > 100 лет

Из-за **ВЯЗКОСТИ**, деформации происходят с задержкой, увеличивающейся с ростом масштаба времени возбуждающей силы

→ **Полюсный прилив Мантии** зависит от частоты : $\Delta c^{(r)}(\sigma)/(C - A) = \frac{\tilde{k}(\sigma)}{k_s} m(\sigma)$

$$\rightarrow \frac{\Delta c^{(r)}(t)}{C-A} = \frac{\tilde{k}(t)}{k_s} * m(t)$$

$$\rightarrow k(t) = \underbrace{(k_2 + k_0)\delta(t)}_{\text{упругость мантии+ океан}} + \underbrace{\left(\sum_j r_j e^{-s_j t}\right)}_{\text{вязкость}}$$

значения r_j и s_j зависят от модели, в частности, от вязкости нижней мантии, которая неизвестна (Sabadini, Vemeersen и Cambiotti 2016).

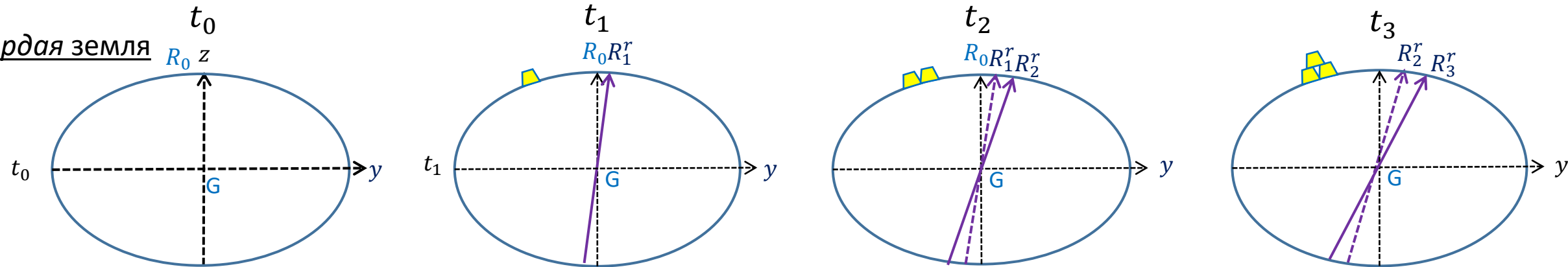
- Перераспределение масс на Земле

- Упругая Земля $c(t) \rightarrow c(t) \left(1 + k_2^{(l)}\right)$ $k_2^{(l)} \sim -0.3$

- вязкая-упругая Земля $c(t) \rightarrow c(t) * k_2^{(ve,l)}(t)$ $k_2^{(ve,l)}(t) = \underbrace{-0.3 \delta(t)}_{\text{упругость}} + \underbrace{\left(\sum_j l_j^{(l)} e^{-s_j t}\right)}_{\text{вязкость}}$

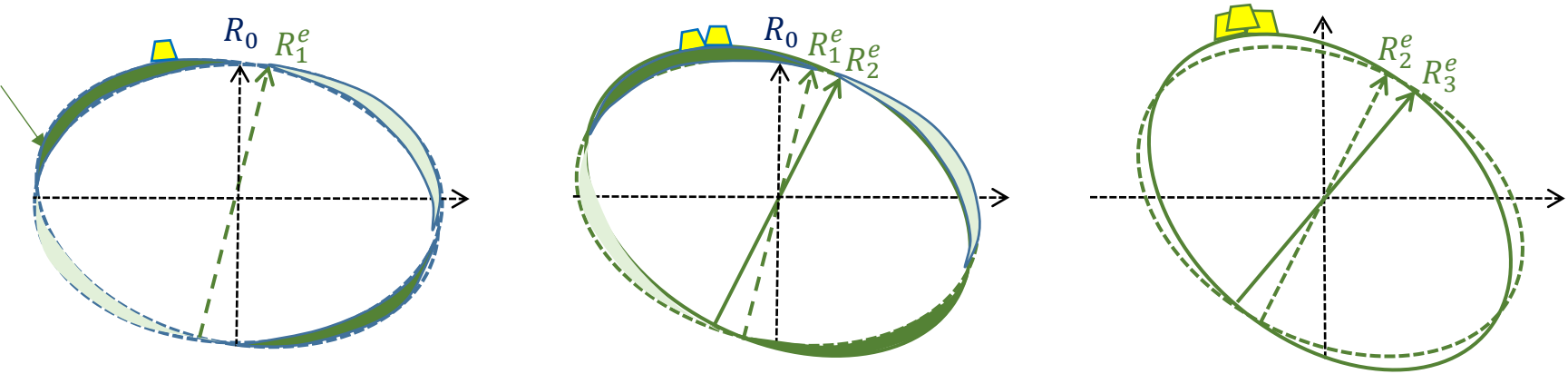
постоянная поверхностная нагрузка:

твёрдая земля



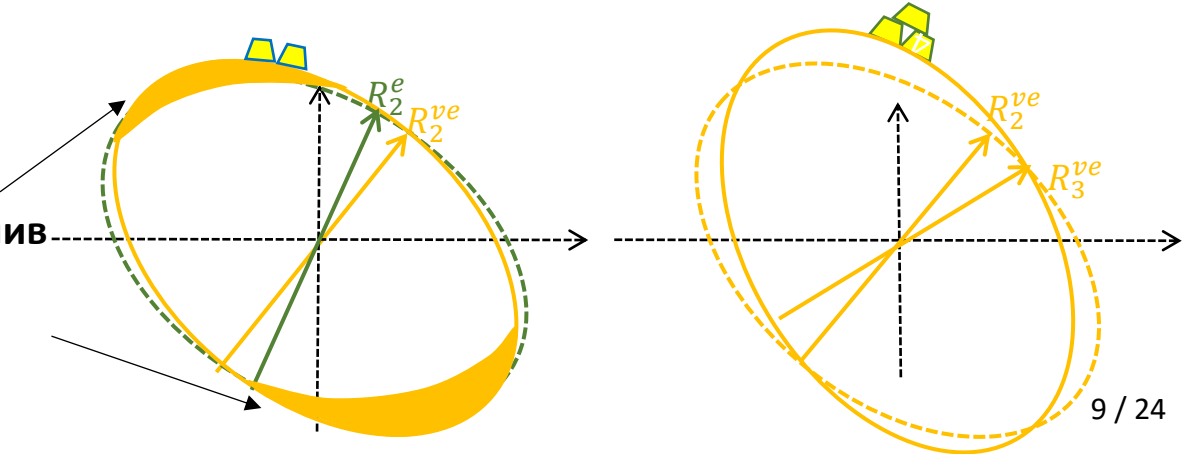
Полюсный центробежный прилив

упругая мантия+
гидростатический океан



вязка-упругая мантия+
гидростатический океан

Полюсный центробежный прилив



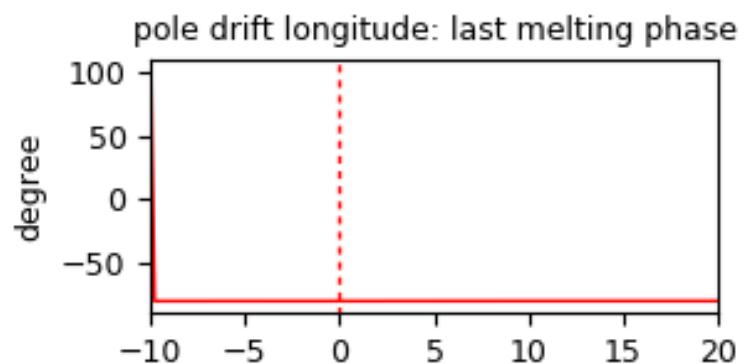
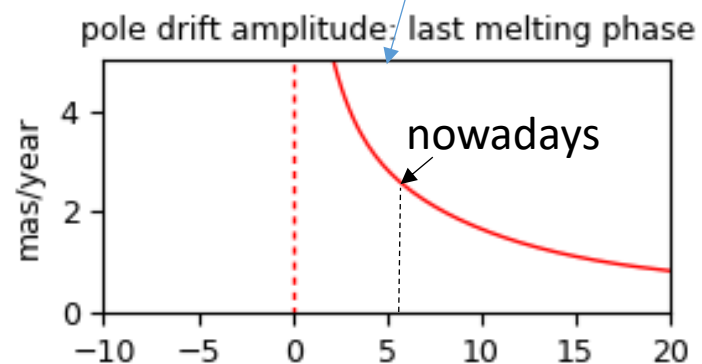
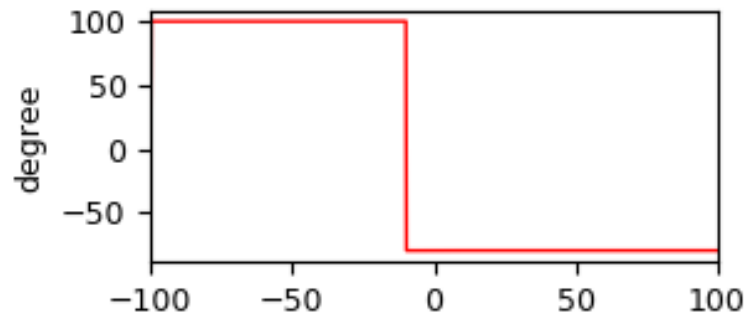
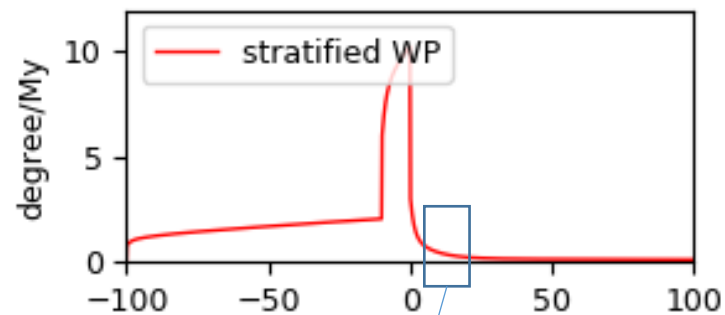
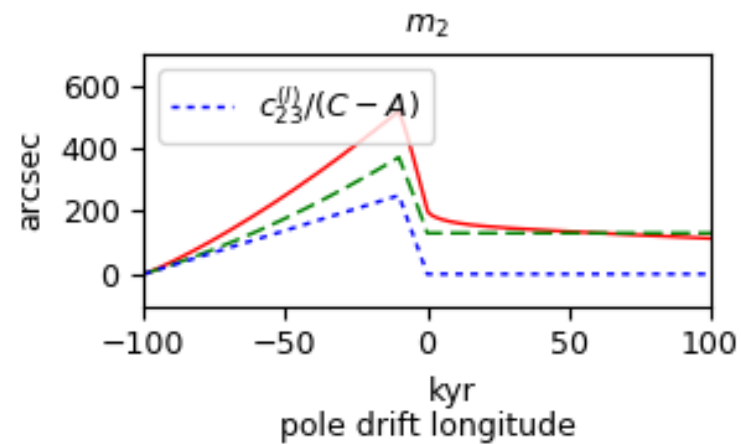
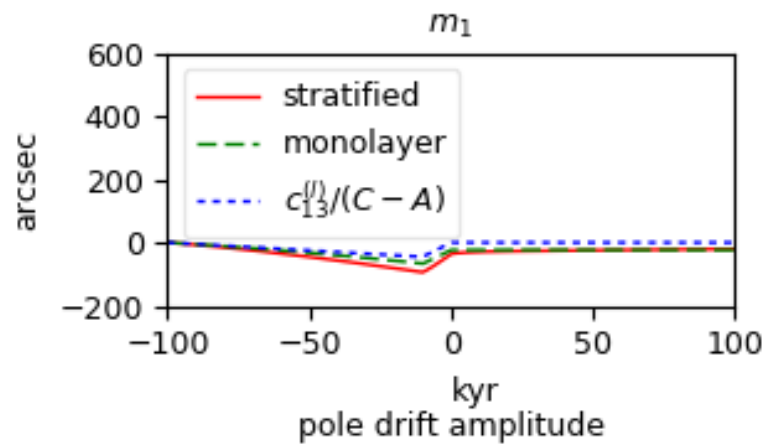
III- Линейное решение на масштабах времени 10^2 - 10^6 лет

- свертка между смещением m и числом Лява $k \rightarrow$ Нет более обыкновенного дифференциального уравнения $F(m, \dot{m}, t)=0$.
- Линейное приближение для шкалы времени <100 кур сохраняется: Решение линейного уравнения Лиувилля через преобразование Лапласа

$$m(s) = \frac{1+k'_2+\sum_{j=1}^N \frac{l_j}{s+s_j}}{1-\frac{k_2}{k_s}-\sum_{j=1}^N \frac{t_j}{s+s_j}+\frac{is}{\sigma_e}} \frac{c(s)}{C-A} = \left(\frac{\rho_0}{s} + \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j}{s+s_j} \right) \frac{c(s)}{C-A}$$

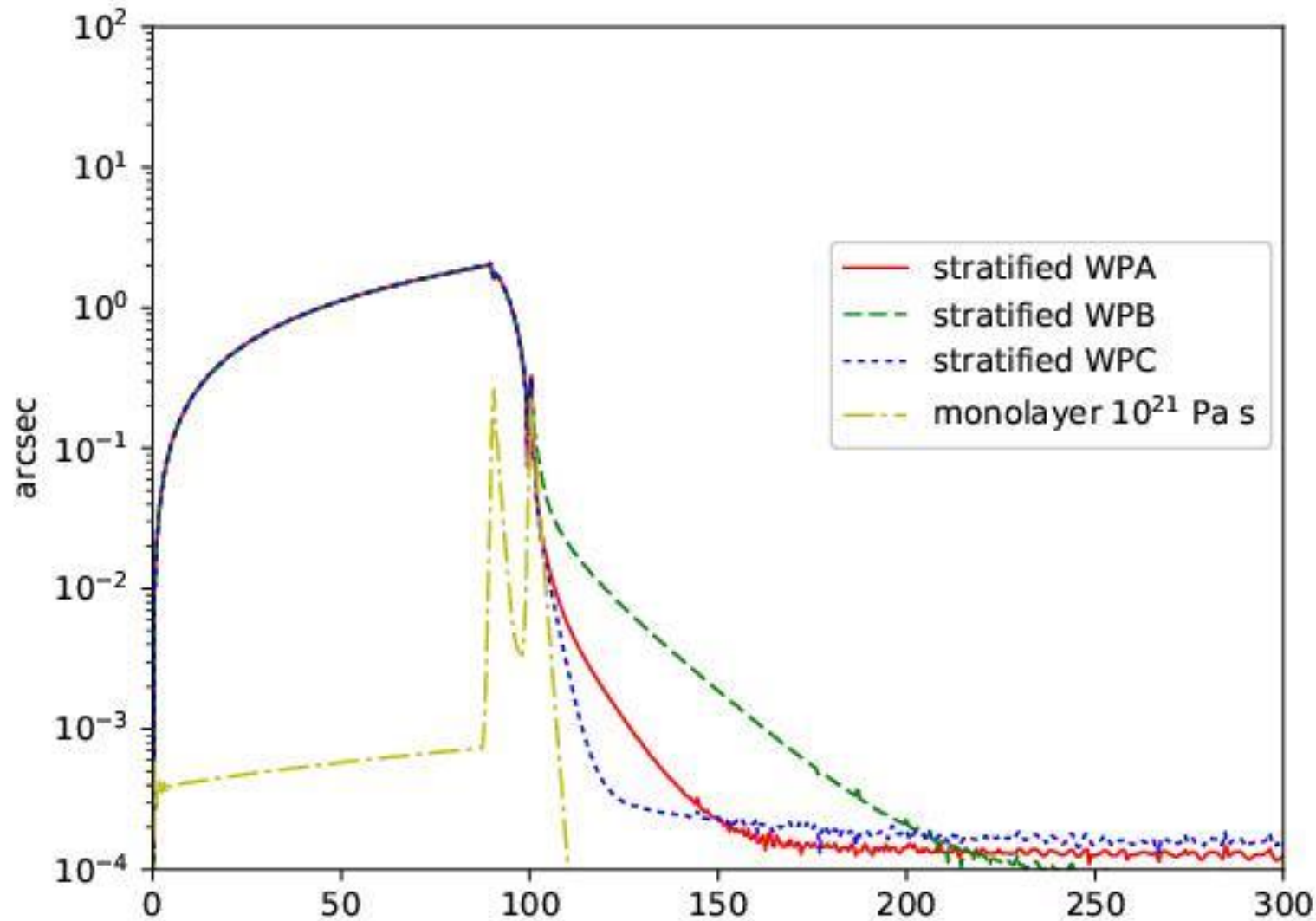
Обратное преобразование Лапласа $\rightarrow m(t) = H(t)(\rho_0 + \sum_{j=1}^N \rho_j e^{-s_j t}) * \frac{c(t)}{C-A}$

III- Эффект оледенения



линейный дрейф 4 mas/г :
последниковый отклик
Земли

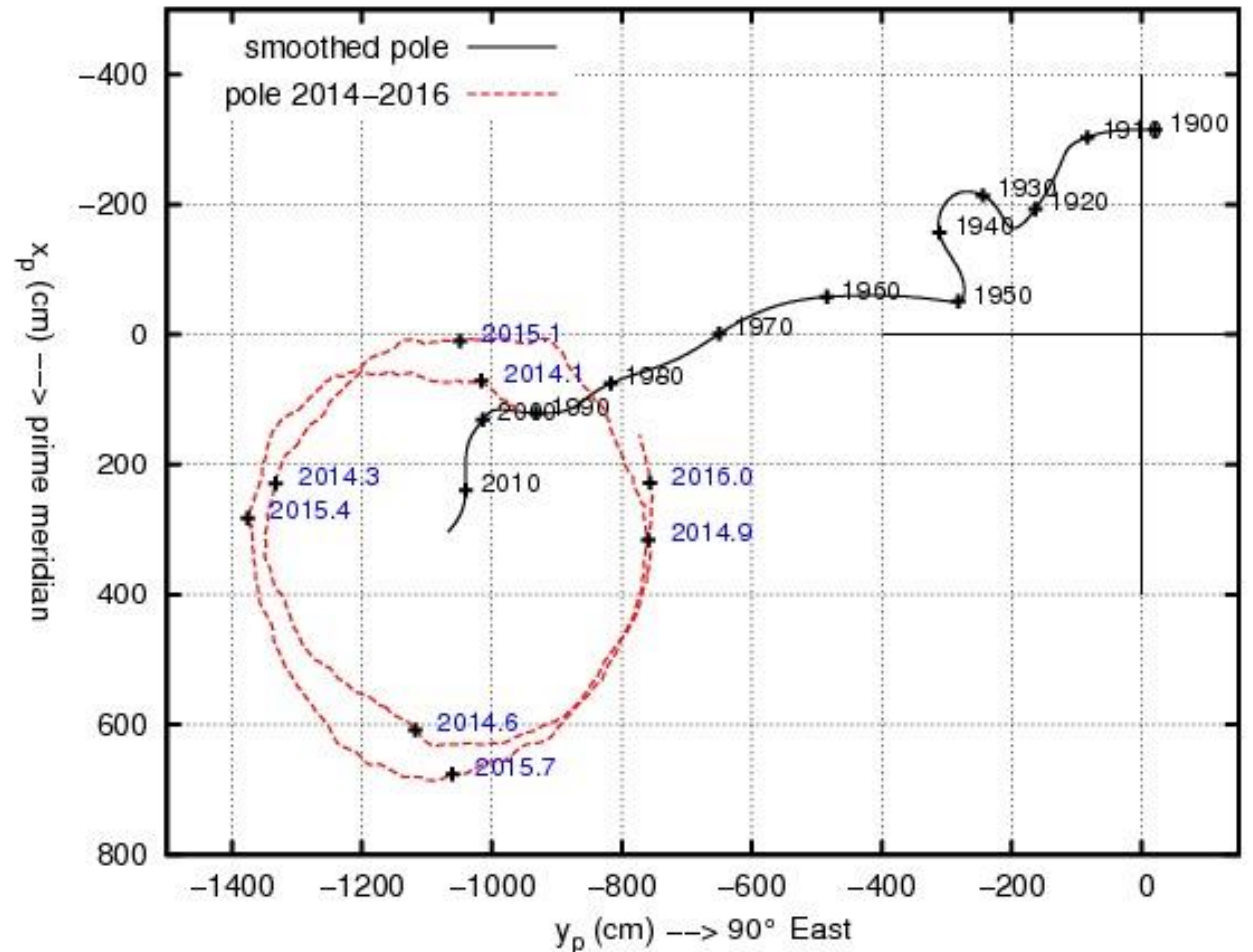
IV- Разница между средней осью инерции и средней осью вращения



космическая геодезия может
определять положение оси инерции

III- Наблюдение дрейфа полюсов

- Ламберт (1922) впервые заметил медленный дрейф усредненных широт
- Подтверждение в 1960-1970-х гг. (Марковиц, Федоров, Провербио) того, что средний полюс не фиксирован относительно коры, но медленно дрейфует со скоростью $\sim 4 \text{ mas/год}$ или 12 см/год в сторону Гренландии ($70\text{-}80^\circ$ к западу).
- расхождение: $0.3\text{-}0.4''/\text{су}$ $66\text{-}85.4^\circ \text{ W}$, из-за несогласованных оптических рядов



IV- Нелинейное решение на масштабах времени $> 10^6$ лет

- Линеаризация уже невозможна, но эту задачу можно свести к дифференциальным уравнениям второго порядка для временных масштабов, значительно больших периодов релаксации вязкоупругой моды (~ 100000 лет)
- приближение $k(s) \approx k_0(1 - T_1 s)$ с $T_1 \approx 20 - 100$ kyr приводит к

$$c_{ij}^{(r)}(t) =$$

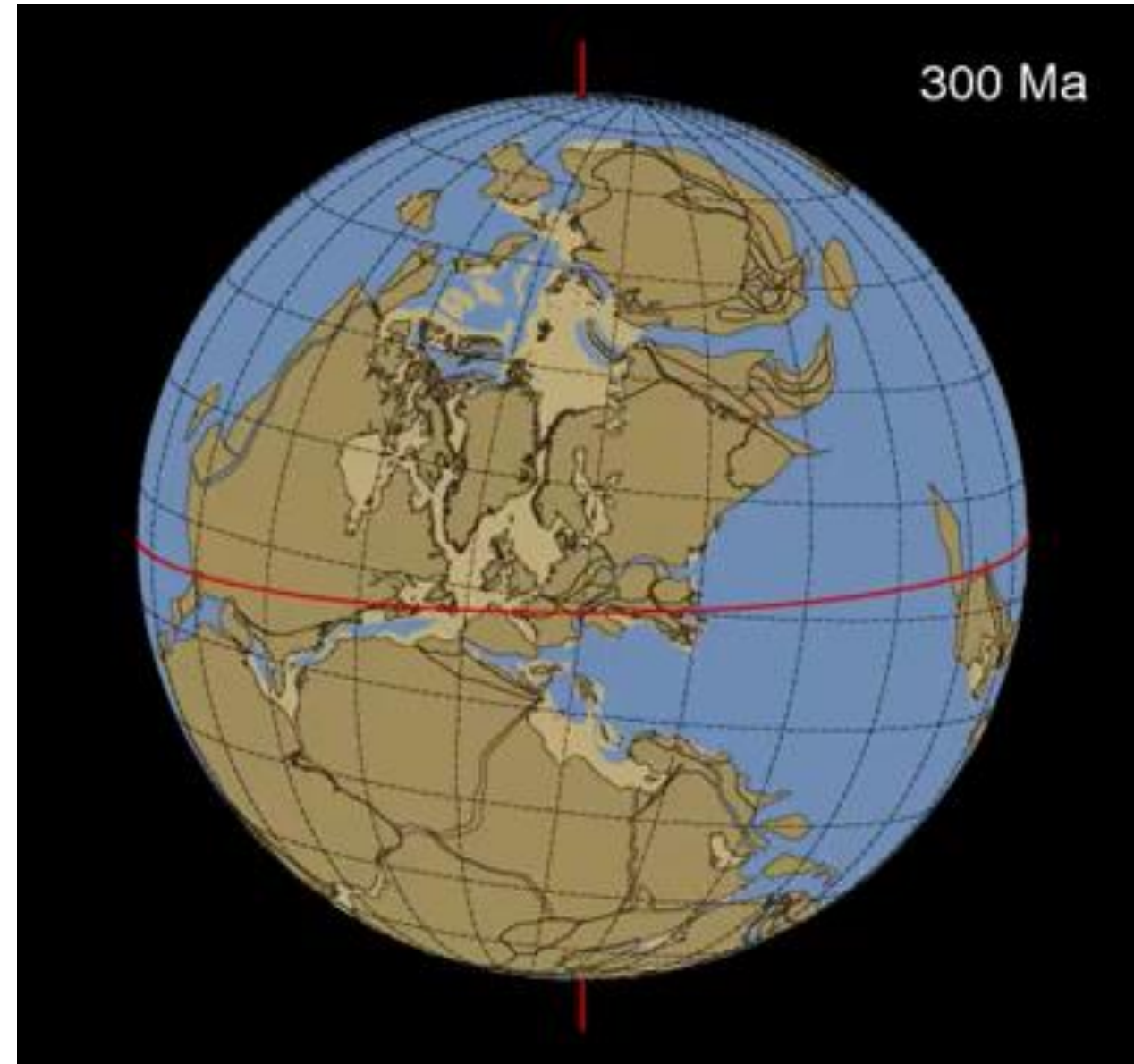
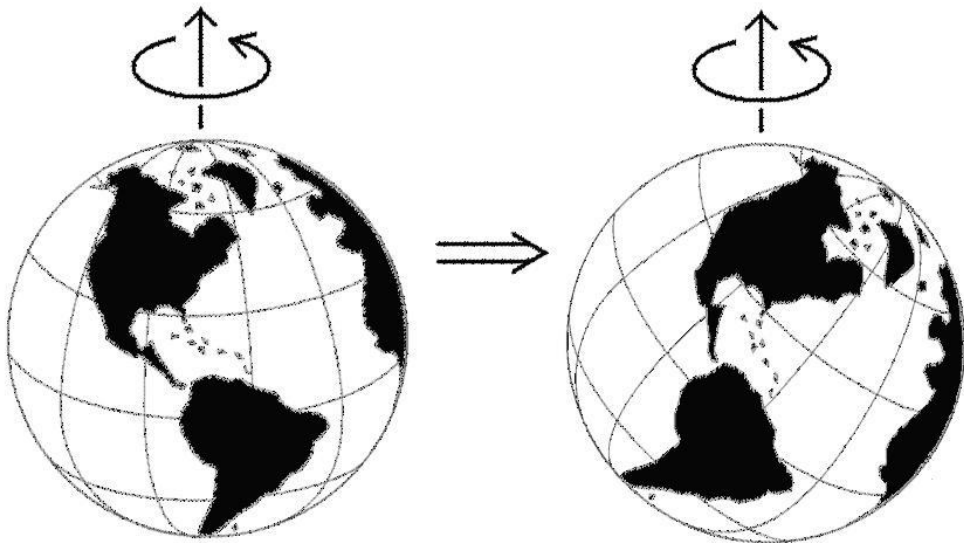
$$\frac{\Omega^2 R_e^5}{3G} k_0 \left[M_{ij}(t) - M_{ij}^0 T_1 \left(\dot{m}_i m_j + m_i \dot{m}_j - \frac{2}{3} (\dot{m}_1 m_1 + \dot{m}_2 m_2 + \dot{m}_3 m_3 + \dot{m}_3) \delta_{ij} + \delta_{i3} \dot{m}_j + \delta_{j3} \dot{m}_i + M_{ij}^0 \delta(t) \right) \right]$$

$$\text{с } M_{ij}(t) = (\delta_{i3} + m_i)(\delta_{j3} + m_j) - \frac{1}{3} (m_1^2 + m_2^2 + (1 + m_3)^2) \delta_{ij}$$

$$F(m_1, m_2, m_3, \dot{m}_1, \dot{m}_2, \dot{m}_3, t) = 0$$
$$A(m_1, m_2, m_3) \begin{bmatrix} \dot{m}_1 \\ \dot{m}_2 \\ \dot{m}_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

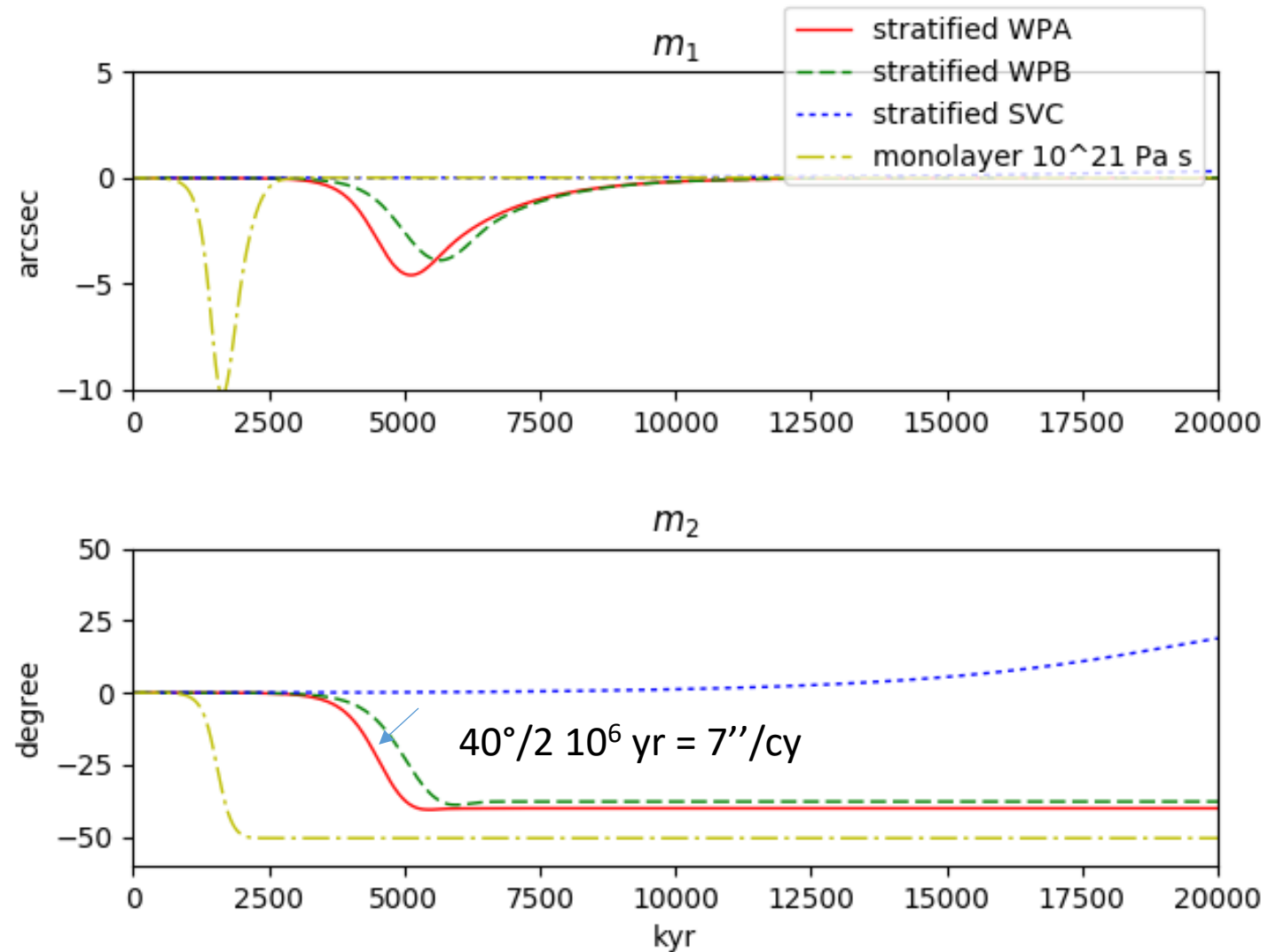
IV- « True Polar Wander » В масштабе времени > 1 миллионов лет

- Кажущееся полярное движение (*Apparent Polar Wander*) по сравнению с континентальной плитой
- Истинное полярное движение (True Polar Wander) относительно мантии



IV- Тектонические перераспределение массы в течение нескольких миллионов лет

Моделирование для массы $\sim 10^{-6} M_{earth}$ накапливая более 5 миллионов лет по тибетской территории.



ВЫВОДЫ

- Вязкоупругие эффекты на вращение Земли: пересмотр проблемы, обычно рассматриваемой чистыми геофизиками
- линейный дрейф $0.4''/\text{век}$: после ледниковый отклик Земли; моделируемые значения зависят от неизвестной вязкости мантии.
- В течение более длительных периодов (>1 миллион лет) тектонические эффекты становятся доминирующими и они вызывают смещение до 40°
- вязкоупругие эффекты < 100 лет ?