

# ЧИСЛЕННЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКЗОПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ

А. В. Мельников

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,  
196140 Санкт-Петербург, Пулковское шоссе 65/1,  
melnikov@gaoran.ru



03 октября 2018 г.

На 01 октября 2018 г. в базе данных <http://www.exoplanet.eu> содержится информация о 3851 планетах / 2871 планетных системах / 636 мультипланетных системах.

## Орбитальные элементы экзопланет

$a_p$ ,  $m_p \sin i'$  — определены.

Для 1446 планет определены  $e_p$ .

Солнечная система:  $e_p$  — малы (Меркурий —  $e \approx 0.206$ , Плутон —  $e \approx 0.249$ ).

У многих экзопланетных систем  $e_p$  — велики ( $> 0.2$ ).

Для  $\approx 200$  планет ( $\approx 14\%$  всех планет с определенными  $e_p$ )  $e_p > 0.4$ .

$\omega_p$  — для большинства планетных систем известны.

$i_p$ ,  $\Omega_p$  — для большинства планетных систем неизвестны.

Около 50% звезд главной последовательности входят в кратные звездные системы. **Двойные звездные системы** составляют  $\sim 80\%$  кратных систем.

## Типы планетных систем

- S-класс (тип) — планета обращается вокруг одного из компонентов,
- P-класс — планета обращается вокруг обоих компонентов.

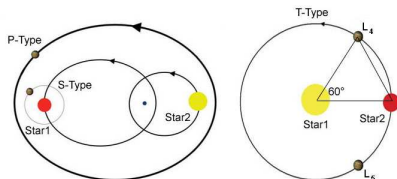


Рисунок из работы Schwarz et al. (2011, MNRAS, 414, 2763).

Каталог планет в двойных звездных системах:

<http://www.univie.ac.at/adg/schwarz/multiple.html>,

составлен Schwarz et al. (2011, MNRAS, 414, 2763; 2016, MNRAS, 460, 3598).

Включает в себя 91 планетную систему (66 S-класса + 25 P-класса).

Диаграмма устойчивости — плоскость значений параметров, где выделены области устойчивой и неустойчивой (хаотической) динамики системы. Типичные плоскости:  $(a_p, e_p)$ ,  $(a_p, i_p)$ ,  $(e_p, i_p)$ ,  $(a_p, m_p)$ ,  $(e_p, m_p)$ ,  $(\Omega_p, \omega_p)$ .

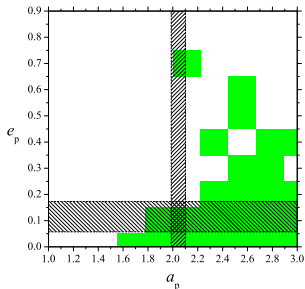


Диаграмма устойчивости планетной системы  $\gamma$  Сер.

Из анализа диаграмм устойчивости экзопланетной системы можно:

- Определить (уточнить) наиболее вероятные значения параметров орбит и масс уже известных планет.
- Предсказать возможность существования планеты с определенными орбитальными и физическими параметрами (масса).
- Предположить возможный сценарий вековой орбитальной эволюции планетной системы.

Основные численные методы для построения диаграмм устойчивости

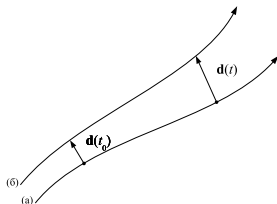
- Вычисление характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ).
- Вычисление «суррогатов» ХПЛ (MEGNO, FLI, SALI и т.д.).
- Частотный анализ (Frequency Analysis, Frequency Map Analysis).

## Характеристические показатели Ляпунова

Характеристические показатели Ляпунова (ХПЛ) имеют физический смысл **средней скорости экспоненциальной расходимости траекторий фазового пространства** в малой окрестности пробной траектории.

$$L = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(t_0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{d(t)}{d(t_0)},$$

$\mathbf{d}$  — вектор смещения, направленный от «опорной» траектории к «теневой»,  
 $d(t_0) = |\mathbf{d}(t_0)|$ ,  $d(t) = |\mathbf{d}(t)|$ .



## Максимальный ХПЛ и ляпуновское время

Ненулевая величина максимального ХПЛ (МХПЛ) указывает на хаотический, а нулевая — на регулярный (периодический или квазипериодический) характер движения. Величина, обратная МХПЛ, — **ляпуновское время** — представляет собой **характерное время предсказуемой динамики системы**.

Численные алгоритмы определения ХПЛ были изложены в работах Benettin, Galgani & Strelcyn (1976, Phys. Rev. A, 14, 2338; 1980, Meccanica, 15, 9).

## Вариации ХПЛ («суррогаты»)

- FLI (Fast Lyapunov Indicator, быстрый индикатор Ляпунова) и его вариант OFLI (Orthogonal Fast Lyapunov Indicator) предложены Froeschlé et al. (1997, P&SS, 45, 881; 1997, CMDA, 67, 41).
- MEGNO (Mean Exponential Growth Factor of Nearby Orbits, средний фактор экспоненциальной расходимости близких орбит) предложен Cincotta & Simó (2000, A&AS, 147, 205).
- SALI (Smaller Alignment Index) и его обобщение GALI (Generalized Alignment Index) предложены Skokos (2001, J. Phys. A, 34, 10029) и Skokos et al. (2007, Phys. D, 231, 30).
- D (Spectral Distance) предложен Voglis et al. (1999, CMDA, 73, 211).
- SSNs (Dynamical Spectra of Stretching Numbers) предложен Voglis & Contopoulos (1994, J. of Phys. A, 27, 4899).
- RLI (Relative Lyapunov Indicator) предложен Sándor et al. (2000, CMDA, 78, 113).

Наиболее широкое распространение получили — FLI и [MEGNO](#).

## Максимальный ХПЛ (МХПЛ)

$$L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)}.$$

Предполагая время интегрирования  $t$  достаточно большим:  $L' = \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d(0)}$ .

Регулярная орбита:  $L' \rightarrow 0$ , с ростом  $t$ ; хаотическая орбита:  $L' \rightarrow \text{const}$ .

## Быстрый индикатор Ляпунова (FLI)

$$FLI = \ln \frac{d(t)}{d(0)},$$

Методика использования FLI:

- 1) определяем  $FLI_{\max}$  для регулярной орбиты,
- 2) если для другой орбиты на том же  $t$ :  $FLI > FLI_{\max}$  — орбита хаотическая.

Определение  $FLI_{\max}$  — неоднозначно!

Вместо  $FLI_{\max}$  используют его «безопасное» значение:  $FLI_{\max} + \text{const}$ .



### Определение MEGNO

MEGNO — Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits, средний фактор экспоненциальной расходимости близких орбит:

$$MEGNO(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{d}(t')}{d(t')} t' dt' .$$

На практике используют осредненную по времени величину MEGNO:

$$\langle MEGNO \rangle(t) = \frac{1}{t} \int_0^t MEGNO(t') dt' ,$$

при  $t \rightarrow +\infty$ :  $\langle MEGNO \rangle \rightarrow \begin{cases} 2 & \text{квазипериодическая траектория,} \\ Lt/2 & \text{хаотическая траектория, где } L \text{ — МХПЛ.} \end{cases}$

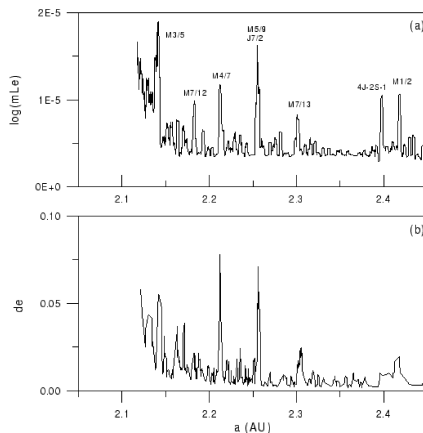
### СВЯЗЬ MEGNO и FLI

$$MEGNO(t) = 2[FLI(t) - \langle FLI(t) \rangle] ,$$

где  $\langle FLI(t) \rangle$  — среднее значение  $FLI$  на интервале времени  $t$ .

# Метод максимальных эксцентриситетов (MEM)

Morbidelli & Nesvorný (1999, *Icarus*, 139, 295) провели исследование хаотической диффузии орбит во внутреннем поясе астероидов на времени в 100 млн лет.



Метод максимальных эксцентриситетов (MEM = Maximum Eccentricity Method) позволяет сделать предварительные выводы о характере орбитальной динамики системы.

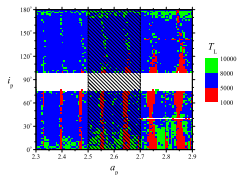
## Звездная система

Звездная система HD 196885 расположена от нас на расстоянии около 33 пк. А (F8V,  $1.33M_{\odot}$ ) и В (M1V,  $0.45M_{\odot}$ ):  $a = 21$  а.е.,  $P = 72$  года,  $e = 0.42$ .

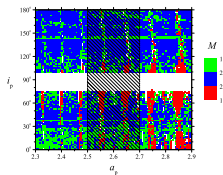
## Планета

В 2008 г. у компонента А была обнаружена (Correia et al., 2008, A&A, 479, 271) планета:  $e_p = 0.48 \pm 0.02$ ,  $P_p = 3.69 \pm 0.01$  года,  $m_p \sin i' = 2.96m_J$ .

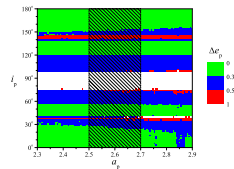
ХПЛ



MEGNO



MEM



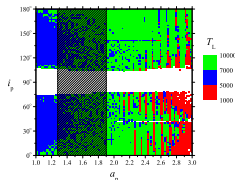
## Звездная система

Звездная система HD 41004 расположена от нас на расстоянии около 42 пк. А (K1V,  $0.7M_{\odot}$ ) и В (M2V,  $0.4M_{\odot}$ ),  $a = 23$  а.е.,  $P = 74$  года,  $e = 0.4$ .

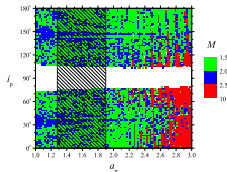
## Планета

В 2003 г. у компонента А была обнаружена (Zucker et al., 2004, A&A, 426, 695) планета:  $e_p = 0.39 \pm 0.17$ ,  $P_p = 2.64 \pm 0.10$  года,  $m_p \sin i' = 2.54m_J$ .

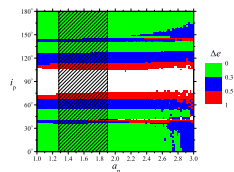
ХПЛ



MEGNO



MEM



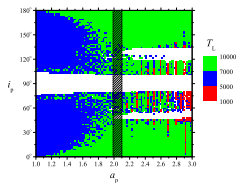
## Звездная система

Звездная система  $\gamma$  Сер расположена от нас на расстоянии около 45 пк. А (K1IV,  $1.4M_{\odot}$ ) и В (M1V,  $0.4M_{\odot}$ ),  $a = 20.2$  а.е.,  $P = 67$  лет,  $e = 0.41$ .

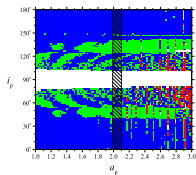
## Планета

Существование планеты в системе  $\gamma$  Сер предсказали Campbell et al. (1988, ApJ, 331, 902). В 2003 г. у компонента А была обнаружена (Hatzes et al., 2003, ApJ, 599, 1383) планета:  $e_p = 0.115 \pm 0.058$ ,  $P_p = 2.47 \pm 0.01$  года,  $m_p \sin i' = 1.6m_J$ .

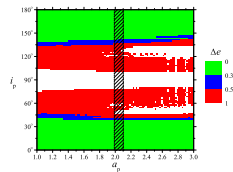
ХПЛ



MEGNO



MEM



## Основные результаты

- Рассмотрены основные численные инструменты для исследования регулярной и хаотической динамики небесно-механических систем — методы вычисления ХПЛ, FLI, параметра MEGNO и метод MEM.
- Массовое вычисление ХПЛ на множестве возможных значений орбитальных параметров экзопланетной системы позволяет выявить области регулярной и хаотической динамики и получить **оценки ляпуновского времени**.
- Вычисление MEGNO позволяет выявить области регулярной/хаотической динамики с **большим разрешением** по начальным значениям орбитальных параметров системы, чем метод вычисления ХПЛ.
- Метод MEM позволяет получить предварительные оценки границ областей регулярной/хаотической динамики. Метод MEM **требует наименьших затрат машинного времени**.

Мельников А. В. «Численные инструменты для анализа вековой динамики экзопланетных систем» // *Астрономический вестник*. 2018. Т.52. №5. С.427.

Спасибо за внимание!