

В.Л. Горшков / V. Gorshkov
Н.В. Щербакова / N. Shcherbakova

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ И СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК
GPS-НАБЛЮДЕНИЙ НА ТЕРРИТОРИИ ПУЛКОВСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ**

THE INVESTIGATION OF THE NOISE AND SYSTEMATIC ERRORS OF GPS OBSERVATIONS INSIDE THE PULKOVO OBSERVATORY TERRITORY

Аннотация. По данным трёх перманентных GPS-станций, расположенных на территории ГАО РАН, исследовано поведение шумовых и низкочастотных составляющих их координат. В низкочастотной составляющей координат станций присутствуют вариации от долей года до доминирующих сезонных вариаций, обусловленных, в основном, атмосферными и гидрологическими нагрузками. Динамика освобождённых от низкочастотных составляющих координат станций и базовых линий между ними использована для оценки типа распределения случайных ошибок наблюдений. По данным всех станций вычислены компоненты средневзвешенной скорости и приведены их ошибки в зависимости от типа шумовой составляющей.

Abstract. Using the data of three permanent GPS-stations located inside the Pulkovo observatory, the behavior of noise and low-frequency components of their coordinates has been analyzed. There are low-frequency variations of station coordinates from parts of year to the dominant seasonal variations conditioned by atmospheric and hydrological loading. Dynamics of the free from the low-frequency components of the station coordinates and base lines between them were used to estimate the type of distribution of errors. Using the data of all stations the components of the weighted average velocities and its errors were calculated for different types of noise.

Ключевые слова: Геодинамика, нагрузочные эффекты, ошибки GPS-наблюдений.

Key words: Geodynamics, loading effects, errors of GPS-observations.

Плотные сети GPS-станций, с базами до нескольких километров, создаются для контроля подвижек технических сооружений, а также в районах с большой естественной динамикой грунтов, в том числе из-за сейсмичности. В некоторых геодинамических пунктах также иногда имеются несколько постоянно функционирующих приёмников, расположенных в непосредственной близости друг от друга и даже на одном фундаменте. Их основные систематические ошибки из-за проявления нагрузочных эффектов, местной динамики грунтов, набора наблюдаемых спутников и других локальных влияний должны быть одинаковыми и могут быть ис-

ключены в разностях результатов наблюдений. Такого рода данные наиболее подходят для исследования закона распределения ошибок наблюдений и получения достоверных оценок скоростей станций, т.к. дают возможность оценить «внешнюю» ошибку наблюдений и таким образом получить более реалистичные средневзвешенные значения скоростей станций для последующих геодинамических исследований.

В наших предыдущих работах по исследованию геодинамики юго-западных окраин Балтийского щита были вычислены положения и оценены скорости перманентных станций Эстонии, Финляндии и России, окружающих Финский залив [1,4]. Вертикальные скорости этих станций отражают, в основном, послеледниковое поднятие южных окраин Балтийского щита и позволяют оценить вязкость мантии в данном регионе. Как видно из табл.1, вертикальные скорости V_U станции PULK статистически значимо отличаются в меньшую сторону от данных других станций региона. Это может быть связано с расположением обсерватории на доминирующей над местностью гряде, являющейся частью древнего берега Литоринового моря и отличающейся по геологическому строению и динамике грунтов. Наличие синхронных GPS-наблюдений на территории ГАО РАН даёт возможность решить как задачу по верификации величины скорости станции PULK, так и определить наиболее реалистичную величину её ошибки.

Табл.1. Вертикальные скорости перманентных станций, расположенные вокруг Финского залива. Данные для станции VIRO взяты из работы [10].

Станции (интервал в годах)	V_U (мм/год)
PULK (2002-2010)	0.56 ± 0.07
SPBU (2005-2010)	3.53 ± 0.19
SVTL (2005-2010)	2.77 ± 0.08
TOIL (2008-2010)	3.90 ± 0.31
SUUR (1998-2010)	3.82 ± 0.06
METS (2006-2010)	4.85 ± 0.14
VIRO (1998-2009)	3.69 ± 0.06

Данные и метод обработки

На территории ГАО РАН проводятся наблюдения на трёх станциях (PULK, SPTR и PULJ) с разнотипными двухчастотными GPS-приёмниками и антеннами, разнесёнными на несколько сотен метров (базы 407, 354 и 327 м). Антенны установлены на крышах зданий, существенно различающихся размерами и высотой, покрытиями крыш, системой монтажа антенн и видимостью горизонта (рис.1). Эти различия могут обуславливать незначительные расхождения в вариациях координат станций.

Исходные данные по станциям SPTR и PULJ любезно предоставлены нам соответственно ОАО «Российские космические системы» и ЦНИИГАиК. Наблюдения обработаны с помощью пакета GYPSI 6.1.2 (JPL) с применением стратегии PPP (Precise Point Positioning) и с учётом абсолютной калибровки антенн, точных орбит ИСЗ (в системе *IGS 08*), поправок часов и параметров вращения Земли (*eop IERS*), модели тропосферы (*GMF*), океанической приливной модели (*FES-2004*) и твердотельных приливов.



Рис. 1. ГНСС сеть Пулково.

Наблюдения на данной сети станций имеют разную продолжительность, большие пропуски на станции PULJ и, частично, на станции SPTR, что ограничивает возможность полноценного сравнения данных. Все изменения, вызванные сменой и принудительным изменением положения антенн (для станции SPTR), были учтены.

Для правильной оценки скоростей и их ошибок желательно (а для эпизодических полевых наблюдений обязательно) предварительное исключение низкочастотных, в основном сезонных и полугодовых компонент, в координатах станций. Эти вариации положений станций обусловлены, главным образом, сезонными вариациями атмосферных и гидрологических нагрузок, достигающих в вертикальной составляющей 2 см. Для данной сети станций они были частично учтены с помощью соответствующих поправок за атмосферные нагрузки [13]. К сожалению, вычисление гидрологических нагрузок в режиме службы временно прекращено с середины 2010 года в связи с уточнением модели вычислений. Поэтому остаточные сезонные вариации в координатах станций исключались в том случае, если их удавалось выделить соответствующей фильтрацией и они соответствовали по фазе с имеющимися гидрологическими нагрузками до 2010 года.

Скорости и низкочастотные вариации координат станций

В табл. 2 приведены оценки скоростей станций с помощью метода наименьших квадратов (МНК) и робастным методом с использованием минимизации абсолютных уклонов от подбираемой прямой. Из таблицы видно, что северная компонента станции SPTR существенно превосходит среднее значение по станциям. Для неё также характерно наименьшее значение вертикальной составляющей. Видно также, что вертикальные составляющие станций имеют тенденцию к уменьшению от самой южной станции (PULJ) в северном направлении. Причина этого может быть связана с расположением станции SPTR над самым северным краем пулковского холма. Многочисленные стоки водоносного слоя холма со всех южных высот, обрывающиеся в этом месте к северу и обнажающие водоносный горизонт, постоянно вымывают породу, что, вероятно, и приводит к постепенному проседанию холма и сползанию его на север.

Видно также, что робастные оценки скоростей станций достаточно хорошо сходятся с МНК оценками и тем ближе, чем больше продолжительность наблюдений. Это косвенно свидетельствует о том, что в исследуемых рядах распределение ошибок наблюдений близко к нормальному, особенно для горизонтальных координат станций.

Табл. 2. МНК и робастная оценки скоростей станций (первая и вторая строки соответственно) и дисперсия вариации Аллана ($ADEV$). Для оценки средней скорости по станциям в качестве весов использовалось количество наблюдений N .

Станции	Интервал (года)	N (дни)	Vn (мм/год)	Ve (мм/год)	Vu (мм/год)	ADEV(мм)		
						φ	λ	h
PULJ	2008-2012	853	11.84 ± 0.07 11.69	20.73 ± 0.06 20.75	1.23 ± 0.31 0.68	1.56	1.33	5.67
PULK	2002-2012	3585	11.82 ± 0.01 11.80	21.08 ± 0.01 21.08	0.35 ± 0.04 0.37	1.32	1.06	4.39
SPTR	2007-2012	1936	12.32 ± 0.03 12.33	20.78 ± 0.03 20.77	0.20 ± 0.11 0.00	1.39	1.25	4.76
Средневзвешенное по станциям			11.97 ± 0.23 11.95 0.26	20.94 ± 0.16 20.94 0.16	0.42 ± 0.32 0.30 0.25	SPTR-PULK (база) 1.16		

На рис. 2 - 4 представлены низкочастотные вариации координат станций на фоне остаточных уклонов после снятия линейного тренда. Как уже упоминалось, поправки за атмосферные нагрузки были учтены для всех станций, поэтому оставшаяся низкочастотная составляющая может быть обусловлена как гидрологическими нагрузками, так и иными эффектами. Эти вариации выделялись с использованием FFT-фильтрации с частотой отсечки 1 цикл/год и с помощью выделения главных низкочастотных компонент сингулярным спектральным анализом [15]. Для сравнения на рисунках представлены неучтённые гидрологические нагрузки. Видно, что не во всех исследуемых рядах сезонная компонента выделялась и, главное, соответствовала имеющимся гидрологическим нагрузкам.

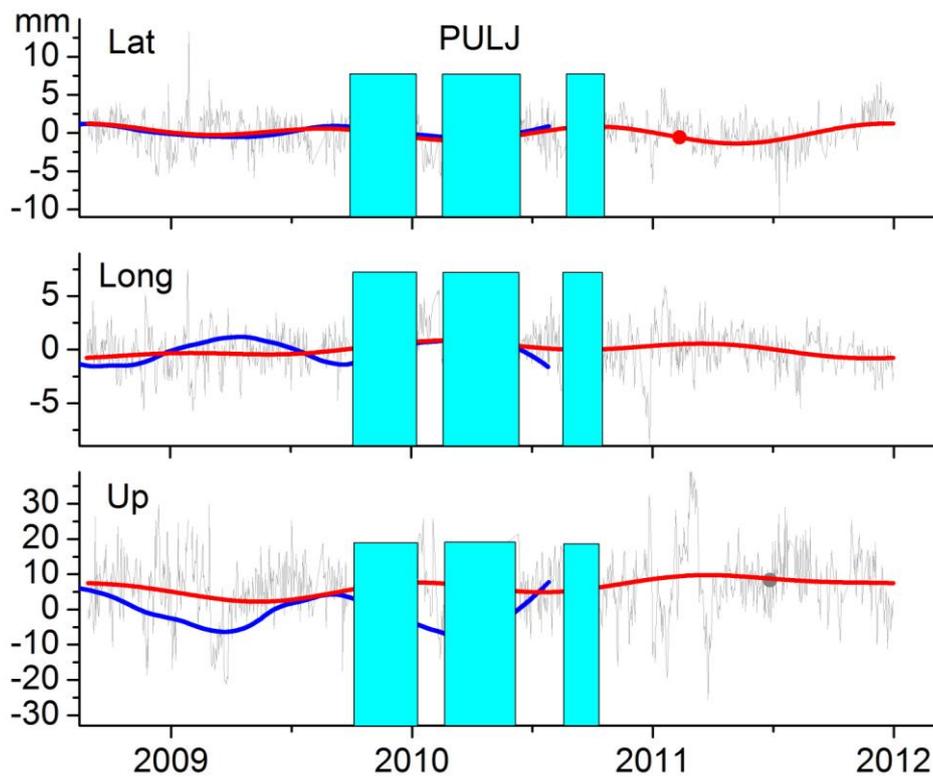


Рис. 2. Низкочастотные вариации координат станции PULJ (красная кривая) и поправки в координаты станций за гидрологические нагрузки (синяя кривая) на фоне остаточных уклонений после снятия линейного тренда (серая кривая). Голубыми прямоугольниками отмечены пропуски в наблюдениях, превышающие неделю.

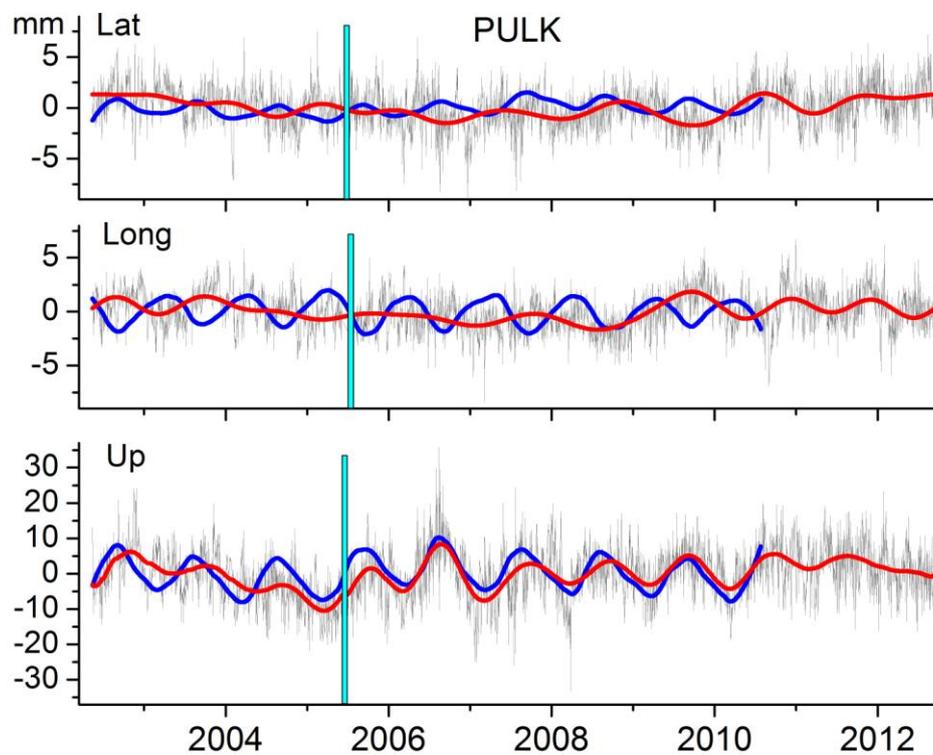


Рис. 3. Аналогично рис. 2 для станции PULK.

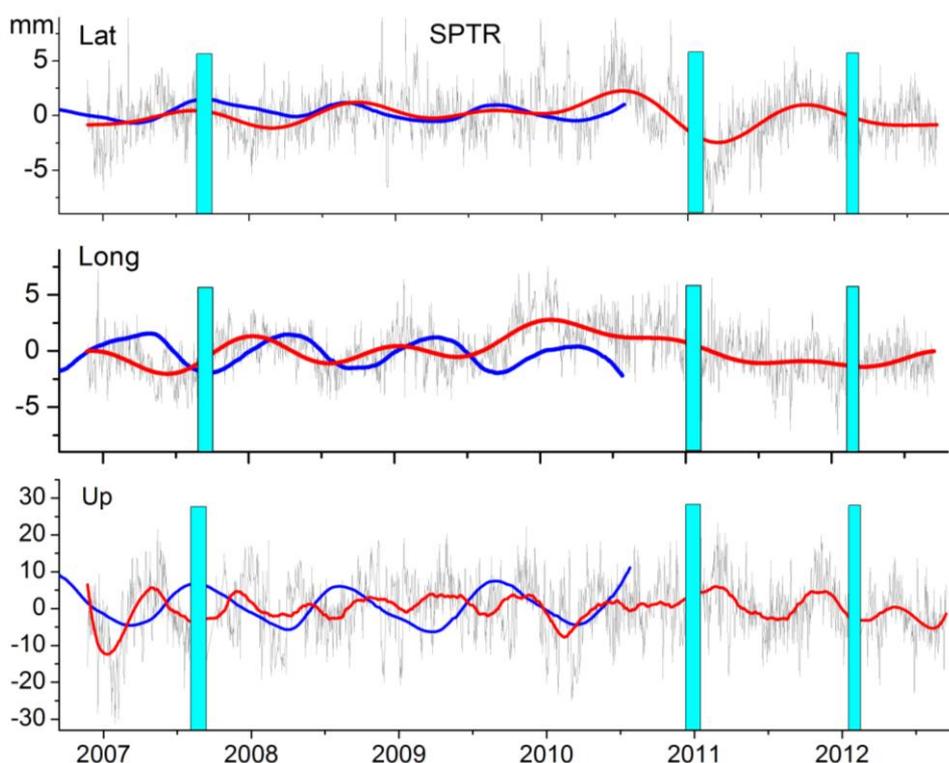


Рис. 4. Аналогично рис. 2 для станции SPTR.

Для станции PULJ результаты значительно уступают в точности ввиду больших промежутков в наблюдениях и меньшего периода наблюдений. При продолжительности наблюдений менее трёх лет и наличии сезонных вариаций в наблюдениях оценки скоростей станции могут быть существенно искажены [5]. В итоге для дальнейшего исследования случайных ошибок из всех исходных рядов были удалены линейные тренды. Сезонные составляющие в соответствии с анализом рис. 2-4 были удалены только для вертикальной компоненты на станции PULK, для горизонтальных компонент станции SPTR и для северной компоненты станции PULJ. На рис. 5 для станции PULK приведены остаточные отклонения вертикальной компоненты после снятия сезонной составляющей и линейного тренда.

Исследование случайных ошибок и типа их распределения

Теоретический аспект

Ошибки, формально получаемые при оценке скоростей станций с помощью метода наименьших квадратов (МНК), всегда занижены (т.е. их точность завышена) ввиду редкого соответствия шумов GPS-наблюдений нормальному распределению и, как правило, большого количества наблюдений на перманентных станциях. Поэтому при наличии нескольких станций на компактной территории средневзвешенное значение скорости по всем GPS-станциям естественным образом даёт более надёжную оценку. При этом можно получить также более достоверную «внешнюю» ошибку этой величины. Однако это не отменяет необходимости изучения закона распределения ошибок на каждой станции, что, помимо уточнения ошибок скоростей станций, даёт дополнительную информацию о качестве самих наблюдений.

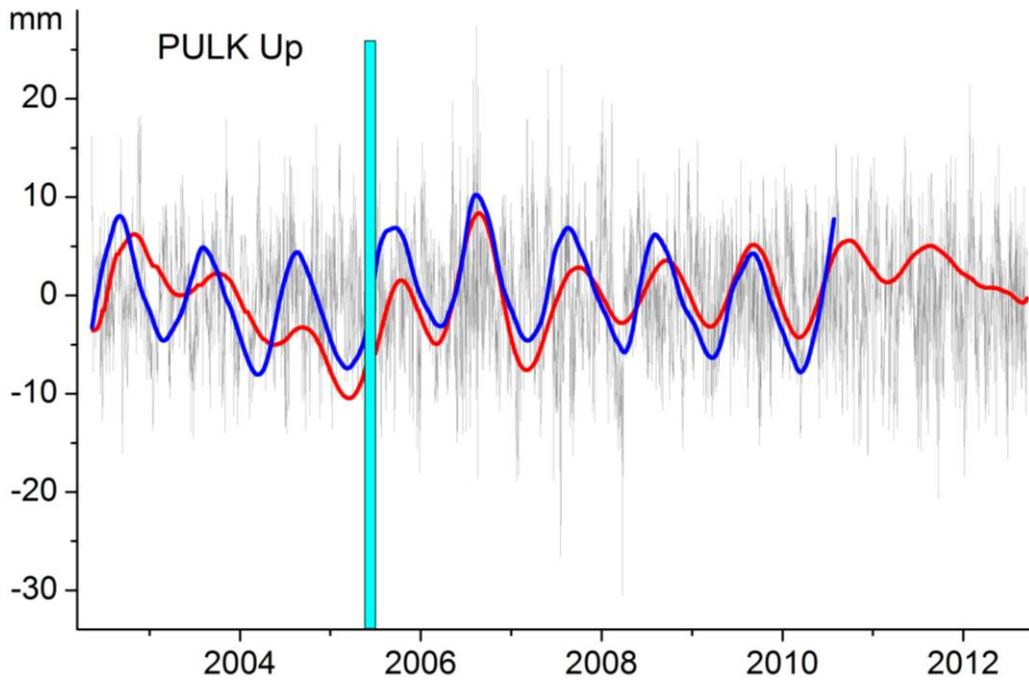


Рис. 5. Остаточные вариации вертикальной компоненты станции PULK.

В качестве дисперсионной меры для последующего вычисления ошибки скоростей станции можно использовать несколько оценок.

1. Можно определить скорости с помощью робастных оценок, не зависящих от закона распределения, например как в табл.2, используя минимизацию абсолютных отклонений от оцениваемой прямой ($y = a + bt$):

$$\min \sum_i |y_i - a - bt_i|$$

Здесь и в дальнейшем суммирование происходит по всем n наблюдениям. В этом случае дисперсионной мерой может служить среднее абсолютное отклонение V_r наблюденных значений от полученной таким образом прямой.

2. Можно использовать в этом качестве величину дисперсии вариации Аллана ($ADEV = (AVAR)^{1/2}$), обычно очень близкую к V_r , но выгодно отличающуюся отсутствием зависимости от долгопериодических вариаций в изучаемом ряде:

$$ADEV = \sqrt{\sum_i (y_i - y_{i+1})^2 / 2(n-1)},$$

Большое количество наблюдений на перманентных станциях позволяет исследовать закон распределения ошибок (тип шумовой составляющей) конкретного ряда. GPS-наблюдения, после удаления трендов и квазипериодических компонент, являются стохастическим сигналом (шумом) со спектральной плотностью мощности хорошо аппроксимируемой степенной зависимостью от частоты f :

$$P(f) \propto f^{-\beta}.$$

Для стохастических сигналов с таким спектром мощности для целочисленных значений β в работе [14] приведены следующие простые для вычислений оценки скоростей станций, не отличающиеся более чем на 2.5% от точных оценок:

– для нормально распределенных ($\beta = 0$)

$$\sigma_n \cong \frac{a}{T} \sqrt{12/n},$$

где a – средняя величина амплитуды шума, в качестве которой может быть использована любая из предыдущих оценок (V_r или $ADEV$), $T = \Delta T(n - 1)$ – продолжительность ряда наблюдений с постоянным приращением ΔT (обычно в годах);

– для распределения типа фликер-шум ($\beta = 1$)

$$\sigma_b \cong 0.75 \frac{a}{T},$$

– для случайных блужданий ($\beta = 2$)

$$\sigma_b = \frac{b}{\sqrt{T}}.$$

где b – амплитуда броуновских блужданий также может быть аппроксимирована любой из предыдущих оценок.

Видно, что только при нормально распределённых случайных ошибках наблюдений ошибка определения скорости станций зависит от количества наблюдений и их продолжительности. В остальных случаях ошибка определения скорости станций зависит только от продолжительности наблюдений, будучи наихудшей для распределения типа броуновских блужданий.

Естественно, что при исследовании реальных рядов величина β может принимать не только целочисленные значения. Нормальное распределение не зависит от частоты и характеризуется степенным показателем $\beta \approx 0$. Это так называемый белый шум. В интервале $0 < \beta < 1$ процесс является стационарным (обобщённый гауссовый шум) и при $\beta = 1$ соответствует фликер-шуму (так называемый розовый шум). При $\beta > 1$ процесс перестаёт быть стационарным и относится к типу обобщённых (фрактальных) броуновских движений (ОБД), впервые рассмотренных Мандельбротом [11]. При $\beta = 2$ это обычное броуновское движение или случайные блуждания (коричневый шум).

Для оценки величины β существует несколько возможностей. Наиболее простой способ [3] основан на определении коэффициента k наклона $\log\text{-}\log$ зависимости вариации Аллана ($AVAR$) от продолжительности выборки τ . В этом случае величина $k \approx 0$ характеризует распределение типа фликер-шум, $k < 0$ соответствует нормальному распределению и $k > 0$ – случайным блужданиям. Напомним, что вариации Аллана характеризуют приращения процесса.

Другой способ основан на вычисление β по соотношению $\beta = 2H + 1$ [2] для обобщённых броуновских движений, где H есть параметр Хёрста ($0 < H < 1$), определяемый по исследуемой реализации сигнала методом нормированного размаха R/S [9]. Параметр H также определяется по коэффициенту наклона $\log\text{-}\log$ зависимости вариаций R/S от продолжительности выборки τ . При $0 < H < 1$ величина $1 < \beta < 3$, т.е. сигнал отражает нестационарный процесс и относится к типу ОБД. Однако его приращения являются стационарными и, как было предположено в [12] и доказано в [7], для них $\beta' = 1 - 2H'$.

Оба способа были реализованы для оценки типа шумовой составляющей по приращениям координат станций.

В GPS практике широко применяется также алгоритм, основанный на оценке так называемой «реалистичной» ошибки скоростей станций, предложенный в [8]. В этом алгоритме линейный тренд оценивается по данным наблюдений с разной степенью осреднения (по недельным, месячным и т.д. нормальным точкам) и строится зависимость остаточной дисперсии (χ^2) от продолжительности выборки осреднения. Полученная экспоненциальная зависимость экстраполируется на теоретически бесконечную продолжительность наблюдений выбором соответствующего масштабного множителя, что и даёт «реалистичную» ошибку скорости.

Практический аспект

Достаточно проблематичным при исследованиях шумовой составляющей сигнала является вопрос о предельной частоте обрезания низкочастотных, часто не периодических, компонент в исследуемом процессе. Как уже упоминалось, для линейного тренда при достаточной продолжительности наблюдений существуют, например, робастные оценки. Вопрос только в том, какую величину ошибки приписать полученным оценкам скоростей станций; поэтому иногда приводят все ошибки [10], доверяя их выбор пользователю.

Не вызывает сомнения необходимость удаления сезонного тренда, имеющего вполне понятный физический смысл (нагрузочные эффекты) и достаточно хорошо моделируемого посредством геофизических данных. Формальное и почти повсеместно применяемое в аналитических центрах использование МНК для аппроксимации годовой и полугодовой гармоник в рядах наблюдений не является оптимальным ввиду псевдогармонического характера большинства геофизических и метеорологических рядов. В настоящее время имеется много способов фильтрации и/или выделения низкочастотных составляющих. В данном исследовании для этого наряду с FFT-фильтрацией применялся вариант сингулярного спектрального анализа в реализации СПбГУ [15].

Если не пытаться строить модели локального характера, например, для тропосферной задержки или картирующей функции, то остальные низкочастотные вариации координат станций следует отнести к шумам.

Заметим, что сезонный компонент предпочтительней удалять из данных до оценки линейного тренда ввиду имеющейся зависимости оценки последнего от присутствия первого [5], особенно учитывая квазипериодический характер сезонных компонент. Эта процедура может иметь итерационный характер, особенно при больших линейных трендах.

Отдельно следует рассматривать ступенчатые изменения в координатах станций. Если нет оснований для их инструментальной интерпретации (сдвиг или смена антенны), а также отсутствуют местные тектонические проявления (в том числе антропогенного происхождения), то, видимо, их также следует отнести к шумам, что приведёт к смещению типа шумов в сторону случайных блужданий.

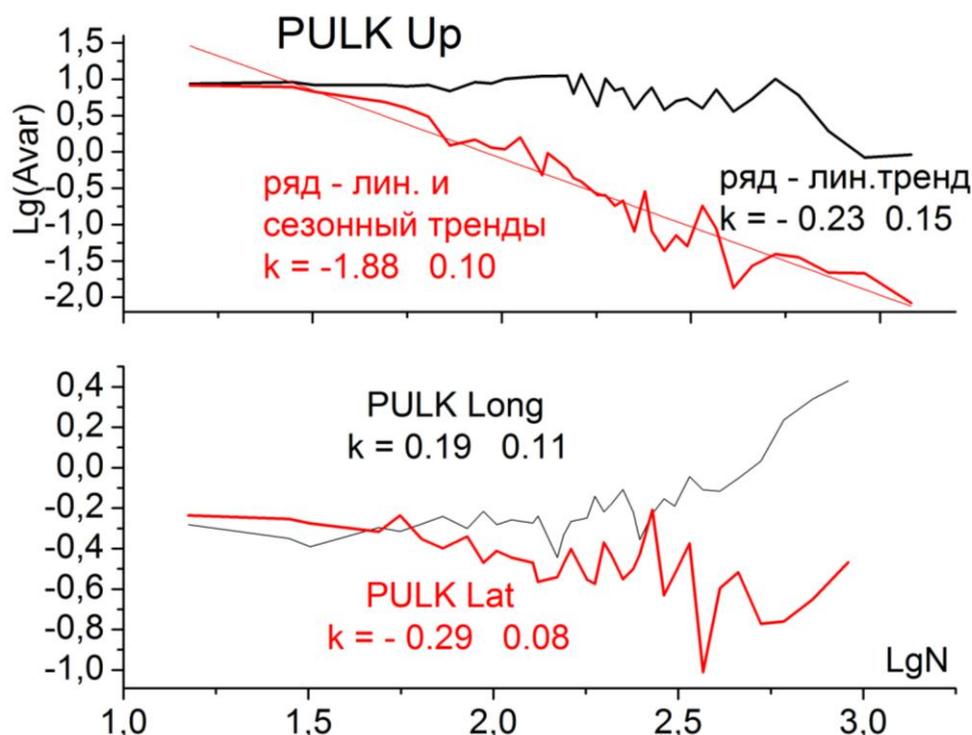


Рис. 6. Остаточные вариации вертикальной компоненты станции PULK.

В табл. 3 представлены результаты оценок типа шумов для каждой компоненты каждой из станций. Заметим, что оценки получаются существенно зависимыми от присутствия квазипериодических компонент, как это видно из рис.6, на котором для вертикальной компоненты PULK представлены соответствующие оценки величины k . Более того, анализируя зависимости $AVAR(\tau)$ и $R/S(\tau)$, заметно, что зачастую эти кривые имеют точки перелома, как правило, в районе периодов 0.5-1.0 года, что свидетельствует о присутствии остаточных низкочастотных вариаций в исследуемых рядах. В этой связи данные, приведённые в табл. 3, отражают усреднённые оценки H и k , которые для некоторых рядов различны до (как правило, розовый шум) и после вышеуказанных периодов, но не выводят их за рамки определённой модели шума. Для станции PULJ приведённые оценки тем более формальны ввиду короткого и разрывного характера наблюдений.

Табл. 3. Ячейки без окраски соответствуют нормальному распределению шумов, тёмно-розовым выделены распределения, соответствующие фликер-шуму, светло-розовым – промежуточный тип шума.

Станции	H'			k		
	φ	λ	h	φ	λ	h
PULJ	0.21 .03	0.30 .01	0.33 .02	-0.12 .15	-0.52 .27	-0.93 .14
PULK	0.22±0.01	0.23±0.01	0.21±0.01	-0.29 ±0 .08	0.19± 0.11	-0.23± 0.15
SPTR	0.28 .02	0.25 .01	0.20 .02	-0.16 .16	0.09 .10	-0.82 .10
TOILn	0.27 .01	0.24 .02	0.23 .02	-1.54 .34	-1.25 .33	-1.55 .33
TOILt	0.31 .02	0.34 .02	0.26 .01	-.01 .20	-0.28 .15	-0.12 .32
TOILi	0.25 .01	0.25 .01	0.26 .01	1.56 .15	1.93 .14	-0.05 .25
PULK-SPTR	0.23 ± 0.02			-1.04 ± 0.37		

Видно, что, как и для большинства станций международных GPS-сетей [6], распределение шумов на исследуемых станциях близки к фликер-шумам или занимают промежуточное положение между белым и розовым шумами. В табл.4 представлены ошибки скоростей исследуемых станций в зависимости от всех типов распределения шумов, вычисленные по вышеприведённым формулам для σ_n , σ_f и σ_b с использованием оценок $ADEV$ из табл. 2. Видно, что для исследуемых станций оценка ошибок скоростей, соответствующих фликер-шумам и нормальному распределению, наиболее адекватна ошибке, полученной для средневзвешенного значения скоростей из трёх станций (табл.2).

Табл. 4. Ошибки скоростей станций в зависимости от типа распределения шумов.

Станции (N)	σ_f			σ_n			σ_b		
	φ	λ	h	φ	λ	h	φ	λ	h
PULJ (853)	0.47	0.40	1.70	0.07	0.06	0.26	0.99	0.84	3.59
PULK (3585)	0.10	0.08	0.33	0.01	0.01	0.03	0.42	0.34	1.39
SPTR (1936)	0.20	0.18	0.67	0.02	0.02	0.07	0.60	0.54	2.07

Станция PULK является единственной из исследуемых станций, входящая в международную европейскую GPS-сеть (EPN). По результатам наших исследований следует признать неадекватными «реалистические» ошибки для скоростей станции PULK (± 0.40 , ± 0.35 , ± 1.94 мм/год, соответственно по широте долготе и высоте), вычисленные за период с 2008 года в EPN. Эти оценки близки к оценкам в случае их распределения по типу случайных блужданий для периода в 5 лет (см. табл.4), что не подтверждается ни внутренней сходимостью территориально близких GPS-станций, ни прямой оценкой типа распределения шумов на этих стан-

циях. Некоторое объяснение этому расхождению оценок может состоять в том, что, как показано в данной работе, не учёт или формальный учёт сезонных вариаций координат смещает модель в сторону коричневого шума тем больше, чем больше амплитуда этих вариаций. В этом смысле использование *AVAR* предпочтительнее χ^2 , применяемого в алгоритме «реалистичной» оценки. Кроме того EPN-оценки определены по половине реализации ряда PULK, что также существенно для любых оценок.

Выводы

Низкочастотные изменения координат станций, расположенных на территории Пулковской обсерватории, имеют схожие амплитуды, но значительные фазовые расхождения для разных составляющих координат. Эти вариации сопоставлены с сезонными атмосферными и гидрологическими нагрузочными эффектами.

Определён тип шумов на исследуемых станциях, оказавшийся близким к фликер-шумам. Получены оценки ошибок скоростей станций в зависимости от типа шумов, характерных для каждой станции. Вычислены компоненты средневзвешенной скорости локальной сети станций в Пулково.

Подтверждена достоверность аномально низкой вертикальной скорости станции PULK по отношению к соседним GPS-станциям в районе Финского залива, что, вероятно, объясняется геологическими и гидрологическими особенностями строения пулковского холма.

Литература:

1. Горшков В.Л., С.С. Смирнов, Н.В. Щербакова, 2012. Нагрузочные эффекты в ГНСС-наблюдениях при исследовании региональной геодинамики. Вестник Санкт-Петербургского университета, (2012), №2,
2. Кроновер Р.М., 2000, Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. Постмаркет, Москва, с. 387.
3. Allan, D.W. and J. A. Barnes, 1981, A Modified “Allan Variance” with Increased Oscillator Characterization Ability, Proceedings of the 35th Annual Frequency Control Symposium, 470–475.
4. Assinovskaya B., Shchulin J., Gorshkov V., Shcherbakova N., 2011. On recent geodynamics of the Eastern Baltic Sea region. *Baltrica*, 24 (2), 61-70. Vilnius.
5. Blewitt, G. and D. Lavallée, 2002. Effect of annual signals on geodetic velocity, *J. Geophys. Res.*, 107(B7), 2145, doi:10.1029/2001JB000570.
6. Feissel-Vernier M., O. de Viron, and K. Le Bail, 2007, Stability of VLBI, SLR, DORIS, and GPS positioning, *Earth Planets Space*, 59, 475–497.

7. Flandrin P., 1989. On the spectrum of Fractional Brownian motion, IEEE trans. on inform. theory, Vol. 35, No. 1, 197-199.
8. Herring T., 2003. MATLAB Tools for viewing GPS velocities and time series. GPS Solutions, Vol. 7, No. 3, 194-199.
9. Hurst H.E., 1957. A suggestial statistical model of some time series which occur in Nature, Nature, v.180, № 4584, pp.494-495.
10. Lidberg M., J. M. Jonsson, H.-G. Scherneck, G.A.Milne, 2009. Recent results base on continuous GPS observations of the GIA process in Fennoscandia from BIFROST, J. Geodyn. (2010), doi:10.1016/j.jog. 2009.11.010.
11. Mandelbrot B.B., 1982, The fractal geometry of Nature, NY, Freeman.
12. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W., 1968. Fractional Brownian motion, fractional noises and application, SIAM Review., V.10, No.4, 422-437.
13. Petrov L., Boy J.-P., 2004. Study of the atmospheric pressure loading signal in VLBI observations, J. Geophys. Res., 10.1029/2003JB002500, Vol. 109, No. B03405.
14. Williams S.D.P., 2003. The effect of coloured noise on the uncertainties of rates estimated from geodetic time series. J. Geodesy (2003) 76, 483—494.
15. <http://www.gistatgroup.com/gus/programs.html>