

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Д.УШИНСКОГО”

На правах рукописи

Байдин Алексей Эдуардович

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ И ТОЧНОСТИ
НАБЛЮДЕНИЙ ВИЗУАЛЬНО-ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД**

Специальность 01.03.01 – астрометрия и небесная механика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Перов Николай Иванович

Ярославль – 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ГЛАВА I. Классические методы определения орбит визуально-двойных звезд	12
§ 1.1 Значение исследований визуально-двойных звезд для современной науки	12
§ 1.2 Анализ известных методов определения орбит	15
§ 1.3 Кинематический метод определения эллиптических и гиперболических орбит, построенный на основе закона площадей	29
§ 1.4 Применение метода подбора и генетических алгоритмов для определения орбит	37
Выводы	45
ГЛАВА II. Определение орбит визуально-двойных звезд по коротким дугам	48
§ 2.1 Трудности, возникающие при вычислении орбит по наблюдениям на коротких дугах	48
§ 2.2 Определение орбит методом ПВД, его преимущества в сравнении с классическими методами и недостатки	54
§ 2.3 Динамический метод определения орбит, близких к круговым	58
§ 2.4 Применение метода подбора, использование далеких по времени старых наблюдений для уточнения элементов орбит	62
§ 2.5 Методы, требующие современных высокоточных наблюдений	70
§ 2.6 Оценка погрешностей элементов орбит	72

§ 2.7	Определение орбит с помощью генетических алгоритмов по наблюдениям, покрывающим короткие дуги.....	76
	Выводы.....	86
ГЛАВА III. Численные эксперименты с модельными и реальными данными.....		89
§ 3.1	Особенности алгоритмов получения модельных наблюдений двойных звезд.....	89
§ 3.2	Изучение работы метода ПВД.....	96
§ 3.3	Метод изучения точности наблюдений, работающий с данными одного инструмента.....	120
§ 3.4	Изучение точности наблюдений с помощью последовательного уточнения.....	128
	Выводы.....	136
Заключение.....		139
Литература.....		141
Приложение. Особенности наиболее часто используемых алгоритмов.....		150

Введение

Изучение движения двойных и кратных звезд всегда вызывало большой интерес у исследователей. Это связано с тем, что двойные звезды являются единственным источником для получения масс звезд. Изучение двойных звезд показало фундаментальность закона всемирного тяготения во Вселенной, дало информацию о массах, светимостях и размерах звезд, позволило описать их эволюцию.

К настоящему времени накоплен очень богатый наблюдательный материал по визуально-двойным звездам. За многими объектами наблюдения ведутся уже около двухсот лет. Но даже такие временные интервалы являются незначительными в астрономических масштабах, и орбиты многих объектов из-за малой длины дуги, охваченной наблюдениями, не определены. В Вашингтонском каталоге содержится информация более чем о 100000 визуально-двойных звезд [86], шестой каталог орбит [75] включает около 2700 определенных орбит.

Известно множество методов определения орбит визуально-двойных звезд: метод Тиле-Иннеса-ван ден Боса [40], Анрото-Стьюарта [22], Цвирса [22], Ковальского [49], Млодзеевского [39], метод противоположных точек Данжона [40], метод ПВД [28, 31], метод Докобо [65], метод дифференциальных поправок по позиционному углу [40], метод, развитый в CHARA [73], и др. Для обработки современных спекл-интерферометрических и фотографических наблюдений применяется метод дифференциальных поправок, использующий одновременно позиционные углы и разделения [44, 49]. Появляются методы определения орбит по визуальным и спектральным наблюдениям – метод дифференциальных поправок по трем величинам Морби [88], обобщенный метод Докобо [66], метод Пурбе [96]. Усовершенствование методов ведется, начиная с первой половины XIX века, но и у современных методов можно встретить недостатки: проблемы со сходимостью, неуправляемое изменение весов наблюдений, значительные вычислительные затраты.

Основная причина, по которой орбиты большинства визуально-двойных звезд не определены – малая длина дуги, охваченная наблюдениями. Поэтому большой интерес в настоящее время вызывают методы, работающие на коротких дугах и дающие при этом удовлетворительные результаты. Классические методы справиться с подобными задачами неспособны. Для их решения необходимо разраба-

тивать новые динамические подходы [19]. Наибольшую известность из динамических методов получил метод параметров видимого движения (ПВД). Он широко используется для определения орбит по коротким дугам уже четыре десятилетия [28, 31, 33, 47].

На протяжении многих лет исследователи пытаются изучать возмущения в движении одиночных, двойных и кратных звезд, используя позиционные наблюдения. Одной из основных целей является обнаружение планетных систем [24, 97, 106]. Большинство предсказаний прошлых лет о наличии планет с массами порядка массы Юпитера у ближайших звезд не оправдались, в настоящее время в связи с реализацией космической миссии Gaia положение может резко измениться [60, 70, 71]. Накопление данных, получаемых с помощью звездных интерферометров, со временем должно привести к появлению возможности изучения возмущений, связанных с приливными и вращательными деформациями [20]. Интересна задача о движении в тройных звездных системах [18, 25]. Теория Луны предсказывает вековые возмущения $\sim 0.001-0.01$ °/год и периодические с амплитудой для угловых расстояний до $0''.03$, периастра до 3° [8]. Точности современных данных должно хватить для изучения возмущений в тройных системах, но теория Луны накладывает серьезные ограничения на выбор объектов для исследования.

Результаты большинства новых задач (определение неизвестной орбиты по короткой дуге, изучение возмущений в движении звезд), как правило, находятся на границе того, что позволяет современная точность наблюдений. Поэтому актуальным является вопрос о точности наблюдений, полученных на различных инструментах с использованием различных методов измерений. Изучению точности визуальных, фотографических и спекл-интерферометрических наблюдений посвящено множество работ [67, 74, 77, 79, 93, 94]. Высокую астрометрическую точность дают интерферометры с длинной базой, например, Palomar Testbed Interferometer (PTI) $\sim 10^{-4}''$ [84]. Знания о погрешностях различных инструментов позволяют присваивать веса наблюдениям, что снижает влияние данных более низкого класса точности на результаты.

Цель диссертационной работы.

Целью работы является исследование относительных движений двойных и кратных звезд. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Проанализировать известные методы определения орбит, написать компьютерные программы для обработки наблюдений.
2. Разработать новые методы определения орбит.
3. Для присваивания весов определить погрешности наиболее распространенных техник наблюдений двойных звезд.
4. Исследовать особенности работы метода параметров видимого движения.

В работе использовались два языка программирования (Pascal и РНР), было выполнено большое количество численных экспериментов с реальными и модельными данными.

Научная новизна работы.

1. Впервые определены орбиты 17 визуально-двойных звезд по наблюдениям на коротких дугах.
2. Произведено несколько усовершенствований метода Харткопфа и др. [73]: три величины, определяемые подбором, предложено определять с помощью генетических алгоритмов, это значительно сократило время вычислений и повысило их точность; при выборе новой популяции в генетическом алгоритме наложены дополнительные условия, использующие сумму масс и относительную лучевую скорость, это позволило применить метод для определения орбит по коротким дугам.
3. Впервые реализован алгоритм определения орбиты, основным уравнением в котором является закон площадей.
4. Определены диапазоны длин дуг, охваченных наблюдениями с заданной точностью, при которых метод ПВД работает эффективно. Проанализированы алгоритмы вычисления параметров видимого движения.
5. Разработано несколько модификаций метода ПВД (только одну из них в настоящее время в силу причин, раскрытых в диссертации, можно использовать на практике для определения орбит).
6. Предложены новые методы изучения точности наблюдений визуально-двойных звезд.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Описанные в диссертации новые методы можно применить для определения элементов орбит по короткой дуге и при наличии проблем со сходимостью у других методов.

Впервые определенные орбиты 17 визуально-двойных звезд заметно пополняют список орбит долгопериодических широких пар и могут быть использованы для исследования особенностей относительного движения широких пар в нашей Галактике.

Результаты численных экспериментов, проведенных с методом ПВД, раскрывают особенности его работы на дугах различной длины при различной точности наблюдений, поэтому могут быть полезны специалистам из ГАО РАН.

Предложенные методы изучения точности наблюдений удобны для использования. Вычисленные значения среднеквадратичных отклонений для наиболее распространенных техник измерений четвертого интерферометрического каталога позволяют присваивать веса наблюдениям.

Результаты работы могут применяться во всех научных учреждениях, занимающихся изучением двойных и кратных звезд.

Автор выносит на защиту:

- методы определения орбит: модифицированный метод Харткопфа и др., модифицированный метод ПВД, метод, в основе которого лежит закон площадей;
- орбиты визуально-двойных звезд, определенные в ходе выполнения исследования (орбиты 17 звезд были определены впервые);
- результаты численных экспериментов, проводимых с методом ПВД;
- методы изучения точности наблюдений визуально двойных звезд, среднеквадратичные погрешности наблюдений отдельно взятых инструментов.

Структура и содержание работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы (108 наименований) и приложения, содержит 31 рисунок и 65 таблиц. Общий объем работы составляет 156 страниц.

Первая глава посвящена исследованию классических методов. Анализируются: геометрический метод, метод Тиле-Иннеса-ван ден Боса, Данжона, Докобо, Паласиоса, дифференциальных поправок по позиционному углу и разделению, дифференциальных поправок по декартовым координатам, метод, развитый в CHARA. Перечисленные методы использовались в диссертации для определения элементов орбит. Разработаны новые методы определения орбит: 1) метод, использующий закон площадей; 2) методы, в основе которых лежат генетические алгоритмы.

Во второй главе речь идет о методах определения орбит по наблюдениям, покрывающим короткие дуги. Много внимания уделено динамическим методам. Подробно описан алгоритм метода параметров видимого движения (ПВД). Разработано несколько модификаций метода ПВД: 1-ая группа методов использует старые наблюдения для определения нескольких неизвестных, необходимых для вычисления орбиты; 2-ая группа методов требует дополнительных высокоточных данных: параллаксов обеих звезд, относительных лучевых скоростей для нескольких моментов времени. Предложен динамический метод определения круговой орбиты, не требующий значений суммы масс компонентов и относительной лучевой скорости. Рассмотрены трудности, с которыми сталкиваются классические методы при обработке наблюдений, распределенных на коротких дугах. Доказано, что точности современных звездных интерферометров достаточно для определения орбит классическими методами, если наблюдениями охвачены дуги более 25° . Аналогичные эксперименты с совокупностью визуальных, фотографических и спекл-интерферометрических наблюдений показали, что орбиты по короткой дуге определяются очень ненадежно. Доработан метод, описанный в первой главе, в основе которого лежат генетические алгоритмы. С помощью дополнительных данных (сумм масс и относительных лучевых скоростей) мы изменили условие отбора в новую популяцию. В результате точность элементов орбит, вычисляемых по наблюдениям на коротких дугах, возросла. Разработанным методом впервые определены орбиты 17 звезд каталога Отто Струве [102].

В третьей главе много внимания уделено численным экспериментам с модельными данными, описан метод получения модельных данных. Изучены особенности работы метода ПВД на дугах различной длины при различной точности наблюдений. Доказано, что имеется диапазон длин дуг, охваченных наблюдениями, оптимальный для определения орбиты методом ПВД. Чем меньше точность наблюдений, тем большую нужно использовать длину дуги для получения надежных результатов. Построены ограничивающие кривые, они позволяют в зависимости от точности наблюдений выбрать длину дуги, по которой следует определять орбиту методом ПВД. Предложены два метода оценки точности наблюдений: 1) работающий с данными одного инструмента и учитывающий малое количество наблюдений; 2) работающий с данными различных классов точности и учитывающий вза-

имное влияние наблюдений. Формулы, лежащие в основе алгоритмов методов, получаются из общих теоретических соображений, особенности работы методов изучены в ходе численных экспериментов. С помощью первого метода оценена точность наблюдений четвертого интерферометрического каталога [76]: 1) CHARA speckle; 2) выполненных на БТА; 3) полученных Хорчем и др. Второй метод применен для изучения точности данных CHARA speckle и РТИ [84].

В заключении перечисляются основные результаты и выводы диссертации. В приложении рассмотрены особенности реализации наиболее часто применяемых компьютерных программ.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. “Чтения Ушинского”, ЯГПУ, март, 2006-2015 (ежегодно).
2. Восьмом съезде Астрономического Общества и Международного симпозиума “Астрономия – 2005: состояние и перспективы развития”, ГАИШ МГУ, 30 мая – 6 июня, 2005.
3. Всероссийской астрономической конференции: “Тесные двойные звезды в современной астрофизике”, ГАИШ МГУ, 22-24 мая, 2006.
4. Международном конгрессе “Нелинейный динамический анализ – 2007” (посвящен 150-летию со дня рождения академика А.М. Ляпунова), СПбГУ, 4-8 июня, 2007.
5. Международной научной конференции “Астрономия и астрофизика начала XXI века”, ГАИШ МГУ, 1-5 июля, 2008.
6. Всероссийской астрономической конференции (ВАК-2010) “От эпохи Галилея до наших дней”, САО РАН, 13-18 сентября, 2010.
7. Научной конференции “Астрономия в эпоху информационного взрыва: результаты и проблемы”, ГАИШ МГУ, 28 мая – 1 июня, 2012.
8. V Пулковской молодежной астрономической конференции, ГАО РАН, 9-11 июня, 2014.
9. Научной конференции “Астрономия от ближнего космоса до космологических далей”, ГАИШ МГУ, 25-30 мая, 2015.

10. Семинаре отдела Позиционной астрономии. Доклад “Изучение методов определения орбит и точности наблюдений визуально-двойных звезд” (представление кандидатской диссертации), ГАО РАН, 14 декабря, 2016.

Результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Байдин А.Э. О вековых и периодических возмущениях в тройных звездных системах // Ярославский педагогический вестник. Серия «Физико-математические и естественные науки». – 2010. – №2. – С. 71-77. (журнал рекомендован ВАК)
2. Байдин А.Э. Особенности определения орбит визуально-двойных звезд на основе наблюдений коротких дуг видимого движения // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – Т. III (Естественные науки). – №4. – С. 32-39. (журнал рекомендован ВАК)
3. Байдин А.Э. Анализ классических методов определения орбит визуально-двойных звезд // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – Т. III (Естественные науки). – №4. – С. 71-75. (журнал рекомендован ВАК)
4. Байдин А.Э. Определение орбит визуально-двойных звезд с помощью генетических алгоритмов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7. – №1. – С. 11-19. (журнал рекомендован ВАК)
5. Байдин А.Э., Перов Н.И., Романенко Л.Г. Определение орбит визуально-двойных звезд, открытых Отто Струве в Пулковско // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2018. – Т. 5(63). – Вып. 1. – С. 148-157. (журнал рекомендован ВАК)
6. Байдин А.Э. Постановка лабораторной работы “Расчет невозмущенных орбит визуально-двойных звезд по пяти и более наблюдениям” // Сборник «Методика преподавания астрономии» / под ред. А.Ю. Румянцева. – Магнитогорск: МаГУ, 2005. – С. 66-68.
7. Байдин А.Э. Определение орбит визуально-двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. – С. 66-71.
8. Байдин А.Э. Метод определения элементов орбиты визуально-двойной звезды для эллиптического и гиперболического движения // Электронный научный журнал

«Исследовано в России». – 2007. – С. 480-490. – Режим доступа: <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2007/044.pdf>.

9. Байдин А.Э. Особенности современных методов определения орбит по коротким дугам // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – С. 36-42.

10. Байдин А.Э. Новые подходы определения орбит визуально-двойных звезд по коротким дугам // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 60-66.

11. Байдин А.Э. Определение веса позиционных наблюдений визуально-двойных звезд при вычислении орбит // Сборник «Инновационная деятельность в астрономии, астрономическом образовании и просвещении» / под ред. Н.И. Перова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 115-127.

12. Байдин А.Э. О систематическом ходе невязок при работе с наблюдениями визуально-двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. – С. 63-73.

13. Байдин А.Э. Определение орбит ярких визуально-двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012. – С. 56-64.

14. Байдин А.Э. Особенности алгоритмов получения эталонных наблюдений двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2014. – С. 9-19.

15. Байдин А.Э. Изучение точности спекл-интерферометрических измерений двойных звезд // Известия ГАО в Пулкове. – 2015. – №222. – С. 5-10.

16. Байдин А.Э. Определение орбит визуально-двойных звезд STF каталога по коротким дугам // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2017. – С. 185-191.

Глава I. Классические методы определения орбит визуально-двойных звезд

§ 1.1 Значение исследований визуально-двойных звезд для современной науки

При изучении движения визуально-двойных звезд обычно используют следующие предположения [20]: 1) тела образуют гравитационно-изолированную систему; 2) движение тела обусловлено силой ньютоновского тяготения; 3) тела рассматриваются как точечные массы. При данных допущениях в случае системы двух тел траектория движения представляет коническое сечение [53]

$$p/r_k = 1 + e \cos v_k, \quad 1.1.1$$

где p и e – параметр и эксцентриситет орбиты, r_k – расстояние между телами, v_k – истинная аномалия. Уравнение справедливо для всех возможных движений двух тел: круговых, эллиптических, параболических и гиперболических.

Для замкнутой системы момент импульса сохраняется (второй закон Кеплера)

$$M = m r_k^2 \dot{v}_k, \quad 1.1.2$$

где m – приведенная масса.

Если полная механическая энергия системы отрицательна, то движение происходит по замкнутой круговой или эллиптической орбите. Из законов сохранения энергии и момента импульса для эллиптического движения можно получить уравнение Кеплера [41]

$$E_k - e \sin E_k - n(T_k - Tp) = 0, \quad 1.1.3$$

и уравнение для гиперболического движения

$$e \operatorname{sh} F_k - F_k - n(T_k - Tp) = 0, \quad 1.1.4$$

где E_k – эксцентрическая аномалия, F_k – величина, аналогичная эксцентрической аномалии [46].

Формула, связывающая истинную и эксцентрическую аномалию, выводится из геометрических отношений [48]

$$\operatorname{tg} \frac{v_k}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E_k}{2}. \quad 1.1.5$$

В телескопы наблюдается видимая орбита, которая получается в результате проецирования истинной орбиты на картинную плоскость [40]. Непосредственно измеряются: ρ_k – разделения между компонентами в секундах дуги, θ_k – позиционные углы между направлением на северный полюс мира и прямой, соединяющей компоненты пары, T_k – эпохи наблюдений. При переводе наблюдений с одной эпохи на другую необходимо учитывать смещение положения северного полюса мира в результате прецессии Земли и собственное движение звезды. По этим причинам вводятся поправки углов θ_k [39]

$$\Delta\theta_{k(pr)} = -0^\circ.0056 \sin \alpha \sec \delta (T_k - T_0), \quad 1.1.6$$

$$\Delta\theta_{k(\mu)} = -\mu_\alpha \sin \delta (T_k - T_0), \quad 1.1.7$$

где α и δ – прямое восхождение и склонение звезды, T_0 – эпоха, к которой приводятся наблюдения, T_k – эпоха наблюдений, μ_α – собственное движение по прямому восхождению, выражено в $^\circ/\text{год}$. В работе используются данные каталога Hipparcos [104]. Вместо μ_α в нем представлена нормированная к большому кругу величина $\mu_\alpha^* = \mu_\alpha \cos \delta$, измеряемая в угловых миллисекундах за юлианский год [55], поэтому формула (1.1.7) принимает вид

$$\Delta\theta_{k(\mu)} = -2.78 \times 10^{-7} \frac{\mu_\alpha^*}{\cos \delta} \sin \delta (T_k - T_0). \quad 1.1.8$$

Формулы (1.1.6-1.1.8) являются приближенными, они справедливы только в случае выполнения условия $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$, то есть когда поправки малы. Поправки имеют малую величину для большинства звезд, исключение составляют звезды, расположенные около северного или южного полюса, в этом случае необходимо воспользоваться точными формулами [39].

Определим в качестве примера величины поправок позиционного угла за 1 год ($T_k - T_0 = 1$) для нескольких звезд. Результаты представлены в табл. 1. Координаты звезд взяты из шестого каталога орбит [75] на эпоху 2000, собственные движения из каталога Hipparcos.

В таблице рассмотрены две близкие к нам звезды (ADS 48 и 14636) со значительным собственным движением, но и для них $|\Delta\theta_{k(\mu)}| < 10^{-3} \text{ }^\circ/\text{год}$. Собственное движение большинства звезд не превышает 150 mas/год, в этом случае при склоне-

ниях $\delta < 65^\circ$ поправки $\Delta\theta_{k(\mu)} < 10^{-4}$ °/год, поэтому их можно не учитывать. В случае широких пар при определении поправок необходимо брать координаты главной компоненты.

Таблица 1. Поправки позиционного угла						
ADS	HIP	α (h m s)	δ (° m s)	$\mu_\alpha \cos \delta$, mas/год	$\Delta\theta_{k(pp)}$, °/год	$\Delta\theta_{k(\mu)}$, °/год
48	473	00 05 40.28	45 48 44.8	878.73	-0.0002	-0.00025
9626	75411	15 24 29.54	37 22 37.1	-147.68	0.0055	0.00003
14636	104214	21 06 53.94	38 44 57.8	4155.10	0.0049	-0.0009

Движение визуально-двойной звезды описывается с помощью динамических и геометрических элементов орбиты [40]. К динамическим элементам (параметрам истинной орбиты) относят: P – период, n – среднее движение, T_p – эпоху прохождения периастра, e – эксцентриситет, a – большую полуось. Геометрические элементы определяют ориентацию истинного эллипса в пространстве. Выделяют две системы геометрических элементов: элементы Кэмпбелла и элементы Тиле-Иннеса, удобные для работы в декартовой системе координат. К элементам Кэмпбелла относят: i – наклонение орбиты, Ω – позиционный угол линии узлов, ω – угол между линией узлов и периастром. Проецируя радиус-вектор и разделение на линию узлов и перпендикулярное ей направление, получаем уравнения, связывающие элементы истинной орбиты с наблюдаемыми углами

$$\rho_k \cos(\theta_k - \Omega) = r_k \cos(v_k + \omega) \text{ и } \rho_k \sin(\theta_k - \Omega) = r_k \sin(v_k + \omega) \cos i. \quad 1.1.9$$

Одна из целей исследования визуально-двойных звезд – определение элементов орбит. Для этого в зависимости от точности и числа наблюдений, длины наблюдаемой дуги, распределения наблюдений на дуге необходимо выбрать оптимальный метод определения орбиты. В основе любого метода лежат уравнения и системы уравнений, связывающие наблюдаемые и вычисляемые величины. Наблюдения содержат ошибки, поэтому в уравнениях ставятся знаки приближенного равенства. Для решения подобных систем уравнений необходимо применять численные методы. Вычисленные элементы орбит должны давать минимальные невязки по наблюдаемым разделениям и позиционным углам или минимальную среднеквадратичную ошибку по ним. Эта цель должна быть заложена в любую методику изначально в процессе ее создания, иначе наблюдениям будут совершенно неконтролируемо задаваться различные веса. В основе метода могут лежать урав-

нения истинной орбиты (1.1.1-1.1.4) или видимой – закон площадей и уравнение кривой второго порядка, геометрические отношения (1.1.9), каноническое уравнение эллипса, гиперболы, параболы и др.

Двойные звезды – единственный источник прямых методов определения масс звезд. Используя третий закон Кеплера, можно определить суммарную массу компонентов

$$M_A + M_B = (a / \pi_t)^3 / P^2, \quad 1.1.10$$

где M_A и M_B – массы компонентов двойной звезды в массах Солнца, π_t – тригонометрический параллакс (в тех же единицах, что и a).

Для вычисления суммарной массы помимо периода и большой полуоси необходимо использовать параллакс звезды. Параллакс является очень малой величиной и входит в уравнение в третьей степени, поэтому его неточное значение может сильно изменить получаемый результат. Ранее плохое знание параллаксов значительно ограничивало прогресс в области определения масс. В настоящее время данная проблема решена. Определение параллаксов более 100000 избранных звезд вошло в программу космической миссии Гиппаркос, осуществленной в 1989 году [55, 104].

Для вычисления масс звезд в двойной системе кроме суммарной массы необходимо знать отношение масс (M_A/M_B). Его можно найти, используя значения лучевых скоростей компонентов или изучив видимое движение компонентов относительно далеких звезд фона [40].

§ 1.2 Анализ известных методов определения орбит

Методы определения орбит визуально-двойных звезд делятся на графические и аналитические. В связи с развитием вычислительной техники графические методы в настоящее время имеют только исторический интерес. Также потеряли актуальность методы, накладывающие определенные условия на наблюдения, например, метод противоположных точек Данжона [40].

Методы, использующие позиционные наблюдения и моменты времени при вычислении элементов орбиты, можно отнести к кинематическим, такими являются большинство методов двух прошлых столетий [22, 40, 56], их также называют

классическими. В настоящее время получили развитие динамические подходы, они позволяют определить орбиту по наблюдениям, покрывающим короткие дуги. Отличительной особенностью этих методов является использование разложений относительных координат по степеням времени и дополнительных данных: тригонометрических параллаксов, лучевых скоростей и сумм масс компонентов, которые задаются изначально или являются результатом промежуточных вычислений. В этой главе рассматриваются только кинематические подходы определения орбит.

Точность графических методов в основном определяется аккуратностью геометрических построений или даже выработанным навыком вычислителя и везением, то есть зависит от субъективных факторов. Поэтому графические подходы трудно подвергнуть какому-либо численному анализу. Напротив, аналитический метод, использующий различные первые приближения, для одного и того же набора наблюдений дает, как правило, одинаковые в пределах вычислительной погрешности результаты. Аналитические методы ввиду однозначности получаемых элементов орбит можно сравнить друг с другом, раскрыв их алгоритмы или статистически изучив с помощью модельных данных.

Наиболее распространенный недостаток аналитических методов – использование операций, изменяющих веса наблюдений: 1) поиск элементов орбиты, наилучшим образом удовлетворяющих уравнениям, а не наблюдениям; 2) применение уравнений, в которых содержатся данные двух или более наблюдений; 3) умножение или деление величин, вычисляемых с помощью наблюдений.

Поясним последнее утверждение на примере. Рассмотрим два наблюдения, отстоящие друг от друга по времени на величину периода и имеющие одинаковую ошибку позиционного угла $\delta\theta$, что дает одинаковую ошибку вычисления площади δS . В этом случае для постоянной площадей имеем два уравнения

$$c_{\text{выч}} = \frac{S_1 + \delta S}{\Delta T_1} = c + \frac{\delta S}{\Delta T_1} \quad \text{и} \quad c_{\text{выч}} = \frac{S_2 + \delta S}{\Delta T_2} = \frac{S_2 + \delta S}{\Delta T_1 + P} = c + \frac{\delta S}{\Delta T_1 + P}, \quad 1.2.1$$

где c – истинное значение постоянной площадей, $c_{\text{выч}}$ – вычисленное значение.

Наблюдения одинаковой точности дают разные точности определения постоянной площадей. Если вычислять видимый эллипс, наилучшим образом удовлетворяющий подобным уравнениям, то первое из них будет в большей степени влиять на конечный результат, так как разность вычисленного и истинного значений по-

стоянной площадей больше, это равносильно заданию различных весов наблюдениям. Устранить описанный недостаток несложно: необходимо перенести величину ΔT в уравнениях (1.2.1) в левую часть равенства.

Геометрический метод.

В геометрическом методе для определения размеров и формы конического сечения, его положения в пространстве используются только разделения и позиционные углы. Это основной недостаток метода, так как время измеряется значительно точнее. Эпохи наблюдений используются только при вычислении периода и момента прохождения периастра. Геометрический метод можно применять для определения первого приближения [12]. Он работает с эллиптическими и гиперболическими орбитами, решение может быть получено независимо от длины дуги, охваченной наблюдениями, по пяти или более относительным положениям звезды-спутника и, как минимум, двум моментам времени наблюдений. На коротких дугах метод дает очень неточные результаты: большинство вычисленных орбит являются гиперболическими.

Компоненты визуально-двойной звезды движутся по эллипсам, если суммарная механическая энергия отрицательна, и гиперболам, когда она положительна. В случае эллиптической орбиты эксцентриситет $e \in (0, 1)$, гиперболической $e \in (1, +\infty)$ [52]. При круговом и параболическом движении эксцентриситеты точно равны 0 и 1. Эти два случая можно считать “идеальными”, реальные орбиты могут быть только близкими к круговым или параболическим. Для таких объектов необходимо воспользоваться методами, специально разработанными для этих частных случаев. Рассматриваемый ниже алгоритм геометрического метода рассчитан на работу с эллиптическими и гиперболическими орбитами.

Относительное движение звезды-спутника в двойной системе описывается с помощью кривой второго порядка [23]

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0. \quad 1.2.2$$

Искомые величинами метода являются коэффициенты A , B , C , D , E уравнения (1.2.2). Видимая траектория звезды-спутника и система координат, в которой производятся наблюдения, изображена на рис. 1.1. Начало отсчета находится в фокусе истинной орбиты, ось OX совпадает с направлением на северный полюс мира,

ось OY в картинной плоскости перпендикулярна OX . Формулы перехода от наблюдаемых величин к прямоугольным координатам звезды-спутника:
 $x_k = \rho_k \cos \theta_k$, $y_k = \rho_k \sin \theta_k$.

Для определения видимой орбиты берется $N \geq 5$ наблюдений. Решение поставленной задачи получаем методом наименьших квадратов. Для этого необходимо найти минимум функции

$$R(A, B, C, D, E) = \sum_{k=1}^n (f(x_k, y_k) - \varphi(x_k, y_k, A, B, C, D, E))^2, \quad 1.2.3$$

где $f(x, y) = 0$ в точках (x_k, y_k) , а $\varphi = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1$.

В случае минимума частные производные

$$\partial R / \partial A = 0, \quad \partial R / \partial B = 0, \quad \partial R / \partial C = 0, \quad \partial R / \partial D = 0, \quad \partial R / \partial E = 0. \quad 1.2.4$$

После нахождения частных производных имеем

$$\begin{cases} \sum [(Ax_k^2 + 2Bx_k y_k + Cy_k^2 + 2Dx_k + 2Ey_k + 1)x_k^2] = 0 \\ \sum [(Ax_k^2 + 2Bx_k y_k + Cy_k^2 + 2Dx_k + 2Ey_k + 1)x_k y_k] = 0 \\ \sum [(Ax_k^2 + 2Bx_k y_k + Cy_k^2 + 2Dx_k + 2Ey_k + 1)y_k^2] = 0 \\ \sum [(Ax_k^2 + 2Bx_k y_k + Cy_k^2 + 2Dx_k + 2Ey_k + 1)x_k] = 0 \\ \sum [(Ax_k^2 + 2Bx_k y_k + Cy_k^2 + 2Dx_k + 2Ey_k + 1)y_k] = 0 \end{cases} \quad 1.2.5$$

Получена система пяти линейных уравнений с пятью неизвестными. Коэффициенты A, B, C, D, E характеризуют траекторию звезды-спутника двойной системы подобно элементам Тиле-Иннеса или Кемпбелла и двум динамическим элементам – большой полуоси и эксцентриситету [40].

Для определения периода и момента прохождения периастра необходимо использовать закон площадей: $\Delta S / \Delta T = c$. Алгоритм определения ΔS рассмотрен в работе [4] и следующем параграфе диссертации. За начало отсчета берется момент прохождения периастра: $\Delta S_{kTp} - c(T_k - T_p) \approx 0$. После замены переменной ($T_{pc} = cT_p$) имеем: $\Delta S_{kTp} - cT_k + T_{pc} \approx 0$. Применив к этим уравнениям (их число равно числу наблюдений) метод наименьших квадратов, получаем

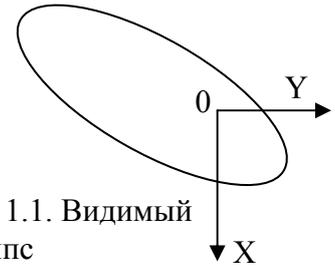


Рис. 1.1. Видимый эллипс

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \Delta S_{kTp} - c \sum_{k=1}^N T_k + NT_{pc} = 0 \\ \sum_{k=1}^N \Delta S_{kTp} T_k - c \sum_{k=1}^N T_k^2 + T_{pc} \sum_{k=1}^N T_k = 0 \end{cases} \quad 1.2.6$$

Используя уравнения (1.2.6), определяем постоянную площадей

$$c = \frac{N \sum_{k=1}^N (\Delta S_{kTp} T_k) - \sum_{k=1}^N T_k \sum_{k=1}^N \Delta S_{kTp}}{N \sum_{k=1}^N (T_k^2) - (\sum_{k=1}^N T_k)^2} \quad 1.2.7$$

Величина T_{pc} находится с помощью любого из уравнений системы (1.2.6), момент прохождения периастра $T_p = T_{pc} / c$.

Положение проекции большой оси истинного конического сечения на картинной плоскости определяется углом $\theta_{Tp} = \arctg((AE - DB)/(DC - BE))$. Этот угол необходим для определения площадей секторов видимого конического сечения ΔS_{kTp} (они являются функцией $\theta_k, \theta_{Tp}, A, B, C, D, E$). Период определяется из формулы $P = S/c$, где S – площадь видимого эллипса.

Коэффициенты A, B, C, D, E , момент прохождения периастра T_p и постоянная площадей c полностью определяют относительное движение визуально-двойной звезды. Зная A, B, C, D, E , можно определить геометрические элементы орбиты (элементы Кэмпбелла): наклонение орбиты i , угол между направлением на северный полюс мира и линией узлов Ω , угол, определяющий положение периастра ω , и динамические элементы: эксцентриситет e и большую полуось a [2, 4]. Аналогичную задачу решает метод Ковальского [49].

Геометрический метод имеет два недостатка: 1) построение видимого конического сечения происходит без использования времени; 2) поставлена задача нахождения минимума сумм квадратов отклонений для кривой второго порядка, а не для невязок наблюдаемых величин, это приводит к неконтролируемому изменению весов наблюдений. Также метод имеет достоинства: 1) не требуются значения первых приближений; 2) работает с эллиптическими и гиперболическими орбитами; 3) сходится независимо от длины дуги, охваченной наблюдениями.

В работе сербских астрономов [91] рассмотрена одна из модификаций геометрического метода: предложено совместно с реальными наблюдениями применять

фиктивные. При использовании (1.2.2) не нужно знать время, поэтому задача сводится к нахождению нескольких фиктивных точек (ρ_i', θ_i') . Позиционные углы на участке дуги, неохваченной наблюдениями, можно выбрать достаточно произвольно, для разделений необходимо задать интервалы возможных значений. В данном методе разделения определяются с помощью подбора: выбираются те значения, при которых среднеквадратичная ошибка минимальна. Рассмотренный метод назван методом Ковальского-Олевича, в дальнейшем Цветкович и Новакович [64] использовали его даже для определения орбит по коротким дугам ($\sim 30^\circ-90^\circ$). Геометрический метод на малых дугах часто дает гиперболические орбиты. Применение фиктивных точек и условия минимальных среднеквадратичных отклонений при выборе элементов орбиты накладывает дополнительные ограничения на решения и может повысить точность вычислений в сравнении с геометрическим методом.

Методы, требующие графического построения видимого эллипса.

В основе графических методик лежит графическое построение видимого эллипса, наилучшим образом удовлетворяющего закону площадей. Построенный эллипс используется для определения постоянной площадей и периода. Остальные элементы орбиты могут быть найдены графическими или аналитическими методами. Основная трудность современных методов заключается как раз в определении видимой или истинной траектории звезды-спутника. К наиболее известным аналитическим методам, требующим построения видимого эллипса, можно отнести методы Ковальского [49] и Тиле-Иннеса-ван ден Боса [40], графическим – Анрото-Стьюарта, Цвирса [22], Млодзеевского [39] и др.

Наибольшее распространение в прошлом столетии получил аналитический метод Тиле-Иннеса-ван ден Боса. Для определения орбиты используются три наблюдения (или средних места) и полученные из графических построений период и постоянная площадей. В основе метода лежит фундаментальное уравнение Тиле:

$$n(T_k - T_j) - nS_{jk} / c = E_k - E_j - \sin(E_k - E_j), \quad 1.2.8$$

где S_{jk} – площадь треугольника с вершинами главная звезда и два относительных положения спутника в моменты времени T_j и T_k , c – постоянная площадей.

Уравнение Тиле выводится из уравнения Кеплера (1.1.3) и формулы, определяющей площади треугольников

$$S_{jk} = \frac{1}{2}(x_j y_k - x_k y_j) = \frac{c}{n}(\sin(E_k - E_j) - e(\sin E_k - \sin E_j)). \quad 1.2.9$$

Из уравнений (1.2.8) по трем наблюдениям определяются разности эксцентрисических аномалий $\alpha = E_2 - E_1$ и $\beta = E_3 - E_2$.

Используя отношения (1.2.9), можно получить

$$e \sin E_2 = (S_{23} \sin \alpha - S_{12} \sin \beta) / (S_{12} + S_{23} - S_{13}), \quad 1.2.10$$

$$e \cos E_2 = (S_{23} \cos \alpha + S_{12} \cos \beta - S_{13}) / (S_{12} + S_{23} - S_{13}). \quad 1.2.11$$

После того как e , E_1 , E_2 и E_3 определены, из уравнения Кеплера вычисляется момент прохождения периастра T_p . Элементы Тиле-Иннеса определяются из отношений, связывающих приведенные координаты с декартовыми в картинной плоскости

$$x_k = AX_k + FY_k, \quad y_k = BX_k + GY_k, \quad 1.2.12$$

где $A = a(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i)$, $B = a(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i)$,

$F = a(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i)$, $G = a(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i)$.

От элементов Тиле-Иннеса можно перейти к элементам Кэмпбелла

$$\operatorname{tg}(\Omega + \omega) = (B - F) / (A + G) \text{ при } 0 < \Omega < 180^\circ, \quad 1.2.13$$

$$\operatorname{tg}(\Omega - \omega) = (B + F) / (A - G), \quad 1.2.14$$

$$\operatorname{tg}^2(i/2) = (B + F) \sin(\Omega + \omega) / ((B - F) \sin(\Omega - \omega)), \quad 1.2.15$$

$$a^2 = (AG - BF) / \cos i. \quad 1.2.16$$

В ряде работ метод Тиле-Иннеса-ван ден Боса называют динамическим [49]. Динамика изучает движения тел в связи с действующими на них силами. В методе Тиле-Иннеса-ван ден Боса не используются значения масс компонентов и не вычисляются скорости и ускорения звезды-спутника в фиксированные моменты времени. Метод следует отнести к кинематическим. По старой терминологии его называли аналитическим. Но стоит отметить, что в основе метода лежит графическое построение видимого эллипса, и именно эти графические построения определяют качество результатов. В настоящее время называть аналитическими не совсем корректно даже методы, не использующие графические построения и не требующие

для получения результатов ничего кроме необходимого количества данных, так как они не содержат аналитических выражений в явном виде для искомых величин и работают на основе численных алгоритмов. Анализ современных методов связан с анализом примененных численных методик.

Основным недостатком метода Тиле-Иннеса-ван ден Боса является необходимость построения видимого эллипса. Кроме того, имеются два недостатка, приводящие к искажению весов наблюдений: 1) при разработке метода не была поставлена задача нахождения минимума суммы квадратов невязок наблюдений; 2) в используемые уравнения входят два наблюдения.

Метод противоположных точек Данжона [40].

Одним из первых методов, не требующих построения видимого эллипса, стал метод противоположных точек Данжона. Для двух противоположных точек уравнение Тиле упрощается

$$M_j - M_k = E_j - E_k - \sin(E_j - E_k). \quad 1.2.17$$

Воспользовавшись формулой (1.1.5), связывающей истинную и эксцентрическую аномалию, для противоположных точек получим

$$\operatorname{tg}(E_2 / 2) = -(1 - e) / (1 + e) \operatorname{ctg}(E_1 / 2). \quad 1.2.18$$

Посредством (1.2.18) и (1.1.5) найдем выражение для разности эксцентрических аномалий

$$\operatorname{tg}((E_2 - E_1) / 2) = -\frac{1 - e \cos E_1}{e \sin E_1} = -(1 - e^2)^{1/2} / (e \sin \nu_1). \quad 1.2.19$$

Вычисления по методу Данжона начинаются с определения периода двойной звезды непосредственно из наблюдений. Противоположные точки считаются с графически построенной кривой $\theta(t)$. Подставив (1.2.19) в (1.2.17), получим уравнения, связывающие измеряемые моменты времени с искомыми эксцентриситетом и моментом прохождения периастра (истинная аномалия ν_1 является функцией этих двух величин и периода). В настоящее время из уравнений (1.2.17) и (1.2.19) эксцентриситет и момент прохождения периастра можно определить с помощью метода наименьших квадратов, используя два или более набора противоположных точек. Данжон для решения данной задачи ввел новую величину – характеристический угол (Δ)

$$M_2 - M_1 = 180^\circ - \Delta. \quad 1.2.20$$

При фиксированных e и Δ можно рассчитать M_1 по следующему алгоритму: 1.2.20 дает разность средних аномалий, 1.2.17 разность эксцентрических аномалий, 1.2.19 эксцентрическую аномалию, уравнение Кеплера (1.1.3) среднюю аномалию. Прделав данные вычисления для различных эксцентриситетов и характеристических углов, получим таблицы Мюллера.

Разность средних аномалий (1.2.20) максимальна при $v_1 = 90^\circ$, в этом случае справедливы отношения

$$\Delta_{\max} = 180 - 2M_1, \quad M_1 = \arccos e - e(1 - e^2)^{1/2}. \quad 1.2.21$$

Для выбранных противоположных точек необходимо найти $\Delta = 180^\circ - n(t_j - t_k)$, затем Δ_{\max} и e .

Из таблицы Мюллера берутся значения средней аномалии, соответствующие полученным Δ и различным эксцентриситетам, близким к вычисленному. Средние аномалии ($M_k = n(T_k - T_p)$) используются для определения момента прохождения периастра.

Зная e , n , T_p , можно определить истинную аномалию в любой момент времени. Отношения констант Тиле-Иннеса (A/F , B/F , G/F) вычисляются из уравнения, предложенного Данжоном

$$\operatorname{tg} \theta = (B + G \operatorname{tg} v) / (A + F \operatorname{tg} v). \quad 1.2.22$$

После этого из (1.2.13-1.2.15) можно найти углы Ω , ω и i . Для вычисления большой полуоси нужно применить (1.2.12) или выражение, связывающее разделение с истинной аномалией [40]

$$\rho = \frac{a(1 - e^2) \cos(v + \omega)}{1 + e \cos v \cos(\theta - \Omega)}. \quad 1.2.23$$

Для современных данных вместо (1.2.22) можно использовать (1.2.12), что сразу даст элементы Тиле-Иннеса. Такой подход реализуется в методе Харткопфа и др. [73]. Формула (1.2.22) хороша тем, что для определения углов (Ω , ω и i) не используется разделение, но в нее входит тангенс, он может принимать бесконечно большие значения, что неизбежно приведет к росту погрешностей, поэтому перед использованием (1.2.22) лучше преобразовать к виду

$$\alpha \cos \nu \sin \theta - \beta \cos \nu \cos \theta - \gamma \sin \nu \cos \theta + \sin \nu \sin \theta = 0, \quad 1.2.24$$

где $\alpha = A/F$, $\beta = B/F$ и $\gamma = G/F$.

В данной работе методом Данжона определялась орбита ADS 9031. У этой пары имеется более тысячи наблюдений на одном обороте [78], поэтому выбрать противоположные точки было несложно. Полученные элементы орбит мало отличались от результатов других исследователей.

Метод Докобо [65].

Метод Докобо построен на основе уравнения Тиле, но в отличие от метода Тиле-Иннеса-ван ден Боса не требует графического построения видимого эллипса. Для трех наблюдений можно составить три уравнения Тиле, из которых, исключив постоянную площадей и среднее движение, получить

$$F(V-U) - F(V)M + F(U)N = 0, \quad 1.2.25$$

где $F(x) = x - \sin x$, $V = E_3 - E_1$, $U = E_3 - E_2$, $M = \frac{R(T_{12} - ST_{23})}{RT_{13} - ST_{23}}$, $N = \frac{S(T_{12} - RT_{13})}{RT_{13} - ST_{23}}$,

$$T_{jk} = T_k - T_j, \quad R = \frac{S_{12}}{S_{13}}, \quad S = \frac{S_{12}}{S_{23}}.$$

Если V или U известна, то вторую величину можно найти из уравнения (1.2.25). В методе Докобо величина V определяется подбором, она должна быть такой, чтобы полученные невязки не давали систематического хода. После определения V и U из уравнений Тиле можно вычислить среднее движение (n) и постоянную площадей (c), оставшиеся элементы орбиты найти по формулам метода Тиле-Иннеса-ван ден Боса (1.2.10 – 1.2.16).

Из (1.2.10, 1.2.11) получаем

$$e^2 = 1 + \frac{S(1 - \cos U) + 1 - \cos(V - U) - R(1 - \cos V)}{Q}, \quad 1.2.26$$

где $Q = \frac{(RS + R - S)^2}{2RS}$.

Анализируя (1.2.26), Докобо рассмотрел условия существования периодических орбит в зависимости от значений R и S .

Метод Паласиоса [92].

В 1957 г. Паласиос показал, что для определения орбиты визуально двойной звезды необходимо иметь три полных наблюдения (ρ_k, θ_k, T_k) и одно неполное

(θ_4, T_4) . В отличие от Докобо он рассмотрел четыре наблюдения и, следовательно, составил систему шести уравнений Тиле, в ней пять неизвестных $U = E_2 - E_1$, $V = E_3 - E_1$, $W = E_4 - E_1$, n , c , в качестве шестой можно взять ρ_4 . Из пяти уравнений Тиле Паласиос исключил две неизвестные – среднее движение и постоянную площадей, получил систему трех уравнений, аналогичных (1.2.25), с тремя неизвестными V , U , W

$$\begin{cases} F(V - U) - QF(U) = Q'(F(U) - NF(V)) \\ F(W - U) - RF(W) = R'(F(U) - NF(V)), \\ F(W - V) - SF(W) = S'(F(U) - NF(V)) \end{cases} \quad 1.2.27$$

где $F(x) = x - \sin x$, $U = E_2 - E_1$, $V = E_3 - E_1$, $W = E_4 - E_1$, $N = \frac{\rho_2 \sin \theta_{12}}{\rho_3 \sin \theta_{13}}$, $R = \frac{\rho_2 \sin \theta_{24}}{\rho_1 \sin \theta_{14}}$,

$Q = \frac{\rho_3 \sin \theta_{23}}{\rho_1 \sin \theta_{12}}$, $S = \frac{\rho_3 \sin \theta_{34}}{\rho_1 \sin \theta_{14}}$, $Q' = \frac{T_{23} - QT_{12}}{T_{12} - NT_{13}}$, $R' = \frac{T_{24} - RT_{14}}{T_{12} - NT_{13}}$, $S' = \frac{T_{34} - ST_{14}}{T_{12} - NT_{13}}$, $\theta_{jk} = \theta_k - \theta_j$,

$T_{jk} = T_k - T_j$.

Система уравнений (1.2.27) решается приближенными методами. Для функций $F(x)$ из определения дифференциала имеем

$$F(x) = F(x_0) + 2 \sin^2 \frac{x_0}{2} \Delta x, \quad 1.2.28$$

$$F(y - x) = F(y_0 - x_0) - 2 \sin^2 \frac{y_0 - x_0}{2} \Delta x + 2 \sin^2 \frac{y_0 - x_0}{2} \Delta y. \quad 1.2.29$$

Подставив выражения (1.2.28, 1.2.29) в (1.2.27), получим систему трех линейных уравнений для определения поправок ΔV , ΔU , ΔW . После нахождения V , U , W вычисления идут по алгоритму, описанному в методе Докобо.

Вывод формулы (1.2.25) метода Докобо и системы уравнений метода Паласиоса шел, используя уравнения Тиле, которые для реальных наблюдений имеют приближенный характер. Подобные операции необходимо отнести к недостаткам методов. Исключение неизвестных, используя одно из приближенных уравнений (если их больше двух), повышает вес этого уравнения и, как следствие, наблюдений, в него входящих. Также после преобразований у системы уравнений (1.2.27) появилось новое решение ($V = 0$, $U = 0$, $W = 0$), которого не было в исходной системе шести уравнений Тиле. Данное решение получается довольно часто при использовании первых приближений, удобных для вычисления орбит: $U = \theta_2 - \theta_1$,

$V = \theta_3 - \theta_1$, $W = \theta_4 - \theta_1$. В методе Докобо этот недостаток был преодолен тем, что одна из величин определялась подбором.

В данной работе были реализованы два метода на основе идеи Паласиоса: 1) оригинальный алгоритм; 2) шесть исходных уравнений Тиле для четырех наблюдений решены методом наименьших квадратов.

Метод дифференциальных поправок [49].

Метод дифференциальных поправок используется для улучшения первоначально полученной орбиты. Разделения и позиционные углы можно рассматривать как функции шести элементов орбиты и времени:

$$\theta_k = f(n, T_p, e, i, \Omega, \omega, T_k) \text{ и } \rho_k = g(n, T_p, e, a, i, \omega, T_k), \quad 1.2.30$$

где $n = 2\pi / P$ – среднее движение, P – период, T_p – эпоха прохождения периастра, e – эксцентриситет, a – большая полуось, i – наклонение орбиты, Ω – позиционный угол линии узлов, ω – угол между линией узлов и периастром (долгота периастра).

Для приращений функций (1.2.30) при постоянстве времени имеем

$$\begin{cases} \Delta\theta_k = f_n\Delta n + f_{T_p}\Delta T_p + f_e\Delta e + f_i\Delta i + f_\Omega\Delta\Omega + f_\omega\Delta\omega + \varepsilon_{\theta k} \\ \Delta\rho_k = g_n\Delta n + g_{T_p}\Delta T_p + g_e\Delta e + g_a\Delta a + g_i\Delta i + g_\omega\Delta\omega + \varepsilon_{\rho k} \end{cases}, \quad 1.2.31$$

где $\Delta\theta_k = \theta_{k(obs)} - \theta_{k(cal)}$, $\Delta\rho_k = \rho_{k(obs)} - \rho_{k(cal)}$, $\theta_{k(obs)}$ и $\rho_{k(obs)}$ – данные наблюдений, $\theta_{k(cal)}$ и $\rho_{k(cal)}$ – вычисленные по элементам орбиты (первым приближениям или элементам на каждом шаге рекурсии) позиционные углы и разделения, $\varepsilon_{\theta k}$, $\varepsilon_{\rho k}$ – величины, имеющие высший порядок относительно Δn , ΔT_p , Δe , Δa , Δi , $\Delta\Omega$ и $\Delta\omega$. Значения $\varepsilon_{\theta k}$ и $\varepsilon_{\rho k}$ также зависят от ошибок измерений, то есть даже при вычисленных элементах орбит они будут отличны от нуля. Для работы метода дифференциальных поправок необходимо, чтобы $\varepsilon_{\theta k}$ и $\varepsilon_{\rho k}$ не отклонялись значительно от нуля, поэтому при вычислении орбиты требуются хорошие первые приближения и наблюдения, дающие небольшие невязки. Первые приближения при уточнении орбиты можно взять из каталогов или вычислить другим методом.

Частные производные f_n , f_{T_p} , f_e , f_i , f_Ω , f_ω , g_n , g_{T_p} , g_e , g_a , g_i , g_ω определяются из основных уравнений, описывающих кинематику двойных звезд (1.1.3, 1.1.5), и отношений для позиционного угла θ и углового разделения ρ [40]:

$$\operatorname{tg}(\theta_k - \Omega) = \operatorname{tg}(v_k + \omega) \cos i, \quad 1.2.32$$

$$\rho_k = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v_k} \frac{\cos(v_k + \omega)}{\cos(\theta_k - \Omega)} \quad \text{или} \quad \rho_k = a(1 - e \cos E_k) \frac{\cos(v_k + \omega)}{\cos(\theta_k - \Omega)}. \quad 1.2.33$$

Система $2N$ -уравнений (1.2.31) с семью неизвестными решается методом наименьших квадратов (N – число наблюдений, необходимо, чтобы $N \geq 4$). Ставится задача нахождения минимума выражения

$$\sum_{k=1}^N [P_{\theta_k} (\rho_k \varepsilon_{\theta_k})^2 + P_{\rho_k} (\varepsilon_{\rho_k})^2] = \min, \quad 1.2.34$$

где P_{θ_k} и P_{ρ_k} – веса наблюдений или функции весов [7], ρ_k – разделение, оно используется для выравнивания весов уравнений (1.2.31). В случае минимума частные производные выражения (1.2.34) по Δn , ΔT_p , Δe , Δa , Δi , $\Delta \Omega$, $\Delta \omega$ равны 0. Для фотографических и спекл-интерферометрических наблюдений измерения позиционного угла и разделения равнозначны, поэтому в (1.2.34) можно приравнять веса наблюдений разделений и позиционных углов.

Метод дифференциальных поправок можно построить на основе одного из уравнений (1.2.31). Ранее с помощью визуальных наблюдений позиционные углы измерялись гораздо точнее разделений [40], поэтому в методе дифференциальных поправок использовались только позиционные углы, с их помощью вычислялись: P , T_p , e , i , Ω , ω . Разделения применялись для определения большой полуоси a . В настоящее время в связи с появлением методов измерений, дающих равнозначные ошибки ($\sigma_{\Delta \rho}$ и $\sigma_{\rho \Delta \theta}$), используется выше описанный метод.

В методе дифференциальных поправок можно перейти к другим неизвестным: $i^* = \cos i$ и $\varphi = \arcsin e$. Замена переменной i на $\cos i$ в отдельных случаях может отрицательно сказаться на сходимости, так как при неточном задании первых приближений новая переменная может принять значение больше 1. В случае замены e на $\sin \varphi$ [56] ситуация обратная – область изменения ограничивается $|e| \leq 1$.

Метод дифференциальных поправок по декартовым координатам звезды-спутника [44].

Декартовы координаты при фиксированном моменте времени можно представить как функции пяти независимых переменных

$$x = AX + FY = f_1(A, F, e, n, Tp) \text{ и } y = BX + GY = f_2(B, G, e, n, Tp), \quad 1.2.35$$

где $X = \cos E - e$, $Y = (1 - e^2)^{1/2} \sin E$ – приведенные координаты.

Приращение координат

$$dx = XdA + AdX + YdF + FdY, \quad dy = XdB + BdX + YdG + GdY. \quad 1.2.36$$

Дифференциалы приведенных координат

$$dX = \frac{\partial X}{\partial e} de + \frac{\partial X}{\partial n} dn + \frac{\partial X}{\partial Tp} dTp, \quad dY = \frac{\partial Y}{\partial e} de + \frac{\partial Y}{\partial n} dn + \frac{\partial Y}{\partial Tp} dTp. \quad 1.2.37$$

Частные производные X и Y по e , n и Tp

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial e} &= -\sin E * \frac{\partial E}{\partial e} - 1, \quad \frac{\partial X}{\partial n} = -\sin E * \frac{\partial E}{\partial n}, \quad \frac{\partial X}{\partial Tp} = -\sin E * \frac{\partial E}{\partial Tp}, \\ \frac{\partial Y}{\partial e} &= \frac{-e \sin E}{(1 - e^2)^{1/2}} + (1 - e^2)^{1/2} \cos E \frac{\partial E}{\partial e}, \quad \frac{\partial Y}{\partial n} = (1 - e^2)^{1/2} \cos E \frac{\partial E}{\partial n}, \\ \frac{\partial Y}{\partial Tp} &= (1 - e^2)^{1/2} \cos E \frac{\partial E}{\partial Tp}. \end{aligned} \quad 1.2.38$$

Частные производные эксцентрической аномалии определяются из уравнения Кеплера дифференцированием правой и левой частей

$$dE - \sin E de - e \cos E dE = (T - Tp)dn - ndTp, \quad 1.2.39$$

откуда

$$dE = \frac{\sin E}{1 - e \cos E} de + \frac{T - Tp}{1 - e \cos E} dn - \frac{n}{1 - e \cos E} dTp, \quad 1.2.40$$

и окончательно

$$\frac{\partial E}{\partial e} = \frac{\sin E}{1 - e \cos E}, \quad \frac{\partial E}{\partial n} = \frac{T - Tp}{1 - e \cos E}, \quad \frac{\partial E}{\partial Tp} = -\frac{n}{1 - e \cos E}. \quad 1.2.41$$

Используя (1.2.36-1.2.41), для приращений координат можно записать

$$\begin{cases} \Delta x = X\Delta A + YdF + (A \frac{\partial X}{\partial e} + F \frac{\partial Y}{\partial e})\Delta e + (A \frac{\partial X}{\partial n} + F \frac{\partial Y}{\partial n})\Delta n + (A \frac{\partial X}{\partial Tp} + F \frac{\partial Y}{\partial Tp})\Delta Tp + \varepsilon_x \\ \Delta y = X\Delta B + YdG + (B \frac{\partial X}{\partial e} + G \frac{\partial Y}{\partial e})\Delta e + (B \frac{\partial X}{\partial n} + G \frac{\partial Y}{\partial n})\Delta n + (B \frac{\partial X}{\partial Tp} + G \frac{\partial Y}{\partial Tp})\Delta Tp + \varepsilon_y \end{cases} \quad 1.2.42$$

Система $2N$ -уравнений (1.2.42) с семью неизвестными решается методом наименьших квадратов (N – число наблюдений). Для решения необходимо, чтобы $N \geq 4$. Ставится задача нахождения минимума выражения

$$\sum_{k=1}^N [p_k ((\varepsilon_{xk})^2 + (\varepsilon_{yk})^2)] = \min , \quad 1.2.43$$

где p_k – веса наблюдений.

§ 1.3 Кинематический метод определения эллиптических и гиперболических орбит, построенный на основе закона площадей

Момент импульса визуально-двойной звезды сохраняется $M = mr^2\dot{\nu} = const$ [41]. Выражение $(1/2)r^2d\nu$ является площадью сектора, образованного двумя бесконечно близкими радиус-векторами, поэтому из закона сохранения момента импульса следует $\Delta S_{l,k}^u / \Delta T_{l,k} - const = 0$, где $\Delta S_{l,k}^u$ – площадь сектора между l и k -ым наблюдениями в плоскости истинной орбиты, $\Delta T_{l,k}$ – промежуток времени между наблюдениями. Площади секторов видимой орбиты $\Delta S_{l,k} = \Delta S_{l,k}^u \cos i$. Сектора умножаются на постоянный множитель, поэтому закон площадей справедлив для видимой траектории:

$$\Delta S_{l,k} / \Delta T_{l,k} - c = 0 , \quad 1.3.1$$

где c – постоянная площадей.

Площади секторов определяются выражением

$$\Delta S_{l,k} = 1/2 \int_{\theta_l}^{\theta_k} \rho^2 d\theta . \quad 1.3.2$$

Первоначально данные формулы были применены для круговой орбиты [3], затем эллиптической, когда $\Delta S_{k,k+1} / \Delta T_{k,k+1} - c = 0$. Этот алгоритм был отягощен большими ошибками, так как при плотных рядах наблюдений, согласно рассматриваемым данным, звезда может даже изменять направление вращения, например, $\Delta S_{k-1,k} > 0$ и $\Delta S_{k,k+1} < 0$, а входят подобные величины в расчеты с одинаковым весом. В дальнейшем было выбрано первое наблюдение в качестве начала отсчета, использовались уравнения: $\Delta S_{1,k} / \Delta T_{1,k} - c = 0$. Этот вариант позволил получить результаты удовлетворительной точности, но вес первого наблюдения был сильно завышен. Для устранения этого недостатка мы применили независимое от наблюдений начальное направление отсчета [4] – направление на северный полюс мира

($\theta_0 = 0^\circ$). Момент времени прохождения данного направления T_0 . Использовались уравнения $\Delta S_{0,k} / \Delta T_{0,k} - c = 0$, в которых появляется новая неизвестная T_0 . Последующий анализ уравнений метода показал, что в процессе вычислений неконтролируемо изменяются веса наблюдений (уменьшаются при увеличении $|\Delta T_{0,k}|$). Для устранения данного недостатка уравнения были заменены на следующие:

$$\Delta S_{0,k} / c - \Delta T_{0,k} = 0. \quad 1.3.3$$

Ошибки определения площади, описываемой проекцией радиус-вектора, зависят не только от ошибок наблюдений позиционного угла θ , но и от величины разделения, поэтому метод, основанный на использовании уравнения (1.3.3), не даст минимальных невязок $\Delta\theta_{0-c}$. Для получения минимальных невязок наблюдаемых величин уравнение (1.3.3) было преобразовано к виду

$$(\Delta S_{0,k} / c - \Delta T_{0,k}) / \rho_k^2 = 0. \quad 1.3.4$$

Разделение ρ_k используется в (1.3.4) для придания примерно одинакового веса каждому наблюдению.

Для работы метода в случае гиперболического движения требуется, чтобы прямая, связанная с выбранным направлением, пересекала гиперболическую орбиту. По этой причине за начальную точку отсчета берется угол между двумя следующими друг за другом наблюдениями либо угол, несколько отстоящий от первого наблюдения, а время пересечения данного направления (T_0) определяется аналогично случаю эллиптического движения.

Проекция конического сечения, представляющего истинную траекторию орбиты, на картинную плоскость является коническим сечением. Звезда-спутник движется по коническому сечению, а главная компонента находится в произвольной точке на картинной плоскости внутри дуги (например, рис. 1.3 точка 0). Поэтому связь между координатами в картинной плоскости [23]:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0. \quad 1.3.5$$

Декартовы координаты связаны с полярными соотношениями $x = \rho \cos(\theta)$ и $y = \rho \sin(\theta)$.

Для полярных координат запишем

$$(A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta) \rho^2 + (2D \cos \theta + 2E \sin \theta) \rho + 1 = 0. \quad 1.3.6$$

Из уравнения (1.3.6) получаем

$$\rho = \frac{-\chi - \sqrt{\chi^2 - 4\phi}}{2\phi}, \quad 1.3.7$$

$$\rho = \frac{-\chi + \sqrt{\chi^2 - 4\phi}}{2\phi}, \quad 1.3.8$$

где $\phi = A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta$, $\chi = 2D \cos \theta + 2E \sin \theta$. В работе используется уравнение (1.3.7). Если $\phi < 0$, то значения разделения, получаемые из (1.3.8), отрицательны. В случае эллипса $\phi < 0$ при любых θ . Для гиперболы $\phi > 0$, когда луч, проведенный из начала координат в направлении, заданном углом θ , не пересекает гиперболу или пересекает обе ее ветви. Точку пересечения с ближайшей ветвью определяет выражение (1.3.7).

Как отмечалось выше, второй закон Кеплера $\Delta S / \Delta T - c = 0$. С помощью выбора масштаба единиц измерения $\rho' = \rho / g$ можно подобрать такую константу g , что закон Кеплера $\Delta S / \Delta T = c = 1/2$. Разделение в этом случае определится в безразмерных единицах

$$\rho' = \rho / g = \frac{(-g\chi - \sqrt{(g\chi)^2 - 4g^2\phi}}{(2g^2\phi)}. \quad 1.3.9$$

Согласно (1.3.9) коэффициенты уравнения (1.3.5) можно заменить на безразмерные $A' = Ag^2$, $B' = Bg^2$, $C' = Cg^2$, $D' = Dg$, $E' = Eg$.

Одной из основных трудностей метода является определение площади, описываемой ρ' . Площадь можно определить с помощью отношения (1.3.2). Для этого формула (1.3.9) подставляется в (1.3.2), интеграл (1.3.2) берется приближенным методом. В известных методах приближенного вычисления интеграла промежутки интегрирования разбиваются на n^* частей. В рассматриваемом случае необходимо приближенным методом вычислить площади секторов $(S_{0,1}, S_{1,2}, \dots, S_{N-1,N})$, имеющих разную длину дуги, поэтому если каждый сектор разбить на равное количество частей n^* , то для площадей $S_{0,1}, S_{1,2}, \dots, S_{N-1,N}$ получим различную точность вычислений. По этой причине в работе задается n^* – число частей, на которые разбивается сектор с длиной дуги в 1° , а n_k – количество частей, на которые разбит сек-

тор с дугой от θ_k до θ_{k+1} , определяется как целая часть числа $\{(\theta_{k+1} - \theta_k) * n^* + 1\}$ и используется при приближенном вычислении интеграла (1.3.2).

Площадь сектора от θ_k до θ_{k+1} находится из следующего выражения:

$$S_{k,k+1} = 1/2 \sum_{j=1}^{n_k} \left(\frac{\rho'^2(\theta_k + (j-1) * \delta\theta_k) + \rho'^2(\theta_k + j * \delta\theta_k)}{2} \right) * \delta\theta_k, \quad 1.3.10$$

где $\delta\theta_k = (\theta_{k+1} - \theta_k) / n_k$.

Схематично определение площади сектора, описанной проекцией радиус-вектора в картинной плоскости от θ_k до θ_{k+1} , изображено на рис. 1.2 (для случая, когда $n_k = 5$). С помощью уравнения (1.3.10) находятся площади $S_{0,k}$. В дальнейших расчетах также потребуются частные производные $S_{0,k} : S_{0,kA'}, S_{0,kB'}, S_{0,kC'}, S_{0,kD'}, S_{0,kE'}$,

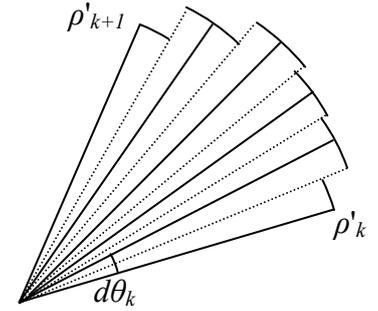


Рис. 1.2. Вычисление площади сектора

$S_{0,kA'A'}, S_{0,kA'B'}, S_{0,kA'C'}, S_{0,kA'D'}, S_{0,kA'E'}$, $S_{0,kB'B'}, S_{0,kB'C'}, S_{0,kB'D'}$, $S_{0,kB'E'}$, $S_{0,kC'C'}, S_{0,kC'D'}$, $S_{0,kC'E'}$, $S_{0,kD'D'}$, $S_{0,kD'E'}$, $S_{0,kE'E'}$.

Далее вычисляются функции

$$L(\rho_k, \theta_k, T_k, A', B', C', D', E', T_0) = \{2\Delta S_{0,k} - (T_k - T_0)\} / \rho_k^2. \quad 1.3.11$$

Для нахождения элементов видимой орбиты применяется метод наименьших квадратов: ставится задача минимизации функции $\sum_{k=1}^N L^2(\rho_k, \theta_k, T_k, A', B', C', D', E', T_0)$.

Необходимое условие минимума функции многих переменных – равенство нулю ее частных производных. Получаем систему шести уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N 2L_k L_{kA'} &= 0, \quad \sum_{k=1}^N 2L_k L_{kB'} = 0, \quad \sum_{k=1}^N 2L_k L_{kC'} = 0, \\ \sum_{k=1}^N 2L_k L_{kD'} &= 0, \quad \sum_{k=1}^N 2L_k L_{kE'} = 0, \quad \sum_{k=1}^N 2L_k L_{kT_0} = 0, \end{aligned} \quad 1.3.12$$

где $L_{kA'}$, $L_{kB'}$, $L_{kC'}$, $L_{kD'}$, $L_{kE'}$ и L_{kT_0} – частные производные L_k (1.3.11).

Система уравнений (1.3.12) решается методом Ньютона. Точность, задаваемая при определении коэффициентов, зависит от поставленных задач и качества наблюдательного материала. В работе элементы видимой орбиты вычисляются с по-

грешностями: $|(A'_{i+1}-A'_i)/A'_{i+1}| < 10^{-3}$, $|(B'_{i+1}-B'_i)/B'_{i+1}| < 10^{-3}$, $|(C'_{i+1}-C'_i)/C'_{i+1}| < 10^{-3}$,
 $|(D'_{i+1}-D'_i)/D'_{i+1}| < 10^{-3}$, $|(E'_{i+1}-E'_i)/E'_{i+1}| < 10^{-3}$, $|T_{0i+1} - T_{0i}| < 10^{-3}$.

Первое приближение для эллиптической орбиты находится из предположения кругового движения в картинной плоскости. Квадрат расстояния между компонентами в этом случае определяется из уравнения

$$\Delta S_{1,N} / (T_N - T_1) = (1/2)r^2(\theta_N - \theta_1) / (T_N - T_1) = 1/2. \quad 1.3.13$$

Начальные приближения для коэффициентов $A'_1 = -1/r^2$, $B'_1 = 0$, $C'_1 = -1/r^2$, $D'_1 = 0$, $E'_1 = 0$. Начальное приближение для момента отсчета $T_0^* = T_1 - r^2\theta_1$ выводится из соотношения (1.3.13). Также T_0^* можно вычислить с помощью алгоритма, в котором за начальную точку выбран момент времени T_1 .

Для гиперболической орбиты первое приближение находится геометрическим методом [2]: в уравнение (1.3.6) подставляются наблюдаемые разделения и позиционные углы, применяется метод наименьших квадратов, полученная система линейных уравнений с пятью неизвестными (A , B , C , D , E) решается методом Гаусса, далее определяется коэффициент g , после чего A' , B' , C' , D' , E' .

Для нахождения момента прохождения периастра (T_p) необходимо определить проекцию периастра на картинную плоскость. Угол, определяющий положение проекции периастра, отчитанный от направления на северный полюс мира, $\theta_p = \text{arctg}((A'E' - B'D') / (C'D' - B'E'))$. Момент прохождения периастра $T_p = T_0 + 2S_{0,\theta_p}$, площадь (S_{0,θ_p}), описанная проекцией радиус-вектора от направления на северный полюс мира до проекции периастра (θ_p), вычисляется с помощью (1.3.10). Формула (1.3.10) также используется для определения площади видимого эллипса ($S_{0,2\pi}$) в безразмерных единицах, период обращения находится из отношения $P = 2S_{0,2\pi}$. Для гиперболического движения коэффициент уравнения гиперболы (1.1.4)

$$n = 2c / \cos i / (a^2(e^2 - 1)^{1/2}). \quad 1.3.14$$

Геометрические элементы орбиты можно найти, используя коэффициенты A' , B' , C' , D' , E' [2], но большая полуось (a') в этом случае определится в безразмерных единицах, связанных с условием $\Delta S / \Delta T = 1/2$. Для расчета коэффициентов A , B , C , D , E необходимо знать коэффициент g (1.3.9). Разделение между компо-

нентами в безразмерных единицах, определенное из уравнения (1.3.9), связано с наблюдаемым разделением $\rho_k \approx g\rho_k'$. Применяя метод наименьших квадратов, получаем

$$g = \frac{\sum_{k=1}^N (\rho_k' \rho_k)}{\sum_{k=1}^N \rho_k'^2}. \quad 1.3.15$$

Коэффициенты уравнения (1.3.5) $A = A'/g^2$, $B = B'/g^2$, $C = C'/g^2$, $D = D'/g$, $E = E'/g$. Постоянная площадей $c = 0.5g^2$.

Коэффициенты A , B , C , D , E , момент прохождения периастра T_p и постоянная площадей c определяют кинематику визуально-двойной звезды. В работе [2] описан метод перехода от величин A , B , C , D , E к элементам Кэмпбелла (i, Ω, ω) и двум динамическим элементам (e и a), работающий только с эллиптическими орбитами. В этом параграфе диссертации метод обобщен на случай эллиптических и гиперболических орбит; его можно отнести к одной из модификаций метода Ковальского [49].

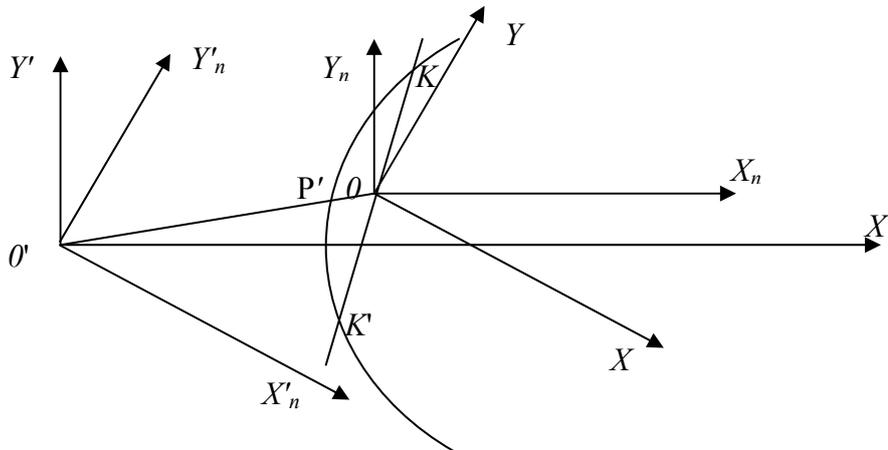


Рис. 1.3. Системы координат в картинной плоскости

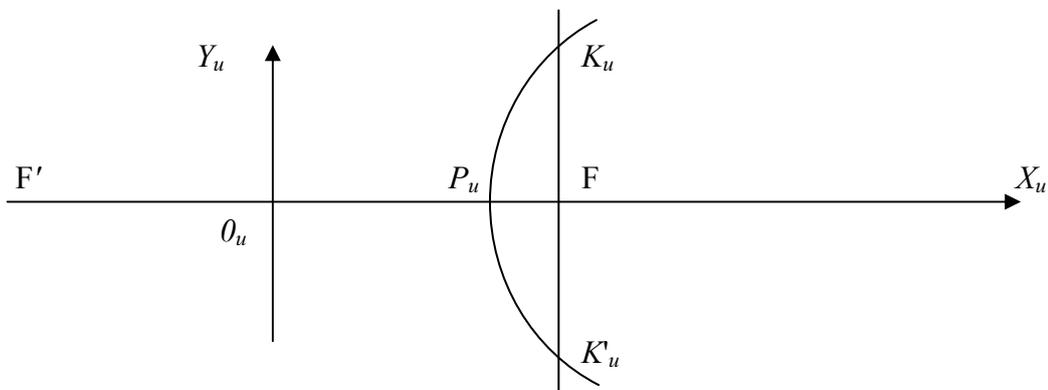


Рис. 1.4. Истинная орбита

Для нахождения позиционных углов (i , Ω , ω) мы будем использовать проекции единичных векторов на картинную плоскость: первый направлен от фокуса к периастрю, второй перпендикулярен первому, находится в плоскости истинной орбиты. На рис. 1.3 и 1.4 изображено гиперболическое движение, на рис. 1.5 рассмотрена эллиптическая орбита. Оси OX и $O'X'_n$ на рис. 1.3 направлены на северный полюс мира.

Фокус F принадлежит обеим плоскостям (картинной и истинной орбиты). Единичные векторы в данном случае $\overline{FP'_u}/|a-c^*|$ (в случае эллипса $a-c^* > 0$, в случае гиперболы $a-c^* < 0$) и $\overline{FK'_u}/|a(1-e^2)|$. Длина вектора $\overline{FK'_u}$ (рис. 1.4) определяется из следующих соотношений: $F'F^2 + FK'_u{}^2 = F'K'_u{}^2$ и $F'K'_u = FK'_u + 2a$, где $F'F = 2c^*$, $c^* = ae$ (a – действительная или большая полуось, e – эксцентриситет, c^* – фокальное расстояние). Для гиперболического движения получаем $|\overline{FK'_u}| = |a(e^2 - 1)|$. В случае эллипса ($F'K'_u = 2a - FK'_u$) приходим к той же самой формуле $|\overline{FK'_u}| = |a(1 - e^2)|$.

С помощью поворота и переноса системы координат $XOY \rightarrow X_nOY_n \rightarrow X'O'Y'$ (рис. 1.3) уравнение (1.3.5) приводится к виду $x'^2/a'^2 + y'^2/b'^2 = 1$ [23]. Если кривая является гиперболой, то $b'^2 < 0$, что не вызывает трудностей, так как для расчетов необходимы значения a'^2 и b'^2 , а не a' и b' . Угол поворота системы XOY в X_nOY_n определяется из формулы $tg(2\alpha) = 2B/(A-C)$, коэффициенты a'^2 и b'^2 из выражений

$$\begin{aligned} A^* &= A \cos^2(\alpha) + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha, \\ C^* &= A \sin^2(\alpha) - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha, \\ D^* &= D \cos(\alpha) + E \sin \alpha, \quad E^* = E \cos(\alpha) - D \sin \alpha, \\ a'^2 &= \frac{D^{*2}/A^* + E^{*2}/C^* - 1}{A^*} \quad \text{и} \quad b'^2 = \frac{D^{*2}/A^* + E^{*2}/C^* - 1}{C^*}. \end{aligned} \quad 1.3.16$$

Координаты точек F , P' и K' удобно искать в системе $X'O'Y'$ (рис. 1.3). Положение центра центральной линии в исходной системе координат XOY (рис. 1.3): $x_0 = (B^*E - C^*D)/(A^*C - B^2)$, $y_0 = (B^*D - A^*E)/(A^*C - B^2)$. Координаты фокуса в

системе $X'O'Y'$: $x'_F = D^*/A^*$, $y'_F = E^*/C^*$. Положение проекции периастра $P'(x'_P, y'_P)$ находится из уравнений прямой $x'_F / y'_F = x'_P / y'_P$ (координаты точек F и P' должны быть одного знака) и видимого конического сечения $x'^2_P / a'^2 + y'^2_P / b'^2 = 1$. Положения точек K' и K находятся из уравнений конического сечения $x'^2_K / a'^2 + y'^2_K / b'^2 = 1$ и прямой, проходящей через фокус параллельно касательной точки P' , $x'_P(x'_K - x'_F) / a'^2 + y'_P(y'_K - y'_F) / b'^2 = 0$ (выбирается одна из них с помощью неравенства $(x'_P - x'_F)(y'_K - y'_F) - (x'_K - x'_F)(y'_P - y'_F) > 0$).

Эксцентриситет истинной орбиты визуально-двойной звезды

$$e = c^* / a = 0'F / 0'P' = (x'^2_F + y'^2_F)^{1/2} / (x'^2_P + y'^2_P)^{1/2}. \quad 1.3.17$$

Для дальнейших расчетов координаты точек F , P' , K' необходимо перевести из системы $X'O'Y'$ в систему $X'_n O'_n Y'_n$ (рис. 1.3) с помощью следующих формул:

$$X'_n = X' \cos \alpha - Y' \sin \alpha, \quad Y'_n = X' \sin \alpha + Y' \cos \alpha. \quad 1.3.18$$

Соответствующие проекции векторов $\overrightarrow{FP'_u}$ и $\overrightarrow{FK'_u}$ будут равны $\overrightarrow{FP'} \{(x'_{nP} - x'_{nF}); (y'_{nP} - y'_{nF})\}$ и $\overrightarrow{FK'} \{(x'_{nK} - x'_{nF}); (y'_{nK} - y'_{nF})\}$. Чтобы получить проекции единичных векторов, нужно координаты вектора $\overrightarrow{FP'}$ поделить на $|a(1-e)|$, а $\overrightarrow{FK'}$ на $|a(1-e^2)|$.

Выведем формулы, связывающие элементы орбиты с проекциями единичных векторов. На рис. 1.5 ось $0X_{ly}$ совпадает с линией узлов, ось $0X_u$ с направлением от фокуса к периастру. Координаты точек P_u и K'_u в системе $X_{ly} 0Y_{ly}$

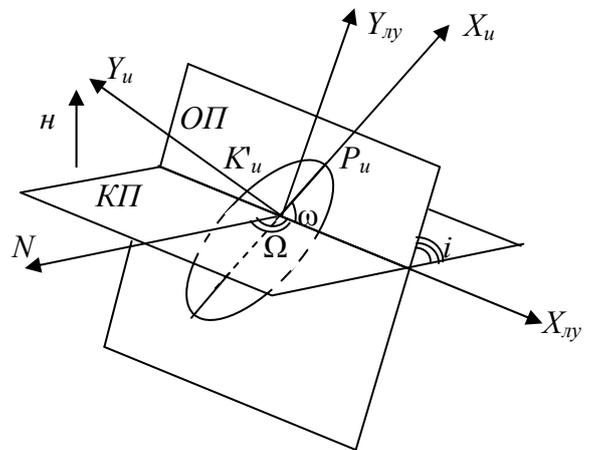


Рис. 1.5. Орбитальная и картинная плоскости

$$\begin{aligned} x_{lyP} &= |a - a * e| \cos \omega, \quad y_{lyP} = |a - a * e| \sin \omega, \\ x_{lyK} &= -|a(1 - e^2)| \sin \omega, \quad y_{lyK} = |a(1 - e^2)| \cos \omega. \end{aligned} \quad 1.3.19$$

В системе координат, связанной с картинной плоскостью

$$\begin{aligned} x_{lyP} &= |a - a * e| \cos \omega, \quad y'_{lyP} = |a - a * e| \sin \omega \cos i, \\ x_{lyK} &= -|a * (1 - e^2)| \sin \omega, \quad y'_{lyK} = |a * (1 - e^2)| \cos \omega \cos i. \end{aligned} \quad 1.3.20$$

В системе координат, в которой производятся наблюдения, после поворота осей на угол Ω

$$\begin{aligned}x_p &= |a - a * e|(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i), \\y_p &= |a - a * e|(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i), \\x_K &= |a(1 - e^2)|(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\y_K &= |a(1 - e^2)|(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i).\end{aligned}\tag{1.3.21}$$

Получена система четырех уравнений с четырьмя неизвестными (a, i, Ω, ω). Алгоритм вычисления координат ($x_p = x'_{np} - x'_{nf}$, $y_p = y'_{np} - y'_{nf}$, $x_K = x'_{nK} - x'_{nF}$, $y_K = y'_{nK} - y'_{nF}$) описан выше. После математических преобразований имеем

$$\begin{aligned}tg(\Omega + \omega) &= (y_p / |1 - e| - x_K / |1 - e^2|) / (x_p / |1 - e| + y_K / |1 - e^2|), \\tg(\Omega - \omega) &= (y_p / |1 - e| + x_K / |1 - e^2|) / (x_p / |1 - e| - y_K / |1 - e^2|), \\tg^2(i/2) &= (y_p / |1 - e| + x_K / |1 - e^2|) / (y_p / |1 - e| - x_K / |1 - e^2|) \sin(\Omega + \omega) / \sin(\Omega - \omega).\end{aligned}\tag{1.3.22}$$

Углы, определяющие ориентацию орбиты в пространстве, находятся с помощью уравнений (1.3.22). Большую полуось (a) можно получить, используя любое из четырех уравнений системы (1.3.21).

§ 1.4 Применение метода подбора и генетических алгоритмов для определения орбит

В настоящее время в связи с развитием вычислительной техники появилась возможность применять методы, требующие значительных вычислительных затрат. К таким методам относят метод подбора и генетические алгоритмы (ГА). Основное их преимущество связано с тем, что отсутствуют проблемы со сходимостью, поэтому они позволяют определять орбиты независимо от качества наблюдений и первых приближений. Метод подбора и генетические алгоритмы используются во многих современных методах определения орбит [14, 17, 65, 73, 91].

В качестве примера рассмотрим метод, предложенный CHARA (метод Харткопфа и др.) [73]. Он является одной из модификаций метода дифференциальных поправок [44]. Отличается тем, что из семи неизвестных величин три (среднее

движение, момент прохождения периастра, эксцентриситет) определяются подбором. Использование этого подхода сделало метод глобально сходящимся.

Алгоритм метода.

Используются моменты времени наблюдений (T_k) и декартовы координаты, задающие положение звезды-спутника относительно главной компоненты (x_k, y_k).

Количество наблюдений $N \geq 4$.

1. Задаются величины, определяемые подбором: среднее движение (n), момент прохождения периастра (T_p), эксцентриситет (e).

2. Из уравнения Кеплера (1.1.3) вычисляются эксцентрические аномалии на моменты наблюдений (E_k).

3. Для всех моментов времени определяются приведенные координаты

$$X_k = \cos(E_k) - e, Y_k = \sqrt{1 - e^2} \sin(E_k). \quad 1.4.1$$

4. Составляется система $2N$ уравнений

$$x_k = AX_k + FY_k, y_k = BX_k + GY_k. \quad 1.4.2$$

Система (1.4.2) решается методом наименьших квадратов, в качестве неизвестных выступают элементы Тиле-Иннеса: A, B, F, G .

5. Выбираются значения n, T_p и e , при которых среднеквадратичные ошибки (σ_x, σ_y) или ($\sigma_\rho, \sigma_\theta$) будут минимальны.

В методе Харткопфа и др. три величины, определяемые подбором, можно найти посредством генетических алгоритмов [14, 17].

Генетические алгоритмы являются стохастическими методами поиска решений различных задач [45, 87]. В сравнении с обычным подбором генетические алгоритмы значительно ускоряют поиск решения, в отличие от методов, требующих дифференцирования исследуемой функции, являются глобально сходящимися. Генетические алгоритмы позволяют решить задачу определения орбиты в той же форме, что и классические методы – поиск элементов орбиты, удовлетворяющих одному из условий

$$\sum_{k=1}^N (\rho_{k(obs)} - \rho_{k(cal)})^2 + \sum_{k=1}^N \rho_{k(cal)}^2 (\theta_{k(obs)} - \theta_{k(cal)})^2 = \min, \quad 1.4.3$$

$$\sum_{k=1}^N (x_{k(obs)} - x_{k(cal)})^2 + \sum_{k=1}^N (y_{k(obs)} - y_{k(cal)})^2 = \min. \quad 1.4.4$$

В работе рассматриваются три метода определения орбит визуально-двойных звезд с помощью генетических алгоритмов:

1. Метод, предложенный CHARA [73]. В данном методе три неизвестные (n , T_p , e) определяются подбором. Предлагается вместо подбора использовать генетический алгоритм.
2. Генетическим алгоритмом определяются все элементы орбиты (n , a , i , Ω , T_p , e , ω).
3. Генетическим алгоритмом определяется пять неизвестных (n , i , T_p , e , ω), две другие (a , Ω) линейно связаны с наблюдаемыми величинами (ρ_k , θ_k) и находятся методом наименьших квадратов.

Работу генетического алгоритма можно представить следующей схемой:

1. Генерация популяции;
2. Выбор родителей;
3. Скрещивание (рекомбинация);
4. Мутация;
5. Формирование новой популяции;
6. Проверка критерия окончания цикла. В случае выполнения условия вывод лучшего решения или всей совокупности решений, при невыполнении цикл повторяется, начиная с пункта (2).

Особенность генетических алгоритмов – большое количество параметров и операторов, которые влияют на точность результатов. Выбрать оптимальный алгоритм сложно, критерием точности служит стабильность получаемых результатов при повторных запусках программы.

На начальном этапе перед генерацией популяции необходимо задать интервалы возможных значений искомым величин, для четырех неизвестных они стандартны: $i \in [0.1; 89.9]$, $\Omega \in [0; 179.99]$, $e \in [0.001; 0.95]$, $\omega \in [0; 359.99]$; для остальных (n , a , T_p) интервалы желательно задавать, анализируя имеющиеся данные. Интервалы могут быть очень большими, главное, чтобы искомые значения попадали в них. Далее задается размер популяции и количество поколений. Размер популяции зависит от количества неизвестных и требуемой точности результатов, чем больше неизвестных, тем больше должен быть размер популяции для получения хорошей

точности. Количество поколений зависит от используемого оператора отбора в новую популяцию и процента мутирования, чем больше вероятность мутаций, тем большее нужно задавать количество поколений. На точность результатов сильно влияет характер изучаемой функции. Например, при работе с двойными звездами на коротких дугах функция (1.4.3) может практически не изменяться вблизи минимума [9], поэтому точное определение элементов орбит методами, в основе которых лежит поиск минимума, невозможно. Так же могут возникать трудности, характерные для генетических алгоритмов [45].

В качестве оператора выбора родителей используется панмиксия – для каждой особи пара выбирается случайно из всей популяции.

В работе применяются два вида рекомбинации:

- 1) дискретная – случайный обмен генами между родителями;
- 2) промежуточная – реализуется с помощью выражения

$$\text{Потомок} = \text{Род1} + \alpha (\text{Род2} - \text{Род1}), \quad 1.4.5$$

где α – случайное число на отрезке $[-d; 1+d]$, в работе $d = 0.5$, d может быть любым числом больше нуля, наиболее принятым является $d = 0.25$ [45], но при таком значении оператор рекомбинации с большей вероятностью будет усреднять значения.

Случайные изменения решений реализуются посредством неоднородной мутации – с одинаковой вероятностью используется одна из двух формул

$$y_i' = y_i + (\max_i - y_i) \left(1 - r^{\left(\frac{1-t}{T} \right)} \right) \text{ или } y_i' = y_i - (y_i - \min_i) \left(1 - r^{\left(\frac{1-t}{T} \right)} \right), \quad 1.4.6$$

где \max_i и \min_i – граничные значения величины y_i , $r \in [0;1]$ выбирается случайно, t – номер поколения, T – максимальное количество поколений.

При формировании новой популяции применяется элитарный отбор – в новую популяцию выбираются решения, дающие минимальные суммы квадратов отклонений в соответствии с условием (1.4.3) или (1.4.4). Для более стабильной работы генетических алгоритмов желательно поддерживать генетическое разнообразие, то есть в популяции не должно быть двух одинаковых решений, поэтому дополнительным условием отбора является неравенство сумм квадратов отклонений.

Метод, предложенный CHARA.

Эксперименты с модельными орбитами показали, что при численности популяции $N_{pop} = 200$ и максимальном количестве поколений $T_{pop} = 100$ точность результатов определяется вычислительной погрешностью компьютера, при этом можно не использовать мутации и не заботиться о генетическом разнообразии при выборе новой популяции.

В качестве примера определим орбиту Кастора (α Gem). Кастор относится к широким парам, с момента открытия по настоящее время звезда не совершила полного оборота, повернулась на 300° . Для определения орбиты использовались данные сайта обсерватории Ниццы [103], были добавлены наблюдения (1879 – 1925 г.) Доберка, ван Бисбрука [90] и современные четвертого интерферометрического каталога [76], исключены измерения, дающие заметные отклонения в сравнении с основной совокупностью данных: РОК 1933.142, Т 1938.260, FAT 1945.23, FLE 1955.223, MLR 1967.89, SLE 2004.185. Орбита вычислялась по 431 наблюдению на дуге 200° , веса не задавались, правило 3σ не применялось (в ГА правило 3σ можно включить на определенном поколении, исключение или возвращение данных вести в соответствии с лучшим решением). Позиционные углы приведены к эпохе $T_0 = 2000$.

Таблица 1. Элементы орбиты Кастора							
	P , год	a , "	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	T_p , год	e	ω , $^\circ$
ГА	451.6	6.62	114.95	41.5	1959.85	0.331	252.6
Δ_x	8×10^{-6}	7×10^{-8}	8×10^{-8}	2×10^{-7}	7×10^{-7}	8×10^{-9}	10^{-6}
д.п.п.к.	451.6	6.62	114.95	41.5	1959.84	0.331	252.6
6 cat	466.8	6.78	113.56	41.2	1957.3	0.333	249.3

Параметры генетического алгоритма: размер популяции $N_{pop} = 200$, количество поколений $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 10%. Элементы орбиты представлены в табл. 1. В каждой ячейке отмечена величина (Δ_x), характеризующая вычислительную погрешность ГА, она равна среднеквадратичному отклонению, вычисленному по результатам пятнадцати запусков алгоритма. В процессе работы программы было получено три результата, отличающихся от представленного. Появление различных решений можно объяснить тем, что наблюдениями не охвачен полный оборот звезды-спутника. Для сравнения представлен результат, получен-

ный методом дифференциальных поправок в полярных координатах (д.п.к.), в нижней строке даны элементы орбиты из шестого каталога орбит.

На рис. 1.6 изображены наблюдения и видимая траектория звезды-спутника относительно главной компоненты, она построена по вычисленным с помощью ГА элементам орбиты. Крестиком отмечено положение главной звезды, тонкая линия – линия узлов (пересечение картинной плоскости с плоскостью истинной орбиты).

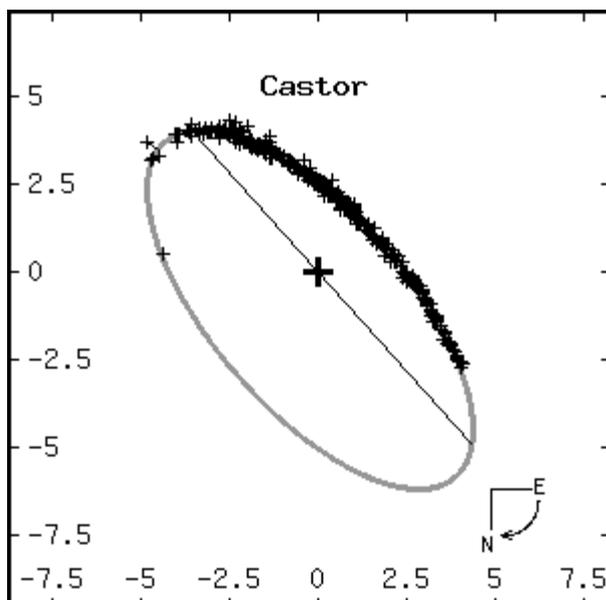


Рис. 1.6. Кастор. WDS 07346+3153

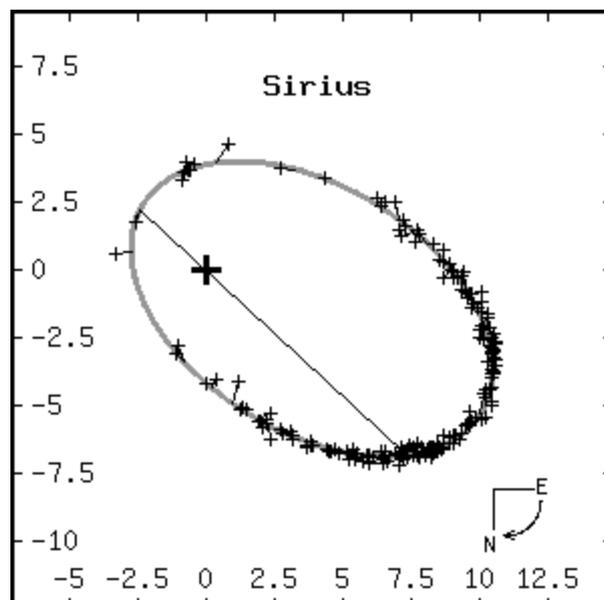


Рис. 1.7. Сириус. WDS 06451-1643

Методы, работающие с полярными координатами.

Метод, в котором все элементы орбиты определяются с помощью генетических алгоритмов.

Рассматривается популяция решений $(n_j, a_j, i_j, \Omega_j, T_{pj}, e_j, \omega_j)$.

1. С помощью операторов рекомбинация и мутация создается новое поколение.
2. Для каждого решения из выражений (1.1.3, 1.1.5, 1.2.32, 1.2.33) вычисляются относительные координаты звезды-спутника $(\theta_{k(cal)}, \rho_{k(cal)})$.
3. Производится формирование новой популяции. Выбираются решения, удовлетворяющие выражению (1.4.3).

Пункты 1-3 повторяются, критерием окончания цикла служит количество поколений. Эксперименты с модельными данными показали, что без обеспечения генетического разнообразия точность результатов является низкой, поэтому при формировании новой популяции были наложены дополнительные условия. В пер-

вых поколениях отбор должен быть таким, чтобы обеспечить максимально возможное генетическое разнообразие, что повышает вероятность обнаружения глобального минимума. С каждым новым поколением решения все лучше удовлетворяют наблюдениям, генетическое разнообразие при этом уменьшается, что должно отражаться в условии отбора. Высокие требования к генетическому разнообразию приводят к неэффективности процессов рекомбинации, низкие – к преждевременной сходимости, в случае одинаковых решений процессы рекомбинации также становятся неэффективны.

При формировании новых поколений использовалось условие: разность сумм квадратов индивидуальных отклонений двух ближайших решений в популяции должна быть больше некоторой величины

$$F_{j+1} - F_j > gF_1, \quad 1.4.7$$

где F_j – функция (1.4.3) для j -ого решения в популяции (в каждом поколении производится сортировка решений по возрастанию F), g – некоторая функция номера поколения, в случае с модельными точными данными можно использовать константу, для обработки наблюдений $g = k \left(1 - \frac{t}{T}\right)$, k – константа, t – номер поколения, T – максимальное количество поколений.

Алгоритм метода с пятью неизвестными отличается тем, что a_j и Ω_j определяются из уравнений (1.2.32, 1.2.33) методом наименьших квадратов. Стабильность работы ГА при этом повышается, хорошей точности можно добиться без обеспечения генетического разнообразия.

В качестве примера определим орбиту Сириуса (α СМа). Использовались данные сайта обсерватории Ниццы, были добавлены наблюдения (1863 – 1923 г.) О. Струве, Холла, Бернхема, Эйткена, ван Бисбрука и современные четвертого интерферометрического каталога. Из вычислений исключено измерение OL 1932.133 и два неполных измерения WAM и HEI. Для определения орбиты использовалось 179 наблюдений.

Параметры ГА для метода с семью неизвестными: размер популяции $N_{pop} = 300$, количество поколений $T_{pop} = 300$, процент мутирования гена 1%, коэффициент, обеспечивающий генетическое разнообразие, $k = 0.0001$; метод, в котором

с помощью ГА определяются пять элементов орбиты: $N_{pop} = 500$, $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 5%. Элементы орбиты Сириуса и величины, характеризующие стабильность работы ГА, представлены в табл. 2. На рис. 1.7 построена видимая орбита Сириуса, используя результаты метода с семью неизвестными.

	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
7 неизв.	50.108	7.520	135.57	47.11	1894.185	0.5846	149.94
Δ_x	0.001	0.001	0.02	0.02	0.003	0.0001	0.03
5 неизв.	50.108	7.523	135.57	47.12	1894.184	0.5846	149.94
Δ_x	6×10^{-5}	4×10^{-5}	5×10^{-4}	10^{-3}	2×10^{-4}	2×10^{-6}	2×10^{-3}
6 cat	50.090	7.500	136.53	44.57	1894.130	0.5923	147.27

Для сравнения орбита Сириуса также была определена методом CHARA. Параметры ГА: численность популяции $N_{pop} = 100$, количество поколений $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 10%.

	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
ГА	50.108	7.518	135.64	47.06	1894.185	0.5850	149.90
Δ_x	5×10^{-6}	10^{-7}	2×10^{-6}	2×10^{-5}	5×10^{-6}	10^{-7}	3×10^{-5}

Основное преимущество рассмотренных в работе методов – отсутствие жестких требований к первым приближениям (интервалы изменения искомым величин могут быть велики). Если наблюдениями охвачено около оборота или более, трудности с первыми приближениями и сходимостью у метода дифференциальных поправок возникают редко, поэтому применение ГА рассматривается как один из вариантов, преимущество – не нужно вычислять первые приближения, недостаток – более длительное время работы. При уменьшении длины дуги, охваченной наблюдениями, область сходимости метода дифференциальных поправок уменьшается, на дугах $< 180^\circ$ определить первые приближения, обеспечивающие сходимость, довольно часто бывает затруднительно, в этих случаях методы, использующие генетические алгоритмы, имеют преимущества.

Наиболее удобен в использовании метод программы CHARA, в котором три неизвестные определяются с помощью ГА, он обеспечивает высокую точность получаемых результатов, время вычислений невелико – в случае обработки 50-ти наблюдений менее минуты. При увеличении количества наблюдений время работы программы возрастает, так как основные вычислительные затраты связаны с определением сумм квадратов индивидуальных отклонений. У методов, работающих с

полярными координатами, для обеспечения стабильности получаемых результатов увеличена численность популяции и количество поколений, что привело к увеличению вычислительных затрат.

Выводы

В данной главе рассмотрены особенности классических методов определения орбит двойных звезд. Основной задачей методов является определение элементов орбит, для которых сумма квадратов невязок будет минимальна. В такой форме задача поставлена у методов дифференциальных поправок в полярных и декартовых координатах и у метода, развитого в CHARA. Наиболее часто встречаемые недостатки в алгоритмах методов следующие: 1) используются не все наблюдения или часть наблюдений используется для определения не всех искомых величин; 2) ищутся элементы орбит, наилучшим образом удовлетворяющие уравнениям, а не наблюдениям; 3) используются уравнения, содержащие несколько измеряемых величин (время считается точной величиной, данный недостаток имеет уравнение кривой второго порядка и уравнение Тиле); 4) при выводе формул для исключения неизвестных используются приближенные равенства. В работе показано, что в перечисленных случаях неконтролируемо изменяются веса наблюдений, поэтому получаемые элементы орбиты не дают минимальных значений среднеквадратичных отклонений.

Методы определения орбит имеют множество других особенностей, которые при решении определенных задач можно рассматривать как недостатки. Например, метод дифференциальных поправок требует наличия первых приближений и сходится не всегда, метод, развитый в CHARA, глобально сходящийся, но использует метод подбора по трем неизвестным величинам, что значительно увеличивает время вычисления орбит. Перечисленные особенности делают метод дифференциальных поправок неудобным для работы на дугах менее 180° (область сходимости становится малой), метод, развитый в CHARA, неудобным при проведении статистических исследований, так как необходимо обрабатывать большие объемы информации.

Разработан метод определения орбит, использующий закон площадей. Вычисления в нем производятся в два этапа, сначала с помощью закона площадей определяются параметры видимой орбиты (эллипса или гиперболы), затем происходит переход к элементам истинной орбиты. В качестве первого приближения используется круговое движение в картинной плоскости.

Рассмотрены три новых метода определения орбит визуально-двойных звезд с помощью генетических алгоритмов:

1. Усовершенствованный метод CHARA, в котором для определения трех неизвестных (n , T_p , e) вместо подбора применяется генетический алгоритм.
2. Метод, использующий генетический алгоритм для определения всех элементов орбиты (n , a , i , Ω , T_p , e , ω).
3. Метод, в котором генетическим алгоритмом определяется пять неизвестных (n , i , T_p , e , ω), две другие (a , Ω) линейно связаны с наблюдаемыми величинами (ρ_k , θ_k) и находятся методом наименьших квадратов.

Эксперименты с модельными данными показали, что ошибки, обусловленные статистической природой генетических алгоритмов, при увеличении численности популяции и количества поколений можно сделать сколь угодно малыми. Наиболее удобен в использовании усовершенствованный нами метод программы CHARA, он обеспечивает высокую точность при относительно небольших вычислительных затратах: в случае обработки 50-ти наблюдений время, необходимое для определения орбиты, меньше минуты. При увеличении количества наблюдений время работы программы возрастает, так как основные вычислительные затраты связаны с определением сумм квадратов невязок. У методов с пятью и семью неизвестными, в сравнении с методом программы CHARA, для обеспечения стабильности получаемых результатов увеличена численность популяции и количество поколений, что привело к увеличению вычислительных затрат. В методе с семью неизвестными применена дополнительная процедура, обеспечивающая генетическое разнообразие.

Методы дифференциальных поправок и методы, построенные на основе генетических алгоритмов, работают примерно с одинаковой точностью. В качестве первых приближений в генетическом алгоритме необходимо задать интервалы из-

менения искомых величин. Интервалы могут быть очень большими, поэтому требования к точности первых приближений низкие. Еще одно преимущество описанных новых методов в сравнении с методом дифференциальных поправок заключается в том, что при определении орбит по дугам малой длины ($<180^\circ$) отсутствуют проблемы со сходимостью.

ГЛАВА II. Определение орбит визуально-двойных звезд по коротким дугам

§ 2.1 Трудности, возникающие при вычислении орбит по наблюдениям на коротких дугах

К настоящему времени каталог WDS [86] содержит данные более чем о 100000 визуально-двойных звезд, орбиты вычислены примерно у 2700 звезд [75]. Основная причина, по которой у большинства звезд орбиты не определены – малая дуга, охваченная наблюдениями. При работе на коротких дугах появляется ряд особенностей: с уменьшением длины наблюденной дуги ухудшается сходимость методов; незначительные отклонения в позиционных наблюдениях приводят к большим ошибкам в определении элементов орбиты; одним и тем же наблюдениям одинаково хорошо соответствуют различные орбиты.

Классические методы, построенные на основе уравнения Тиле, непригодны для определения орбит на коротких дугах [11]. К этому выводу можно прийти, рассмотрев уравнение Тиле

$$t_2 - t_1 - S_{12}/c = (1/n) * [u_2 - u_1 - \sin(u_2 - u_1)]. \quad 2.1.1$$

В случае малых разностей эксцентрических аномалий в правой части функции $\sin(u_2 - u_1)$ можно разложить в ряд, что упрощает вычисления. Левая часть уравнения равна площади сегмента, деленной на постоянную площадей. При малых углах площадь сегмента является очень малой величиной, ее значение сравнимо с ошибками, возникающими при определении площади треугольника S_{12} из наблюдений ρ и θ .

Работу методов дифференциальных поправок на коротких дугах можно изучить с помощью метода, предложенного CHARA [73]. В § 1.4 было отмечено, что он является одной из модификаций метода дифференциальных поправок в декартовых координатах, отличается тем, что из семи неизвестных величин три определяются методом подбора. Использование метода подбора сделало метод, предложенный CHARA, глобально сходящимся, поэтому с его помощью можно получить элементы орбиты по короткой дуге. В ходе работы метода перебираются всевоз-

можные значения $(n_{(i)}, T_{p(j)}, e_{(k)})$, ищутся элементы орбиты, при которых средне-квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\sum (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2) / N}$ будет минимально. Особенности алгоритма метода позволяют изучить функции $(\sigma_{\min}(n), \sigma_{\min}(T_p)$ и $\sigma_{\min}(e))$, определяющие минимальные значения среднеквадратичного отклонения при различных значениях элементов орбит $(n, T_p$ и $e)$. В диссертации рассмотрена зависимость $\sigma_{\min}(e)$.

На рис. 2.1 и 2.2 представлены результаты, полученные на дугах 7° и 50° . Использовались десять модельных наблюдений, погрешности в них не вносились, средняя величина разделения $\bar{\rho} \sim 1''$. Точное значение эксцентриситета $e = 0.4$. Для определения орбиты метод, предложенный CHARA, необходимо запускать несколько раз, с каждым разом уменьшая шаг подбора и области изменения искомых величин. На рисунках представлены результаты первого этапа вычислений, область изменения эксцентриситета $(0, 0.7)$, шаг $\Delta e = 0.01$, для каждого значения эксцентриситета рассматривалось 5×10^5 комбинаций значений периода и эпохи прохождения периастра.

Точных значений искомых величин $(n$ и $T_p)$ при подбore не было, поэтому на графиках отсутствует минимум при $e = 0.4$. В случае дуги 7° обнаружить минимум не удалось даже в окрестности $e = 0.4$. Появление ломанной кривой связано с шагом подбора, в одних случаях появляются более удачные комбинации $(n$ и $T_p)$, в других менее удачные. Очень малое значение σ при различных значениях e на рис. 2.1 говорит о том, что определить орбиту классическими методами, используя 10 наблюдений на дуге 7° , с учетом современной точности астрометрических инструментов невозможно.

Для дуги 50° (рис. 2.2) рассмотрены два случая – наблюдения распределены вблизи периастра и апоафра. Из графиков следует, что при определении элементов орбиты многое зависит от того, какой участок орбиты охвачен наблюдениями. Случай с апоастром является более благоприятным, так как правая и левая ветви графика идут вверх более круто. Элементы орбиты, полученные по дуге 50° , близки к истинным, но из графиков (рис. 2.2) следует, что при любых значениях экс-

центриситета из интервала (0.25, 0.7) среднеквадратичные ошибки меньше погрешности современных спекл-интерферометрических наблюдений [59].

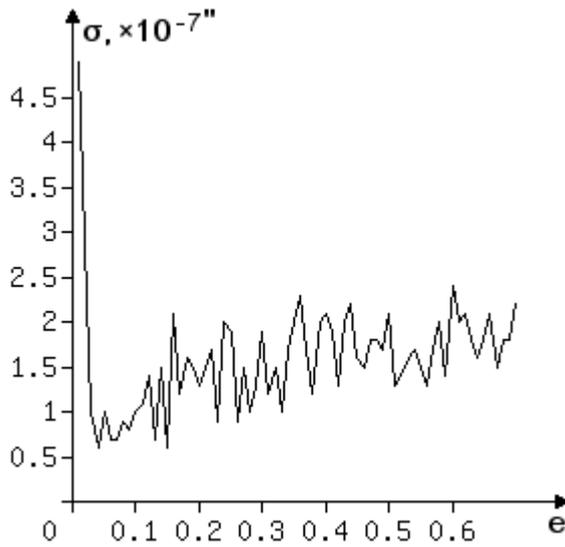


Рис. 2.1. Зависимость $\sigma(e)$ для дуги 7°

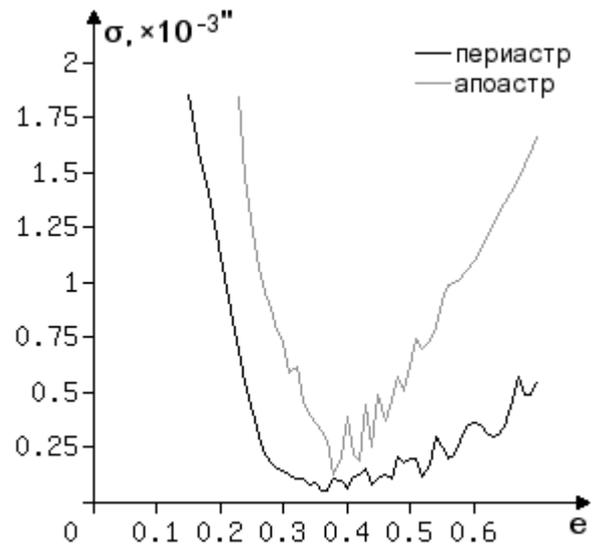


Рис. 2.2. Зависимость $\sigma(e)$ для дуги 50°

Рис. 2.2 говорит о сложности определения орбит по коротким дугам методом дифференциальных поправок, погрешности будут велики даже в случае использования современных спекл-интерферометрических наблюдений. В настоящее время в четвертом каталоге появились наблюдения, произведенные на интерферометрах с длинной базой: Mark III [100], NPOI [57], PTI [61] и др. Астрометрическая точность “Palomar Testbed Interferometer” (PTI) имеет порядок $10^{-4}''$ [84]. Из рис. 2.2 следует, что данной точности может хватить для определения орбит методом дифференциальных поправок по дугам $\sim 50^\circ$.

Для проверки предположения было выбрано 14 звезд, у которых накоплены многочисленные ряды наблюдений звездным интерферометром (PTI) на дугах от 25° до 240° . Орбиты определялись методом дифференциальных поправок и методом CHARA с использованием ГА [14] только по данным PTI из четвертого интерферометрического каталога версии 08.2014. Изучаемые звезды длительно наблюдались спекл-интерферометрическими методами, поэтому в шестом каталоге [75] имеются надежно определенные орбиты. Они использовались для проверки получаемых результатов. Обнаружено, что половину орбит (WDS 04357+1010, 06041+2316, 15278+2906, 15416+1940, 17217+3958, 21145+1000, 21446+2539) можно определить методом дифференциальных поправок, если в качестве первого при-

ближения брать данные шестого каталога. Если для этой цели применять элементы орбит различных авторов из файла “Master file” (электронная версия шестого каталога орбит [75]), сходимость довольно часто нарушается. Например, элементы орбиты WDS 04357+1010, полученные Балегой и др. (Bag1999b), обеспечивают сходимость, а полученные другими исследователями (Hrt2000a и Ole2000a) – нет. К неожиданным результатам можно отнести определение орбиты WDS 15278+2906 методом дифференциальных поправок по дуге 25°. Для WDS 15416+1940 при использовании всей совокупности данных РТИ сходимость отсутствует. Положение меняется после исключения наблюдения Mut 2008.5236, которое давало большие невязки в сравнении с точностью РТИ, например, для орбиты Мутерспо и др. [89] $(o-c)_\theta = -2.4^\circ$, $(o-c)_\rho = -0.0014''$. Остальные семь звезд (WDS 02157+2503, 02537+3820, 15232+3017, 18570+3254, 20375+1436, 21148+3803, 21501+1717) определялись с помощью ГА, метод дифференциальных поправок не сходится. Параметры ГА: $N_{pop} = 200$, $T_{pop} = 100$, процент мутирования гена 10%. У WDS 21501+1717 по причине больших невязок ($(o-c)_\theta = -0.8^\circ$, $(o-c)_\rho = 10^{-3}''$) было исключено наблюдение 2005.7368.

Результаты вычислений представлены в табл. 1. Помимо элементов орбит указано количество наблюдений (N) и длина дуги ($\Delta\theta$), охваченная ими, для CHARA ГА оценена величина Δ_x , характеризующая стабильность работы генетического алгоритма [14]. Если орбиту не удалось определить методом дифференциальных поправок, то строка “диф.попр.” отсутствует. Для сравнения в табл. 1 представлены орбиты шестого каталога.

Таблица 1. Орбиты, определенные по данным РТИ							
WDS 02157+2503, $N = 89$, $\Delta\theta = 38.41^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	23.594	0.2403	104.231	55.019	1986.154	0.70488	264.542
Δ_x	2.489	0.0127	0.205	0.817	2.486	0.01055	3.833
6 cat	23.608	0.2347	104.437	55.823	1986.182	0.68119	263.927
WDS 02537+3820, $N = 46$, $\Delta\theta = 23.38^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	30.0081	0.3420	108.73	29.53	1997.567	0.8923	268.49
Δ_x	1.2709	0.0613	3.55	1.68	0.265	0.0403	0.27
6 cat	31.6335	0.2224	120.48	26.62	1996.471	0.7560	265.54
WDS 04357+1010, $N = 31$, $\Delta\theta = 118.5^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °

CHARA ГА	17.154	0.2380	70.596	147.034	2011.225	0.0898	232.2
Δ_x	0.465	0.0023	0.149	0.185	0.822	0.0098	10.3
Диф.попр.	17.428	0.2393	70.503	146.926	2011.027	0.0834	226.2
6 cat	18.029	0.2401	69.923	146.734	2010.177	0.0715	205.7
WDS 06041+2316, $N = 30$, $\Delta\theta = 159.97^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	13.61	0.202	59.2	173.4	1981.88	0.374	200.1
Δ_x	0.18	0.001	0.2	0.2	0.38	0.001	1.2
Диф.попр.	13.70	0.203	59.1	173.3	1981.69	0.375	199.5
6 cat	13.35	0.198	58.2	174.9	1982.28	0.361	198.2
WDS 15232+3017, $N = 51$, $\Delta\theta = 51.79^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	45.5704	0.91681	58.772	200.505	1970.655	0.32287	32.466
Δ_x	3.1278	0.01781	0.893	0.350	6.595	0.01168	7.681
6 cat	41.6296	0.86226	58.084	202.827	1975.547	0.27907	39.885
WDS 15278+2906, $N = 73$, $\Delta\theta = 24.88^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	9.8339	0.194243	113.709	147.740	1982.196	0.61689	178.95
Δ_x	0.0026	0.000036	0.010	0.002	0.006	0.00030	0.01
Диф.попр.	9.8357	0.194268	113.702	147.741	1982.191	0.61669	178.96
6 cat	10.5370	0.204008	111.452	148.041	1980.475	0.53971	180.21
WDS 15416+1940, $N = 14$, $\Delta\theta = 156.87^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	17.267	0.18381	83.234	69.073	2011.620	0.1174	185.4
Δ_x	0.235	0.00091	0.021	0.034	0.138	0.0046	4.5
Диф.попр.	17.157	0.18342	83.246	69.058	2011.692	0.1192	187.6
6 cat	21.944	0.21033	83.608	69.684	2007.217	0.0941	80.5
WDS 17217+3958, $N = 71$, $\Delta\theta = 60.93^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	5.39929	0.07151	53.03	141.48	2002.923	0.69758	219.13
Δ_x	10^{-7}	3×10^{-10}	4×10^{-7}	2×10^{-6}	5×10^{-8}	2×10^{-8}	3×10^{-6}
Диф.попр.	5.39568	0.07156	53.06	141.35	2002.926	0.69881	219.35
6 cat	5.52965	0.07441	56.40	141.96	2002.966	0.67974	222.50
WDS 18570+3254, $N = 66$, $\Delta\theta = 25.13^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	47.396	2.6949	104.331	9.273	1996.352	0.9282	283.96
Δ_x	4.591	0.7228	6.315	1.188	0.629	0.0662	7.92
6 cat	61.411	1.2756	114.159	48.846	1972.183	0.2667	281.71
WDS 20375+1436, $N = 73$, $\Delta\theta = 20.33^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	22.627	0.39629	57.758	353.882	1970.065	0.49106	183.22
Δ_x	1.372	0.01387	1.621	1.541	2.358	0.05484	4.58
6 cat	26.683	0.43701	61.323	357.179	1962.812	0.35595	168.86
WDS 21145+1000, $N = 119$, $\Delta\theta = 232.65^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	5.70788	0.231960	99.3598	23.418	2004.292	0.436972	7.806

Δ_x	4×10^{-10}	10^{-11}	7×10^{-10}	10^{-9}	10^{-10}	4×10^{-11}	10^{-8}
Диф.попр.	5.70792	0.231960	99.3599	23.418	2004.292	0.436972	7.809
6 cat	5.70589	0.231965	99.4083	23.362	2004.293	0.436851	7.735
WDS 21148+3803, $N = 39$, $\Delta\theta = 29.6^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	87.7593	1.1043	146.66	1.82	2008.180	0.1880	111.12
Δ_x	7.9688	0.0444	1.74	1.09	8.499	0.0484	2.26
6 cat	49.6257	0.9130	134.44	339.75	1989.073	0.2392	298.77
WDS 21446+2539, $N = 135$, $\Delta\theta = 171.026^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	12.0602	0.23692	108.194	288.550	2002.409	0.3020	129.510
Δ_x	10^{-7}	8×10^{-10}	4×10^{-8}	9×10^{-8}	2×10^{-8}	2×10^{-9}	10^{-6}
Диф.попр.	12.0315	0.23648	108.262	288.592	2002.404	0.3011	129.302
6 cat	11.5670	0.23494	107.911	289.037	2002.348	0.3140	124.666
WDS 21501+1717, $N = 49$, $\Delta\theta = 84.07^\circ$.							
	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
CHARA ГА	28.6718	0.36909	69.594	230.344	1987.332	0.1836	237.51
Δ_x	1.5493	0.00521	0.447	0.276	1.828	0.0261	9.50
6 cat	26.3464	0.36245	70.379	230.698	1989.881	0.2300	250.23

Результаты табл. 1 говорят о сложности определения орбит по коротким дугам. Область сходимости метода дифференциальных поправок в этом случае очень мала, поэтому для семи звезд не удалось найти первые приближения, которые обеспечили бы сходимость. С помощью ГА определены орбиты всех выбранных звезд, но для WDS 18570+3254 и WDS 21148+3803 получено полное несоответствие с данными шестого каталога орбит. В табл. 2 представлены среднеквадратичные отклонения для элементов орбит, полученных методом дифференциальных поправок. Из результатов следует, что данные РТИ более чем на порядок точнее фотографических наблюдений и более чем на два порядка визуальных. Возможность определения орбит по коротким дугам методом дифференциальных поправок появилась недавно, точность наблюдений, необходимая для решения подобных задач, очень высока (табл. 2).

Таблица 2. Среднеквадратичные отклонения наблюдений РТИ					
WDS	$\sigma_{p\Delta\theta}$, 10^{-3} "	$\sigma_{\Delta p}$, 10^{-3} "	WDS	$\sigma_{p\Delta\theta}$, 10^{-3} "	$\sigma_{\Delta p}$, 10^{-3} "
04357+1010	0.515	0.445	17217+3958	0.605	0.594
06041+2316	1.100	0.747	21145+1000	0.610	0.412
15278+2906	0.404	0.432	21446+2539	3.052	0.856
15416+1940	0.313	0.429			

Сложности, связанные с определением орбит по коротким дугам, привели к развитию новых подходов, отличающихся от классических. Они разработаны спе-

циально для определения орбит по коротким дугам, используют разложения относительных координат и дополнительные данные (суммы масс, относительные лучевые скорости, тригонометрические параллаксы). Новые методы называли динамическими, так как в их основе лежат динамические отношения и система единиц (длина – *a.e.*, время – год, масса – M_{\odot}), принятая в астрономии. Наибольшую известность получил метод параметров видимого движения (ПВД) [28].

§ 2.2 Определение орбит методом ПВД, его преимущества в сравнении с классическими методами и недостатки

При работе с наблюдениями, распределенными на коротких дугах, геометрический метод довольно часто дает гиперболические орбиты, что невозможно для большинства объектов, методы дифференциальных поправок не сходятся, многими другими методами также не удастся получить близкие к истинным результаты. Задачу определения элементов орбиты по короткой дуге по настоящее время нельзя отнести к окончательно решенной, поэтому она вызывает большой интерес у исследователей. В. Рабе, Е. де Каро, Г. Века, У. Гюнтцель-Лингнер, Й. Хопманн посвятили свои работы обработке широких пар [30, 98]. Наблюдения широких пар ведутся на многих обсерваториях мира, в том числе в Пулковке [29, 34, 82]. Для вычисления элементов орбит визуально-двойных звезд по коротким дугам можно использовать метод ПВД [28, 31].

Метод ПВД первоначально был разработан для определения оскулирующей орбиты ИСЗ. Он является модификацией классического метода Лапласа [26, 52]. Совершенствование метода ПВД ведется по настоящее время [19]. Для определения орбит визуально двойных звезд метод ПВД впервые был применен Киселевым и Кияевой [28], к настоящему времени с его помощью определены орбиты многих звезд [31, 33, 37, 47].

В методе ПВД используются моменты времени и положения звезды-спутника относительно главной компоненты (T_k, ρ_k, θ_k), параллакс (π_i), относительная лучевая скорость ($V_{rBA} = V_{rB} - V_{rA}$ [км/с]) на момент времени \bar{T} , сумма масс компонентов (M_{AB}). Параллакс можно взять из каталога Hipparcos [104, 107], массы оценить по спектральному классу или зависимости масса-светимость [62, 99]. Орбита опреде-

лена, если известны относительная лучевая скорость, сумма масс компонентов и пять величин (ρ_0 , θ_0 , μ , ψ и ρ_c), названных параметрами видимого движения: ρ_0 и θ_0 характеризуют относительное положение звезды-спутника, μ и ψ ее относительное движение, ρ_c – радиус кривизны короткой дуги видимой орбиты.

Алгоритм метода параметров видимого движения:

1. Из разложений по координатам в окрестности точки \bar{T} методом наименьших квадратов определяем положение (θ_0 , ρ_0) и первые и вторые производные по времени ($\dot{\theta}$, $\dot{\rho}$) и ($\ddot{\theta}$, $\ddot{\rho}$)

$$\theta_k \approx \theta_0 + \dot{\theta}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\theta}\tau_k^2, \quad \rho_k \approx \rho_0 + \dot{\rho}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\rho}\tau_k^2, \quad 2.2.1$$

где $\tau_k = T_k - \bar{T}$, \bar{T} – среднее время или время измерения кривых лучевых скоростей. Пуанкаре [49] указал, что для повышения точности метода Лапласа нужно взять не момент среднего наблюдения, а момент $\bar{T} = \frac{1}{3}(T_1 + T_2 + T_3)$, то есть найти среднее арифметическое (в случае метода ПВД для N -наблюдений).

2. Переходим от угловых расстояний к линейным: $\rho_0^* = \frac{\rho_0}{\pi_t}$, $\dot{\rho}^* = \frac{\dot{\rho}}{\pi_t}$ и $\ddot{\rho}^* = \frac{\ddot{\rho}}{\pi_t}$ (в

дальнейшем примем, что величины ρ_0 , $\dot{\rho}$ и $\ddot{\rho}$ имеют линейные расстояния в единицах измерения). В качестве единицы измерения длины в методе ПВД используется астрономическая единица, массы – солнечная масса, времени – год.

3. Определяем относительную скорость звезды-спутника в картинной плоскости и угол между вектором скорости видимого движения и направлением на северный полюс мира

$$\mu = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho_0^2 \dot{\theta}^2}, \quad \psi = \theta_0 \pm 90^\circ \mp \arcsin(\dot{\rho} / \mu). \quad 2.2.2$$

4. Вычисляем радиус кривизны по одной из формул

$$\rho_c = \frac{\mu^3}{\pm \dot{\theta}(\mu^2 + \dot{\rho}^2) + \rho(\pm \dot{\rho}\ddot{\theta} \mp \dot{\rho}\ddot{\theta})} \quad \text{или} \quad \rho_c = \frac{\pm \mu^3}{\dot{\theta}(\mu^2 - 4\dot{\rho}^2)}. \quad 2.2.3$$

Вторая формула (2.2.3) является приближенной, при ее выводе было принято, что $\ddot{\theta} = 0$ [28].

5. Находим расстояние между компонентами пары на момент времени \bar{T}

$$r^3 = \pm k^2(\rho_0 \rho_c / \mu^2) \sin(\theta_0 - \psi), \quad k^2 = 4\pi M_{AB}. \quad 2.2.4$$

6. Определяем относительную скорость движения звезды-спутника

$$v^2 = \mu^2 + v_r^2, \quad 2.2.5$$

где $v_r = \frac{365.242198781 * 86400}{1.49598 * 10^8} V_{rBA} [a.e./год] = 0.210945 V_{rBA} [a.e./год]$ – относительная лучевая скорость движения спутника (в знаменателе астрономическая единица в км., в числителе продолжительность бesselева года в секундах).

7. Исходя из интеграла энергии в задаче двух тел [53] и третьего закона Кеплера, определяем большую полуось и период обращения

$$a = (2/r - v^2/k^2)^{-1}, \quad P = \frac{a^{3/2}}{M_{AB}^{1/2}}. \quad 2.2.6$$

8. Определяем радиус-вектор \vec{r} , вектор скорости \vec{v} и единичные векторы \vec{R} , \vec{V} (рис. 2.3)

$$\vec{r} = r\vec{R} = \begin{cases} r \cos \theta_0 \cos \beta \\ r \sin \theta_0 \cos \beta \\ \pm r \sin \beta \end{cases}, \quad \vec{v} = v\vec{V} = \begin{cases} v \cos \psi \cos \gamma \\ v \sin \psi \cos \gamma \\ v \sin \gamma \end{cases}, \quad 2.2.7$$

где $\cos \beta = \frac{\rho}{r}$, $tg \gamma = \frac{v_r}{\mu}$.

Проекция радиус-вектора на луч зрения ($z = \pm r \sin \beta$) определяется неоднозначно, поэтому метод ПВД дает две орбиты, выбрать правильную можно, используя старые наблюдения.

9. Вычисляем вектор полюса \vec{Q} , он перпендикулярен орбитальной плоскости, поэтому

$$\vec{Q} = \frac{\vec{R} \times \vec{V}}{|\vec{R} \times \vec{V}|}. \quad 2.2.8$$

10. Угол между вектором полюса и вектором направления луча зрения \vec{Z} равен наклонению орбиты i , поэтому $\cos i = \vec{Z} \vec{Q}$.

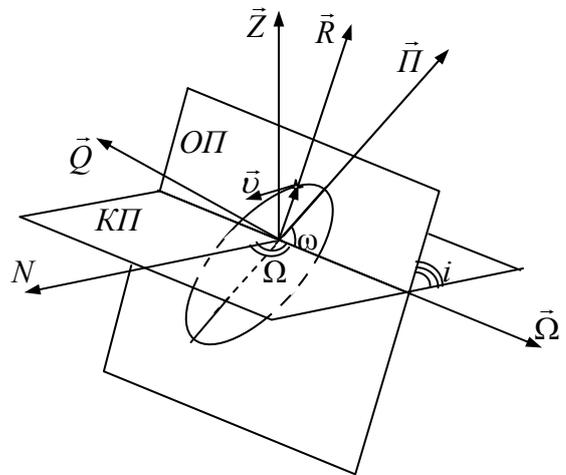


Рис. 2.3. Векторы, определяемые в ходе вычисления орбиты

11. Линия узлов перпендикулярна плоскости, проходящей через векторы \vec{Z} и \vec{Q} , следовательно, вектор восходящего узла орбиты $\vec{\Omega} = \frac{\vec{Z} \times \vec{Q}}{|\sin i|}$, откуда долгота восходящего узла $tg \Omega = \Omega_2 / \Omega_1$.

12. Определяем параметр орбиты p из уравнения $k\sqrt{p} = |\vec{r} \times \vec{v}|$.

13. Находим эксцентриситет e и истинную аномалию ν из системы

$$\begin{cases} e \cos \nu = p/r - 1 \\ e \sin \nu = \dot{r} \sqrt{p/k^2} \end{cases} \quad 2.2.9$$

14. Вычисляем долготу периастра. Возможны два подхода:

а) Аргумент широты u равен углу между векторами $\vec{\Omega}$ и \vec{R} , определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \vec{R} = \cos u \\ \vec{\Omega} \times \vec{R} = \vec{Q} \sin u \end{cases} \quad 2.2.10$$

откуда долгота периастра $\omega = u - \nu$.

б) Находим вспомогательный вектор $\vec{R}_\perp = \vec{R} \times \vec{Q}$, вектор направления на периастр $\vec{P} = \vec{R} \cos \nu + \vec{R}_\perp \sin \nu$ и долготу периастра из системы уравнений

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \times \vec{P} = \vec{Q} \sin \omega \\ \vec{\Omega} \vec{P} = \cos \omega \end{cases} \quad 2.2.11$$

15. Момент прохождения периастра определяем из уравнений

$$tg(E/2) = \sqrt{(1-e)/(1+e)} tg(\nu/2), \quad M = E - e \sin(E), \quad T_p = \bar{T} - M/n \quad 2.2.12$$

Вычисление орбиты методом ПВД можно поделить на два этапа:

1. Определяются радиус-вектор $\vec{r}(x, y, z)$, соединяющий компоненты пары, вектор относительной скорости $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и сумма масс M_{AB} .
2. Используя величины $\vec{r}(x, y, z)$, $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и M_{AB} , определяются элементы орбиты.

Преимущество метода ПВД заключается в том, что из семи величин, необходимых для определения орбиты по короткой дуге, четыре определяются достаточно точно из разложений координат (2.2.1), одна (\dot{z}) может быть измерена, другая M_{AB} оценена с погрешностью $\sim 10\%$, и только проекция радиус-вектора на луч зре-

ния (z) определяется со значительной погрешностью, которая зависит от точности вычисления вторых производных в (2.2.1).

Недостаток метода связан с необходимостью вычисления радиуса кривизны видимой траектории, так как для этого необходимо знать вторые производные координат (2.2.1) или делать какие-либо предположения, например, $\ddot{\theta} = 0$. Использование приближенных формул, получаемых из определения радиуса кривизны $\rho_c = d\sigma/d\psi$, также не приводит к повышению точности работы метода [5].

Использование суммы масс для вычисления орбит очень необычно. Трудно принять какую-либо точку зрения относительно этого. С одной стороны орбиты определяются для вычисления масс звезд. В методе ПВД ситуация обратная: нужно задать сумму масс, чтобы определить орбиту. Поэтому с этих позиций использование суммы масс является недостатком метода. С другой стороны элементы орбиты по коротким дугам вычисляются с большой погрешностью, следовательно, очень неточно определяются и массы (часто не соответствуют спектральному классу), а метод ПВД позволяет приближенно изучить движение пары. Исходя из этого, использование суммы масс – вынужденная мера при работе на дугах 10° - 25° и должно рассматриваться как достоинство метода. Кроме того, метод ПВД позволяет делать оценки значений сумм масс двойных звезд [32].

§ 2.3 Динамический метод определения орбит, близких к круговым

Ранее визуально-двойные звезды изучались с целью определения их масс [40]. Для вычисления орбиты по короткой дуге методом ПВД сумма масс должна быть известна изначально, ее не удастся найти подбором даже для точных модельных данных. Также сложности возникают со значениями относительных лучевых скоростей, научных работ, в которых они определяются для долгопериодических пар, очень мало, а точность их определения должна быть высокой.

В данном параграфе рассматривается метод определения круговых орбит на основе алгоритма метода ПВД, не использующий относительную лучевую скорость и сумму масс компонентов. Ранее подобная задача уже решалась [35]. В то время тригонометрический параллакс и относительная лучевая скорость определялись из наблюдений очень неточно, поэтому именно эти величины выступали как

дополнительные неизвестные в динамическом методе. В настоящее время параллаксы многих звезд известны с высокой степенью точности [104, 107]. Метод, предложенный Кияевой [35], можно незначительно видоизменить: в качестве неизвестных взять сумму масс компонентов и относительную лучевую скорость. Для круговой орбиты параметры видимого движения находятся методами, описанными Киселевым и др. [28, 31]. Из основного уравнения метода ПВД находим

$$r^* = \frac{r}{k^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{\rho\rho_c \sin(\psi - \theta)}{\mu^2}}. \quad 2.3.1$$

Расстояние между компонентами можно выразить формулой

$$r = r^* k^{2/3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 2.3.2$$

продифференцировав (2.3.2) и учтя, что для круговой орбиты $\dot{r} = 0$, находим

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0. \quad 2.3.3$$

Второй закон Кеплера в этом случае

$$(p)^{1/2} k = |\vec{r} \times \vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} * \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad 2.3.4$$

Для круговой орбиты расстояние между компонентами пары равно большой полуоси и параметру орбиты: $r = a/\pi_i = p$. Уравнения (2.3.2 – 2.3.4) (с учетом равенства $r = p$) образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными, которую можно решить аналитически, например, исключив k и \dot{z} , получить уравнение

$$z^4 + (x^2 + y^2 - (r^*)^3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2))z^2 - (r^*)^3 (x\dot{x} + y\dot{y})^2 = 0. \quad 2.3.5$$

Из (2.3.5) определяем z , из (2.3.2) k , из (2.3.3) \dot{z} . Уравнение (2.3.5) после замены переменной $t = z^2$ является квадратным, величина $-(r^*)^3 (x\dot{x} + y\dot{y})^2 < 0$, поэтому один из корней (t) уравнения является отрицательным, но z^2 не может быть меньше 0, поэтому z^2 из (2.3.5) определяется однозначно. В итоге для проекции радиус-вектора на луч зрения z получаем положительное и отрицательное значение, что приводит к появлению известной неопределенности при нахождении восходящего узла [40]. Относительная лучевая скорость \dot{z} , определяемая из (2.3.3), в зависимости от z также будет иметь положительное и отрицательное значение.

Прямоугольные координаты звезды-спутника в формулах (2.3.2 – 2.3.5) измеряются в астрономических единицах, проекции скоростей в астрономических единицах в год. Для перевода расстояний в астрономические единицы используется

тригонометрический параллакс двойной звезды (π_t). Его можно взять из каталога Hipparcos.

Сумму масс найдем, зная динамическую постоянную астрочентрического движения

$$k^2 = \frac{4\pi^2(M_A + M_B)}{M_\odot}. \quad 2.3.6$$

Период P , наклонение орбиты i , позиционный угол линии узлов Ω , момент прохождения узла T_Ω находятся методами, аналогичными описанным в работе [31] и в § 2.2 диссертации.

В качестве примера определим рассмотренным методом элементы орбит звезд, у которых в соответствии с данными шестого каталога орбит значения эксцентриситета невелики и имеется более пяти наблюдений на короткой дуге. Выбранные объекты представлены в табл. 1. Спектральный класс звезд взят из вашингтонского каталога [86], параллакс из каталога Hipparcos.

WDS	N	T_1-T_N	\bar{T} , год	$\Delta\theta$, °	π_t , "	SP, WDS
00057+4549	29	1961.753-1995.774	1981.566	14.811	0.08510	K6 M0
00572+2325	6	1990.6426-1990.6728	1990.6605	35.56	0.01344	G8IIIb
01040+3528	53	1983.0690-2008.855	1996.6900	20.5	0.00267	A3
01196-0520	7	1994.7085-2008.6060	2001.442	38.1	0.00868	F8
02231+7021	10	1983.0663-2010.053	1994.3274	14.1	0.00339	F5
03095+4544	9	1998.7749-2003.7885	2001.3498	36.4	0.06483	M2
03489+6445	11	1983.7133-2009.9085	1992.9621	32.59	0.00830	F5
01178+4901	39	1923.943-2006.6901	1994.9785	24.1	0.00321	B9.5V

Обозначения: N – количество наблюдений; T_1-T_N – интервалы времени, используемые для определения орбиты; \bar{T} – средняя эпоха наблюдений; $\Delta\theta$ – длина дуги, охваченная наблюдениями.

WDS	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °	автор
00057+4549	1550.637	11.7613	56.68	175.14	1970.438	0.4973	349.37	Pop
00057+4549	509.65	6.21	54.9	13.5	2115.80	0.22	267.2	Kiy
00572+2325	0.31683	0.01037	30.5	69.4	1990.331	0.006	215	MkT
01040+3528	500	0.354	33.2	111.7	1995.82	0.156	353.2	Doc
01196-0520	131.16	0.273	130.1	168.8	2018.40	0.160	249.2	USN
02231+7021	161.259	0.587	104.33	154.1	1918.14	0.115	199.1	Pal
03095+4544	28.31	0.569	96.8	13.2	2009.16	0.138	165.6	Bag
03489+6445	178.15	0.382	52.3	158.6	1944.47	0.124	47.1	Hrt

Элементы орбит шестого каталога представлены в табл. 2. В столбце “автор” указаны сокращения, принятые в каталогах двойных звезд. Для WDS 00057+4549 рассмотрены две орбиты. Одну из них определили Кияева и др. [37] по короткой дуге методом ПВД, другую – Попович и Павлович [95].

В табл. 3 представлены элементы орбит, полученные рассмотренным методом, и величины, являющиеся результатом промежуточных вычислений – относительная лучевая скорость (v_r) на момент времени \bar{T} (табл. 1) и сумма масс компонентов (M_{AB}). Орбита ADS 48 (WDS 00057+4549) определялась по данным Пулковского каталога [29, 34], остальных звезд по данным четвертого интерферометрического каталога [76]. При определении орбит WDS 01178+4901 и 02231+7021 было исключено наблюдение ГYC. Орбита WDS 01178+4901 ранее не вычислялась.

Таблица 3. Элементы орбит							
WDS	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_Ω , год	v_r , $a.e./\text{год}$	M_{AB} , M_\odot
00057+4549	553.51	6.066	50.4	2.50	1724.9	-0.61	1.18
00572+2325	0.2756	0.01002	32.8	86.5	1990.4969	7.66	5.45
01040+3528	303.0	0.301	47.4	109.9	2000.3	-1.71	15.54
01196-0520	91.22	0.256	129.6	173.5	2042.47	1.49	3.10
02231+7021	272.141	0.658	114.0	142.0	2005.810	-3.95	98.83
03095+4544	70.81	1.247	96.6	27.8	1986.81	0.47	1.42
03489+6445	177.63	0.413	55.7	162.6	1918.15	-1.28	3.90
01178+4901	1012	0.515	133.0	117.7	2419.3	0.64	4.03

В дальнейшем (в § 3.2 диссертации) будет показано, что имеется много различных подходов вычисления производных координат по времени. В описанном методе момент времени \bar{T} определялся как средняя арифметическая эпох наблюдений, для вычисления производных координат по времени использовались разложения полярных координат второго порядка (2.2.1).

Из сравнения данных табл. 2 и 3 следует, что рассмотренный метод дает неплохие результаты при обработке наблюдений на коротких дугах, если орбиты близки к круговым. У WDS 02231+7021 и 03095+4544 орбиты, представленные в шестом каталоге орбит и полученные описанным в этом параграфе методом, заметно отличаются, кроме того, вычисленные массы для этих объектов не соответствуют спектральному классу. В случае WDS 02231+7021 одной из причин завышенной массы может быть достаточно большая относительная ошибка параллакса.

§ 2.4 Применение метода подбора, использование далеких по времени старых наблюдений для уточнения элементов орбит

На заключительном этапе исследований, проведенных с помощью метода ПВД, получаются две орбиты, одинаково хорошо удовлетворяющие наблюдениям, одна из которых является неверной. Это происходит из-за неоднозначности определения знака проекции радиус-вектора, соединяющего компоненты пары. В классических методах [40, 44] также существует неопределенность при вычислении орбит, но она отличается от полученной в методе ПВД. В классических методах неоднозначно определяются знаки проекции радиус-вектора на луч зрения и относительной лучевой скорости, что приводит к неопределенности в нахождении восходящего узла. Верное решение находится после измерения относительной лучевой скорости (в рассмотренном в § 2.3 методе для круговых орбит имеется аналогичная неопределенность). В методе ПВД неоднозначно определяется только проекция радиус-вектора на луч зрения, что приводит к одной ошибочной орбите. Выбрать правильную орбиту можно, если из наблюдений лучевых скоростей определить проекцию относительного ускорения на луч зрения или оценить знак величины $z\dot{z}$ в уравнении

$$z\dot{z} = r\dot{r} - x\dot{x} - y\dot{y}. \quad 2.4.1$$

Основная трудность – найти из наблюдений \dot{r} , что в настоящее время затруднительно.

В связи с осуществлением миссии Gaia [70, 71] для ближайших к нам широких двойных звезд появляется новая возможность выбора правильной орбиты: проекцию z или, по крайней мере, знак проекции можно определить, зная параллаксы компонентов двойной системы.

Ошибочная орбита плохо согласуется с наблюдениями, удаленными от используемых в вычислениях, поэтому правильную орбиту можно выбрать, применяя “старые” удаленные наблюдения. Такой подход был предложен в работе [36], кроме того, в ней рассматривается возможность использования удаленных по времени наблюдений для определения подбором суммы масс компонентов и относительной лучевой скорости. В данном параграфе также развиваются методы, использующие старые данные помимо рядов высокоточных наблюдений на коротких дугах. Пара-

метры видимого движения находятся методами, описанными Киселевым и Кияевой [28].

Для эллиптической орбиты справедливы следующие отношения:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 2.4.2$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \quad 2.4.3$$

$$(p)^{1/2} k = |\vec{r} \times \vec{v}| = r\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}, \quad 2.4.4$$

$$e \cos \nu = p/r - 1, \quad 2.4.5$$

$$e \sin \nu = \dot{r} \sqrt{p/k^2}. \quad 2.4.6$$

Уравнения (2.3.1, 2.4.2 – 2.4.6) образуют систему шести уравнений с восьмью неизвестными: r – расстояние между компонентами пары, \dot{r} – производная длины радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, по времени, k^2 – динамическая постоянная астрочентрического движения, z – проекция радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, на луч зрения, \dot{z} – относительная лучевая скорость, p – параметр орбиты, e – эксцентриситет, ν – истинная аномалия.

Случай, когда относительная лучевая скорость неизвестна.

Эксцентриситет (e) и истинную аномалию (ν) найдем, используя метод подбора: выберем такие значения, чтобы сумма квадратов отклонений была минимальна

$$\Delta = \sum_i (\rho_{(obs)i} \cos \theta_{(obs)i} - \rho_{(cal)i} \cos \theta_{(cal)i})^2 + \sum_i (\rho_{(obs)i} \sin \theta_{(obs)i} - \rho_{(cal)i} \sin \theta_{(cal)i})^2 = \min. \quad 2.4.7$$

Эксцентриситет и истинная аномалия выбраны для определения подбором случайно, они имеют одинаковый интервал возможных значений для всех визуально-двойных звезд ($e \in (0,1)$, $\nu \in (0,360)$). Введем обозначения $C_1 = e \cos \nu + 1$ и $C_2 = e \sin \nu$, тогда систему уравнений (2.3.1, 2.4.2 – 2.4.6) можно преобразовать к следующему виду

$$\begin{cases} k^{4/3} r^{*2} = x^2 + y^2 + z^2 \\ k^{4/3} C_2 \sqrt{r^*/C_1} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ k^{4/3} (C_1 + C_2^2/C_1) = r^* (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \end{cases}. \quad 2.4.8$$

Далее, исключая z и \dot{z} , получим уравнение

$$k^{8/3}r^*C_1 - k^{4/3}(r^{*2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x^2 + y^2)(C_1 + C_2^2/C_1)/r^* - 2C_2\sqrt{r^*/C_1}(x\dot{x} + y\dot{y})) + (x\dot{y} - y\dot{x})^2 = 0 \quad 2.4.9$$

Из уравнения (2.4.9) находим динамическую постоянную астрочетрического движения (k^2), из системы (2.4.8) проекцию радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, на луч зрения (z) и относительную лучевую скорость (\dot{z}). Дальнейшие вычисления аналогичны рассмотренным в работах [28, 31]. Этот метод по точности аналогичен стандартному методу подбора по сумме масс и относительной лучевой скорости [36], но у рассмотренного подхода есть преимущества: интервалы возможных значений величин, определяемых подбором (эксцентриситета и истинной аномалии), одинаковы для всех вычисляемых орбит, и решения получаются при любых их значениях.

В качестве примера определим несколько орбит по данным РТИ [61]. В табл. 1 представлены интервалы времени наблюдений, используемые в разложениях и при определении подбором эксцентриситета и истинной аномалии, даны длины дуг, охваченные наблюдениями. В табл. 2 представлены элементы орбит. Качество результатов, получаемых с помощью описанного метода, в первую очередь зависит от точности определения радиуса кривизны (ρ_c). В работе он вычислялся двумя способами: 1) в основе разложение полярных координат ($\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$ определялись из разложения 3-го порядка, $\ddot{\rho}$ – 2-ого порядка, $\ddot{\theta}$ с помощью закона площадей); 2) в основе разложение декартовых координат 3-го порядка с поворотом осей. Данные алгоритмы и причины их использования будут разобраны в дальнейшем в § 3.2 диссертации.

Орбиты WDS 17217+3958 и WDS 21501+1717 при использовании разложений полярных координат определяются с большими погрешностями, эти результаты в табл. 2 не представлены. У WDS 21446+2539 имеется два наблюдения (2006.50513 и 2006.5092) с большими невязками, при определении орбиты они не исключались. Большинство невязок позиционного угла WDS 21501+1717 положительны, это говорит о плохом качестве полученных элементов орбиты. Орбита WDS 22409+1433 вычислялась для двух случаев в соответствии с данными табл. 1: а) 2006.4929-2008.8986; б) 2005.9005-2008.8986.

Звезда WDS	разложение		подбор	
	T_1-T_N	$\Delta\theta, ^\circ$	T_1-T_N	$\Delta\theta, ^\circ$
17217+3958	2004.28198-2006.3805	29.63	2004.28198- 2007.3335	60.93
21446+2539	2003.46326-2004.8437	24.12	2002.86560-2008.8111	171.02
21501+1717	2006.4765-2008.8302	34.17	2004.5270-2008.8302	84.07
22409+1433	2006.4929-2008.8986	19.35	2003.7929-2008.8986	219.89
	2005.9005-2008.8986	30.01	2003.7929-2008.8986	219.89

WDS 17217+3958							
метод	P , год	a , "	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	T_p , год	e	ω , $^\circ$
дек. кор.	5.595	0.07178	54.39	145.54	2002.832	0.65	214.84
WDS 21446+2539							
	P , год	a , "	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	T_p , год	e	ω , $^\circ$
пол. кор.	11.830	0.23710	107.83	108.77	2002.396	0.315	306.97
дек. кор.	11.807	0.23718	107.80	108.70	2002.399	0.315	306.94
WDS 21501+1717							
	P , год	a , "	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	T_p , год	e	ω , $^\circ$
дек. кор.	23.349	0.35563	71.46	50.91	1992.224	0.315	78.15
WDS 22409+1433							
	P , год	a , "	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	T_p , год	e	ω , $^\circ$
пол. кор.(а)	24.118	0.30821	143.32	74.81	2004.407	0.76	208.84
дек. кор.(а)	20.719	0.28741	139.46	71.72	2004.376	0.735	202.35
пол. кор.(б)	23.385	0.30308	140.94	75.31	2004.396	0.755	208.81
дек. кор.(б)	18.715	0.27484	137.27	70.65	2004.345	0.715	198.92

Рассмотренный метод работает очень нестабильно: дает много ошибочных результатов. Основной причиной являются систематические ошибки радиуса кривизны (ρ_c). Пример с WDS 22409+1433 очень показателен, наблюдений много, они выполнены на одном из самых точных инструментов, охватывают дугу, которой достаточно для определения орбиты с высокой точностью методом дифференциальных поправок, но результаты в табл. 2 заметно отличаются друг от друга (зависят от используемых разложений и длины дуги).

Рассмотренный метод может иметь преимущества в сравнении с другими известными методами определения орбит, если имеются наблюдения высокой точности на дуге 10° - 30° и некоторое количество неточных удаленных наблюдений. Как правило, метод дает менее точные результаты в сравнении с методом CHARA ГА, описанном в § 1.4 диссертации.

Случай, когда относительная лучевая скорость известна.

Если кроме позиционных наблюдений и параллакса известна относительная лучевая скорость ($V_{rBA} = V_{rB} - V_{rA}$) на средний момент наблюдений, то уравнения (2.3.1, 2.4.2 – 2.4.6) образуют систему шести уравнений с семью неизвестными. Ее можно решить, применив метод подбора по сумме масс компонентов или проекции радиус-вектора на луч зрения, алгоритм вычислений при этом ничем не отличается от метода ПВД. Но можно использовать другой подход: считать расстояние r между компонентами пары, входящее в систему уравнений (2.4.2 – 2.4.6), неизвестным. В этом случае исчезает необходимость использовать в вычислениях вторые производные по времени разделения (ρ) и позиционного угла (θ). Хотя вторые производные не используются, в основе метода лежат разложения второго (2.2.1) либо более высокого порядка. Подбор, как у метода, рассмотренного выше, берется по эксцентриситету и истинной аномалии.

В этом случае известен астрочентрический вектор скорости. На каждом шаге подбора можно найти производную длины радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, по времени

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{v^2}{1 + C_1^2/C_2^2}}. \quad 2.4.10$$

Знак \dot{r} определяется в соответствии со знаком C_2 . Формула (2.4.10) выводится с помощью выражений (2.4.4 – 2.4.6).

Из отношений (2.4.2 - 2.4.3) получаем квадратное уравнение

$$r^2(\dot{r}^2 - \dot{z}^2) - 2r\dot{r}(x\dot{x} + y\dot{y}) + (x\dot{x} + y\dot{y})^2 + \dot{z}^2(x^2 + y^2) = 0. \quad 2.4.11$$

Из (2.4.11) находим расстояние между компонентами пары (r). Проекцию радиус-вектора на луч зрения (z) определим с помощью (2.4.3), из уравнений (2.4.4 – 2.4.5) найдем динамическую постоянную астрочентрического движения (k^2) и параметр орбиты (p). Дальнейшие вычисления аналогичны методу ПВД.

В качестве примера определим рассмотренным методом элементы орбит ADS 48, ADS 11632 и ADS 14636 (61 Cyg) по данным Пулковского каталога [29, 34] и данным сайта обсерватории Ниццы [103]. Относительные лучевые скорости ADS 48 и ADS 11632 взяты из работы Токовина [50], ADS 14636 – работы [85].

Результаты вычислений представлены в табл. 3. Суммы масс (M_{AB}) даны в солнечных массах (M_{\odot}). Использовались разложения полярных координат третьего порядка. Коэффициенты разложений ($\rho_0, \dot{\rho}, \theta_0, \dot{\theta}$) определялись только по фотографическим наблюдениям. Вес визуальных наблюдений был уменьшен в 100 раз в сравнении с фотографическими. Шаг подбора по эксцентриситету 0.005, данная величина определяет точность значений эксцентриситета в табл. 3.

Таблица 3. Орбиты звезд								
ADS 48, WDS 00057+4549, HIP 473. $V_{rBA} = -3.07$ км/с. K6, M0.								
P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °	M_{AB}	прим.
1550.637	11.7613	56.68	175.14	1970.438	0.4973	349.37	1.10	Pop1996b
509.65	6.21	54.9	13.5	2115.80	0.22	267.2	1.50	Kiy2001
678.97	6.85	52.0	2.2	1993.90	0.115	175.3	1.13	1
753.95	7.36	53.5	3.9	2011.54	0.175	184.3	1.14	2
550.71	6.27	53.3	9.15	2113.55	0.135	257.45	1.32	3
724.74	7.23	53.8	5.1	2027.22	0.165	193.4	1.17	4
753.49	7.36	53.6	4.0	2012.27	0.175	184.7	1.14	5
ADS 11632, WDS 18428+5938, HIP 91768. $V_{rBA} = 2.70$ км/с. K5.								
P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °	M_{AB}	прим.
408	13.88	66.0	136.9	1775.0	0.53	234.6	0.73	Hei1987b
585	17.5	70	142	1778	0.35	264	0.71	Kis1997
23495.9	169.5	72.2	151.8	1929.4	0.90	9.6	0.40	1
1919.3	35.0	72.5	147.4	1877.5	0.515	348.6	0.53	2
3315.8	50.6	73.6	149.0	1892.5	0.665	353.5	0.54	3
1351.5	29.3	73.2	145.8	1849.2	0.45	331.3	0.63	4
1962.4	35.4	72.4	147.5	1879.0	0.52	349.35	0.52	5
ADS 14636, WDS 21069+3845, HIP 104214. $V_{rBA} = 1.08$ км/с. K5V, K7V.								
P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °	M_{AB}	прим.
678	24.272	51	178	1709	0.49	149	1.31	PkO2006b
925.3	25.483	37.8	160.3	1753.6	0.45	207.1	0.82	1
981.9	25.764	34.0	149.9	1770.5	0.515	221.9	0.75	2
849.4	25.511	45.7	171.3	1708.3	0.38	179.4	0.97	3
830.4	25.382	48.1	170.8	1699.7	0.375	175.5	1.00	4
708.5	25.137	53.5	175.7	1681.8	0.425	149.0	1.34	5

Чтобы показать, на сколько надежно определяются элементы орбит выбранных пар, вычисления производились с использованием различных совокупностей данных: 1) коэффициенты разложений только по наблюдениям Пулковского каталога, эксцентриситет и истинная аномалия (e и ν), определяемые подбором, по всей совокупности фотографических наблюдений; 2) коэффициенты разложений, e и ν по совокупности фотографических наблюдений; 3) коэффициенты разложений

по наблюдениям Пулковского каталога, e и ν по визуальным и фотографическим данным; 4) коэффициенты разложений по совокупности фотографических наблюдений, e и ν по визуальным и фотографическим данным; 5) коэффициенты разложений по совокупности фотографических наблюдений, при определении e и ν у визуальных наблюдений использовались только позиционные углы. Используемый подход отмечен в последнем столбце табл. 3 (примечание). Также в табл. 3 представлены данные шестого каталога орбит, в этом случае в последнем столбце даны ссылки на авторов, принятые в современных каталогах двойных звезд.

Орбиты ADS 48 (1), 11632 (1), 14636 (1, 2, 3) табл. 3 являются неудачными, так как невязки, определенные для старых визуальных наблюдений, имеют заметный систематический ход [10].

Элементы орбит, представленные в табл. 3, не являются надежно определенными, так как наблюдениями охвачены дуги малой длины, и значительные участки наблюденных дуг покрыты визуальными наблюдениями. Для демонстрации работы метода в настоящее время можно использовать наблюдения звездных интерферометров. Орбиты, представленные в шестом каталоге, в этом случае определены надежно, для некоторых звезд накоплены плотные ряды высокоточных наблюдений на коротких дугах.

Таблица 4. Информация об используемых данных				
Звезда WDS	разложение		подбор	
	T_1-T_N	$\Delta\theta, ^\circ$	T_1-T_N	$\Delta\theta, ^\circ$
15232+3017	2004.2857-2006.5332	27.68	2004.2857-2008.5127	51.79
15278+2906	2004.0809-2008.5127	24.88	2004.0809-2008.5127	24.88
20375+1436	2003.7650-2008.7754	20.33	2003.7650-2008.7754	20.33
21501+1717	2006.4765-2007.7380	22.18	2004.5270-2008.8302	84.07

В качестве примера определим орбиты WDS 15232+3017, 15278+2906, 20375+1436, 21501+1717 по данным PТI [61]. Относительных лучевых скоростей на необходимые для работы метода моменты времени в научной литературе найти не удалось, они вычислялись с помощью элементов орбит шестого каталога орбит. В данном случае такой подход вполне приемлем, так как основной задачей является демонстрация работы метода, а не получение научно значимого результата. Значения лучевых скоростей, определенные описанным способом, можно считать достаточно точными. Интервалы времени наблюдений, используемые в разложениях и при подборе, даны в табл. 4, вычисленные элементы орбит – в табл. 5. Первые про-

изводные координат по времени определялись из разложений третьего порядка полярных и декартовых координат, в табл. 5 используемые разложения обозначены “п.к.” и “д.к.”.

Таблица 5. Элементы орбит									
WDS 15278+2906, $N = 73$, $\Delta\theta = 24.88^\circ$.									
	δV_{rBA} , %	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °	M_{AB} , M_\odot
бcat	-	10.5370	0.204008	111.452	148.041	1980.475	0.53971	180.21	3.27
п.к.	-10	9.8561	0.195276	113.346	147.523	2001.819	0.610	177.79	3.28
	0	10.5007	0.204051	111.348	147.911	2001.528	0.540	179.03	3.29
	+10	11.3088	0.214504	109.712	148.444	2001.226	0.465	181.88	3.30
д.к.	-10	9.8583	0.195375	113.355	147.430	2001.818	0.610	177.76	3.28
	0	10.5034	0.204154	111.358	147.821	2001.526	0.540	179.00	3.30
	+10	11.3120	0.214609	109.721	148.355	2001.224	0.465	181.85	3.30
WDS 20375+1436, $N = 73$, $\Delta\theta = 20.33^\circ$.									
бcat	-	26.683	0.43701	61.323	357.179	1962.812	0.35595	168.86	3.12
п.к.	-10	24.245	0.41208	59.436	355.770	1991.453	0.430	177.05	3.17
	0	26.723	0.43744	61.294	357.174	1989.464	0.355	168.82	3.12
	+10	29.915	0.47003	63.030	358.247	1986.609	0.280	157.01	3.09
д.к.	-10	24.163	0.41192	59.605	355.607	1991.574	0.430	177.95	3.19
	0	26.634	0.43704	61.416	357.076	1989.586	0.355	169.59	3.13
	+10	29.820	0.46945	63.121	358.199	1986.734	0.280	157.67	3.10
WDS 15232+3017, $N = 51$, $\Delta\theta = 51.79^\circ$.									
бcat	-	41.6296	0.86226	58.084	202.827	1975.547	0.27907	39.885	2.39
п.к.	0	58.9628	0.99409	55.767	202.515	1955.777	0.270	357.446	1.82
д.к.	0	63.3481	1.02330	55.026	202.231	1950.643	0.285	349.631	1.72
WDS 21501+1717, $N = 49$, $\Delta\theta = 84.07^\circ$.									
бcat	-	26.3464	0.36245	70.379	230.698	1989.881	0.2300	250.23	2.56
п.к.	0	36.6724	0.40385	68.539	229.198	1976.578	0.145	185.59	1.83
д.к.	0	33.4677	0.39146	69.176	229.511	1981.436	0.145	209.394	2.00

Орбиты WDS 15278+2906 и 20375+1436 рассмотренным методом определены достаточно точно, орбиты WDS 15232+3017 и 21501+1717 с заметной погрешностью, основной причиной появления которой, по-видимому, явилось неравномерное распределение наблюдений на дугах, используемых в разложениях. Вычисленные массы WDS 15232+3017 и 21501+1717 (табл. 5) также заметно отличаются от масс, полученных по данным шестого каталога, и не соответствуют спектральным классам Вашингтонского каталога. Поэтому элементы орбит WDS 15232+3017 и 21501+1717 можно уточнить, наложив при подборе дополнительное условие на значения суммы масс. Чтобы оценить насколько сильно ошибки относительных лучевых скоростей влияют на результат, в табл. 5 элементы орбит WDS

15278+2906 и 20375+1436 вычислены для случаев, когда в значения лучевых скоростей вносились ошибки. Орбиты определялись на малых дугах (у обоих объектов $\Delta\theta < 25^\circ$), поэтому можно ожидать, что ошибки относительных лучевых скоростей $\sim 10\%$ не будут вносить больших погрешностей в значения вычисляемых элементов орбит, если наблюдениями охвачены дуги длиной более 25° .

Преимущество рассмотренного метода заключается в относительной надежности величин, с помощью которых определяется орбита, их семь: x , y , \dot{x} , \dot{y} – характеризуют относительное положение и скорость звезды-спутника, вычисляются по высокоточному ряду наблюдений достаточно точно, \dot{z} – относительная лучевая скорость (может быть измерена), e и v – эксцентриситет и истинная аномалия, определяются по совокупности старых и современных наблюдений. В отличие от метода ПВД для определения орбиты рассмотренным методом не нужно задавать сумму масс и определять радиус кривизны.

§ 2.5 Методы, требующие современных высокоточных наблюдений

Рассмотрим динамические методы, в которых для определения элементов орбит не нужно задавать сумму масс компонентов и использовать старые наблюдения, но необходимо наличие новых высокоточных данных [6]. Для всех рассмотренных методов параметры видимого движения (те, которые используются) находятся по уже описанным правилам (§ 2.2 диссертации). Работа методов была проверена на модельных данных.

Случай, когда известны параллаксы обеих звезд.

Расстояние от Солнца до звезды определяется из отношения:

$$\Delta = \frac{a}{\sin \pi_t}, \quad 2.5.1$$

где a – средний радиус земной орбиты, π_t – тригонометрический параллакс (из секунд дуги, переведенный в радианы).

Вычитая из расстояния до звезды-спутника расстояние до главной компоненты, найдем проекцию радиус-вектора на луч зрения:

$$z = \Delta_B - \Delta_A. \quad 2.5.2$$

Из формулы (2.3.1) метода ПВД находим (r^*), из (2.3.2) расстояние между компонентами пары (r) и динамическую постоянную астрочентрического движения (k^2). Дальнейшие вычисления аналогичны методу ПВД.

Рассмотренным методом, используя данные каталога Hipparcos, были предприняты неудачные попытки вычисления орбит ADS 11632 и ADS 14636. Значения проекций радиус-векторов на луч зрения в силу недостаточной точности тригонометрических параллаксов получились сильно завышенными. Например, у ADS 14636 $\pi_{IA} = 0''.28713$, $\pi_{IB} = 0''.28542$, что дает $z \approx 4300$ а.е. Для определения орбиты ADS 14636 описанным методом погрешности параллакса должны быть $\sim 10^{-5}''$. Данные такой точности будут получены в ходе реализации космической миссии Gaia [70, 71]. Преимущество метода в сравнении с методом ПВД в том, что при вычислении орбиты не требуется задавать сумму масс компонентов, недостаток – даже после достижения точности определения параллаксов $10^{-6}''$ метод можно будет применить только для ближайших к нам звезд.

Случай, когда получен высокоточный ряд спектральных наблюдений.

В настоящее время точность спектральных измерений значительно возросла, погрешность составляет несколько м/с [108]. Относительные движения широких пар порядка км/с. В этих условиях в будущем может появиться возможность накопления высокоточных рядов спектральных наблюдений для широких пар. При этом кроме разложений координат по времени в окрестности \bar{T} можно будет использовать разложение лучевой скорости:

$$\dot{z}_k \approx \dot{z}_0 + \ddot{z}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\ddot{z}}\tau_k^2, \quad 2.5.3$$

где $\tau_k = T_k - \bar{T}$, \bar{T} – среднее время, \dot{z}_0 – значение относительной лучевой скорости в момент времени \bar{T} .

Применив метод наименьших квадратов к уравнениям (2.5.3), определим \dot{z}_0 и \ddot{z} . Из основного уравнения (2.3.1) метода ПВД найдем r^* . Проекцию радиус-вектора на луч зрения (z) вычислим, используя уравнение движения

$$\ddot{z} + \frac{z}{r^{*3}} = 0. \quad 2.5.4$$

Радиус-вектор определяется из формулы (2.4.2), динамическая постоянная астроцентрического движения (k^2) из отношения (2.3.2). Дальнейшие вычисления аналогичны методу ПВД.

Преимущества метода: проекция радиус-вектора на луч зрения определяется однозначно, сумма масс компонентов вычисляется по данным наблюдений. Недостаток метода: в вычислениях используются вторые производные позиционных наблюдений по времени.

Случай, когда известны параллаксы обеих звезд и получен высокоточный ряд спектральных наблюдений.

Из разложений координат по времени в окрестности \bar{T} (2.2.1) находим положение (θ_0, ρ_0) и первые производные по времени $(\dot{\theta}, \dot{\rho})$, из (2.5.3) \dot{z}_0 и \ddot{z} . Вычитая из расстояния до звезды-спутника расстояние до главной компоненты, находим проекцию радиус-вектора на луч зрения z . По формуле (2.4.2) определяем расстояние между компонентами пары r , из (2.5.4) величину r^* , далее из выражения (2.3.2) динамическую постоянную астроцентрического движения k^2 . В этом случае у метода отсутствуют недостатки метода ПВД: для определения орбиты не нужно задавать сумму масс компонентов и использовать вторые производные координат по времени.

§ 2.6 Оценка погрешностей элементов орбит

Метод ПВД позволяет оценить ошибки полученных элементов орбит. Это можно сделать для всех динамических методов, рассмотренных в диссертации. При вычислении элементов орбит используются: координаты и их производные по времени на средний момент времени $(\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}, \dot{\theta}, \ddot{\rho}, \ddot{\theta})$, относительная лучевая скорость (V_{rBA}), одно или несколько старых наблюдений (ρ_i, θ_i) и тригонометрический параллакс (π_i), поэтому, оценив ошибки этих величин, можно с помощью подхода, предложенного Киселевым [30], определить ошибки элементов орбит.

Относительная лучевая скорость и старые наблюдения являются прямыми измерениями, поэтому можно использовать ошибки, оцененные наблюдателями. Для старых наблюдений можно также применить среднеквадратичную ошибку. Ошиб-

ки тригонометрических параллаксов даны в каталоге Hipparcos. При вычислении ошибок координат и их производных на средний момент времени необходимо сделать ряд предположений. В методах, рассмотренных в § 2.2-2.5 диссертации, применяются разложения координат по времени в окрестности \bar{T} второго и третьего порядка (2.2.1), методом наименьших квадратов определяются положение (θ_0, ρ_0) и производные по времени $(\dot{\theta}, \dot{\rho}, \ddot{\theta}, \ddot{\rho})$.

Из (2.2.1) после применения метода наименьших квадратов получаем систему

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N (\rho_0 + \dot{\rho}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\rho}\tau_k^2) = \sum_{k=1}^N (\rho_k) \\ \sum_{k=1}^N \left((\rho_0 + \dot{\rho}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\rho}\tau_k^2)\tau_k \right) = \sum_{k=1}^N (\rho_k\tau_k) \\ \sum_{k=1}^N \left((\rho_0 + \dot{\rho}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\rho}\tau_k^2)\tau_k^2 \right) = \sum_{k=1}^N (\rho_k\tau_k^2) \end{cases} \quad 2.6.1$$

Для позиционного угла (θ) уравнения аналогичны (2.6.1). Систему (2.6.1) для ρ, θ можно записать в виде векторно-матричных уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{A}\mathbf{\theta} = \mathbf{c}, \quad 2.6.2$$

где \mathbf{A} – $n \times n$ -матрица коэффициентов системы, \mathbf{b} и \mathbf{c} – n -мерные векторы свободных членов, \mathbf{p} и $\mathbf{\theta}$ – n -мерные векторы неизвестных. Для $n=3$ величины выражений (2.6.2) имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{k=1}^N \tau_k & \sum_{k=1}^N \tau_k^2 \\ \sum_{k=1}^N \tau_k & \sum_{k=1}^N \tau_k^2 & \sum_{k=1}^N \tau_k^3 \\ \sum_{k=1}^N \tau_k^2 & \sum_{k=1}^N \tau_k^3 & \sum_{k=1}^N \tau_k^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \rho_k \\ \sum_{k=1}^N \rho_k \tau_k \\ \sum_{k=1}^N \rho_k \tau_k^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \theta_k \\ \sum_{k=1}^N \theta_k \tau_k \\ \sum_{k=1}^N \theta_k \tau_k^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \dot{\rho} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}. \quad 2.6.3$$

Если к векторам \mathbf{b} и \mathbf{c} добавить ошибки $\Delta\mathbf{b}$ и $\Delta\mathbf{c}$, то векторы неизвестных \mathbf{p} и $\mathbf{\theta}$ получат приращения $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{\theta}$, уравнения (2.6.2) примут вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \text{ и } \mathbf{A}(\mathbf{\theta} + \Delta\mathbf{\theta}) = \mathbf{c} + \Delta\mathbf{c}. \quad 2.6.4$$

Вычитая (2.6.2) из (2.6.4), получаем выражения для погрешностей $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{\theta}$

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{p} = \Delta\mathbf{b} \text{ и } \mathbf{A}\Delta\mathbf{\theta} = \Delta\mathbf{c}. \quad 2.6.5$$

В работе для оценки погрешностей $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{\theta}$ использовался статистический подход. Определялись следующие величины: 1) по наблюдениям с помощью раз-

ложений среднеквадратичные ошибки σ_ρ и σ_θ ; 2) 1000 векторов ошибок свободных членов $\Delta \mathbf{b}$ и $\Delta \mathbf{c}$; 3) из (2.6.5) 1000 векторов ошибок неизвестных $\Delta \rho$ и $\Delta \theta$; 4) среднеквадратичные ошибки коэффициентов разложений.

Поясним 2-ой и 4-ый пункт. Векторы ошибок при $n=3$ определялись из выражений

$$\Delta \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \Delta \rho_k \\ \sum_{k=1}^N \Delta \rho_k \tau_k \\ \sum_{k=1}^N \Delta \rho_k \tau_k^2 \end{pmatrix}, \Delta \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \Delta \theta_k \\ \sum_{k=1}^N \Delta \theta_k \tau_k \\ \sum_{k=1}^N \Delta \theta_k \tau_k^2 \end{pmatrix}, \Delta \rho_k = \sigma_\rho X, \Delta \theta_k = \sigma_\theta X, \quad 2.6.6$$

где X – случайная величина, подчиненная стандартному нормальному распределению, N – количество наблюдений, используемых для определения коэффициентов разложений.

Векторы ошибок неизвестных для одного из 1000 случаев

$$\Delta \rho_i = \begin{pmatrix} \Delta \rho_{0i} \\ \Delta \dot{\rho}_i \\ \Delta \ddot{\rho}_i \end{pmatrix}, \Delta \theta_i = \begin{pmatrix} \Delta \theta_{0i} \\ \Delta \dot{\theta}_i \\ \Delta \ddot{\theta}_i \end{pmatrix}. \quad 2.6.7$$

Среднеквадратичные ошибки коэффициентов разложений

$$\Delta \rho_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{1000} \Delta \rho_{0i}^2}{1000}}, \Delta \dot{\rho} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{1000} \Delta \dot{\rho}_i^2}{1000}}, \dots \quad 2.6.8$$

Далее для вычисления ошибок элементов орбит применялся подход Киселева [30]. В его основе лежит варьирование величин, используемых в вычислениях. Прибавляя или вычитая ошибку к одному из начальных данных ($\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}, \dot{\theta}, \ddot{\rho}, \ddot{\theta}, V_{rBA}, \pi_i$, совокупность ρ_i и θ_i), мы изменяем его значение и повторяем определение орбиты. В случае старых наблюдений варьировались значения каждого из них: среднеквадратичное отклонение в одном случае прибавлялось, в другом вычиталось. Далее вычислялась погрешность элементов орбит, связанная с варьированием одного из начальных данных

$$\Delta X(\rho_i) = X_{\text{вар}} - X_{\text{нач}}, \quad 2.6.9$$

где $X_{\text{нач}}$ – вычисленное значение элемента орбиты, $X_{\text{вар}}$ – значение элемента орбиты, полученное при варьировании одного из параметров, p_i – обозначен один из варьируемых начальных параметров. Ошибка в одном случае прибавляется к p_i , в другом вычитается, необходимо выбрать максимальное значение $\Delta X(p_i)$ по модулю.

После того как все значения $\Delta X(p_i)$ определены, вычисляется общая ошибка элемента орбиты

$$\Delta X = \sqrt{\sum_{i=1}^8 \Delta X^2(p_i)}. \quad 2.6.10$$

Таблица 1. Ошибки элементов орбиты ADS 48									
Параметры	Ошибки параметров	Ошибки элементов							
		ΔP , год	Δa , "	Δi , °	$\Delta \Omega$, °	ΔT_p , год	Δe	$\Delta \omega$, °	ΔM_{AB} , M_{\odot}
ρ_0 , "	+0.0024	0.718	0.002	-0.02	-0.06	-1.42	0	-0.40	-0.001
	-0.0024	-0.730	-0.002	0.02	0.06	1.43	0	0.41	0.001
	max	0.730	0.002	0.02	0.06	1.43	0	0.41	0.001
θ_0 , °	+0.0137	0.702	0.002	-0.02	-0.04	-1.40	0	-0.40	-0.001
	-0.0137	0	0	0	-0.01	0	0	0	0
	max	0.702	0.002	0.02	0.04	1.40	0	0.40	0.001
$\dot{\rho}$, "/год	+0.00025	-0.659	-0.001	0.02	0.07	1.36	0	0.38	0.002
	-0.00025	13.896	0.062	-0.12	-0.43	-20.25	0.005	-3.79	-0.015
	max	13.896	0.062	0.12	0.43	20.25	0.005	3.79	0.015
$\dot{\theta}$, °/год	+0.00141	11.812	0.059	-0.16	-0.24	-16.80	0.005	-3.05	-0.009
	-0.00141	1.571	0.002	0.06	-0.11	-2.21	0	-0.37	-0.004
	max	11.812	0.059	0.16	0.24	16.80	0.005	3.05	0.009
V_{rBA} , км/с	+0.18	-105.061	-0.649	-1.00	2.23	155.25	-0.055	32.23	0.037
	-0.18	144.023	0.860	1.03	-1.95	-167.33	0.085	-13.00	-0.029
	max	144.023	0.860	1.03	2.23	167.33	0.085	32.23	0.037
ρ_{old} , "	+0.093	-22.770	-0.064	0.55	1.93	45.13	0.005	13.32	0.044
	-0.093	15.216	0.035	-0.48	-1.77	-36.00	0	-11.58	-0.031
	max	22.770	0.064	0.55	1.93	45.13	0.005	13.32	0.044
θ_{old} , °	+0.705	-8.521	-0.028	0.17	0.62	16.16	0	4.48	0.014
	-0.705	6.457	0.018	-0.16	-0.59	-13.53	0	-4.03	-0.012
	max	8.521	0.028	0.17	0.62	16.16	0	4.48	0.014
π_t , "	+0.00274	73.657	0.444	0.56	-1.11	-88.66	0.045	-8.59	-0.122
	-0.00274	-55.867	-0.351	-0.60	1.05	75.95	-0.035	12.23	0.135
	max	73.657	0.444	0.60	1.11	88.66	0.045	12.23	0.135
	общие	164.60	0.97	1.3	3.2	197.11	0.097	37.5	0.15

В качестве примера в табл. 1 представлены промежуточные данные, используемые для определения погрешностей элементов орбиты ADS 48. Расчеты выпол-

нялись для орбиты №4 из табл. 3 § 2.4. Среднеквадратичные ошибки фотографических наблюдений, полученные из разложений координат в окрестности $\bar{T} = 1972.769$, $\sigma_\rho = 0.015''$ и $\sigma_\theta = 0.087^\circ$. Среднеквадратичные ошибки визуальных наблюдений вычислялись, используя элементы орбиты ADS 48. Ошибка параллакса взята из каталога Hipparcos. Результат с $\theta_0 \pm 0.0137$ можно легко объяснить: если бы ошибка одновременно добавлялась к θ_0 и ко всем наблюдениям θ_k , то это привело бы только к появлению ошибки $\Delta\Omega$, поскольку ошибка добавляется только к θ_0 , то погрешности могут быть во всех элементах орбиты. В нижней строке табл. 1 представлены искомые ошибки элементов орбиты.

§ 2.7 Определение орбит с помощью генетических алгоритмов по наблюдениям, покрывающим короткие дуги

В § 2.1 диссертации было доказано, что орбиты визуально-двойных звезд по наблюдениям на малых дугах 20° - 50° можно определять классическими методами, если точность наблюдений высока ($\Delta\rho/\rho \sim 10^{-3} - 10^{-4}$). В силу различных объективных причин почти все накопленные к настоящему времени наблюдения имеют меньшую точность (у визуальных $\sigma \sim 10^{-1} - 10^{-2}''$, фотографических $\sigma \sim 10^{-2}''$, спекл-интерферометрических $\sigma \sim 10^{-2} - 10^{-3}''$). Поэтому в большинстве случаев по наблюдениям на короткой дуге можно получить только предварительную орбиту. Одним из критериев истинности орбиты является равенство динамической и фотометрической масс двойной системы. Для большинства орбит, определяемых по короткой дуге, это условие не выполняется.

В качестве примера рассмотрим результаты статьи [16]. В ней по наблюдениям на коротких дугах методом, описанным в § 1.4 диссертации, определены орбиты 16 визуально-двойных звезд каталога В.Я. Струве [101]. Ни для одной звезды не были получены одинаковые значения динамической и фотометрической масс. Наиболее близкие значения у STF 1355 (динамическая сумма масс $1.5M_\odot$, фотометрическая $2.3M_\odot$), у остальных 15 звезд динамические и фотометрические массы отличались в 2-100 раз. В таких условиях использование при определении орбиты по короткой дуге суммы масс, оцененной по фотометрическим данным даже очень

ненадежно (с погрешностями $\sim 50\%$), будет значительно повышать точность результата. Поэтому задача создания глобально сходящегося метода, использующего дополнительную информацию о звездах, является актуальной. В качестве дополнительных данных могут выступать сумма масс и относительная лучевая скорость.

Метод, описанный в § 1.4 диссертации, является глобально сходящимся. С помощью дополнительных данных мы изменили в нем условия отбора в новую популяцию [17]. Были введены коэффициенты, на которые умножалась сумма квадратов невязок

$$k_M = 1 + \frac{|M_{AB(ph)} - M_{AB(cal)}|}{M_{AB(ph)}}, \quad k_V = 1 + \frac{|V_{rBA(obs)} - V_{rBA(cal)}|}{V_{BA}}, \quad 2.7.1$$

где $M_{AB(ph)}$ – сумма масс, оцененная фотометрически, $M_{AB(cal)}$ – сумма масс, вычисленная с помощью элементов орбит, $V_{rBA(obs)}$ и $V_{rBA(cal)}$ – наблюдаемая и вычисленная по элементам орбит относительная лучевая скорость, $V_{BA} = \sqrt{V_{tBA}^2 + V_{rBA(obs)}^2}$ – скорость звезды-спутника относительно главной компоненты, V_{tBA} – проекция относительной скорости на картинную плоскость (вычисляется с помощью разложений относительных координат по времени).

Генетические алгоритмы работают с совокупностью эволюционирующих решений. Выбираются решения, дающие минимальные суммы квадратов отклонений. Для визуальных наблюдений $\sigma_{\Delta\rho}$ примерно в два раза больше $\sigma_{\rho\Delta\theta}$, для фотографических наблюдений и данных четвертого интерферометрического каталога $\sigma_{\Delta\rho} \approx \sigma_{\rho\Delta\theta}$. Поэтому основное условие для выбора элементов орбит

$$\chi^2 = \chi_{int}^2 + \chi_{ph}^2 + \chi_{vis}^2 = \min, \quad 2.7.2$$

$$\chi_{int}^2 = k_M * k_V \sum p_{i(int)} \left((x_{i(obs)} - x_{i(cal)})^2 + (y_{i(obs)} - y_{i(cal)})^2 \right), \quad 2.7.3$$

$$\chi_{ph}^2 = k_M * k_V \sum p_{i(ph)} \left((x_{i(obs)} - x_{i(cal)})^2 + (y_{i(obs)} - y_{i(cal)})^2 \right), \quad 2.7.4$$

$$\chi_{vis}^2 = k_M * k_V \sum p_{i(vis)} \left((\rho_{i(obs)} - \rho_{i(cal)})^2 + 4 * \rho_{i(cal)}^2 (\theta_{i(obs)} - \theta_{i(cal)})^2 \right). \quad 2.7.5$$

Веса наблюдений (p_i) определялись из следующих отношений

$$p_{int} = 50D^{1.5}\sqrt{N}, \quad p_{ph} = 50D^{0.5}\sqrt{N}, \quad p_{vis} = D^{0.5}\sqrt{N}, \quad 2.7.6$$

где N – количество измерений, с помощью которых определены средние относительные координаты звезды-спутника, D – апертура телескопа.

При выборе формул (2.7.6) использовалась информация о точности наиболее распространенных техник измерений [67, 74, 76, 93, 94]. Характерные погрешности для спекл-интерферометрии в зависимости от апертуры телескопа следующие: $D = 6 \text{ м}$ – $\sigma_{\Delta\rho} \approx \sigma_{\rho\Delta\theta} \approx 0.003''$; $D = 3.8 \text{ м}$ – $\sigma_{\Delta\rho} \approx \sigma_{\rho\Delta\theta} \approx 0.004''$; $D = 1 \text{ м}$ – $\sigma_{\Delta\rho} \approx \sigma_{\rho\Delta\theta} \approx 0.011''$ [15]. Представленные значения дают зависимость $p_{\text{int}} \sim D^{1.5}$. Исследования Панунцио и др. [93, 94] показали, что точность визуальных наблюдений слабо зависит от апертуры телескопа, поэтому была выбрана более слабая зависимость $p_{\text{vis}} \sim D^{0.5}$. Зависимость $p \sim D^{0.5}$ объясняется тем, что точность визуальных наблюдений, произведенных на больших телескопах, определяется не только рэлеевским пределом, но и состоянием атмосферы. По этой причине для фотографических наблюдений применялось аналогичное отношение $p_{\text{ph}} \sim D^{0.5}$. Зависимость веса от количества наблюдений $p \sim \sqrt{N}$ является общепринятой [74]. Вес визуального наблюдения разделения (ρ), произведенного на телескопе с апертурой $D = 1 \text{ м}$, был принят равным единице. Для согласования весов визуальных, фотографических и спекл-интерферометрических наблюдений использовались значения ошибок одного наблюдения, произведенного на телескопе с апертурой $D = 1 \text{ м}$, в случае спекл-интерферометрических и фотографических наблюдений мы предположили, что точность одинакова $\sigma_{\Delta\rho} \approx \sigma_{\rho\Delta\theta} \approx 0.011''$, у визуальных $\sigma_{\Delta\rho} \approx 0.08''$ и $\sigma_{\rho\Delta\theta} \approx 0.04''$.

Формулы (2.7.6) позволяют приближенно определить веса наблюдений прошлых лет, но они дают ошибочные результаты для некоторых современных техник, например, спекл-интерферометрии SOAR [105].

Описанный выше метод был использован для изучения звезд, открытых Отто Струве в Пулковско. Исследование проводилось в несколько этапов.

1. Был изучен наблюдательный материал по всем звездам каталога Отто Струве [102]. Использовались визуальные наблюдения электронной базы в Ницце [103], старые наблюдения из работы Хуссея [81], относительные положения из каталога WDS, имеющиеся в свободном доступе, и современные наблюдения четвертого интерферометрического каталога. Выбирались звезды, у которых имеются непрерывные ряды наблюдений на дугах более 10° .

2. Изучалась информация каталогов: WDS, TDS [68], Hipparcos [104, 107] и общая информация по каждой звезде электронной базы данных в Страсбурге [58]. Выбирались двойные звезды, у которых можно оценить сумму масс по фотометрическим данным.

3. Определялись орбиты звезд. После анализа полученных результатов было выбрано 15 лучших: STT 28, 75, 119, 132, 182, 201, 228, 241, 250, 296, 369, 383, 424, 430, 520. На последнем этапе исследования орбиты перечисленных звезд вычислялись повторно по наблюдениям из каталога WDS (для их получения отправлялось письмо составителям каталога).

Массы изучаемых звезд определялись, используя различные подходы. Сначала проверялось соответствие значений абсолютных звездных величин M_V и показателей цвета $B-V$ со спектральными классами каталога WDS и электронной базы данных Simbad [58]. Если спектральные классы компонентов пары были известны, то массы определялись по спектральным классам [62]. Если M_V и $B-V$ согласовывались со среднестатистическими характеристиками звезд главной последовательности [62], то массы вычислялись по зависимости масса-светимость [99]. Если M_V и $B-V$ плохо согласовывались со среднестатистическими характеристиками звезд спектральных классов, то массы оценивались с помощью эволюционных треков [72]. Звездные величины компонентов и показатели цвета $B-V$ брались из каталога двойных звезд ГУСНО [68], собственные движения и тригонометрические параллаксы из каталога Hipparcos, болометрические поправки из работы [69]. В настоящее время имеется две версии каталога Hipparcos [104, 107]. При определении орбит приоритет отдавался новой версии, параллакс версии 1997 года использовался только при работе со звездой STT 383. В табл. 1 представлены массы звезд и информация, необходимая для определения масс.

Для определения орбиты описанным методом можно использовать сумму масс компонентов и относительную лучевую скорость одновременно или применить только одну из этих величин. В электронных базах данных наблюдения лучевых скоростей компонентов выбранных звезд отсутствуют. При вычислении орбит использовалась только сумма масс, оцененная фотометрически. Для проверки работы метода с коэффициентом k_V была взята еще одна звезда STT 547. У этой звез-

ды накоплен довольно продолжительный ряд фотографических наблюдений, кроме того, измерена относительная лучевая скорость [50].

Таблица 1. Данные каталогов об изучаемых звездах, фотометрические массы звезд

STT	π_c , mas	SP, WDS	m_A	m_B	B-V		$M_{A,}$ M_{\odot}	$M_{B,}$ M_{\odot}	**
					A	B			
28	6.40	F3V	7.53	8.70	0.32	0.40	1.9	1.5	1
75	4.01	B8V	7.75	8.50	0.28	0.28	2.5	2.1	2
119	8.16	F8	8.00	8.89	0.77	0.37	1.7	1.3	1
132	5.42	A2V	7.14	9.58	0.15	0.42	2.2	1.4	1
182	4.76	A2	7.84	7.86	0.17	0.19	2.2	2.2	2
201	6.40	F5	8.43	9.42	0.43	0.53	1.6	1.3	1
228	6.32	F0	8.13	8.89	0.34	0.37	1.7	1.5	1
241	5.69	F3V	6.78	8.70	0.37	0.37	2.2	1.5	1
250	4.07	F0	8.23	9.16	0.38	0.20	2.0	1.7	1
296*	11.37	G5	7.78	9.03	0.50	0.54	1.4	1.1	1
369	4.69	F7V	7.72	7.88	0.96	0.31	2.2	2.0	1
383*	4.83	B9.5V	7.04	8.26	-0.06	0.09	3.0	2.0	2
424	2.45	A3	8.40	9.36	0.26	0.27	2.2	2.0	1
430	18.60	F9V	8.22	10.26	0.51	0.71	1.0	0.7	2
520	4.35	B9.5V	7.14	9.19	-0.01	0.24	2.95	1.7	2
547	88.44	K6+M0	8.84	9.01	1.37	1.37	0.6	0.5	3

Примечания по отдельным звездам (*):

STT296. Значения B-V говорят о том, что фотосферы звезд имеют температуры более высокие, чем у звезды спектрального класса G5.

STT383. Использовался параллакс старой версии каталога Hipparcos, так как в этом случае значения M_V и B-V главной компоненты полностью соответствуют среднестатистическим для спектрального класса B9.5V.

Примечания по методам определения масс компонентов ():** 1 – по эволюционным трекам [72], 2 – по зависимости масса-светимость [99], 3 – с использованием спектрального класса и среднестатистических параметров (M_V и B-V) звезд [62].

У многих двойных звезд не удалось достаточно надежно оценить суммарную массу из-за отсутствия значений показателя цвета B-V или из-за двойственности одного из компонентов пары. Тем не менее, общие представления о массах звезд можно получить, так как известны видимые звездные величины и спектральный класс одного из компонентов. Орбиты этих звезд определялись со значениями $k_M = k_V = 1$ (в этом случае описанный выше метод идентичен методу § 1.4 диссертации). Использовались наблюдения из работы Хуссея [81], данные электронной базы в Нице [103] и четвертого интерферометрического каталога. Мы выбрали две звезды STT 81 и 306, у которых фотометрические и динамические массы отличаются не более чем в два раза (STT 81 – $M_{AB(ph)} \sim 3M_{\odot}$, $M_{AB(cal)} = 5.1M_{\odot}$; STT 306 –

$M_{AB(ph)} \sim 2-3M_{\odot}$, $M_{AB(cal)} = 1.6M_{\odot}$). Несоответствие масс у STT 306 возможно связано с погрешностями определения параллакса ($\pi_i = 4.34 \text{ mas}$, $\sigma_{\pi} = 0.77 \text{ mas}$).

Вычисленные элементы орбит представлены в табл. 2. Все орбиты кроме STT 547 определены впервые. В качестве величин, характеризующих погрешность вычислений, в табл. 2 даны среднеквадратичные отклонения элементов орбит, полученные по результатам двадцати запусков генетического алгоритма. В табл. 3 представлена дополнительная информация по наблюдательному материалу. Орбиты и используемые для их вычисления наблюдения изображены на рис. 2.4. Наблюдаемые угловые расстояния между компонентами большинства изучаемых пар лежат в диапазоне 0.4"-2", исключение составляют STT 81, 306 и 547.

Элементы орбиты STT 547 определены с использованием всех фотографических наблюдений каталога WDS и ПЗС-наблюдений ГАО РАН [27, 82] двумя способами: 1) методом, описанным в § 1.4 диссертации ($k_M = k_V = 1$); 2) методом с коэффициентом k_V (2.7.1). Вычисленные орбиты STT 547 хорошо согласуются между собой и результатом, полученным Кияевой и др. [37].

При работе с наблюдениями на коротких дугах довольно часто приходится сталкиваться с оптическими парами. Для выбора физических пар использовались два условия: 1) $\mu_{pm} > 5\mu_{rm}$, μ_{pm} – собственное движение, μ_{rm} – относительное движение; 2) $S_{(p)lin} > 1.05S_{(p)el}$, $S_{(p)el}$ и $S_{(p)lin}$ – среднеквадратичные отклонения, определенные с учетом весов наблюдений, для моделей эллиптического и прямолинейного относительных движений, они вычислялись по формуле

$$S_{(p)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_{i(\theta)} \rho_{i(cal)}^2 (\theta_{i(obs)} - \theta_{i(cal)})^2 + p_{i(\rho)} (\rho_{i(obs)} - \rho_{i(cal)})^2}{N}}, \quad 2.7.7$$

где N – количество наблюдений, используемых для определения орбиты.

В табл. 4 представлена информация, доказывающая, что изученные звезды являются физическими парами. Выводы 1 и 2 сделаны в соответствии с условиями 1 и 2 ($\mu_{pm} > 5\mu_{rm}$ и $S_{(p)lin} > 1.05S_{(p)el}$). Собственные движения μ_{pm} и погрешности σ_{pm} определялись по данным каталога Hipparcos, величины μ_{rm} , σ_{rm} и $S_{(p)lin}$ находились, используя модель прямолинейного относительного движения, среднеквадратичные

отклонения $S_{(p)el}$ вычислены с помощью элементов орбит, представленных в табл.

2.

Таблица 2. Элементы орбит							
STT	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_p , год	e	ω , °
28	870 ±34	0.877 ±0.024	124.8 ±0.7	136.1 ±0.3	1758.4 ±2.4	0.382 ±0.005	86.1 ±3.9
75	862 ±106	0.604 ±0.048	77.9 ±0.4	167.7 ±0.2	1861.0 ±68.0	0.071 ±0.060	346.0 ±32.0
81	2154 ±342	7.089 ±0.702	130.6 ±1.6	61.1 ±1.7	3919.0 ±356.8	0.406 ±0.045	334.0 ±5.7
119	944 ±105	1.132 ±0.085	66.0 ±0.9	110.3 ±1.7	1782.8 ±3.2	0.701 ±0.006	105.1 ±3.6
132	9679 ±2451	3.773 ±0.610	60.1 ±2.0	20.5 ±2.7	1728.3 ±364.4	0.220 ±0.063	276.8 ±25.2
182	1661 ±185	1.094 ±0.083	146.7 ±4.3	20.6 ±2.8	2228.8 ±27.6	0.292 ±0.022	90.4 ±15.3
201	1883 ±170	1.392 ±0.087	140.3 ±2.9	29.4 ±5.5	2288.0 ±32.3	0.274 ±0.046	268.2 ±15.2
228	1229 ±270	1.069 ±0.155	101.7 ±0.6	164.6 ±0.8	2102.8 ±9.6	0.548 ±0.031	58.7 ±9.5
241	5855 ±712	2.859 ±0.230	25.8 ±5.1	8.2 ±10.6	1581.5 ±15.6	0.574 ±0.011	46.2 ±16.6
250	1055 ±320	0.652 ±0.131	73.6 ±1.8	174.9 ±1.5	2059.4 ±1.0	0.770 ±0.010	270.3 ±8.2
296	9107 ±7046	6.742 ±3.239	136.5 ±7.7	44.0 ±6.9	1771.7 ±23.8	0.695 ±0.100	59.0 ±15.8
306	1147 ±106	0.556 ±0.032	105.5 ±0.2	44.7 ±0.4	2952.7 ±111.0	0.484 ±0.017	309.4 ±4.5
369	1055 ±31	0.784 ±0.016	123.3 ±0.5	39.3 ±0.4	2676.5 ±41.3	0.161 ±0.011	262.4 ±6.4
383	1125 ±186	0.893 ±0.104	101.0 ±2.0	15.1 ±1.2	2176.5 ±7.6	0.417 ±0.089	100.8 ±15.1
424	1629 ±4	0.547 ±0.001	121.2 ±0.2	128.2 ±1.0	1686.3 ±1.5	0.223 ±0.022	89.9 ±0.9
430	2504 ±459	4.094 ±0.491	100.9 ±1.1	113.3 ±5.0	3132.4 ±290.0	0.806 ±0.018	88.5 ±5.0
520	1279 ±231	0.855 ±0.103	55.5 ±2.1	126.5 ±5.8	1631.7 ±38.4	0.411 ±0.027	121.5 ±12.5
547(1)	592.4 ±48.0	6.564 ±0.323	54.15 ±0.73	8.79 ±1.30	2093.2 ±22.0	0.141 ±0.012	239.65 ±19.50
547(2)	578.9 ±2.3	6.474 ±0.010	53.96 ±0.02	9.13 ±0.12	2100.5 ±1.1	0.140 ±0.002	245.47 ±1.02
547[K]	509.65 ±96.99	6.21 ±0.77	54.9 ±2.4	13.5 ±2.3	2115.80 ±123.47	0.22 ±0.04	267.2 ±27.4

Таблица 3. Информация о наблюдениях										
STT	N_{vis}	N_{int}	T_1	T_N	$\Delta\theta$, °	visual		int		$\frac{\sum p_{\text{int}(\theta)}}{\sum p_{\text{vis}(\theta)}}$
						$\sigma_{\Delta\rho}^*$, "	$\sigma_{\rho\Delta\theta}^*$, "	$\sigma_{\Delta\rho}^*$, "	$\sigma_{\rho\Delta\theta}^*$, "	
28	42	3	1845	2006	38	0.085	0.036	0.008	0.016	0.415
75	24	9	1843	2006	21	0.052	0.012	0.002	0.006	23.6
81	34	13*	1848	2003	40	0.167	0.139	0.081	0.070	1.97
119	57	5	1843	2009	50	0.079	0.031	0.047	0.031	0.541
132	30	3	1843	2012	15	0.117	0.061	0.019	0.012	0.567
182	93	15	1843	2015	35	0.103	0.043	0.018	0.015	1.45
201	85	8	1843	2015	26	0.108	0.051	0.026	0.023	0.477
228	81	11	1843	2015	35	0.070	0.024	0.007	0.005	7.18
241	116	14	1843	2011	25	0.127	0.048	0.037	0.015	0.945
250	41	26	1843	2009	22	0.043	0.022	0.002	0.003	75.4
296	157	15*	1843	2015	52	0.116	0.044	0.034	0.013	0.689
306	34	2	1847	2008	38	0.033	0.017	0.003	0.009	0.249
369	43	17	1843	2015	36	0.056	0.025	0.013	0.018	3.06
383	45	8	1843	2015	10	0.062	0.027	0.010	0.006	1.15
424	43	5	1846	2008	25	0.065	0.029	0.007	0.009	4.47
430	35	3	1844	2013	22	0.088	0.073	0.008	0.023	0.969
520	48	2	1851	1996	39	0.070	0.036	0.038	0.021	0.054
547	113	201*	1876	2013	76	0.090	0.052	0.013*	0.010*	23.3*

Примечания (*): у STT 81 и 296 ошибки ($\text{int } \sigma_{\Delta\rho}^*$ и $\sigma_{\rho\Delta\theta}^*$) и суммарный вес ($\sum p_{\text{int}(\theta)}$) определены для совокупности спекл-интерферометрических и фотографических наблюдений (STT 81 – 10 фотографических наблюдений, STT 296 – 4 фотографических наблюдения), для STT 547 представленная информация относится только к фотографическим наблюдениям [86] и ПЗС-наблюдениям, выполненным в ГАО РАН [27, 82], оба варианта элементов орбит STT 547(1) и STT 547(2) из табл. 2 с точностью до $10^{-3}''$ дают одинаковые значения $\sigma_{\Delta\rho}^*$ и $\sigma_{\rho\Delta\theta}^*$.

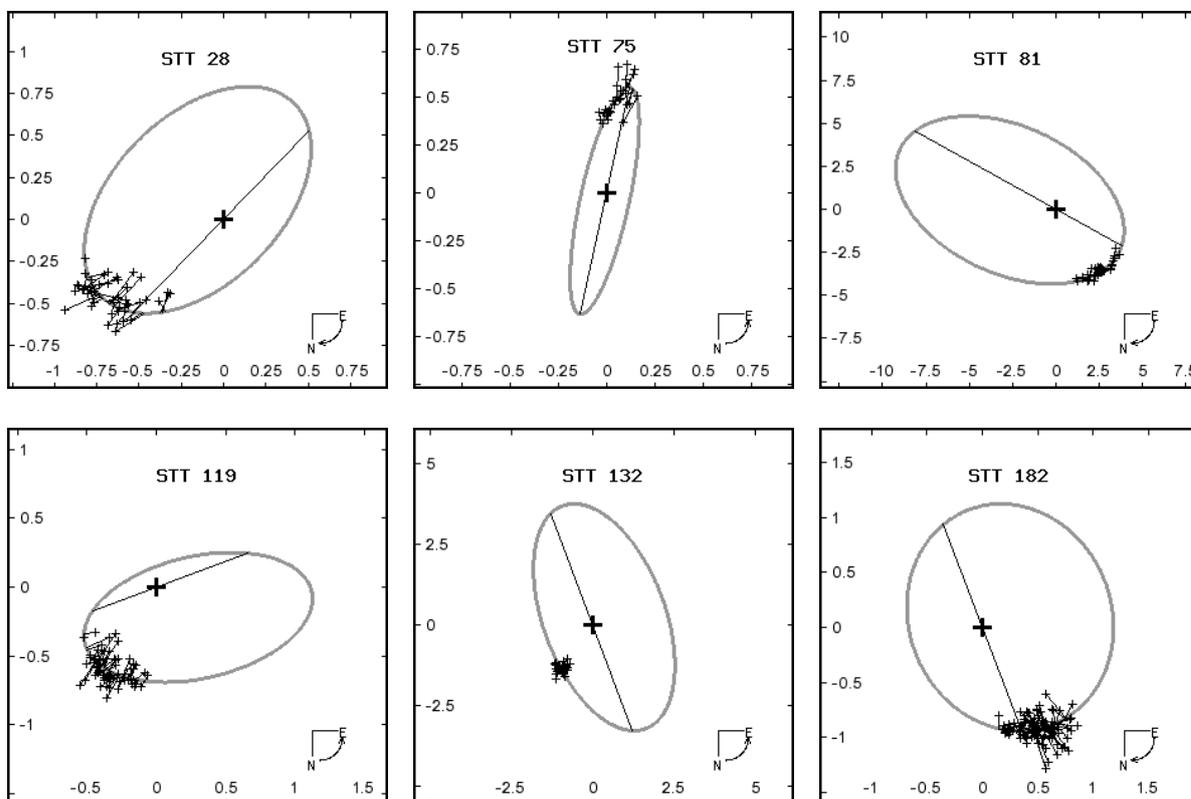
Обозначения: N_{vis} , N_{int} – количество визуальных наблюдений и наблюдений, входящих в четвертый интерферометрический каталог, T_1 , T_N – эпоха первого и последнего наблюдения, $\Delta\theta$ – длина дуги, охваченная наблюдениями, $\sigma_{\Delta\rho}^*$, $\sigma_{\rho\Delta\theta}^*$ – взвешенные среднеквадратичные отклонения ($\sigma_{\Delta\rho}^* = \sqrt{\frac{\sum p_i * (\rho_{i(\text{obs})} - \rho_{i(\text{cal})})^2}{\sum p_i}}$), $\frac{\sum p_{\text{int}(\theta)}}{\sum p_{\text{vis}(\theta)}}$ – отношение суммарного

веса интерферометрических наблюдений θ к суммарному весу визуальных.

Таблица 4. Информация, используемая для доказательства физической связи компонентов двойной звезды

STT	$\mu_{pm} \text{ ,}$ $10^{-3} \text{ "/}\Gamma$	$\sigma_{pm} \text{ ,}$ $10^{-3} \text{ "/}\Gamma$	$\mu_{rm} \text{ ,}$ $10^{-3} \text{ "/}\Gamma$	$\sigma_{rm} \text{ ,}$ $10^{-3} \text{ "/}\Gamma$	ВЫВОД 1	$S_{(p)lin} \text{ ,}$ "	$S_{(p)el} \text{ ,}$ "	ВЫВОД 2
28	46.44	0.92	3.34	0.26	phys	0.1212	0.1048	phys
75	22.39	0.84	2.04	0.21	phys	0.0904	0.0726	phys
81	99.67	0.64	19.84	0.96	phys	0.3741	0.3347	phys
119	38.00	2.23	3.52	0.32	phys	0.1283	0.1244	?
132	15.24	1.17	2.91	0.29	phys	0.1565	0.1573	?
182	24.12	2.39	3.77	0.16	phys	0.1329	0.1296	?
201	43.45	1.23	3.75	0.18	phys	0.1486	0.1462	?
228	37.62	1.72	2.28	0.13	phys	0.0942	0.0883	phys
241	98.06	0.73	4.69	0.22	phys	0.1658	0.1665	?
250	3.54	1.10	2.35	0.09	?	0.1000	0.0647	phys
296	128.27	0.97	9.92	0.17	phys	0.1570	0.1586	?
306	9.63	0.96	1.50	0.16	phys	0.0560	0.0490	phys
369	41.19	1.57	2.81	0.15	phys	0.0920	0.0875	phys
383	4.22	0.76	1.01	0.15	?	0.0835	0.0765	phys
424	11.49	1.16	1.45	0.17	phys	0.0981	0.0960	?
430	452.21	0.94	3.30	0.26	phys	0.1788	0.1788	?
520	15.53	1.30	2.96	0.36	phys	0.1109	0.1110	?
547	900.41	1.46	50.66	0.73	phys	1.1162	0.1203	phys

Обозначения: phys – результаты говорят в пользу того, что пара физическая, ? – результаты неоднозначны, пару не удастся отнести ни к физической, ни к оптической.



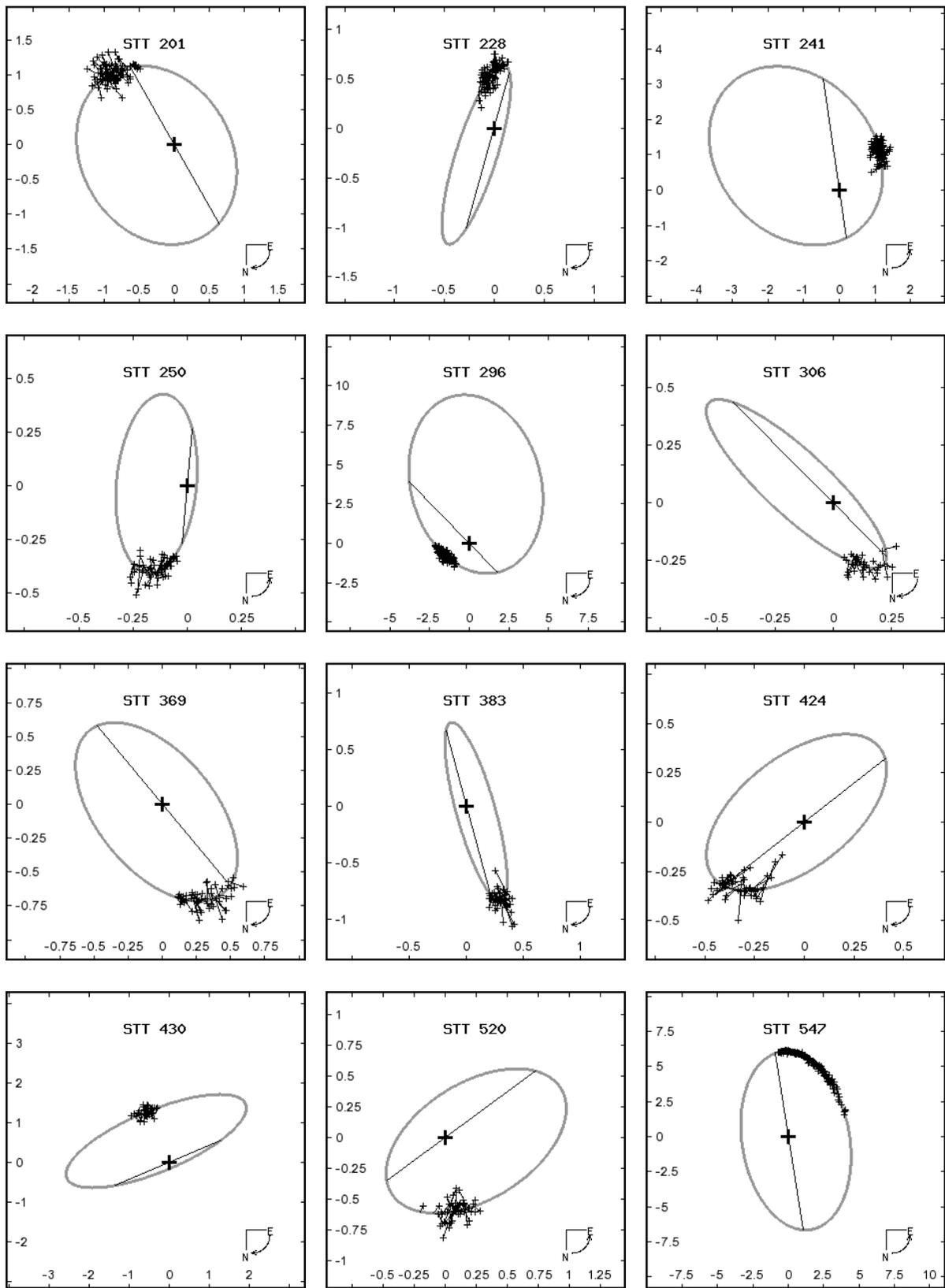


Рис. 2.4. Орбиты и наблюдения

Выводы

Рассмотрены трудности, возникающие у классических методов при вычислении орбиты по короткой дуге. Проведенные численные эксперименты показали, что точности современных звездных интерферометров достаточно для определения орбиты по дуге $\sim 50^\circ$. Данный результат проверен практически: орбиты 14 звезд вычислялись, используя только данные звездного интерферометра PTI на дугах от 25° до 240° . Методом дифференциальных поправок, применив в качестве первых приближений данные шестого каталога орбит, удалось определить орбиты только 7 звезд. Методом CHARA GA (§1.4 диссертации) определены все орбиты, но для двух звезд получено полное несоответствие с данными шестого каталога орбит. Для определения орбиты по короткой дуге $\sim 50^\circ$ классическими методами необходима высокая точность наблюдений ($\Delta\rho/\rho \sim 10^{-3} - 10^{-4}$). С такой точностью можно измерить очень малое количество двойных звезд.

Предпринята попытка определить орбиты звезд методом CHARA GA по совокупности визуальных, фотографических и спекл-интерферометрических наблюдений, покрывающих короткие дуги. В качестве объектов исследования выбрано 16 визуально-двойных звезд каталога В.Я. Струве [101]. Получить достоверные результаты не удалось. Такой вывод сделан вследствие того, что почти у всех звезд суммы масс, определенные по элементам орбит, сильно отличались от масс, оцененных по спектральным классам.

Предложено для повышения точности определения элементов орбит использовать дополнительные данные (суммы масс, оцененные по фотометрическим данным, и относительные лучевые скорости). Применение суммы масс для определения орбиты изменяет главную цель изучения визуально-двойных звезд. Ранее – это определение масс по элементам орбит, в случае обработки наблюдений на коротких дугах – только изучение относительного движения широких пар в нашей Галактике. Данная задача также является актуальной, так как полученные результаты связаны со структурой нашей Галактики и могут помочь более полно понять особенности ее эволюции.

Подробно описан алгоритм метода параметров видимого движения (ПВД). Метод является динамическим, работает на малых дугах, требует наличия допол-

нительных данных – суммы масс и относительной лучевой скорости. Отличительная особенность динамических методов – использование разложений относительных координат звезды-спутника по времени. Преимущество метода ПВД в том, что для определения орбиты по короткой дуге требуется семь величин: $\vec{r}(x, y, z)$, $\vec{V}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ и M_{AB} (для перевода расстояний в *a.e.* еще необходимо знать тригонометрический параллакс). Проекция радиус-вектора и вектора скорости на картинную плоскость (x, y, \dot{x}, \dot{y}) определяются из разложений координат надежно, лучевая скорость (V_{rBA}) может быть измерена, сумма масс оценена по спектральному классу, только величина z вычисляется с некоторой степенью неопределенности по вторым производным $\ddot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$ или из определения радиуса кривизны.

Разработан новый динамический метод определения орбит по коротким дугам, использующий старые наблюдения и относительную лучевую скорость, не требующий знания суммы масс. С его помощью вычислены орбиты ADS 48, 11632 и 14636 по визуальным и фотографическим наблюдениям, кроме того, четыре орбиты определены по данным РГТ. Преимущество метода заключается в использовании семи величин: $x, y, \dot{x}, \dot{y}, V_{rBA}, e$ и ν . Последние две (эксцентриситет и истинная аномалия) вычисляются по совокупности старых и современных наблюдений.

Рассмотрен метод определения круговой орбиты на основе алгоритма ПВД, не использующий сумму масс компонентов и относительную лучевую скорость, которая измеряется для широких пар с большой относительной погрешностью. Описанным методом определены орбиты восьми звезд, семь из них выбраны из шестого каталога орбит с малыми значениями эксцентриситета, орбита WDS 01178+4901 ранее не вычислялась.

Описаны новые динамические методы, требующие высокоточных данных: значений относительных лучевых скоростей для нескольких моментов времени и параллаксов обеих звезд. Подобных данных в настоящее время нет, но в процессе осуществления космической миссии Gaia и использования современных спектрометрических приборов они могут быть получены. При этом для определения орбиты достаточно значений параллаксов обеих звезд и двух высокоточных измерений относительных положений и относительных лучевых скоростей.

Усовершенствован метод CHARA GA. Мы изменили условие отбора в новую популяцию, связали его со значениями суммы масс, оцениваемой по фотометрическим данным, и относительной лучевой скорости. Новый метод получил заметные преимущества: глобальная сходимость и дополнительные данные (суммы масс и относительные лучевые скорости), повышающие точность результатов, позволили применить его для определения орбит по совокупности визуальных, фотографических и спекл-интерферометрических наблюдений, покрывающих короткие дуги. Для многих пар с медленным движением относительная лучевая скорость неизвестна, сумму масс в отдельных случаях трудно оценить по данным фотометрии и спектральным классам. Это не вызывает больших трудностей, так как применение сумм масс и относительных лучевых скоростей повышает точность определения орбит, но не является обязательным условием для работы метода: можно использовать обе величины, одну из них или не использовать ни одной. Полученным методом впервые определены орбиты 17 звезд каталога Отто Струве [102]. Для повышения точности элементов орбит использовались только значения сумм масс, оцененных по фотометрическим данным, так как наблюдения относительных лучевых скоростей в электронных базах данных отсутствуют. У звезд STT 81 и 306 не удалось надежно оценить массы, поэтому их орбиты определены без учета дополнительных данных при отборе в новую популяцию.

ГЛАВА III. Численные эксперименты с модельными и реальными данными

§ 3.1 Особенности алгоритмов получения модельных наблюдений двойных звезд

Для тестирования методов определения орбит необходимы модельные наблюдения. Задача тестирования методов актуальна, так как позволяет определять границы их применимости. Наиболее известные факторы, влияющие на достоверность результатов – длина дуги, охваченная наблюдениями, при определении орбиты и погрешности наблюдений при изучении малых возмущений. Задачи определения орбит нелинейны и требуют вычисления нескольких неизвестных, поэтому можно только приближенно оценить погрешность получаемых результатов. Исследования с модельными наблюдениями позволяют изучить случайные отклонения определяемых величин.

С помощью модельных наблюдений можно изучить работу методов определения орбит: 1) в зависимости от длины дуги и распределения наблюдений на ней; 2) при различных первых приближениях для оценки области сходимости; 3) с наблюдениями, имеющими различную точность, задавая ошибки, подчиненные различным законам распределения. Модельные наблюдения строятся по заранее заданным элементам орбит, полученные результаты можно сравнить с ними. Если повторить программу вычисления орбит много раз, генерируя различные наборы ошибок измерений, то можно построить распределения отклонений определяемых величин от истинных. Данная информация дает представления о возможных ошибках при изучении реальных объектов.

Задачу получения модельных данных можно разделить на две части [13]: 1) получение наблюдений, точно лежащих на дуге; 2) получение ошибок измерений, подчиненных заданному распределению, как правило, нормальному. Основной вопрос первого этапа – как распределить наблюдения на дуге? Имеется множество способов: 1) равномерно на дуге; 2) неравномерно, но упорядочено на дуге посредством любой нелинейной функции; 3) через равные промежутки времени; 4) отстоящими друг от друга на равный угол; 5) случайно на дуге (в этом случае разброс

наблюдений на дуге подчинен какому-либо распределению, по умолчанию равномерному).

Алгоритмы получения модельных данных используют ранее рассмотренные формулы: уравнение Кеплера (1.1.3), уравнения, связывающие истинную и эксцентрическую аномалии (1.1.5), позиционный угол и истинную аномалию (1.2.32), уравнения, выражающие разделения (1.2.33) и декартовые координаты звезды-спутника (1.2.12).

Задача 1. Требуется построить набор N модельных данных, равномерно покрывающих дугу. Алгоритм метода.

1. Задаются элементы орбиты $(P, a, i, \Omega, T_p, e, \omega)$, количество наблюдений (N) , два крайних наблюдения позиционного угла θ_1 и θ_N .
2. С помощью (1.1.3, 1.1.5, 1.2.32) определяются моменты времени T_1 и T_N .
3. Вычисляется длина дуги, описанная звездой-спутником. Необходимо взять интеграл

$$S = \int_{T_1}^{T_N} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad 3.1.1$$

4. Дуга разбивается на $N-1$ частей. Расстояние между наблюдениями $\Delta S = S/(N-1)$, положение k -го наблюдения на дуге $S_k = (k-1)\Delta S$.
5. Вычисляются моменты времени T_k .
6. Определяются относительные положения звезды-спутника x_k и y_k или θ_k и ρ_k .

В пунктах 3 и 5 необходимо численно интегрировать (3.1.1). В работе использовался метод трапеций. Максимальная погрешность метода оценивается выражением [21]:

$$r = \frac{f''(\xi)}{12n^2} (b-a)^3, \quad 3.1.2$$

где $f''(\xi)$ – максимальное значение второй производной подынтегральной функции (3.1.1) на интервале $\xi \in (T_1, T_N)$, n – количество интервалов, на которые разбивается область интегрирования, $b = T_N$, $a = T_1$.

Определение максимума второй производной подынтегральной функции (3.1.1) громоздкая задача. В работе погрешность вычислений оценивалась приближенно:

$$f(t_j) = \sqrt{\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2}, \quad f'(t_{j-1/2}) = \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\Delta T}, \quad f''(t_j) = \frac{f'(t_{j+1/2}) - f'(t_{j-1/2})}{\Delta T}. \quad 3.1.3$$

Из полученных согласно (3.1.3) значений второй производной выбиралось максимальное.

Задача 2. Неравномерное распределение наблюдений на дуге.

1) Увеличение плотности наблюдений в начале дуги.

Удобно использовать квадратичную функцию при $x \in [0, 1]$

$$y = x^2, \quad x = S_k / S_N, \quad 3.1.4$$

где S_k и S_N – положение k -го и N -го наблюдения на дуге при равномерном распределении наблюдений.

Положение наблюдений в случае их неравномерного распределения

$$S_k^* = \left(\frac{S_k}{S_N} \right)^2 S_N = \left(\frac{k-1}{N-1} \right) S_k. \quad 3.1.5$$

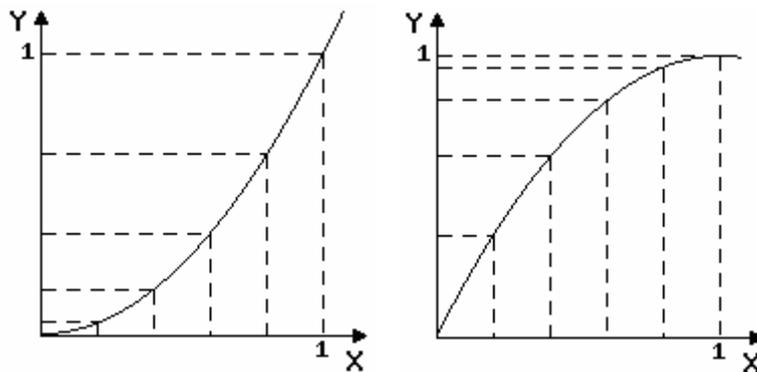


Рис. 3.1. Уменьшение и увеличение плотности наблюдений в начале дуги

2) Уменьшение плотности наблюдений в начале дуги.

$$y = -x^2 + 2x, \quad x = S_k / S_N;$$

$$S_k^* = \left(-\left(\frac{S_k}{S_N} \right)^2 + 2 \frac{S_k}{S_N} \right) S_N = \left(-\frac{k-1}{N-1} + 2 \right) S_k. \quad 3.1.6$$

Изменение положений наблюдений для рассмотренных двух случаев хорошо поясняет рис. 3.1, ось OX равномерное расположение наблюдений, ось OY положения после преобразований (3.1.5 и 3.1.6).

3) Увеличение или уменьшение плотности наблюдений в центре дуги.

Данную задачу можно решить, комбинируя два выше рассмотренных случая. Например, для увеличения плотности наблюдений в центре дуги разбиваем дугу на две равные части ($S_{N/2} = S_N/2$) и определяем положения наблюдений

$$S_k^* = \begin{cases} \left(-\left(S_k/S_{N/2} \right)^2 + 2 S_k/S_{N/2} \right) S_{N/2}, & \text{при } S_k \in (0, S_N/2] \\ S_{N/2} + \left((S_k - S_{N/2})/S_{N/2} \right)^2 S_{N/2}, & \text{при } S_k \in (S_N/2, S_N) \end{cases} \quad 3.1.7$$

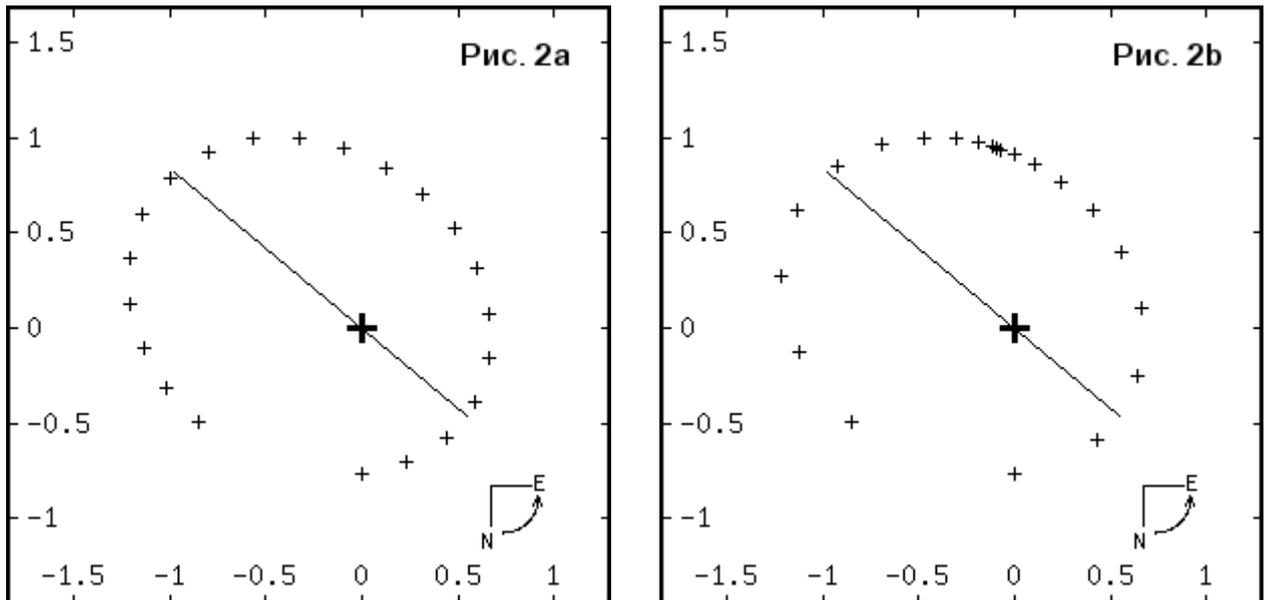


Рис. 3.2. Равномерное расположение наблюдений (2а), увеличение плотности наблюдений в центре дуги (2б)

На рис. 3.2(а) представлено равномерное распределение наблюдений на дуге, на рис. 3.2(б) плотность наблюдений увеличивается при приближении к центру дуги. Отсчет позиционного угла (θ) ведется от направления на северный полюс мира. Крест в центре определяет положение главной компоненты, также на рисунке отмечена линия узлов. Точки построены по элементам орбиты: $n=1^\circ/\Gamma$, $a=1''$, $i=30^\circ$, $\Omega=50^\circ$, $T_p=0$, $e=0.3$, $\omega=20^\circ$, количество наблюдений 21, длина дуги 300° (от 0° до 300°).

4) Случайное расположение наблюдений, подчиненное какому-либо распределению. По умолчанию используется равномерное распределение. Случайным образом генерируется N положений наблюдений S_k на дуге, затем повторяются пункты 5 и 6 задачи 1. Для получения распределений, отличных от равномерного,

можно преобразовать положения S_k с помощью алгоритмов, описанных в пунктах 1, 2, 3 задачи 2.

Задача 3. Получение ошибок, подчиняющихся определенному закону распределения.

Языки программирования содержат функции, генерирующие псевдослучайные числа. В РНР используется виток Мерсенна [54]. Для запуска генератора применяется следующая последовательность команд

```
mt_srand(time()+(double)microtime()*1000000);
$x= mt_rand($min,$max).
```

Поскольку числа генерируются случайно из некоторого отрезка $X \in [x_{\min}, x_{\max}]$, то плотность вероятности на нем постоянна – имеем равномерно распределенную случайную величину. Это несложно проверить, достаточно сгенерировать около 10^6 случайных чисел и построить гистограмму. При вычислении элементов орбит обычно используются небольшие выборки (объем $\sim 10\text{-}10^3$). В этом случае наблюдаются случайные отклонения от ожидаемых распределений.

Имея равномерно распределенную случайную величину, можно получить величину, подчиняющуюся другому закону распределения. Ошибки измерений подчиняются нормальному закону. В работе использовались два метода получения нормально распределенной случайной величины [1].

1) Стандартная процедура, основанная на обращении функции распределения

$$y = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2}\right) d\eta = F(x), \quad x = F^{-1}(y), \quad 3.1.8$$

где y – равномерно распределенная случайная величина на интервале $(0, 1)$, x – подчинена нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$. Задача (3.1.8) решалась численными методами, так как плотность вероятности неинтегрируема. Определялась величина, подчиненная стандартному нормальному распределению $\sigma = 1$.

2) С помощью формул, связывающих нормально и равномерно распределенные величины

$$x_1 = \sqrt{-2 \ln y_1} \sin(2\pi y_2) \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{-2 \ln y_1} \cos(2\pi y_2), \quad 3.1.9$$

где x_1 и x_2 – независимые $(0, 1)$ -нормально распределенные случайные величины.

На рис. 3.3 представлена гистограмма, построенная посредством 10^5 случайных чисел, подчиненных нормальному распределению $N(0, 1)$. Количество интервалов, на которые разбивалась область изменения случайной величины, определялось из формулы Штюргеса [42]

$$k \approx 1 + 3.32 \lg n, \quad 3.1.10$$

где n – количество чисел в выборке (объем выборки); условие (3.1.10) было незначительно изменено, на k интервалов разбивалась область $x \in [-3\sigma, 3\sigma]$.

При построении гистограммы использовалось условие нормировки, высоты столбцов определялись выражением

$$p_i = \frac{n_i}{n\Delta x}, \quad 3.1.11$$

где n_i – количество значений в интервале, Δx – ширина интервала.

Также на рис. 3.3 изображена функция плотности вероятности для стандартного отклонения $\sigma = 1$, она хорошо согласуется с построенной гистограммой.

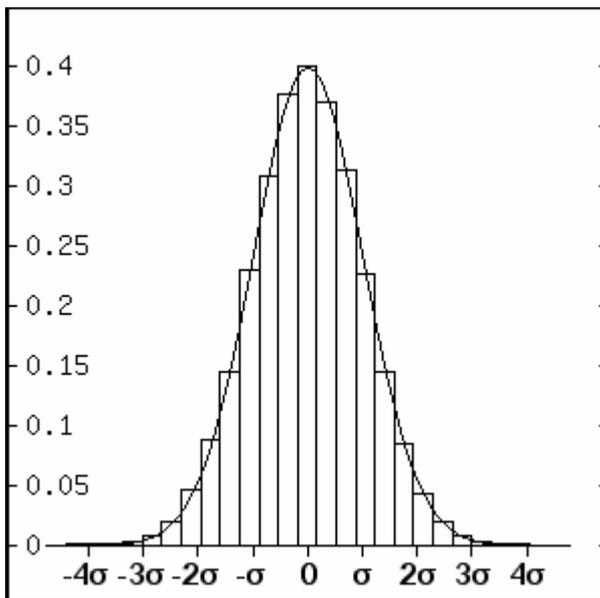


Рис. 3.3. Гистограмма нормально распределенной случайной величины

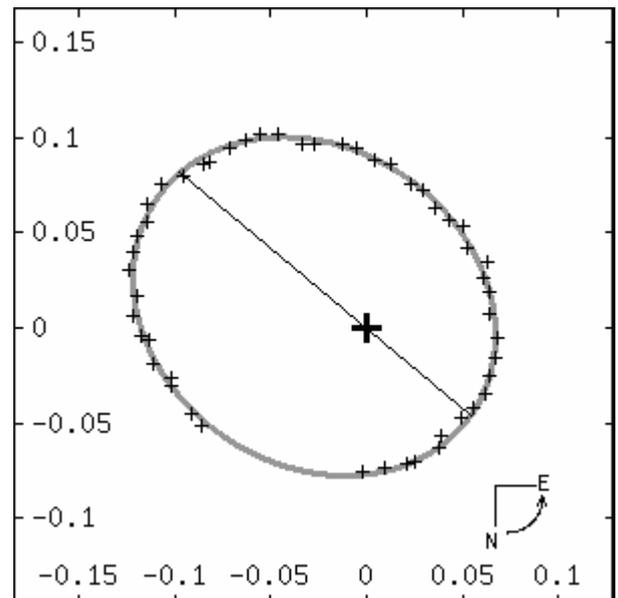


Рис. 3.4. Равномерное распределение наблюдений на дуге после добавления в них погрешностей

Задача 4. Добавление ошибок в наблюдения.

Перед использованием ошибок необходимо было ответить на вопрос: к каким величинам их добавлять? В случае малости отклонений $\Delta\theta$ и $\Delta\rho$ справедливы выражения

$$\Delta x = \Delta \rho \cos \theta - \rho \sin \theta \Delta \theta \text{ и } \Delta y = \Delta \rho \sin \theta + \rho \cos \theta \Delta \theta . \quad 3.1.12$$

С помощью формулы композиции двух распределений [1] можно доказать утверждение: если $\Delta \rho$ и $\rho \Delta \theta$ подчинены нормальному распределению, то Δx и Δy также подчинены нормальному распределению. Это позволяет добиться некоторой определенности: ошибки добавлять к декартовым координатам, при этом должны выполняться условия $\Delta \rho \ll \rho$ и $\rho \Delta \theta \ll \rho$. Однозначно решить проблему добавления ошибок в модельные данные, чтобы они были максимально приближены к реальным, очень сложно. Погрешности наблюдений зависят от величины разделения и используемой техники [67, 74, 77, 93, 94].

В качестве примера на рис. 3.4 изображены 50 наблюдений. Они получены в результате добавления ошибок, подчиненных нормальному закону, к точным относительным положениям звезды-спутника (x_k, y_k) , равномерно распределенным на дуге 300° . Траектория звезды-спутника обозначена серым цветом, вычислена по изначально заданным элементам орбиты ($n = 1^\circ/\text{г}$, $a = 0.1''$, $i = 30^\circ$, $\Omega = 50^\circ$, $T_p = 0$, $e = 0.3$, $\omega = 20^\circ$). В качестве среднеквадратичной ошибки при получении наблюдений взята погрешность современных спекл-интерферометрических измерений $\sigma = 0.002''$ [59]. В результате добавления ошибок появились заметные отклонения от равномерного распределения наблюдений на дуге. Отмеченные положения звезды-спутника лежат очень близко к модельной орбите, точность определения элементов орбиты для данных, представленных на рис. 3.4, будет высока. При работе с реальными объектами наблюдения довольно редко так хорошо покрывают дугу, имеют различную точность, так как выполнены на различных инструментах, что сказывается на точности результатов.

Задача 5. Статистические исследования.

Для статистических исследований необходимо обрабатывать большие объемы информации. Задача получения модельных данных для большого количества объектов была разбита на несколько этапов:

1. Получение случайной величины, подчиненной нормальному распределению. Генерируется большое количество значений $N \sim 10^5$, все они записываются в текстовый файл, назовем его файл 1.

2. С помощью генератора случайных чисел генерируются элементы орбит для заданного числа объектов (в работе обычно используется 1000 модельных орбит) и записываются в файл 2.
3. Вычисляются модельные наблюдения, определенным образом распределенные на дуге. Программа использует значения элементов орбит из файла 2, полученные относительные положения записываются в файл 3.
4. К точным данным файла 3 добавляются ошибки из файла 1. Полученные результаты записываются в файл 4. Файл 4 содержит модельные данные, которые можно использовать в статистических исследованиях: N_{st} звезд и N_{obs} наблюдений для каждой звезды.

§ 3.2 Изучение работы метода ПВД

Программы, описанные в § 3.1 диссертации, позволяют статистически изучить особенности работы метода параметров видимого движения (ПВД). Наибольший интерес вызывают следующие вопросы: 1) изучение зависимости точности определения ρ_c от длины дуги, охваченной наблюдениями, и точности наблюдений; 2) влияние погрешностей ρ_c , M_{AB} , $V_{rBA} = V_{rB} - V_{rA}$, π_t на точность определения элементов орбит методом ПВД.

Вопрос о точности определения ρ_c интересен в связи с тем, что разложения координат по времени являются приближенными выражениями. С одной стороны, чем меньше длина дуги, тем сильнее ошибки наблюдений влияют на результат, с другой – с увеличением длины дуги увеличиваются систематические ошибки разложений. Эти факторы ограничивают диапазон длин дуг, в котором с помощью метода ПВД можно получить научно значимые результаты. Очевидно, что чем больше погрешности наблюдений, тем больше должна быть длина дуги для надежного определения орбиты, чем точнее данные, тем более короткую дугу можно использовать, и тем меньше будут систематические ошибки, связанные с неточностью разложений.

Погрешности радиуса кривизны видимой орбиты (ρ_c), суммы масс компонентов (M_{AB}), относительной лучевой скорости (V_{rBA}) и параллакса (π_t) в первую оче-

редь определяют точность элементов орбит, получаемых методом ПВД. Поэтому вопрос о влиянии на элементы орбит погрешностей данных величин также заслуживает подробного изучения.

В данном параграфе диссертации проводятся статистические исследования. Использовался метод получения модельных данных. С его помощью генерировалась 1000 орбит, три величины были постоянны ($P = 360$ лет, $a = 1''$, $T_p = 2000$ лет), другие брались случайно из интервалов: $i \in [20^\circ, 70^\circ]$, $\Omega \in [0^\circ, 180^\circ]$, $e \in [0.2, 0.7]$, $\omega \in [0^\circ, 360^\circ]$. Сгенерированные элементы орбит применялись для вычисления модельных наблюдений, равномерно распределенных на дуге. Позиционный угол первого наблюдения $\theta_1 = 0^\circ$, последнего задавался в зависимости от требуемой длины дуги. Использование постоянной величины θ_1 не влияло на элемент случайности в исследованиях, так как величина ω изменялась случайно от 0° до 360° , и на точку с $\theta_1 = 0^\circ$ мог попасть любой участок орбиты. К модельным наблюдениям добавлялись ошибки, подчиненные нормальному распределению.

Изучение выражений для \bar{T} .

Момент времени, в окрестности которого рассматривается разложение координат, можно определить тремя способами:

$$\bar{T}_1 = \frac{T_N + T_1}{2}, \quad \bar{T}_2 = \frac{\sum_{i=1}^N T_i}{N} \quad \text{и} \quad \bar{\theta} = \frac{\theta_N + \theta_1}{2}, \quad \bar{T}_3 = f(\bar{\theta}). \quad 3.2.1$$

Необходимо ответить на вопрос: какая из формул позволяет более точно вычислить ρ_c ? Для решения задачи была выполнена следующая последовательность операций:

- 1) Генерировалась 1000 наборов элементов орбит.
- 2) Для каждого набора вычислялось по 30 наблюдений, равномерно распределенных на дугах 10° , 15° , 20° и 30° .
- 3) Определялись $\rho_{c(cal)i}$ и $\rho_{c(obs)i}$, $\rho_{c(cal)i}$ – точное значение радиуса кривизны, оно находилось по элементам орбит, $\rho_{c(obs)i}$ – приближенное значение, для его получения использовались разложения координат по времени и модельные наблюдения. Для выбора лучшего подхода вычисления \bar{T} сравнивались значения средних относительных отклонений и среднеквадратичных отклонений

$$\bar{\delta}_{\rho_c} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} (\rho_{c(obs)i} - \rho_{c(cal)i})}{N_{st} \rho_{c(cal)i}}, S_{\rho_c} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} (\rho_{c(obs)i} - \rho_{c(cal)i})^2}{N_{st}}}, \quad 3.2.2$$

где $N_{st} = 1000$ – количество наборов элементов орбит.

4) К наблюдениям добавлялись ошибки, подчиненные нормальному распределению с $\sigma = 0.001\bar{\rho}$ ($\bar{\rho}$ – среднее значение разделения, определяется отдельно для каждого объекта), и повторялся пункт №3.

Результаты вычислений представлены в табл. 1 и 2. Использовались разложения полярных координат второго порядка (2.2.1). Точность определения ρ_c сильно зависит от подхода определения \bar{T} . Наибольшую обеспокоенность вызывают средние относительные отклонения ($\bar{\delta}_{\rho_c}$), их наличие говорит о том, что у каждого подхода имеется систематическая ошибка определения ρ_c , которая, естественно, приводит к появлению систематических ошибок у вычисляемых элементов орбит.

$\Delta\theta$	\bar{T}_1			\bar{T}_2			\bar{T}_3		
	$\bar{\rho}_c$, "	$\bar{\delta}_{\rho_c}$, %	S_{ρ_c} , "	$\bar{\rho}_c$, "	$\bar{\delta}_{\rho_c}$, %	S_{ρ_c} , "	$\bar{\rho}_c$, "	$\bar{\delta}_{\rho_c}$, %	S_{ρ_c} , "
10°	1.0620	0.20	0.0084	1.0635	-0.12	0.0075	1.0649	-1.11	0.0590
15°	1.0611	0.45	0.0194	1.0646	-0.28	0.0169	1.0681	-2.28	0.1100
20°	1.0581	0.82	0.0343	1.0644	-0.49	0.0291	1.0710	-3.62	0.1608
30°	1.0473	1.85	0.0751	1.0600	-0.98	0.0581	1.0749	-6.39	0.2532

$\Delta\theta$	\bar{T}_1			\bar{T}_2			\bar{T}_3		
	$P_{\text{пром}}$, %	$\bar{\delta}_{\rho_c}$, %	S_{ρ_c} , "	$P_{\text{пром}}$, %	$\bar{\delta}_{\rho_c}$, %	S_{ρ_c} , "	$P_{\text{пром}}$, %	$\bar{\delta}_{\rho_c}$, %	S_{ρ_c} , "
10°	17.7	-0.75	0.1595	17.7	-1.09	0.1593	17.6	-1.40	0.1636
15°	5.5	0.41	0.1276	5.4	-0.32	0.1284	6.0	-1.65	0.1436
20°	1.4	1.06	0.1108	1.4	-0.27	0.1087	3.9	-2.47	0.1351
30°	0.6	1.78	0.0818	0.2	-0.89	0.0830	6.6	-3.72	0.1241

В наших исследованиях используется среднеквадратичная ошибка (S_{ρ_c}), совместно с ней необходимо указывать значение определяемой величины. Поэтому в табл. 1 представлен средний радиус кривизны

$$\bar{\rho}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} \rho_{c(cal)i}}{N_{st}}. \quad 3.2.3$$

Для табл. 1 и 2 значения $\bar{\rho}_c$ идентичны.

После внесения в наблюдения ошибок довольно часто стали появляться значения ρ_c , значительно отличающиеся от истинных, они сильно изменяли средне-квадратичные отклонения S_{ρ_c} . Для обеспечения стабильности получаемых результатов в исследованиях пришлось следить за появлением промахов. Значения ρ_c считались промахами, если относительная ошибка ($\delta_i = |\rho_{c(obs)i} - \rho_{c(cal)i}| / \rho_{c(cal)i}$) превосходила 30%. Количество промахов ($N_{\text{пром}}$) стало одним из критериев для сравнения различных алгоритмов. Для удобства в табл. 2 указано количество промахов в процентах ($p_{\text{пром}} = (N_{\text{пром}} / N_{st}) * 100\%$). При определении величин $\bar{\delta}_{\rho_c}$ и S_{ρ_c} промахи исключались.

Точность фотографических наблюдений $\sim 0.01''$ [29, 38], современных наблюдений с использованием ПЗС-камеры $\sim 0.005''$ [63, 83]. Результаты табл. 2 соответствуют реальным фотографическим наблюдениям, если разделение $\sim 10''$, ПЗС-наблюдениям, если разделение $\sim 5''$. В табл. 3 представлены результаты для ошибки $\sigma = 0.005\bar{\rho}$. В этом случае можно сказать, что ситуация с большинством реальных объектов на представленных в табл. 3 дугах будет лучше. Вероятность промахов на дугах малой длины (10° - 15°) очень высока $\sim 50\%$.

Таблица 3. Погрешности радиуса кривизны, полученные по данным, содержащим ошибки ($\sigma = 0.005\bar{\rho}$)

$\Delta\theta$	\bar{T}_1			\bar{T}_2			\bar{T}_3		
	$p_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho_c}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$p_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho_c}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$p_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho_c}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$
10°	65.3	-3.60	0.1724	65.1	-3.65	0.1714	64.8	-4.31	0.1745
15°	41.1	-2.42	0.1613	40.3	-2.86	0.1638	39.8	-3.37	0.1685
20°	23.7	-0.41	0.1720	23.6	-1.41	0.1644	23.8	-2.71	0.1672
30°	8.5	1.63	0.1394	7.9	-0.97	0.1433	13.1	-3.13	0.1514

Результаты табл. 1-3 показывают, что для определения момента времени \bar{T} выражение \bar{T}_3 (3.2.1) является неудачным, выражения \bar{T}_1 и \bar{T}_2 дают примерно одинаковые по точности результаты, но в случае \bar{T}_2 количество промахов и среднее

относительное отклонение меньше. По этой причине в дальнейших вычислениях будет использоваться выражение \bar{T}_2 . Сравнение результатов табл. 2 и 3 показывает, что при увеличении погрешностей наблюдений преимущества одних методов определения \bar{T} над другими снижаются.

Появление систематических ошибок ρ_c связано в первую очередь не со способом определения \bar{T} , а с приближенным характером разложений полярных координат (2.2.1), поэтому необходимо исследовать другие выражения для разложений координат.

Изучение различных форм разложений в окрестности \bar{T} .

Кроме разложений (2.2.1) можно использовать разложения по времени декартовых координат или повысить порядок разложения:

$$x_k \approx x_0 + \dot{x}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{x}\tau_k^2, \quad y_k \approx y_0 + \dot{y}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{y}\tau_k^2, \quad 3.2.4$$

$$\theta_k \approx \theta_0 + \dot{\theta}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\theta}\tau_k^2 + \frac{1}{6}\ddot{\theta}\tau_k^3, \quad \rho_k \approx \rho_0 + \dot{\rho}\tau_k + \frac{1}{2}\ddot{\rho}\tau_k^2 + \frac{1}{6}\ddot{\rho}\tau_k^3, \quad 3.2.5$$

где $\tau_k = T_k - \bar{T}$.

Таблица 4. Изучение разложений $x(2)$ и $y(2)$									
$\Delta\theta$	$\bar{\rho}_c, "$	$\sigma = 0$		$\sigma = 0.001\bar{\rho}$			$\sigma = 0.005\bar{\rho}$		
		$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, "$	$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, "$	$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, "$
10°	1.0635	-0.02	0.0041	17.7	-0.96	0.1578	66.6	-4.00	0.1595
15°	1.0646	-0.04	0.0094	5.1	-0.06	0.1317	40.8	-2.56	0.1696
20°	1.0644	-0.06	0.0171	1.3	0.24	0.1081	24.0	-1.07	0.1675
30°	1.0600	-0.11	0.0365	0.2	-0.02	0.0685	8.1	-0.19	0.1383

Необходимо проверить, с помощью какого разложения радиус кривизны (ρ_c) определяется наиболее точно. Исследования проводились аналогично рассмотренным выше для \bar{T} , использовалась та же самая совокупность модельных данных. Результаты представлены в табл. 4. В скобочках у x и y указан порядок разложения, который использовался для определения радиуса кривизны (подобное обозначение будет применяться в данном параграфе диссертации). В случае точных данных ($\sigma = 0$) или малых погрешностей ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$) из разложений декартовых координат радиус кривизны определяется более точно, чем из разложений полярных.

При менее точных данных ($\sigma = 0.005\bar{\rho}$) разложения полярных и декартовых координат дают примерно одинаковые по точности результаты.

Повышение порядка разложения не привело к повышению точности вычисления радиуса кривизны. В табл. 5 представлены результаты, полученные посредством разложений третьего порядка по времени полярных координат. Наблюдениями была охвачена дуга $\Delta\theta = 30^\circ$, рассмотрены два случая: точные данные ($\sigma = 0$) и данные, содержащие ошибки ($\sigma = 0.005\bar{\rho}$). Для сравнения также дан результат, полученный с помощью разложений второго порядка. Среднеквадратичные отклонения (S_ρ и S_θ) определялись из разложений координат. Повышение порядка разложения приводит к тому, что ряды лучше соответствуют наблюдениям, так как значения S_ρ и S_θ уменьшаются, но точность определения радиуса кривизны при этом снижается. Аналогичные результаты, связанные со степенью используемого полинома, ранее были получены при исследовании погрешностей орбит ИСЗ [19].

Таблица 5. Изучение разложений ρ и θ на дуге $\Delta\theta = 30^\circ$								
порядок разложения	$\sigma = 0$				$\sigma = 0.005\bar{\rho}$			
	$P_{\text{пром}}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$S_\rho, ''$	$S_\theta, \text{рад}$	$P_{\text{пром}}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$S_\rho, ''$	$S_\theta, \text{рад}$
2	0	0.0581	0.0009	0.0025	7.9	0.1433	0.0038	0.0054
3	3.5	0.0959	0.0001	0.0006	12.6	0.1421	0.0036	0.0047

В диссертации изучено, как погрешность первых и вторых производных ρ и θ влияет на точность определения радиуса кривизны (ρ_c). В одном случае он определялся при точных значениях первых производных, в другом – вторых. Результаты представлены в табл. 6, из сравнения становится очевидно, что причина неточного определения ρ_c связана со значениями вторых производных ($\ddot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$). Исследования проводились по 30 наблюдениям на дуге $\Delta\theta = 20^\circ$ с разложением $\rho(2)$, $\theta(2)$.

Таблица 6. Изучение влияния погрешностей первых и вторых производных на точность определения ρ_c							
$\sigma = 0.001\bar{\rho}$				$\sigma = 0.005\bar{\rho}$			
точные $\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$		точные $\ddot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$		точные $\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$		точные $\ddot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$	
$P_{\text{пром}}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$P_{\text{пром}}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$P_{\text{пром}}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$	$P_{\text{пром}}, \%$	$S_{\rho_c}, ''$
1.5	0.1109	0	0.0652	24.3	0.1600	0.2	0.0836

Использование закона площадей.

В работе [28] для повышения точности определения вторых производных $\ddot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$ предложено использовать закон площадей. Для второй производной позиционного угла по времени было получено выражение

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho}. \quad 3.2.6$$

Проверим, дает ли выражение (3.2.6) какие-либо преимущества в сравнении с определением $\ddot{\theta}$ из разложения (2.2.1). Результаты исследований представлены в табл. 7. Сравнив их со значениями для \bar{T}_2 из табл. 1-3, приходим к выводу, что использование формулы (3.2.6) повышает точность определения ρ_c . По этой причине в дальнейших исследованиях $\ddot{\theta}$ определялась из выражения (3.2.6). Величину $\ddot{\rho}$ посредством закона площадей можно вычислить только приближенно, приняв $\ddot{\theta} = 0$ или $\ddot{\rho} = 0$ и $\ddot{\theta} = 0$. Исследования с полученными выражениями для $\ddot{\rho}$ проводились, но в обоих случаях наблюдалось значительное ухудшение результатов.

Таблица 7. Использование закона площадей

$\Delta\theta$	$\bar{\rho}_c, "$	$\sigma = 0$			$\sigma = 0.001\bar{\rho}$			$\sigma = 0.005\bar{\rho}$		
		$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, "$	$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, "$	$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, "$
10°	1.064	0	-0.03	0.006	17.0	-0.41	0.149	61.7	-4.84	0.172
15°	1.065	0	-0.08	0.013	4.6	0.09	0.128	38.2	-2.52	0.152
20°	1.064	0	-0.16	0.023	1.3	0.11	0.101	22.1	-0.78	0.152
30°	1.060	0.1	-0.32	0.046	0.4	-0.17	0.073	7.4	-0.20	0.131
40°	1.052	0.4	-0.31	0.074	0.4	-0.21	0.081	2.9	-0.20	0.122
50°	1.042	2.0	-0.61	0.105	1.8	-0.51	0.108	2.8	-0.58	0.122
60°	1.032	4.7	-1.32	0.131	4.6	-1.26	0.131	5.0	-1.13	0.133
70°	1.021	6.3	-1.68	0.152	6.4	-1.70	0.151	7.2	-1.78	0.144

Использование разложений третьего порядка (3.2.5) и формулы (3.2.6) привело к повышению точности определения радиуса кривизны. Также совместно с формулой (3.2.6) было применено разложение третьего порядка позиционного угла и второго порядка разделения. Эта комбинация выражений оказалась наиболее удачной, в табл. 8 представлены погрешности определения радиуса кривизны (ρ_c). Стоит отметить, что преимущества одного из методов над другим очень незначительны.

В табл. 7 и 8 представлен довольно неожиданный результат: применение разложения третьего порядка позиционного угла повышает точность определения радиуса кривизны, но систематическая ошибка при этом возрастает. Данная особенность связана с систематическими ошибками коэффициентов разложений второго и третьего порядков. С помощью разложений третьего порядка точнее определяются $\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$, с помощью разложений второго порядка – $\ddot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$. В табл. 9 представлены результаты, доказывающие данное предположение.

Таблица 8. Использование закона площадей и разложения третьего порядка θ и второго ρ

$\Delta\theta$	$\bar{\rho}_c, ''$	$\sigma = 0$			$\sigma = 0.001\bar{\rho}$			$\sigma = 0.005\bar{\rho}$		
		$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, ''$	$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, ''$	$P_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}, ''$
10°	1.064	0	-0.06	0.006	16.9	-0.53	0.152	61.8	-5.12	0.174
15°	1.065	0	-0.13	0.012	4.7	0.16	0.129	38.4	-2.66	0.153
20°	1.064	0	-0.25	0.021	1.4	0.18	0.101	21.8	-0.65	0.152
30°	1.060	0	-0.56	0.043	0	-0.33	0.071	7.5	-0.004	0.129
40°	1.052	0.2	-0.99	0.069	0.2	-0.89	0.074	2.5	-0.19	0.119
50°	1.042	0.6	-1.52	0.098	0.8	-1.41	0.096	2.0	-0.97	0.109
60°	1.032	1.8	-2.20	0.116	2.0	-2.11	0.115	2.1	-1.88	0.119
70°	1.021	3.3	-2.84	0.127	3.3	-2.89	0.127	3.6	-2.76	0.124

Таблица 9. Среднеквадратичные ошибки коэффициентов разложений, полученные по точным данным

	$\Delta\theta$ (2-ой порядок разложения)				$\Delta\theta$ (3-ий порядок разложения)			
	10°	20°	30°	40°	10°	20°	30°	40°
$S(\rho_0), ''$	8.6×10^{-6}	7.6×10^{-5}	2.6×10^{-4}	5.6×10^{-4}	4.2×10^{-6}	3.5×10^{-5}	1.3×10^{-4}	4.0×10^{-4}
$S(\dot{\rho}), ''/\Gamma$	2.2×10^{-5}	8.2×10^{-5}	1.7×10^{-4}	2.9×10^{-4}	1.8×10^{-7}	2.1×10^{-6}	7.3×10^{-6}	1.5×10^{-5}
$S(\ddot{\rho}), ''/\Gamma^2$	1.9×10^{-6}	7.2×10^{-6}	1.5×10^{-5}	2.6×10^{-5}	2.4×10^{-6}	8.9×10^{-6}	1.8×10^{-5}	3.0×10^{-5}
$S(\theta_0), \text{рад}$	7.7×10^{-6}	8.5×10^{-5}	2.8×10^{-4}	5.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.5×10^{-4}	6.3×10^{-4}	1.6×10^{-3}
$S(\dot{\theta}), \text{рад}/\Gamma$	8.0×10^{-5}	3.1×10^{-4}	6.6×10^{-4}	1.1×10^{-3}	4.0×10^{-7}	5.7×10^{-6}	2.5×10^{-5}	6.3×10^{-5}
$S(\ddot{\theta}), \text{рад}/\Gamma^2$	1.3×10^{-5}	4.9×10^{-5}	1.0×10^{-4}	1.8×10^{-4}	1.5×10^{-5}	5.7×10^{-5}	1.2×10^{-4}	2.0×10^{-4}

Используя данные табл. 9, можно легко получить наиболее удачный алгоритм определения радиуса кривизны и элементов орбиты методом ПВД: $\ddot{\rho}$ определять с помощью разложения второго порядка, $\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$ разложения третьего порядка, $\ddot{\theta}$ посредством выражения (3.2.6). Поскольку ошибки $S(\rho_0)$ и $S(\theta_0)$ невелики, то для определения ρ_0 и θ_0 не так важен выбор порядка разложения, в работе использовались разложения второго порядка. Данный алгоритм в дальнейшем будет обозна-

чаться с помощью следующей комбинации: $\dot{\rho}(3)$, $\dot{\theta}(3)$, $\ddot{\rho}(2)$, $\ddot{\theta}$ (з.п.). В скобочках указан порядок разложения, который использовался для определения величины, $\ddot{\theta}$ (з.п.) вычислена с помощью закона площадей (3.2.6). Описанный алгоритм был протестирован, погрешности радиуса кривизны представлены в табл. 10. В сравнении с табл. 8 на точных данных заметно снижение систематических ошибок.

$\Delta\theta$	$\bar{\rho}_c$, "	$\sigma = 0$			$\sigma = 0.001\bar{\rho}$			$\sigma = 0.005\bar{\rho}$		
		$p_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}$, "	$p_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}$, "	$p_{\text{пром}}, \%$	$\bar{\delta}_{\rho c}, \%$	$S_{\rho c}$, "
10°	1.064	0	-0.01	0.006	16.7	-0.62	0.152	61.9	-4.55	0.176
15°	1.065	0	-0.02	0.012	4.8	0.25	0.129	38.7	-2.71	0.153
20°	1.064	0	-0.04	0.021	1.5	0.36	0.099	21.8	-0.55	0.150
30°	1.060	0	-0.09	0.044	0	0.14	0.072	7.4	0.52	0.131
40°	1.052	0	-0.16	0.073	0	-0.07	0.078	2.5	0.58	0.119
50°	1.042	0.2	-0.30	0.099	0.4	-0.18	0.098	1.8	0.18	0.107
60°	1.032	0.8	-0.27	0.122	0.9	-0.20	0.123	1.3	-0.10	0.122
70°	1.021	2.3	-0.25	0.133	2.1	-0.24	0.135	2.0	-0.17	0.137

Разложения декартовых координат. Поворот осей.

При работе с декартовыми координатами с помощью поворота осей координат можно исключить влияние на результат одной из неточно определяемых величин (\ddot{x} или \ddot{y}). Сначала найти положение θ_0 из разложения (2.2.1), далее совершить преобразование с координатами $\theta_k^* = \theta_k - \theta_0$ и применить разложения декартовых координат (3.2.4). В этом случае при определении радиуса кривизны можно принять $y=0$ и $\ddot{y}=0$, а величина \ddot{x} будет равна проекции вектора ускорения на картинную плоскость. В дальнейшем совместно с разложением декартовых координат будет применяться поворот осей.

	$\Delta\theta$ (2-ой порядок разложения)				$\Delta\theta$ (3-ий порядок разложения)			
	10°	20°	30°	40°	10°	20°	30°	40°
$S(x_0)$, "	9.5×10^{-6}	8.9×10^{-5}	3.1×10^{-4}	6.5×10^{-4}	4.9×10^{-6}	4.2×10^{-5}	1.5×10^{-4}	4.4×10^{-4}
$S(\dot{x})$, "/Г	1.9×10^{-5}	7.3×10^{-5}	1.5×10^{-4}	2.5×10^{-4}	2.0×10^{-7}	2.4×10^{-6}	8.1×10^{-6}	1.7×10^{-5}
$S(\ddot{x})$, "/Г ²	1.2×10^{-6}	4.3×10^{-6}	9.4×10^{-6}	1.6×10^{-5}	1.1×10^{-6}	3.8×10^{-6}	7.6×10^{-6}	1.2×10^{-5}
$S(y_0)$, "	1.5×10^{-5}	1.6×10^{-4}	4.7×10^{-4}	7.7×10^{-4}	8.9×10^{-6}	8.9×10^{-5}	2.6×10^{-4}	4.6×10^{-4}
$S(\dot{y})$, "/Г	1.6×10^{-5}	6.1×10^{-5}	1.3×10^{-4}	2.3×10^{-4}	7.6×10^{-8}	8.9×10^{-7}	3.6×10^{-6}	8.8×10^{-6}
$S(\ddot{y})$, "/Г ²	1.0×10^{-6}	3.6×10^{-6}	7.9×10^{-6}	1.4×10^{-5}	1.1×10^{-6}	3.8×10^{-6}	7.6×10^{-6}	1.2×10^{-5}

Найдем погрешности коэффициентов разложений декартовых координат второго и третьего порядка. В данном случае результат снова довольно неожиданный: при повышении порядка разложения точность определения всех коэффициентов растет, но если с их помощью определить вторые производные полярных координат, разложения второго порядка имеют преимущества. Результаты представлены в табл. 11, значение $\ddot{y} = 0$, поэтому погрешности \ddot{y} не рассматриваются, y_0 используется, дает малую поправку к углу поворота.

Из рассмотренного выше следует, что алгоритмов определения радиуса кривизны можно составить огромное количество. Безусловно, при исследовании отдельных объектов преимущества будут получать то одни методы, то другие. При наличии больших погрешностей наблюдений ($\sigma \approx 0.005\bar{\rho}$) и малой длины дуги ($\Delta\theta < 15^\circ$), охваченной ими, нет никакого смысла использовать разложения третьего порядка, и наоборот, чем точнее данные или больше длина дуги, охваченная ими, тем серьезней необходимо подойти к устранению систематических ошибок.

В дальнейших исследованиях будет использоваться разложение декартовых координат третьего порядка с поворотом осей. Погрешности радиуса кривизны для этого алгоритма при различных точностях модельных наблюдений представлены в табл. 12.

Таблица 12. Погрешность радиуса кривизны (разложение $x(3)$, $y(3)$, с поворотом осей координат)										
$\Delta\theta$	$\bar{\rho}_c$, "	$\sigma = 0$			$\sigma = 0.001\bar{\rho}$			$\sigma = 0.005\bar{\rho}$		
		$P_{\text{пром}}$, %	$\bar{\delta}_{\rho c}$, %	$S_{\rho c}$, "	$P_{\text{пром}}$, %	$\bar{\delta}_{\rho c}$, %	$S_{\rho c}$, "	$P_{\text{пром}}$, %	$\bar{\delta}_{\rho c}$, %	$S_{\rho c}$, "
10°	1.064	0	-0.01	0.001	17.0	-0.70	0.149	61.5	-4.47	0.182
15°	1.065	0	-0.03	0.003	4.5	0.28	0.129	39.2	-2.62	0.157
20°	1.064	0	-0.04	0.005	1.3	0.43	0.096	22.8	-1.45	0.155
30°	1.060	0	-0.05	0.009	0.1	0.19	0.059	7.4	0.32	0.134
40°	1.052	0	-0.05	0.014	0	0.07	0.036	2.1	0.50	0.115
50°	1.042	0	-0.02	0.020	0	0.04	0.029	0.8	0.28	0.088
60°	1.032	0	0.07	0.026	0	0.11	0.030	0.2	0.34	0.071
70°	1.021	0	0.21	0.033	0	0.24	0.035	0	0.42	0.062

Основные закономерности определения радиуса кривизны.

В табл. 7, 8, 10, 12 рассмотрена работа методов на дугах 10°-70°. Сравнивая результаты, можно сформулировать несколько положений: 1) разложения полярных и декартовых координат дают результаты одинаковой точности на дугах 10°-

30° при погрешностях наблюдений $0.001\bar{\rho} - 0.005\bar{\rho}$; 2) разложение декартовых координат дает более точные результаты, если использовать точные данные или данные на дугах 30°-70°, имеющие погрешности $0.001\bar{\rho} - 0.005\bar{\rho}$. Также можно сформулировать несколько общих положений: 1) для каждой погрешности наблюдений σ имеется некоторое значение $\Delta\theta$, при котором среднестатистическая погрешность определения ρ_c будет минимальна; 2) при использовании точных данных с ростом $\Delta\theta$ понижается точность определения ρ_c ; 3) при повышении погрешности наблюдений увеличивается значение $\Delta\theta$, при котором погрешность определения ρ_c минимальна; 4) из пунктов 2 и 3 следует, что получить надежное значение ρ_c можно только при наличии наблюдений хорошей точности.

Во всех предыдущих исследованиях, представленных в этом параграфе диссертации, количество наблюдений у каждого из 1000 объектов было равно 30. Необходимо изучить, насколько сильно количество наблюдений (N) влияет на точность определения ρ_c . Были составлены таблицы, подобные табл. 7, 8, 10, 12, для 15-ти наблюдений. Результат получился вполне ожидаемый: с уменьшением количества наблюдений точность определения ρ_c снижается. Наиболее важным является другой вывод: общие закономерности изменения количества промахов и величины среднеквадратичной ошибки при изменении длины дуги, охваченной наблюдениями, сохраняются.

Построение графических зависимостей.

В дальнейших вычислениях вместо среднеквадратичного отклонения использовалась средняя относительная ошибка:

$$\delta_{\rho_c} = \sum_{i=1}^{N_{st}} \frac{|\rho_{c(obs)i} - \rho_{c(cal)i}|}{\rho_{c(cal)i} N_{st}}. \quad 3.2.7$$

Детальное изучение погрешности определения радиуса кривизны в зависимости от длины дуги показало, что средняя относительная ошибка ведет себя более стабильно, чем среднеквадратичное отклонение. Это выражается в том, что на графике зависимости средней относительной ошибки от длины дуги меньше изломов и отчетливо виден минимум. Вторая причина использования средней относительной ошибки связана с тем, что не нужно рассматривать значения определяемых величин. В данном параграфе изучаются погрешности, сам результат численных экс-

периментов (ρ_c) не имеет большого значения. Относительная ошибка дает однозначное представление о погрешности, среднеквадратичное отклонение имеет смысл, если известна определяемая величина. Именно по этой причине во многих таблицах данного параграфа представлено среднее значение радиуса кривизны $\bar{\rho}_c$, определяемое посредством формулы (3.2.3). Величина $\bar{\rho}_c$ дает очень приближенные представления о значениях ρ_{ci} . Одно и то же отклонение $\Delta\rho_{ci} = \rho_{c(obs)i} - \rho_{c(cal)i}$ в одних случаях можно считать большим, в других малым.

Результаты исследования зависимостей $p_{\text{пром}} = f(\Delta\theta, \sigma, N)$ и $\delta_{\rho_c} = g(\Delta\theta, \sigma, N)$ позволяют выбрать наиболее удачные варианты обработки коротких дуг при работе с реальными наблюдениями. Например, зная погрешность наблюдений σ и среднюю величину разделения, можно оценить длину дуги, охваченную наблюдениями, по которой радиус кривизны будет определяться наиболее точно.

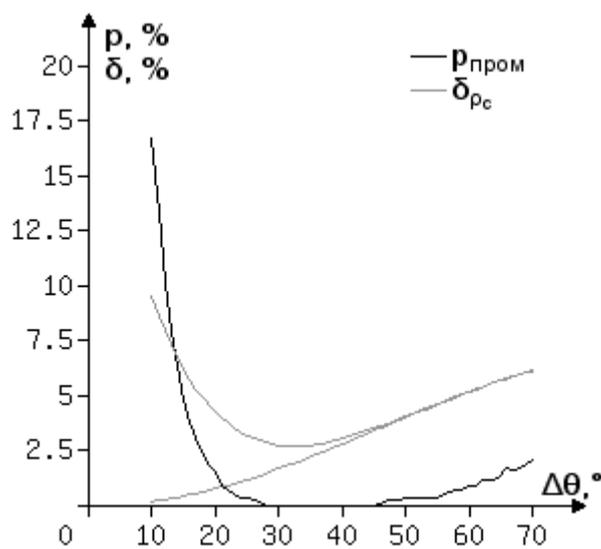


Рис. 3.5. Зависимости $p_{\text{пром}}$ и δ_{ρ_c} от длины дуги $\Delta\theta$ для разложений ρ и θ при $\sigma = 0$ и $\sigma = 0.001\bar{\rho}$

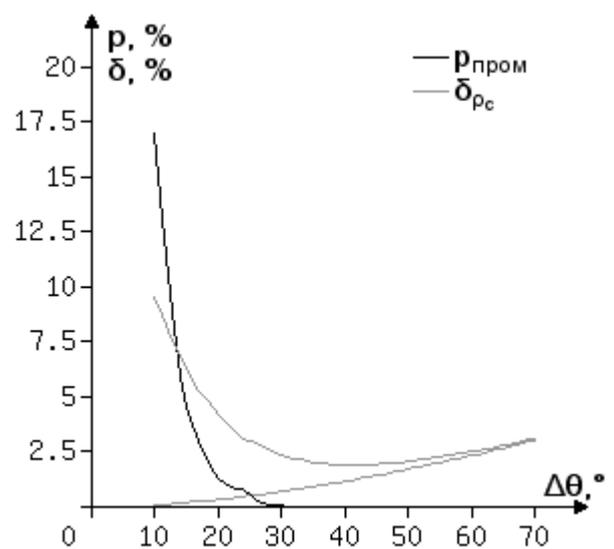


Рис. 3.6. Зависимости $p_{\text{пром}}$ и δ_{ρ_c} от длины дуги $\Delta\theta$ для разложений x и y при $\sigma = 0$ и $\sigma = 0.001\bar{\rho}$

На рис. 3.5 и 3.6 изображены зависимости количества промахов $p_{\text{пром}}$ и средней относительной ошибки радиуса кривизны δ_{ρ_c} от длины дуги $\Delta\theta$, охваченной наблюдениями, при погрешности наблюдений $\sigma = 0.001\bar{\rho}$. Использовались следующие методы: 1) разложения полярных координат, $\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$ определяются из раз-

ложения третьего порядка, $\ddot{\rho}$ – второго порядка, $\ddot{\theta}$ – из выражения (3.2.6); 2) разложения декартовых координат третьего порядка с поворотом осей.

Оптимальными для вычисления ρ_c в случае использования полярных координат являются дуги 25° - 40° , декартовых координат – 30° - 50° . Использовать длину дуги больше оптимальной нерационально. Работа на дугах большой длины изучалась для того, чтобы оценить риски, связанные с неудачным выбором длины дуги при рассмотрении реальных объектов. У разложений декартовых координат минимум δ_{ρ_c} более глубокий ($\Delta\theta = 41^\circ$, $\delta_{\rho_c} = 1.91\%$), минимум при использовании полярных координат: $\Delta\theta = 32^\circ$, $\delta_{\rho_c} = 2.70\%$. Разложения декартовых координат при погрешности наблюдений $\sigma = 0.001\bar{\rho}$ имеют преимущества, начиная с дуг 25° .

На рис. 3.5 и 3.6 также представлена кривая δ_{ρ_c} , полученная по точным данным. На дугах большой длины она сливается с δ_{ρ_c} , вычисленной по данным, содержащим ошибки $\sigma = 0.001\bar{\rho}$. В случае малых дуг при использовании точных данных относительная ошибка устремляется к 0. При использовании разложений декартовых координат и наличии ошибок наблюдений ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$) в диапазоне $\Delta\theta \in (30^\circ, 70^\circ)$ промахи отсутствуют. При использовании разложений полярных координат графики $p_{\text{пром}}$ для точных данных и данных, содержащих ошибки, на дугах $\Delta\theta > 30^\circ$ практически сливаются, поэтому график $p_{\text{пром}}$ для точных данных на рис. 3.5 не изображен.

На рис. 3.7-3.10 представлены результаты, обобщающие большое количество численных экспериментов на дугах от 10° до 70° . Графики строились по точкам, использовались следующие значения аргумента: $\sigma = 0, 0.0002, 0.0005, 0.001, 0.002, 0.003, 0.004$ и $0.005\bar{\rho}$. Для перечисленных σ фиксировались минимальные и максимальные длины дуг, при которых средняя относительная ошибка (δ_{ρ_c}) и вероятность промахов ($p_{\text{пром}}$) принимали определенные значения (эти значения указаны в процентах около кривых). Для каждого значения δ_{ρ_c} и $p_{\text{пром}}$ имеется верхняя и нижняя кривая, в области между ними (в зависимости от рисунка) δ_{ρ_c} или $p_{\text{пром}}$ меньше. Поэтому полученные на рис. 3.7-3.10 графики можно назвать ограничи-

вающими кривыми. Если верхние ограничивающие кривые находятся выше 70° , на рисунках они не изображены. По этой причине на рис. 3.9 не изображено ни одной верхней ограничивающей кривой.

В центре на графиках для относительной ошибки δ_{ρ_c} расположена кривая серого цвета. Назовем ее кривой оптимальных значений. Она определяет длину дуги, для которой при данной погрешности наблюдений относительная ошибка минимальна.

Верхняя и нижняя ограничивающие кривые, имеющие одинаковое значение, если их продолжить, должны объединяться на оптимальной кривой. Как отмечалось ранее, ограничивающие кривые строились по точкам, поэтому если обе кривые обрываются на 0.002, то точка их слияния где-то между 0.002 и 0.003. Аналогично можно приближенно достроить другие ограничивающие кривые за исключением тех, которые доведены до значения $\sigma = 0.005\bar{\rho}$. Нижние ограничивающие кривые, как и кривая оптимальных значений относительной ошибки, выходят из начала координат (при значении $\Delta\theta = 0^\circ$ радиус кривизны определить невозможно). Участок с погрешностями $\sigma \in (0, 0.0002\bar{\rho})$ не изучался, в настоящее время на практике ряды наблюдений с погрешностью $\sigma < 0.0002\bar{\rho}$ не реализуются. Погрешности $\sim 0.0002\bar{\rho}$ могут иметь лучшие наблюдения звездного интерферометра РТИ [61] при разделении между компонентами $\rho > 1''$.

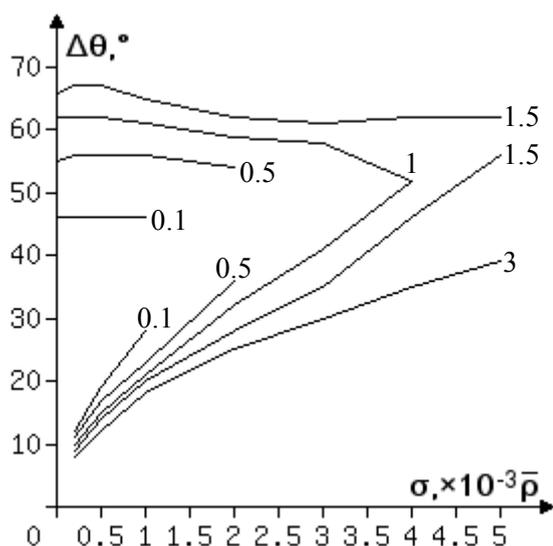


Рис. 3.7. Ограничивающие кривые для промахов (разложение $\dot{\rho}(3)$, $\dot{\theta}(3)$, $\ddot{\rho}(2)$, $\ddot{\theta}(3.п.)$)

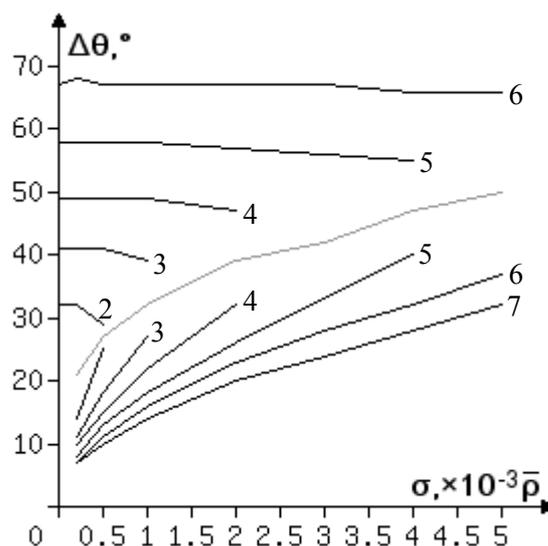


Рис. 3.8. Ограничивающие кривые для относительной ошибки (разложение $\dot{\rho}(3)$, $\dot{\theta}(3)$, $\ddot{\rho}(2)$, $\ddot{\theta}(3.п.)$)

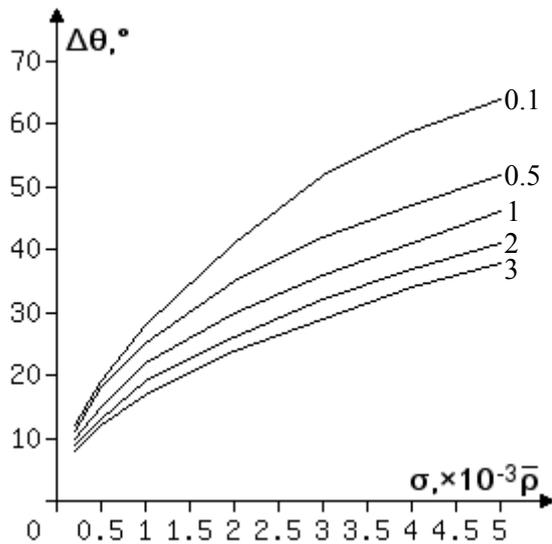


Рис. 3.9. Ограничивающие кривые для промахов (разложение $x(3)$, $y(3)$, с поворотом осей)

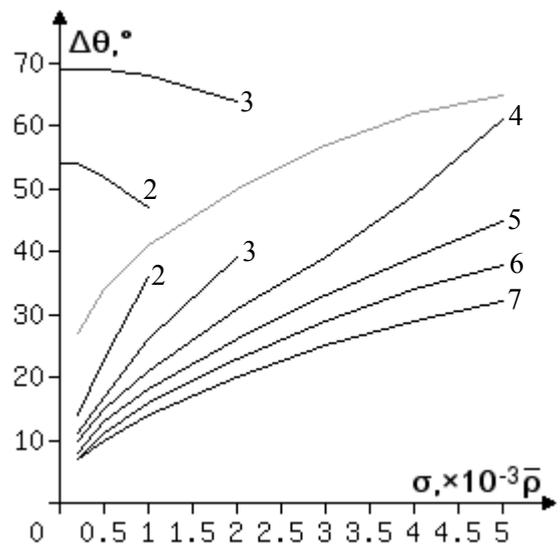


Рис. 3.10. Ограничивающие кривые для относительной ошибки (разложение $x(3)$, $y(3)$, с поворотом осей)

Верхние ограничивающие кривые не могут возрастать. Незначительные отклонения от данного правила наблюдаются на рис. 3.7 и 3.8. Функциональные зависимости у ограничивающих кривых и кривых оптимальных значений прослеживаются. В целом по виду графиков на рис. 3.7-3.10 можно заключить, что 1000 наборов элементов орбит достаточно для проведения статистических исследований. Изучив кривые оптимальных значений относительной ошибки на рис. 3.8 и 3.10, приходим к однозначному выводу: определять орбиту методом ПВД лучше по высокоточным данным ($\sigma < 0.0002\bar{\rho}$), тогда можно взять малую дугу ($\Delta\theta \sim 10^\circ$) и получить достаточно точное значение ρ_c . В настоящее время наблюдения двойных звезд, как правило, имеют погрешности $\sigma > 0.001\bar{\rho}$, поэтому при вычислении ρ_c желательно увеличивать длину дуги до 20° и более, но даже в этом случае всегда остается некоторая вероятность получения промахов. Вероятность промаха, как и среднюю относительную ошибку, можно оценить из графиков 3.7-3.10, например, из рис. 3.9 для дуги $\Delta\theta = 20^\circ$ при $\sigma = 0.0005\bar{\rho}$ $p_{\text{пром}} = 0.1\%$, при $\sigma = 0.0015\bar{\rho}$ $p_{\text{пром}} = 3\%$.

Для получения более полной картины рис. 3.8 и 3.10 дополнены табл. 13 и 14, в которых отмечены глубина и положения минимумов относительной ошибки δ_{ρ_c} . Преимущества разложений декартовых координат над полярными хорошо замет-

ны. Необходимо отметить, что данный результат справедлив при обработке случайных объектов со значениями наклона и эксцентриситета из интервалов: $i \in [20^\circ, 70^\circ]$, $e \in [0.2, 0.7]$.

Таблица 13. Положение и глубина минимумов относительной ошибки δ_{ρ_c} в случае использования разложений полярных координат							
σ	$0.0002\bar{\rho}$	$0.0005\bar{\rho}$	$0.001\bar{\rho}$	$0.002\bar{\rho}$	$0.003\bar{\rho}$	$0.004\bar{\rho}$	$0.005\bar{\rho}$
$\Delta\theta, ^\circ$	21	27	32	39	42	47	50
$\delta_{\rho_c}, \%$	1.25	1.94	2.70	3.66	4.28	4.68	5.06

Таблица 14. Положение и глубина минимумов относительной ошибки δ_{ρ_c} в случае использования разложений декартовых координат							
σ	$0.0002\bar{\rho}$	$0.0005\bar{\rho}$	$0.001\bar{\rho}$	$0.002\bar{\rho}$	$0.003\bar{\rho}$	$0.004\bar{\rho}$	$0.005\bar{\rho}$
$\Delta\theta, ^\circ$	27	34	41	50	57	62	65
$\delta_{\rho_c}, \%$	0.91	1.39	1.91	2.63	3.17	3.60	3.95

Изучение точности определения периода и большой полуоси.

Изучим особенности определения периода и большой полуоси методом ПВД, когда все необходимые данные являются точными. Стиль проведения исследований аналогичен рассмотренному ранее, используется 1000 наборов орбит. В табл. 15 представлены результаты, полученные с помощью разложений полярных и декартовых координат, в скобочках указан порядок разложения. Используя 1000 объектов, определены средние значения периода (\bar{P}) и большой полуоси (\bar{a}), среднеквадратичные отклонения для них (σ_p , σ_a) и среднеквадратичные отклонения для наблюдений ($\sigma_{\Delta\rho}$, $\sigma_{\rho\Delta\theta}$, они определялись по элементам орбит, полученным методом ПВД).

Таблица 15. Изучение работы метода ПВД по точным данным								
	Разложение $\dot{\rho}(3)$, $\dot{\theta}(3)$, $\ddot{\rho}(2)$, $\ddot{\theta}(3.п.)$				Разложение $x(3)$, $y(3)$, с поворотом осей			
$\Delta\theta$	10°	20°	30°	40°	10°	20°	30°	40°
$\bar{P}, \text{ г}$	360.01	360.03	360.18	360.70	360.05	360.24	360.61	361.14
$\sigma_p, \text{ г}$	1.82	6.97	14.99	25.61	0.76	2.72	5.31	8.47
$\bar{a}, \text{ ''}$	1.0000	1.0000	1.0001	1.0008	1.0001	1.0004	1.0011	1.0021
$\sigma_a, \text{ ''}$	0.0034	0.0129	0.0278	0.0470	0.0014	0.0050	0.0098	0.0157
$\sigma_{\rho\Delta\theta}, \text{ ''}$	1.1×10^{-5}	1.4×10^{-4}	5.3×10^{-4}	0.0011	8.9×10^{-6}	7.2×10^{-5}	2.7×10^{-4}	7.4×10^{-4}
$\sigma_{\Delta\rho}, \text{ ''}$	6.4×10^{-5}	2.2×10^{-4}	8.3×10^{-4}	0.0021	1.6×10^{-4}	6.4×10^{-4}	0.0016	0.0033

Таблица 16. Изучение работы метода ПВД по данным, содержащим ошибки ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$). Разложение $\dot{\rho}(3)$, $\dot{\theta}(3)$, $\ddot{\rho}(2)$, $\ddot{\theta}(з.п.)$						
$\Delta\theta$	20°	30°	40°	50°	60°	70°
\bar{P} , Г	365.45	362.07	361.43	362.07	362.60	363.09
σ_p , Г	91.12	24.73	27.10	38.05	48.60	63.80
\bar{a} , "	1.0085	1.0033	1.0020	1.0026	1.0030	1.0032
σ_a , "	0.1303	0.0457	0.0502	0.0694	0.0883	0.1123
$\sigma_{\rho\Delta\theta}$, "	0.0009	0.0010	0.0014	0.0022	0.0036	0.0057
$\sigma_{\Delta\rho}$, "	0.0014	0.0012	0.0022	0.0040	0.0062	0.0086

Таблица 17. Изучение работы метода ПВД по данным, содержащим ошибки ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$). Разложение $x(3)$, $y(3)$, с поворотом осей						
$\Delta\theta$	20°	30°	40°	50°	60°	70°
\bar{P} , Г	364.58	362.70	362.00	362.40	363.41	364.90
σ_p , Г	68.53	22.63	15.03	14.85	17.93	22.58
\bar{a} , "	1.0071	1.0046	1.0035	1.0043	1.0061	1.0087
σ_a , "	0.1114	0.0411	0.0277	0.0274	0.0330	0.0413
$\sigma_{\rho\Delta\theta}$, "	8.5×10^{-4}	8.8×10^{-4}	0.0011	0.0017	0.0029	0.0043
$\sigma_{\Delta\rho}$, "	0.0017	0.0019	0.0034	0.0056	0.0084	0.0103

В табл. 16 и 17 рассмотрена работа метода ПВД с данными, содержащими ошибки ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$). На дугах $\Delta\theta < 20^\circ$ у отдельных объектов при определении элементов орбит появлялись отрицательные значения большой полуоси и очень большие значения периода, поэтому в табл. 16 и 17 данная область ($\Delta\theta < 20^\circ$) не рассматривается.

Сравнив значения среднеквадратичных ошибок (σ_p , σ_a) табл. 16 и 17, приходим к выводу, что разложения декартовых координат в среднем дают более точные результаты.

Изучение работы метода ПВД на “идеальном объекте”.

Максимальные ошибки при определении орбиты методом ПВД появляются, когда используется точка на орбите с разделением $\rho(\bar{T})$, близким к ρ_{\min} , при больших значениях эксцентриситета или угла наклона. Например, на рис. 3.11 изображена орбита одного из тысячи тестируемых объектов, эксцентриситет невелик ($e=0.2465$), но угол наклона $i=58.88^\circ$. После добавления ошибок в наблюдения ($\sigma = 0.005\bar{\rho}$) радиус кривизны стал отрицательной величиной, что заметно даже визуально при рассмотрении наблюдений (их 30 на дуге $\Delta\theta = 20^\circ$, на рисунке изо-

бражаются в виде маленьких крестиков, из-за высокой плотности слились в темную полосу).

До этого обработке подвергались объекты с различными значениями элементов орбит, среди них встречались с достаточно большими значениями эксцентриситета ($e \approx 0.7$) и наклона ($i \approx 70^\circ$). Как правило, орбиты таких объектов определялись с большими ошибками, что привело к необходимости учета промахов. Прوماхи усложнили анализ алгоритмов, сделали его математически нестрогим. Средние относительные ошибки, определяемые на дугах различной длины, нельзя считать равноправными, так как при их вычислении из рассмотрения исключалось различное количество объектов, радиусы кривизны которых имели относительные ошибки более 0.3. По этой причине пришлось одновременно изучать две зависимости: $p_{\text{пром}} = f(\Delta\theta, \sigma, N)$ и $\delta_{\rho_c} = g(\Delta\theta, \sigma, N)$. Еще одна трудность возникла при выборе условия для промахов $\Delta\rho_c > 0.3\rho_{c(\text{cal})}$, оно математически ничем не обосновано. Изучив влияние ошибок ρ_c на точность определения периода и большой полуоси, условие для промахов можно связать с относительными ошибками δ_p и δ_a , но оно так же останется достаточно произвольным. Рассмотренные сложности говорят о том, что нужно дополнить полученные результаты: провести исследования на “идеальном” объекте. В этом случае количество промахов крайне незначительно, их появление связано только со случайно вносимыми ошибками.

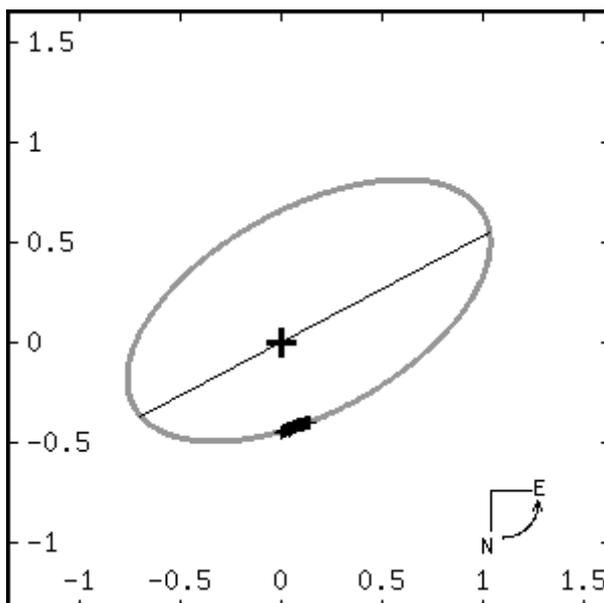


Рис. 3.11. Пример неудачного определения радиуса кривизны

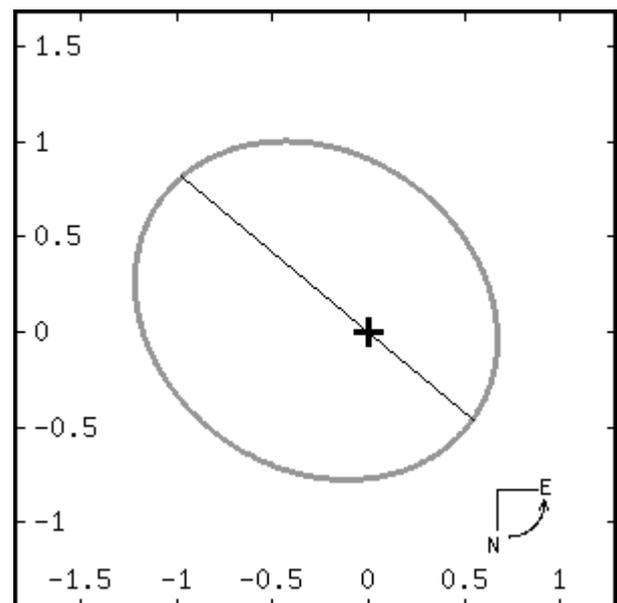


Рис. 3.12. Модельная орбита

В качестве “идеальной” была выбрана орбита с элементами: $n=1^\circ/\text{г}$, $a=1''$, $i=30^\circ$, $\Omega=50^\circ$, $T_p=2000$, $e=0.3$, $\omega=20^\circ$ (она изображена рис. 3.12). Основными требованиями являлось: 1) отсутствие участков на дуге, для которых $\rho_c \gg \bar{\rho}$ (отсутствие почти прямолинейных участков); 2) отсутствие участков на дуге, где происходит сильное изменение радиуса кривизны. При работе с реальными объектами сложность определения ρ_c можно оценить, построив рисунок с наблюдениями. Если наблюдения не выстраиваются вдоль линии или сильно искривленной кривой, то представленные далее результаты справедливы для изучаемой звезды.

План проводимых исследований следующий: 1) выбирается 1000 участков на орбите, начальные положения (θ_1) отличаются на 0.36° , длина дуги в ходе эксперимента одинакова, для каждого выбранного участка определяется по 30 относительных положений, равномерно распределенных на дуге; 2) к модельным наблюдениям добавляются ошибки, подчиненные нормальному распределению; 3) для каждого из 1000 участков вычисляются элементы орбиты методом ПВД; 4) производится сравнение вычисленных элементов орбит с точными значениями.

В табл. 9 был представлен довольно интересный результат: коэффициенты разложений $\dot{\rho}$ и $\ddot{\theta}$ определяются точнее из разложений второго порядка. Аналогичные исследования были проведены на “идеальном” объекте, данные табл. 18 подтверждают сформулированное правило.

Таблица 18. Среднеквадратичные ошибки коэффициентов разложений для “идеального” объекта						
	$\Delta\theta$ (2-ой порядок разложения)			$\Delta\theta$ (3-ий порядок разложения)		
	10°	20°	30°	10°	20°	30°
$S(\rho_0)$, "	1.7×10^{-7}	2.7×10^{-6}	1.3×10^{-5}	2.7×10^{-7}	4.3×10^{-6}	2.1×10^{-5}
$S(\dot{\rho})$, "/г	5.9×10^{-6}	2.3×10^{-5}	5.2×10^{-5}	5.3×10^{-9}	8.2×10^{-8}	4.1×10^{-7}
$S(\ddot{\rho})$, "/г ²	1.9×10^{-7}	7.6×10^{-7}	1.7×10^{-6}	2.1×10^{-7}	8.3×10^{-7}	1.9×10^{-6}
$S(\theta_0)$, рад	2.7×10^{-7}	4.1×10^{-6}	2.0×10^{-5}	3.9×10^{-7}	6.1×10^{-6}	3.0×10^{-5}
$S(\dot{\theta})$, рад/г	1.1×10^{-5}	4.2×10^{-5}	9.4×10^{-5}	1.0×10^{-8}	1.6×10^{-7}	7.8×10^{-7}
$S(\ddot{\theta})$, рад/г ²	3.1×10^{-7}	1.2×10^{-6}	2.7×10^{-6}	3.3×10^{-7}	1.3×10^{-6}	2.9×10^{-6}

В табл. 19-21 изучается погрешность определения периода и большой полуоси по точным данным и данным, содержащим ошибки $\sigma = 0.001\bar{\rho}$. Сумма масс, относительная лучевая скорость, параллакс, как и во всех предыдущих исследованиях данного параграфа, являются точными величинами. Из данных табл. 19-21 следует,

что элементы орбиты “идеального” объекта определяются более точно, если используется разложение полярных координат.

Таблица 19. Изучение работы метода ПВД по точным данным (“идеальный” объект)

$\Delta\theta$	Разложение $\dot{\rho}(3), \dot{\theta}(3), \ddot{\rho}(2), \ddot{\theta}(3.п.)$				Разложение $x(3), y(3)$, с поворотом осей			
	10°	20°	30°	40°	10°	20°	30°	40°
\bar{P}, Γ	359.98	359.93	359.86	359.77	360.17	360.68	361.54	362.73
σ_P, Γ	0.20	0.78	1.73	3.03	0.24	0.97	2.17	3.83
$\bar{a}, ''$	1.0000	0.9999	0.9997	0.9996	1.0003	1.0013	1.0028	1.0050
$\sigma_a, ''$	0.0004	0.0014	0.0032	0.0056	0.0004	0.0018	0.0040	0.0071
$\sigma_{\rho\Delta\theta}, ''$	2.5×10^{-7}	4.1×10^{-6}	2.2×10^{-5}	7.4×10^{-5}	3.3×10^{-7}	5.2×10^{-6}	2.6×10^{-5}	8.4×10^{-5}
$\sigma_{\Delta\rho}, ''$	7.8×10^{-7}	1.3×10^{-5}	6.7×10^{-5}	2.1×10^{-4}	5.6×10^{-7}	9.1×10^{-6}	4.7×10^{-5}	1.5×10^{-4}

Таблица 20. Изучение работы метода ПВД по данным, содержащим ошибки ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$). Разложение $\dot{\rho}(3), \dot{\theta}(3), \ddot{\rho}(2), \ddot{\theta}(3.п.)$, “идеальный” объект

$\Delta\theta$	10°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
\bar{P}, Γ	374.26	364.69	361.77	360.43	360.04	359.83	359.70	359.63
σ_P, Γ	112.92	33.87	18.05	7.83	5.05	5.20	6.67	8.66
$\bar{a}, ''$	1.0219	1.0077	1.0030	1.0007	1.0000	0.9997	0.9994	0.9993
$\sigma_a, ''$	0.1829	0.0617	0.0333	0.0145	0.0094	0.0097	0.0124	0.0161
$\sigma_{\rho\Delta\theta}, ''$	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010	0.0011	0.0013
$\sigma_{\Delta\rho}, ''$	0.0107	0.0041	0.0022	0.0011	0.0010	0.0011	0.0014	0.0021

Таблица 21. Изучение работы метода ПВД по данным, содержащим ошибки ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$). Разложение $x(3), y(3)$, с поворотом осей, “идеальный” объект

$\Delta\theta$	10°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
\bar{P}, Γ	374.22	365.10	362.48	362.07	362.98	364.40	366.22	368.38
σ_P, Γ	113.61	35.12	19.26	9.12	6.57	7.02	8.97	11.67
$\bar{a}, ''$	1.0217	1.0084	1.0043	1.0038	1.0055	1.0081	1.0114	1.0154
$\sigma_a, ''$	0.1846	0.0639	0.0354	0.0168	0.0121	0.0129	0.0165	0.0214
$\sigma_{\rho\Delta\theta}, ''$	0.0011	0.0010	9.9×10^{-4}	9.8×10^{-4}	9.8×10^{-4}	9.9×10^{-4}	0.0011	0.0013
$\sigma_{\Delta\rho}, ''$	0.0107	0.0041	0.0021	0.0011	9.7×10^{-4}	0.0010	0.0012	0.0017

Разложения полярных координат имеют преимущества, если участок дуги почти круговой, разложения декартовых координат, если участок почти прямолинейен. Именно по этой причине разложения декартовых координат дают в среднем более точные результаты, если исследуется большая совокупность орбит со случайными значениями наклона и эксцентриситета из интервалов $i \in [20^\circ, 70^\circ]$,

$e \in [0.2, 0.7]$, и уступают в точности разложениям полярных координат, если обрабатываются наблюдения “идеального” объекта. Поэтому при работе с реальными наблюдениями для проверки надежности получаемых методом ПВД результатов желательно использовать оба разложения.

Исходя из данных табл. 19 и 21, разложения третьего порядка декартовых координат при обработке “идеального” объекта дают заметную систематическую ошибку периода и большой полуоси (\bar{P} и \bar{a}). Для ее устранения был повышен порядок разложения. Это значительно уменьшило систематическую ошибку, но метод стал более чувствителен к ошибкам наблюдений. Результаты определения периода и большой полуоси для разложений декартовых координат четвертого порядка представлены в табл. 22. На дуге 10° у отдельных объектов из 1000 тестируемых орбиты определить не удалось (большая полуось отрицательна), поэтому результаты на 10° в табл. 22 не представлены. С помощью разложений декартовых координат четвертого порядка можно получить результаты хорошей точности на дугах $\sim 80^\circ$ при погрешности наблюдений $\sigma \sim 0.001\bar{\rho}$.

Таблица 22. Изучение работы метода ПВД по данным, содержащим ошибки ($\sigma = 0.001\bar{\rho}$). Разложение $x(4)$, $y(4)$, с поворотом осей, “идеальный” объект								
$\Delta\theta$	15°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
\bar{P} , г	377.61	375.48	363.96	361.60	360.85	360.57	360.50	360.54
σ_P , г	1423	75.73	27.43	14.89	9.41	6.51	4.79	3.75
\bar{a} , "	1.0251	1.0249	1.0067	1.0028	1.0015	1.0010	1.0009	1.0010
σ_a , "	0.9157	0.1318	0.0502	0.0275	0.0174	0.0120	0.0089	0.0069
$\sigma_{\rho\Delta\theta}$, "	0.0017	0.0013	0.0011	0.0011	0.0010	0.0011	0.0011	0.0012
$\sigma_{\Delta\rho}$, "	0.0173	0.0088	0.0035	0.0020	0.0016	0.0014	0.0014	0.0015

Влияние погрешностей ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , π_t .

Изучим влияние неточных значений ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , π_t на элементы орбиты, определяемые методом ПВД. Выбор этих величин неслучаен. В работе [28] показано, что для определения орбиты должны быть известны восемь величин: ρ_0 , θ_0 , μ , ψ , ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , π_t . Наибольшие относительные ошибки имеют ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , а также π_t , если рассматривать достаточно удаленную звезду. Процедура определения элементов орбит методом ПВД, если известны перечисленные выше восемь величин, является аналитической, поэтому ошибки элементов орбит можно оценить стандартным способом посредством правил дифференцирования. В случае

численных экспериментов ошибки можно найти, сравнив точные значения элементов орбит с вычисленными.

Исследования проводились на 1000 модельных объектах. Вносились погрешности в значения одной из четырех величин: ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} или π_t . Все остальные величины, необходимые для определения орбиты методом ПВД, оставались точными. Затем определялись элементы орбиты методом ПВД и вычислялись средние относительные ошибки периода и большой полуоси

$$\delta_P = \sum_{i=1}^{N_{st}} \frac{P_{bi} - P_{ti}}{N_{st} P_{ti}} \text{ и } \delta_a = \sum_{i=1}^{N_{st}} \frac{a_{bi} - a_{ti}}{N_{st} a_{ti}}, \quad 3.2.8$$

где P_{ti} и a_{ti} – точные значения, P_{bi} и a_{bi} – вычисленные методом ПВД значения после добавления ошибок.

δ_{ρ_c}	δ_P	δ_a	$\delta_{M_{AB}}$	δ_P	δ_a
-0.30	-0.332	-0.237	-0.15	0.422	0.190*
-0.20	-0.231	-0.162	-0.10	0.219	0.101*
-0.10	-0.121	-0.083	-0.05	0.091	0.042*
-0.05	-0.062	-0.042	-0.01	0.016	0.007*
0	$<10^{-13}$	$<10^{-13}$	0	$<10^{-13}$	$<10^{-13}$
0.05	0.066	0.043	0.01	-0.015	0.007*
0.10	0.136	0.089	0.05	-0.069	0.032*
0.20	0.294	0.185	0.10	-0.123	0.057*
0.30	0.480	0.293	0.15	-0.168	0.078*

$\delta_{V_{rBA}}$	δ_P	δ_a	δ_{π_t}	δ_P	δ_a
-0.15	-0.109	-0.076	-0.08	0.881	0.425
-0.10	-0.080	-0.055	-0.05	0.278	0.172
-0.05	-0.045	-0.030	-0.03	0.137	0.088
-0.01	-0.010	-0.007	-0.01	0.039	0.026
0.01	0.010	0.007	0.01	-0.035	-0.023
0.05	0.060	0.039	0.05	-0.141	-0.097
0.10	0.151	0.093	0.10	-0.230	-0.163
0.15	0.359	0.190	0.15	-0.292	-0.210

Результаты вычислений представлены в табл. 23. Если над величиной в табл. 23 стоит значок “*”, то наблюдались отклонения в обе стороны от точного значения, поэтому под знаками суммы в (3.2.8) были поставлены модули

$$\delta_p = \sum_{i=1}^{N_{st}} \frac{|P_{bi} - P_{ti}|}{N_{st} P_{ti}} \text{ и } \delta_a = \sum_{i=1}^{N_{st}} \frac{|a_{bi} - a_{ti}|}{N_{st} a_{ti}}. \quad 3.2.9$$

Из табл. 23 следует, что метод ПВД для получения надежных результатов требует высокой точности используемых величин (ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , π_t). Значительные средние относительные ошибки δ_p и δ_a в табл. 23 связаны в первую очередь с наличием относительно небольшого количества результатов, имеющих заметные отклонения от истинных элементов орбит. Например, если при погрешности $\delta_{V_{rBA}} = 0.15$ исключить объекты со значениями P и a , более чем в два раза отличающимися от истинных (таких объектов 7.3%), то ошибки заметно уменьшаются: $\delta_p = 0.148$ и $\delta_a = 0.093$. Значения тригонометрического параллакса в табл. 23б не удалось уменьшить на 15%, так как большая полуось, вычисляемая из формулы (2.2.6), для отдельных объектов становится отрицательной величиной (подобные трудности также возникали при значительном изменении величин ρ_c , M_{AB} , V_{rBA}).

Таблица 24а. Влияние погрешностей ρ_c и M_{AB} на работу метода ПВД (“идеальный” объект)

δ_{ρ_c}	δ_p	δ_a	$\delta_{M_{AB}}$	δ_p	δ_a
-0.30	-0.303	-0.215	-0.15	0.253	0.100
-0.20	-0.207	-0.144	-0.10	0.148	0.058
-0.10	-0.106	-0.072	-0.05	0.066	0.026
-0.05	-0.054	-0.036	-0.01	0.0121	0.0047
0.05	0.055	0.037	0.01	-0.0116	-0.0045
0.10	0.113	0.074	0.05	-0.054	-0.021
0.20	0.232	0.149	0.10	-0.099	-0.037
0.30	0.360	0.227	0.15	-0.137	-0.051

Таблица 24б. Влияние погрешностей V_{rBA} и π_t на работу метода ПВД (“идеальный” объект)

$\delta_{\Delta V_r}$	δ_p	δ_a	δ_{π_t}	δ_p	δ_a
-0.15	-0.057	-0.038	-0.15	1.378	0.757
-0.10	-0.040	-0.027	-0.10	0.556	0.338
-0.05	-0.021	-0.014	-0.05	0.199	0.128
-0.01	-0.0044	-0.0030	-0.01	0.033	0.022
0.01	0.0045	0.0030	0.01	-0.030	-0.020
0.05	0.024	0.016	0.05	-0.127	-0.087
0.10	0.051	0.033	0.10	-0.215	-0.150
0.15	0.082	0.053	0.15	-0.279	-0.197

Повторим исследования на рассмотренном ранее “идеальном” объекте. Результаты представлены в табл. 24. Сравнивая значения табл. 23 и 24, можно сформулировать несколько положений: 1) влияние на элементы орбиты погрешностей ρ_c , завышенных значений M_{AB} и π_t практически не зависит от формы дуги, охваченной наблюдениями, так как значения ошибок (δ_p , δ_a) для “идеального” объекта и в случае использования случайных объектов примерно одинаковы; 2) влияние на элементы орбиты погрешностей V_{rBA} , заниженных значений M_{AB} и π_t зависит от формы дуги, охваченной наблюдениями, так как значения ошибок (δ_p , δ_a) в табл. 23 и 24 заметно отличаются.

Наибольшее влияние на точность элементов орбит оказывают погрешности тригонометрического параллакса. Рассмотрев данные табл. 23 и 24, можно оценить точность, с которой нужно определять величины ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , π_t , чтобы средняя погрешность периода и большой полуоси имела некоторое заданное значение. Относительные ошибки δ_{ρ_c} , $\delta_{M_{AB}}$, $\delta_{V_{rBA}}$ и δ_{π_t} могут в значительной степени компенсировать друг друга, так как δ_p и δ_a в табл. 23 и 24 принимают то отрицательные, то положительные значения. Для определения погрешности необходимо использовать статистический закон [21]: математическое ожидание абсолютной погрешности суммы n слагаемых с одинаковым уровнем абсолютных погрешностей, при достаточно большом n , пропорционально \sqrt{n} . В соответствии с данным законом для оценки погрешностей справедлива формула

$$\delta_p = \sum_{i=1}^n \delta_{p_i} / \sqrt{n}, \quad \delta_a = \sum_{i=1}^n \delta_{a_i} / \sqrt{n}, \quad 3.2.10$$

где δ_{p_i} и δ_{a_i} – относительные ошибки из табл. 23 или 24 (берутся максимальные значения по модулю), $n = 4$, так как рассматривается влияние на определяемые элементы орбиты погрешностей четырех величин: ρ_c , M_{AB} , V_{rBA} , π_t .

Приближенно можно принять, что для определения периода и большой полуоси со средней относительной ошибкой 10% необходимо радиус кривизны, сумму масс, относительную лучевую скорость определять с погрешностью 5%, а параллакс с погрешностью 1-2%.

§ 3.3 Метод изучения точности наблюдений, работающий с данными одного инструмента

Ранее точность оценивалась по среднеквадратичным отклонениям [74, 93, 94], при определении орбит использовались все имеющиеся данные. Для получения объективных результатов необходимо было согласовывать веса наблюдений. Эту задачу можно решить только приближенно, и в случае заметных несоответствий весов среднеквадратичные отклонения отличаются от ошибок измерений. Например, Дуглас и Уорли [67] получили для спекл-интерферометрии среднеквадратичные ошибки позиционного угла и разделения $\sigma_{\rho\Delta\theta} = \sigma_{\Delta\rho} = 0''.02$, если орбиты определять по всей совокупности данных, $\sigma_{\rho\Delta\theta} = 0''.004$ и $\sigma_{\Delta\rho} = 0''.005$, если определять орбиты только по данным спекл-интерферометрии.

В настоящее время в четвертом интерферометрическом каталоге накоплено большое количество наблюдений двойных звезд с периодами обращения ~ 10 лет. Появляется возможность определять элементы орбит по наблюдениям отдельно взятых исследователей или совместно работающих групп и, как следствие, оценить точность инструмента независимо от других техник измерений [15]. Преимущество этого подхода в том, что при определении элементов орбит не требуется задавать веса наблюдениям, но появляется новая трудность: малое количество данных. Чем меньше наблюдений используется для определения элементов орбит, тем больше различия между истинными среднеквадратичными ошибками ($\sigma_{\rho\Delta\theta}$ и $\sigma_{\Delta\rho}$) и вычисляемыми среднеквадратичными отклонениями

$$S_{\rho\Delta\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\rho_{cal(i)} (\theta_{obs(i)} - \theta_{cal(i)}))^2}{N}} \quad \text{и} \quad S_{\Delta\rho} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\rho_{obs(i)} - \rho_{cal(i)})^2}{N}}. \quad 3.3.1$$

Ранее Гауссом при обосновании метода наименьших квадратов было получено выражение для среднеквадратичной ошибки [51]

$$\sigma = \sqrt{\frac{[v^2]}{s - m}}, \quad 3.3.2$$

где $[v^2] = \sum_{i=1}^s (obs_i - cal_i)^2$, s – число уравнений, m – число неизвестных.

Выражение (3.3.2) справедливо для линейных уравнений с единичным весом. Методы определения элементов орбит содержат нелинейные уравнения, но если принять, что искомые элементы орбит определяются достаточно точно, и погрешности наблюдений невелики, то для данных одного инструмента выражение (3.3.2) должно давать несмещенную оценку среднеквадратичной ошибки разделения и позиционного угла. Для метода дифференциальных поправок $s = 2N$, $m = 7$. Сопоставляя (3.3.1) и (3.3.2), получаем

$$\sigma_{\rho\Delta\theta} = \sqrt{\frac{N}{N-3.5}} S_{\rho\Delta\theta} = \tau(N) S_{\rho\Delta\theta} \text{ и } \sigma_{\Delta\rho} = \tau(N) S_{\Delta\rho}, \quad 3.3.3$$

где $\tau(N)$ – поправка на малое количество наблюдений. Справедливость выражения $\tau(N) = \sqrt{N/(N-3.5)}$ в работе проверена посредством численных экспериментов.

Численные эксперименты с модельными данными.

Производится сравнение среднеквадратичных отклонений ($\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$ и $\bar{S}_{\Delta\rho}$), полученных по 1000 орбит, со стандартным отклонением (σ) добавляемых в модельные данные ошибок. Изучаются зависимости $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$ и $\bar{S}_{\Delta\rho}$ от числа наблюдений, значения σ и длины дуги, охваченной наблюдениями

$$\bar{S} = f_1(N), \bar{S} = f_2(\sigma) \text{ и } \bar{S} = f_3(\theta_N - \theta_1). \quad 3.3.4$$

Все численные эксперименты проводились по общей схеме. Использовалась программа для получения модельных данных, далее применялся метод дифференциальных поправок и вычислялись значения среднеквадратичного отклонения для 1000 объектов (орбит). При получении модельных данных были заданы следующие параметры:

1. Количество объектов $N_{st} = 1000$. При генерации элементов орбит три величины были постоянны ($P = 360$ лет, $a = 1''$, $T_p = 2000$ лет), так как они не изменяют форму орбиты, другие брались случайно из интервалов: $i \in [20^\circ, 70^\circ]$, $\Omega \in [0^\circ, 180^\circ]$, $e \in [0.2, 0.7]$, $\omega \in [0^\circ, 360^\circ]$. Для эксцентриситета и наклона выбраны области изменения, обеспечивающие хорошую сходимость методу дифференциальных поправок.

2. Наблюдения до внесения ошибок равномерно располагались на дуге. Количество наблюдений, длина дуги, охваченная ими, стандартное отклонение добавляемых ошибок в ходе численных экспериментов изменялись.

Полученные наблюдения использовались для определения орбит методом дифференциальных поправок, затем вычислялись средние значения среднеквадратичных отклонений

$$\bar{S}_{\rho\Delta\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} \sum_{j=1}^N (\rho_{cal(ij)} (\theta_{obs(ij)} - \theta_{cal(ij)}))^2}{N_{st} N}} \quad \text{и} \quad \bar{S}_{\Delta\rho} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} \sum_{j=1}^N (\rho_{obs(ij)} - \rho_{cal(ij)})^2}{N_{st} N}}, \quad 3.3.5$$

где N_{st} – количество обрабатываемых модельных объектов (звезд), во всех экспериментах их 1000, N – количество относительных положений, используемых для определения элементов орбиты отдельно взятого объекта, $\theta_{obs(ij)}$ и $\rho_{obs(ij)}$ – координаты, посредством которых определялись элементы орбиты, $\theta_{cal(ij)}$ и $\rho_{cal(ij)}$ – вычисленные относительные положения.

Таблица 1. Влияние количества наблюдений на среднеквадратичные отклонения									
N	модельные		диф. попр.		N	модельные		диф. попр.	
	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, "	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, "	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, "		$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, "	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, "	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, "
4	0.01009	0.00994	0.00219	0.00470	10	0.01010	0.01001	0.00766	0.00852
5	0.00998	0.01015	0.00412	0.00666	15	0.01004	0.00999	0.00851	0.00900
6	0.01021	0.00999	0.00540	0.00732	20	0.01006	0.00992	0.00893	0.00918
7	0.01002	0.01011	0.00621	0.00788	30	0.00995	0.01003	0.00923	0.00953
8	0.01020	0.00999	0.00689	0.00817	40	0.00999	0.01000	0.00946	0.00962
9	0.01021	0.00993	0.00739	0.00835	50	0.00998	0.01001	0.00956	0.00971

Результаты численного эксперимента, в котором изучались зависимости $\bar{S}_{\rho\Delta\theta} = f_{1\theta}(N)$ и $\bar{S}_{\Delta\rho} = f_{1\rho}(N)$, представлены в табл. 1. Было сгенерировано 12 тысяч орбит: по тысяче для каждого значения количества наблюдений N . До внесения ошибок наблюдения равномерно распределялись на одном обороте. Величина стандартного отклонения добавляемых ошибок $\sigma = 0''.01$. Среднеквадратичные отклонения определялись по сгенерированным ранее элементам орбит (обозначено модельные) и по элементам орбит, полученным методом дифференциальных поправок. В случае с модельными элементами орбит отклонения от внесенной ошибки ($\sigma = 0''.01$) объясняются случайными факторами. Элементы орбит, вычисленные методом дифференциальных поправок, дают заниженные значения среднеквадратичных отклонений в сравнении с ожидаемой ошибкой ($\sigma = 0''.01$), особенно это

заметно, когда обрабатываются малые совокупности данных ($N < 30$). Полученную закономерность необходимо учитывать не только при изучении точности наблюдений по среднеквадратичным отклонениям, но и при использовании правила 3σ для исключения наблюдений.

На рис. 3.13 представлены зависимости среднеквадратичных отклонений $\bar{S}_{\Delta\rho}$ и $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$ от количества наблюдений N , построенные по значениям из табл. 1. С ростом N значения $\bar{S}_{\Delta\rho}$ и $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$ приближаются к значению стандартного отклонения σ , а с уменьшением – все больше отличаются друг от друга, кроме того, при всех значениях N справедливо неравенство $\bar{S}_{\rho\Delta\theta} < \bar{S}_{\Delta\rho}$. Дальнейшие исследования показали, что знак этого неравенства зависит от длины дуги, охваченной наблюдениями.

В случае зависимостей $\bar{S}_{\rho\Delta\theta} = f_{2\theta}(\sigma)$ и $\bar{S}_{\Delta\rho} = f_{2\rho}(\sigma)$ при постоянном количестве наблюдений на одном обороте выполняются отношения: $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}/\sigma = \text{const}$ и $\bar{S}_{\Delta\rho}/\sigma = \text{const}$. Едва заметные отклонения от равенств получены только при обработке малых совокупностей данных (результаты для $N = 5$ представлены в табл. 2). Очевидно, что при работе с реальными объектами закономерности, связанные с изменением σ , можно не учитывать.

Таблица 2. Влияние погрешностей наблюдений на среднеквадратичные отклонения						
$\sigma, ''$	0.0001	0.001	0.005	0.01	0.015	0.02
$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}/\sigma$	0.4118	0.4119	0.4121	0.4124	0.4127	0.4132
$\bar{S}_{\Delta\rho}/\sigma$	0.6668	0.6667	0.6666	0.6663	0.6660	0.6657

При рассмотрении зависимости среднеквадратичного отклонения от длины дуги, охваченной наблюдениями, обнаружено, что с уменьшением длины дуги значения среднеквадратичных отклонений выравниваются ($\bar{S}_{\rho\Delta\theta} \approx \bar{S}_{\Delta\rho}$). На рис. 3.14 представлены зависимости $\bar{S}_{\rho\Delta\theta} = f_{3\theta}(\theta_{N1})$ и $\bar{S}_{\Delta\rho} = f_{3\rho}(\theta_{N1})$ ($\theta_{N1} = \theta_N - \theta_1$), построенные для 10 наблюдений. Величина стандартного отклонения добавляемых ошибок ($\sigma = 0''.001$) уменьшена в сравнении с первым экспериментом (рис. 3.13) для повышения сходимости метода дифференциальных поправок. Из графиков рис. 3.14 следует, что значения $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$ и $\bar{S}_{\Delta\rho}$ зависят от распределения наблюдений на дуге.

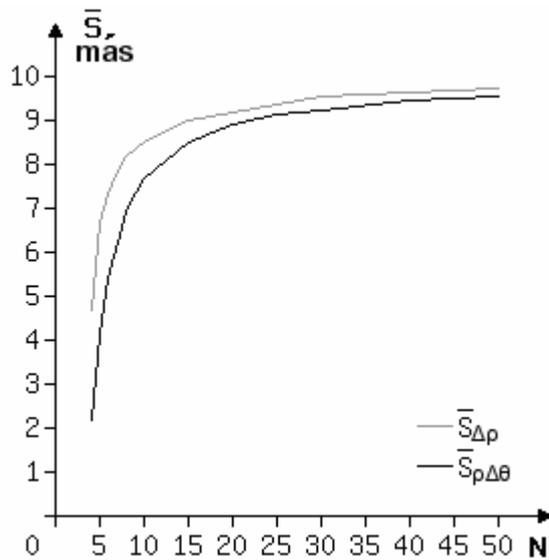


Рис. 3.13. Зависимость среднеквадратичного отклонения от количества наблюдений

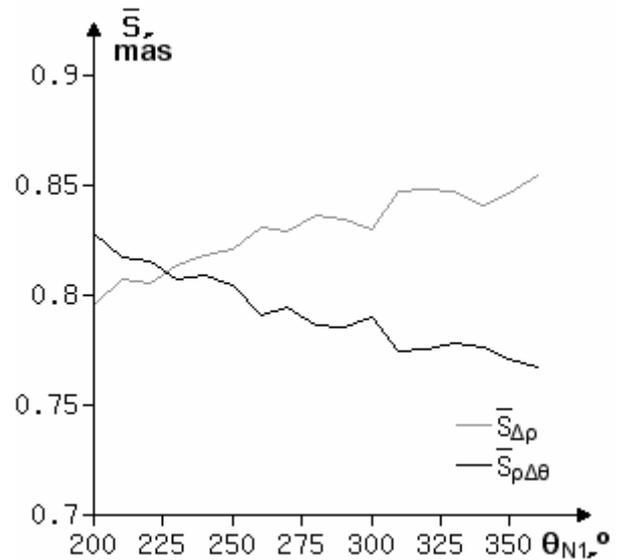


Рис. 3.14. Зависимость среднеквадратичного отклонения от длины дуги

Используя результаты численных экспериментов, можно найти поправку на малое количество наблюдений. Согласно изученной зависимости $\bar{S} = f_2(\sigma)$, величина поправки одинакова при различной погрешности наблюдений, если $\sigma \ll \rho$. Зависимости рис. 3.14 показывают, что среднеквадратичные отклонения, полученные по 1000 орбит, для позиционного угла и разделения различны и определяются распределением наблюдений на дуге, однако величина $\bar{S} = \sqrt{(\bar{S}_{\rho\Delta\theta}^2 + \bar{S}_{\Delta\rho}^2)}/2$ остается постоянной. Это позволяет принять положение, упрощающее дальнейшее использование поправок: $\bar{S}_{\rho\Delta\theta} \approx \bar{S}$ и $\bar{S}_{\Delta\rho} \approx \bar{S}$. Полагая, что поправки для позиционного угла и разделения одинаковы и не зависят от длины дуги, охваченной наблюдениями, по данным табл. 1 вычислим коэффициент σ/\bar{S} , который в дальнейшем можно использовать в качестве поправки для определения точности наблюдательного однородного ряда

$$\sigma/\bar{S} = \frac{0.01\sqrt{2}}{\sqrt{\bar{S}_{\rho\Delta\theta}^2 + \bar{S}_{\Delta\rho}^2}}. \quad 3.3.6$$

Значения поправок σ/\bar{S} представлены в табл. 3.

Таблица 3. Поправки на малое количество наблюдений												
N	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50
σ/\bar{S}	2.73	1.81	1.55	1.41	1.32	1.27	1.23	1.14	1.10	1.07	1.05	1.04

Аппроксимация данных таблицы 3.

Изучим функциональную зависимость поправок от количества наблюдений $\sigma/\bar{S} = \tau(N)$. Так как для некоторых звезд накоплено более 50 наблюдений на отдельно взятых инструментах, мы включили в исследования еще одно значение поправки: $\sigma/\bar{S}_{(100)} = 1.02$ при $N = 100$. Функция $\sigma/\bar{S} = \tau(N)$ согласно (3.3.3) должна иметь следующий вид

$$\tau(N) = \sqrt{N/(N-3.5)}. \quad 3.3.7$$

Значения $\tau(N)$ представлены в табл. 4.

Таблица 4. Значения функции $\tau(N) = \sqrt{N/(N-3.5)}$													
N	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100
$\tau(N)$	2.83	1.83	1.55	1.41	1.33	1.28	1.24	1.14	1.10	1.06	1.05	1.04	1.02

Далее в работе при аппроксимации данных табл. 3 была рассмотрена функция

$$\tau(N, x) = \sqrt{N/(N-x)}. \quad 3.3.8$$

Величина x в (3.3.8) определялась методом наименьших квадратов

$$\sum_N (\sigma/\bar{S}_{(N)} - \tau(N, x))^2 = \min. \quad 3.3.9$$

В итоге было получено, что функция, определяющая поправки, имеет вид

$$\tau(N) = \sqrt{N/(N-3.464)}. \quad 3.3.10$$

Значения функции (3.3.10) представлены в табл. 5, они соответствуют величинам, полученным в ходе численного эксперимента (табл. 3).

Таблица 5. Значения функции $\tau(N) = \sqrt{N/(N-3.464)}$													
N	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40	50	100
$\tau(N)$	2.73	1.80	1.54	1.41	1.33	1.28	1.24	1.14	1.10	1.06	1.05	1.04	1.02

Результаты табл. 4 и 5 показывают, что выражения (3.3.3) достаточно точно определяют среднеквадратичные ошибки $\sigma_{\rho\Delta\theta}$ и $\sigma_{\Delta\rho}$. В дальнейших вычислениях будет использоваться значение $x = 3.5$, так как оно находится в согласии с теоремами математической статистики и дает заметные отклонения от данных табл. 3 только при $N = 4$.

Обработка данных четвертого интерферометрического каталога.

Изучалась точность измерений, полученных следующими исследовательскими группами: 1) CHARA speckle (Sc – McA, Hrt, Msn), наблюдения проводились более 20 лет, в основном, в 80-х и 90-х годах [76]; 2) БГА (Bag и др.), взят весь пе-

риод по настоящее время, более 30 лет [43]; 3) Хорч и др. (Hor), начиная с середины 90-х годов [80].

Для пояснения выполняемых расчетов рассмотрим элементы орбиты ADS 490, вычисленные по наблюдениям отдельно взятых исследователей (табл. 6а и 6б). Наблюдения Токовина и др. (Tok) [76] не покрывают целый оборот, орбита определялась по дуге 220° . Статистические исследования точности наблюдений Токовина и др. не проводились, так как они на данный момент охватывают недостаточный промежуток времени, по результатам табл. 6б можно предположить, что их точность приближается к точности наблюдений современных звездных интерферометров. Два наблюдения Хорча (Hor), выполненные на телескопе с апертурой 0.6 м., были исключены из рассмотрения. В нижней строке табл. 6а представлен результат из шестого каталога орбит.

	P , год	a , "	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	T_p , год	e	ω , $^\circ$
Sc	6.890	0.240	49.0	149.6	2000.96	0.769	283.2
Hor	6.923	0.232	46.4	150.2	2000.99	0.765	283.7
Tok	6.740	0.238	49.1	145.3	2001.12	0.772	285.25
6cat	6.89	0.241	49.4	149.0	2000.98	0.773	283.8

Среднеквадратичные отклонения с учетом поправок на малое количество наблюдений (табл. 6б) определялись по формулам

$$\sigma_{\rho\Delta\theta} = S_{\rho\Delta\theta} * (\sigma/\bar{S}) \text{ и } \sigma_{\Delta\rho} = S_{\Delta\rho} * (\sigma/\bar{S}). \quad 3.3.11$$

Для нахождения поправок (σ/\bar{S}) использовалось выражение (3.3.7).

	N_{obs}	$N_{3\sigma}$	$\bar{\rho}$, "	$S_{\rho\Delta\theta}$, "	$S_{\Delta\rho}$, "	σ/\bar{S}	$\sigma_{\rho\Delta\theta}$, "	$\sigma_{\Delta\rho}$, "
Sc	46	4	0.239	0.0035	0.0034	1.04	0.0037	0.0035
Hor	13	0	0.216	0.0021	0.0045	1.17	0.0025	0.0053
Tok	10	0	0.183	0.00085	0.00036	1.24	0.00106	0.00045

Так как наблюдений Токовина немного, то поправка велика, в случае CHARA speckle она незначительна.

В табл. 7 представлены результаты обработки всей совокупности выбранных звезд. Использовались следующие обозначения: N_{st} – количество обработанных звезд, N_{obs} – общее число наблюдений, $N_{3\sigma}$ – количество наблюдений, исключенных правилом 3σ , $\bar{\rho}$ – средняя величина разделения, $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, $\bar{S}_{\Delta\rho}$ – среднеквадратичные отклонения, вычисленные по используемым для определения орбит наблюде-

ниям (их количество $N_{obs} - N_{3\sigma}$), $\bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta}$, $\bar{\sigma}_{\Delta\rho}$ – среднеквадратичные отклонения с учетом поправок на малое количество наблюдений для всей совокупности изучаемых звезд. Среднеквадратичные отклонения без учета и с учетом поправок определялись по следующим формулам:

$$\bar{S}_{\rho\Delta\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} S_{\rho\Delta\theta(i)}^2 (N_{obs(i)} - N_{3\sigma(i)})}{N_{obs} - N_{3\sigma}}} \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{st}} \sigma_{\rho\Delta\theta(i)}^2 (N_{obs(i)} - N_{3\sigma(i)})}{N_{obs} - N_{3\sigma}}}, \quad 3.3.12$$

где $S_{\rho\Delta\theta(i)}$ – среднеквадратичное отклонение для i -ой звезды, $\sigma_{\rho\Delta\theta(i)} = S_{\rho\Delta\theta(i)} * (\sigma/\bar{S})_{(i)}$ – среднеквадратичное отклонение с учетом малого количества наблюдений для i -ой звезды, $(\sigma/\bar{S})_{(i)}$ – поправка для i -ой звезды. Для $\bar{S}_{\Delta\rho}$ и $\bar{\sigma}_{\Delta\rho}$ выражения аналогичны (3.3.12).

Таблица 7. Погрешности измерений								
	N_{st}	N_{obs}	$N_{3\sigma}$	$\bar{\rho}$, "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, mas	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, mas	$\bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta}$, mas	$\bar{\sigma}_{\Delta\rho}$, mas
Sc	100	2498	112	0.170	3.25	3.98	3.57	4.35
БТА	40	457	12	0.130	2.59	1.85	3.40	2.42
Нор	30	414	5	0.148	2.52	2.63	2.91	3.09

Наблюдения Sc и Нор производились на разных инструментах, их веса в работе приняты равными. Наблюдения Хорча, выполненные на телескопах с апертурой 0.6 и 0.8 м., не использовались. Данные пониженной точности, обозначенные в четвертом интерферометрическом каталоге “:”, исключались из расчетов. Исходя из значений среднеквадратичных отклонений (табл. 7), точность спекл-интерферометрических измерений БТА и Нор примерно одинакова, точность наблюдений CHARA speckle несколько ниже. Данный результат показывает, что спекл-интерферометрические наблюдения 80-х годов имеют меньшую точность в сравнении с современными наблюдениями. Если не вносить поправки на малое количество наблюдений, то для БТА получаем завышение точности ~25%, Нор ~15%, CHARA speckle ~10%.

§ 3.4 Изучение точности наблюдений с помощью последовательного уточнения

При использовании данных различной точности можно ожидать, что более точные наблюдения дадут меньшие среднеквадратичные отклонения, чем менее точные. Данное правило должно выполняться при отсутствии заметных систематических ошибок независимо от того, задаем мы различные веса наблюдениям или нет. Второе правило, которое также должно выполняться, связано с влиянием весов наблюдений на получаемый результат: чем больший вес мы задаем тому или иному классу наблюдений, тем меньшие среднеквадратичные отклонения для этих наблюдений будут получены. Сформулированные правила дают обоснование методу последовательного уточнения, который в работе используется для изучения точности данных. Суть метода заключается в следующем: 1) собрать данные для всех двойных звезд, орбиты которых определяются надежно; 2) определить орбиты звезд без учета весов; 3) используя полученные элементы орбит, найти среднеквадратичные отклонения для всех инструментов, задать веса и снова определить орбиты; 4) повторять пункт 3 с новыми элементами орбит, пока среднеквадратичные отклонения не перестанут изменяться.

Работа метода последовательных уточнений была проверена с помощью численных экспериментов. Использовалась программа для получения модельных данных, как и в предыдущем параграфе диссертации, генерировалась $N_{st} = 1000$ орбит (объектов). Для каждого объекта определялось по $N = 100$ наблюдений, случайно распределенных на одном обороте, первое и последнее задавались точно, положение остальных на дуге было подчинено равномерному распределению. К наблюдениям добавлялись ошибки, починенные нормальному распределению. В программе задавалось различное количество классов точности (N_{tech}), для каждого класса количество наблюдений отдельного объекта N_i , стандартное отклонение добавляемых ошибок σ_i . Положение наблюдений отдельного класса точности выбиралось случайно, то есть ошибки случайно добавлялась заданному количеству наблюдений N_i из 100.

Рассмотрим результаты численных экспериментов с наблюдениями двух классов точности: $\sigma_1 = 10^{-3}$ " и $\sigma_2 = 10^{-2}$ ". Когда более точные наблюдения по количеству доминируют над менее точными ($N_1 > 50$), получаемые после нескольких циклов среднеквадратичные отклонения соответствуют величинам вводимых ошибок ($\bar{S}_1 \approx \sigma_1$). Когда количество менее точных данных превосходит количество более точных ($N_2 > 50$), у более точных данных среднеквадратичные отклонения оказываются меньше стандартных отклонений вводимых ошибок ($\bar{S}_1 < \sigma_1$). Результаты обработки менее точных данных практически не зависят от используемой совокупности данных, величины \bar{S}_2 примерно равны стандартным отклонениям ошибок (σ_2) при любых значениях N_2 . Описанные закономерности хорошо прослеживаются на графиках зависимостей среднеквадратичных отклонений от количества запусков программы (рис. 3.15 и 3.16). Применялся описанный выше метод последовательного уточнения. Веса при повторных запусках программы определялись посредством выражения

$$p_i = \frac{1}{\bar{S}_i^2}, \quad 3.4.1$$

где $\bar{S}_i = \sqrt{(\bar{S}_{\rho\Delta\theta(i)}^2 + \bar{S}_{\Delta\rho(i)}^2)/2}$ – среднеквадратичное отклонение для i -ого класса наблюдений, определенное на предыдущем этапе вычислений.

Цифрами на рис. 3.15 и 3.16 обозначено количество наблюдений заданного класса точности, рассматривались следующие совокупности ($[N_1, N_2]$): [1, 99], [2, 98], [3, 97], [5, 95], [10, 90], [50, 50], [90, 10], [99, 1]. Рис. 3.15 построен для данных с $\sigma_1 = 10^{-3}$ ", рис. 3.16 – с $\sigma_2 = 10^{-2}$ ". Если $N_1 = 1$, метод последовательных уточнений расходится, вес более точных измерений устремляется к бесконечности при увеличении числа повторений. При $N_1 = 2$ алгоритм сходится, но среднеквадратичное отклонение отличается от стандартного отклонения добавляемых ошибок более чем в 10 раз. Расходимость при $N_1 = 1$ является вполне ожидаемым результатом, из теоретических соображений можно ожидать расходимость при $N_1 \leq 3$, так как данного количества наблюдений недостаточно для определения орбиты.

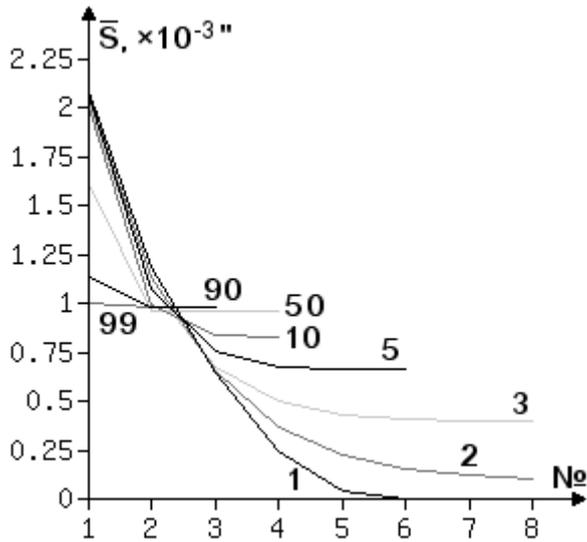


Рис. 3.15. Зависимость \bar{S} от числа последовательных уточнений для $\sigma = 0.001''$

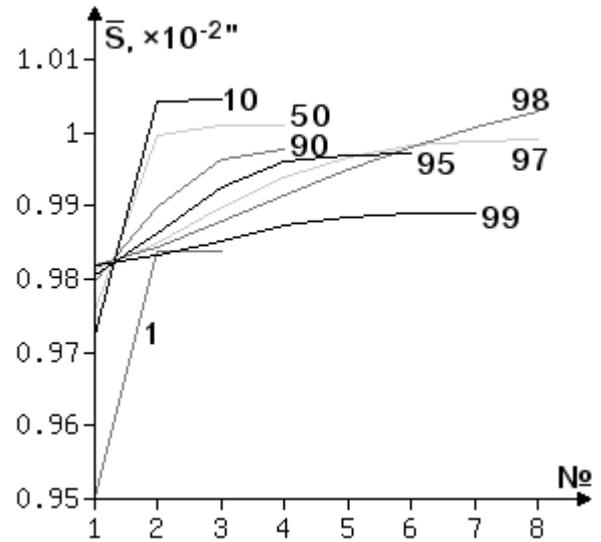


Рис. 3.16. Зависимость \bar{S} от числа последовательных уточнений для $\sigma = 0.01''$

Из рис. 3.15 следует, что для более точных данных можно получить значительное завышение весов, если вычислять их, используя среднеквадратичное отклонение.

По аналогии с § 3.3 диссертации попробуем ввести поправки, позволяющие более точно оценить погрешности наблюдений. Проанализировав результаты численных экспериментов, мы получили формулу, с помощью которой можно уточнить значение среднеквадратичной ошибки i -ого класса наблюдений

$$\bar{\sigma}_i^2(N_i) = \bar{S}_i^2(N_i) + \frac{3.5 * \sigma_p^2(N)}{N}, \quad 3.4.2$$

где $\bar{S}_i^2(N_i)$ – среднеквадратичное отклонение для i -ого класса наблюдений (значок усреднения сверху означает, что величина получена путем усреднения по всей совокупности обрабатываемых звезд), $\sigma_p(N)$ – несмещенная оценка взвешенной среднеквадратичной ошибки, N – количество наблюдений у отдельной звезды, N_i – количество наблюдений у отдельной звезды i -ого класса точности.

Несмещенная взвешенная среднеквадратичная ошибка определялась с помощью выражения

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^{N_{tech}} p_i N_i}} = \sqrt{\frac{N}{\sum_{i=1}^{N_{tech}} N_i / \sigma_i^2}}. \quad 3.4.3$$

Для тестирования формулы (3.4.2) воспользуемся данными, по которым строились графики рис. 3.15 и 3.16. В табл. 1 представлены результаты последнего запуска программы, после которого значения среднеквадратичных отклонений перестали изменяться, номер запуска указан в столбце “№”, $\bar{\sigma}_i$ определялись посредством (3.4.2), σ_p с помощью (3.4.3), веса задавались точно $p_i = 1/\sigma_i^2$, $\bar{S}_i = \sqrt{(\bar{S}_{\rho\Delta\theta(i)}^2 + \bar{S}_{\Delta\rho(i)}^2)}/2$. Сравнение уточненных значений среднеквадратичных ошибок $\bar{\sigma}_i$ со стандартными отклонениями добавляемых ошибок ($\sigma_1 = 0.001''$ и $\sigma_2 = 0.01''$) говорит о целесообразности использования выражения (3.4.2).

Таблица 1. Численные эксперименты с двумя классами наблюдений									
№	σ_p ,	$\bar{S}_{1\Delta\rho}$,	$\bar{S}_{1\rho\Delta\theta}$,	\bar{S}_1 ,	$\bar{\sigma}_1$,	$\bar{S}_{2\Delta\rho}$,	$\bar{S}_{2\rho\Delta\theta}$,	\bar{S}_2 ,	$\bar{\sigma}_2$,
	$10^{-3}''$	$10^{-3}''$	$10^{-3}''$	$10^{-3}''$	$10^{-3}''$	$10^{-2}''$	$10^{-2}''$	$10^{-2}''$	$10^{-2}''$
$N_1 = 99, N_2 = 1, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
3	1.0050	0.9879	0.9759	0.9819	0.9997	0.96677	1.00064	0.98385	0.98403
$N_1 = 90, N_2 = 10, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
4	1.0535	0.9853	0.9733	0.9794	0.9990	1.00780	1.00122	1.00451	1.00470
$N_1 = 50, N_2 = 50, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
4	1.4072	0.9710	0.9531	0.9621	0.9975	1.00360	0.99841	1.00101	1.00136
$N_1 = 10, N_2 = 90, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
6	3.0289	0.8420	0.8104	0.8263	1.0019	1.00001	0.99548	0.99775	0.99936
$N_1 = 5, N_2 = 95, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
8	4.0996	0.6769	0.6455	0.6614	1.0128	0.99990	0.99449	0.99720	1.00015
$N_1 = 4, N_2 = 96, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
9	4.4901	0.5529	0.5279	0.5405	0.9989	1.00264	0.99601	0.99933	1.00285
$N_1 = 3, N_2 = 97, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
11	5.0189	0.3776	0.4092	0.3937	1.0181	1.00224	0.99603	0.99914	1.00354
$N_1 = 2, N_2 = 98, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
22	5.7928	0.0731	0.0740	0.0736	1.0862	1.01228	1.00485	1.00857	1.01438
$N_1 = 1, N_2 = 99, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$									
7	7.0888	$\sim 10^{-5}$	$\sim 10^{-5}$	$\sim 10^{-5}$	1.3262	0.99385	0.98388	0.98888	0.99773

Проверим справедливость формулы (3.4.2) в случае обработки наблюдений пяти классов точности (табл. 2): $\sigma_1 = 0.002''$, $\sigma_2 = 0.004''$, $\sigma_3 = 0.006''$, $\sigma_4 = 0.008''$, $\sigma_5 = 0.01''$. В большинстве случаев величины $\bar{\sigma}_i$ лучше соответствуют значениям стандартных отклонений σ_i , чем \bar{S}_i . Из этого следует, что формулу (3.4.2) можно применять при обработке наблюдений нескольких классов точности.

Таблица 2. Численные эксперименты с пятью классами наблюдений										
№	$\bar{S}_1,$ $10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_1,$ $10^{-3}''$	$\bar{S}_2,$ $10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_2,$ $10^{-3}''$	$\bar{S}_3,$ $10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_3,$ $10^{-3}''$	$\bar{S}_4,$ $10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_4,$ $10^{-3}''$	$\bar{S}_5,$ $10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_5,$ $10^{-3}''$
$N_1 = 20, N_2 = 20, N_3 = 20, N_4 = 20, N_5 = 20, \sigma_p = 3.6966 \times 10^{-3}''$										
5	1.878	2.001	3.921	3.982	5.941	5.981	8.005	8.035	9.985	10.009
$N_1 = 8, N_2 = 23, N_3 = 23, N_4 = 23, N_5 = 23, \sigma_p = 4.6295 \times 10^{-3}''$										
6	1.784	1.983	3.941	4.035	5.929	5.992	7.953	8.000	9.906	9.944
$N_1 = 10, N_2 = 10, N_3 = 10, N_4 = 10, N_5 = 10, \sigma_p = 3.6966 \times 10^{-3}''$										
6	1.717	1.976	3.896	4.017	5.992	6.071	7.916	7.976	9.959	10.007
$N_1 = 1, N_2 = 2, N_3 = 10, N_4 = 18, N_5 = 19, \sigma_p = 6.6695 \times 10^{-3}''$										
9	$\sim 10^{-4}$	1.765	3.817	4.205	5.866	6.126	7.886	8.081	9.933	10.089
$N_1 = 5, N_2 = 5, N_3 = 5, N_4 = 5, N_5 = 5, \sigma_p = 3.6966 \times 10^{-3}''$										
10	1.369	1.946	3.816	4.059	5.952	6.111	8.008	8.127	9.902	9.998

В табл. 1 и 2 величины σ_p определялись посредством (3.4.3), веса p_i задавались точно. При работе с реальными данными величины ошибок измерений σ_i неизвестны. Вместо них приходится пользоваться среднеквадратичными отклонениями \bar{S}_i , которые в случае малого количества более точных данных оказываются заниженными, поэтому взвешенные среднеквадратичные ошибки σ_p также будут принимать значения меньше реальных. В случае расходимости (когда для одного из классов наблюдений $\bar{S}_i \rightarrow 0$) $\sigma_p \rightarrow 0$, согласно (3.4.2) $\bar{\sigma}_i^2(N_i) = \bar{S}_i^2(N_i)$, поправка отсутствует. Пересчитаем табл. 1, используя для определения весов выражения (3.4.1). Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3. Обработка наблюдений двух классов точности с использованием выражения для весов $p_i = 1/\bar{S}_i^2$					
$\sigma_p, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_1, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_2, 10^{-2}''$	$\sigma_p, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_1, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_2, 10^{-2}''$
$N_1 = 99, N_2 = 1, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$			$N_1 = 90, N_2 = 10, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$		
0.9868	0.9991	0.98402	1.0318	0.9982	1.00470
$N_1 = 50, N_2 = 50, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$			$N_1 = 10, N_2 = 90, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$		
1.3544	0.9949	1.00133	2.5359	0.9528	0.99888
$N_1 = 5, N_2 = 95, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$			$N_1 = 4, N_2 = 96, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$		
2.8415	0.8486	0.99862	2.6124	0.7287	1.00052
$N_1 = 3, N_2 = 97, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$			$N_1 = 2, N_2 = 98, \sigma_1 = 10^{-3}'' , \sigma_2 = 10^{-2}''$		
2.2180	0.5720	1.00000	0.5198	0.1220	1.00862

Результаты табл. 3 показывают, что метод последовательных уточнений целесообразно использовать, когда количество более точных данных превышает 10% от

всей совокупности, в этом случае можно ожидать относительную погрешность определения ошибок наблюдений менее 5%.

При обработке совокупности реальных данных количество наблюдений у звезд различно, поэтому необходимо проверить работу метода последовательных уточнений в случае использования разного количества данных у отдельных объектов. Рассмотрим результаты двух численных экспериментов. В первом изменялось количество более и менее точных данных (N_1 от 1 до 50, двадцать объектов с $N_1 = 1$, двадцать с $N_1 = 2$ и т.д.), количество наблюдений у отдельного объекта оставалось постоянным $N = 100$. Во втором эксперименте количество более точных наблюдений оставалось постоянным $N_1 = 10$, изменялось число наблюдений отдельного объекта (N от 100 до 51, двадцать объектов с $N = 100$, двадцать с $N = 99$ и т.д.). В обоих экспериментах использовались наблюдения двух классов точности: $\sigma_1 = 10^{-3}''$, $\sigma_2 = 10^{-2}''$.

	$\bar{S}_{1\Delta\rho}, 10^{-3}''$	$\bar{S}_{1\rho\Delta\theta}, 10^{-3}''$	$\bar{S}_1, 10^{-3}''$	$\bar{S}_{2\Delta\rho}, 10^{-2}''$	$\bar{S}_{2\rho\Delta\theta}, 10^{-2}''$	$\bar{S}_2, 10^{-2}''$
1	1.6741	1.8703	1.7749	0.98623	0.97492	0.98059
2	0.9622	0.9371	0.9497	0.99907	0.99325	0.99617
3	0.9415	0.9126	0.9271	1.00210	0.99763	0.99986
4	0.9412	0.9122	0.9268	1.00219	0.99776	0.99998
5	0.9412	0.9122	0.9268	1.00219	0.99776	0.99998

$\sigma_{p(\tau)}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{1(\tau)}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{2(\tau)}, 10^{-2}''$	$\sigma_{p(\text{нр})}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{1(\text{нр})}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{2(\text{нр})}, 10^{-2}''$
1.9520	0.9962	1.00065	1.8127	0.9869	1.00055

Результаты первого эксперимента представлены в табл. 4 и 5. Среднеквадратичные отклонения перестают изменяться после четвертого запуска программы. В табл. 5 рассчитаны среднеквадратичные ошибки ($\bar{\sigma}_{i(\tau)}$, $\bar{\sigma}_{i(\text{нр})}$), используя точные значения весов и оцененные посредством выражений (3.4.1). При вычислении $\sigma_{p(\tau)}$ и $\sigma_{p(\text{нр})}$ посредством (3.4.3) были взяты средние значения $\bar{N}_1 = 25.5$ и $\bar{N}_2 = 74.5$.

Выражение (3.4.2) получено из предположения, что у всех обрабатываемых звезд одинаковое общее количество наблюдений и одинаковое количество наблюдений определенных классов точности. В реальности подобное требование сильно

ограничит возможности применения метода последовательных уточнений. Первый численный эксперимент показал, что выражение (3.4.2) можно применять, когда количество наблюдений различной точности у объектов изменяется, необходимо только заменить в выражениях N_i на их средние значения \bar{N}_i . По аналогии можно ожидать, что в случае обработки объектов с различным количеством наблюдений будет справедливо выражение

$$\bar{\sigma}_i^2(\bar{N}_i) = \bar{S}_i^2(\bar{N}_i) + \frac{3.5 * \sigma_p^2(\bar{N})}{\bar{N}}. \quad 3.4.4$$

Результаты второго численного эксперимента представлены в табл. 6 и 7. Средние количества наблюдений $\bar{N}_1 = N_1 = 10$, $\bar{N}_2 = 65.5$, $\bar{N} = 75.5$.

	$\bar{S}_{1\Delta\rho}, 10^{-3}''$	$\bar{S}_{1\rho\Delta\theta}, 10^{-3}''$	$\bar{S}_1, 10^{-3}''$	$\bar{S}_{2\Delta\rho}, 10^{-2}''$	$\bar{S}_{2\rho\Delta\theta}, 10^{-2}''$	$\bar{S}_2, 10^{-2}''$
1	2.0538	2.3038	2.1824	0.97949	0.97100	0.97526
2	1.0001	0.9836	0.9919	0.99141	0.98728	0.98935
3	0.8366	0.8010	0.8190	0.99883	0.99787	0.99835
4	0.8266	0.7922	0.8096	0.99995	0.99956	0.99975
5	0.8261	0.7918	0.8091	1.00001	0.99966	0.99984
6	0.8261	0.7918	0.8091	1.00002	0.99966	0.99984

$\sigma_{p(\tau)}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{1(\tau)}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{2(\tau)}, 10^{-2}''$	$\sigma_{p(\text{np})}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{1(\text{np})}, 10^{-3}''$	$\bar{\sigma}_{2(\text{np})}, 10^{-2}''$
2.6619	0.9915	1.00148	2.1770	0.9351	1.00094

Результаты табл. 4-7 показывают, что применение формулы (3.4.4) повышает точность оценки ошибок наблюдений.

WDS	N_{Sc}	N_{PTI}	WDS	N_{Sc}	N_{PTI}	WDS	N_{Sc}	N_{PTI}
02157+2503	31	89	09036+4709	37	47	19490+1909	31	10
02366+1227	19	5	10279+3642	42	9	20375+1436	68	73
02537+3820	35	46	13100+1732	77	24	21145+1000	37	119
04136+0743	39	20	15232+3017	60	51	21148+3803	7	39
04357+1010	11	31	15278+2906	52	73	21446+2539	48	135
06024+0939	22	37	15416+1940	35	15	21501+1717	33	50
06041+2316	32	30	17080+3556	48	10	22409+1433	26	53
07351+3058	28	13	17217+3958	28	71	Σ	904	1132
09006+4147	54	16	18570+3254	4	66			

В качестве примера применим метод последовательного уточнения для одно-временной обработки данных CHARA speckle (Sc – McA, Hrt, Msn) и PTI (Mut)

[76]. Исследуемых объектов в данном случае немного, они перечислены в табл. 8. Кроме номеров WDS в табл. 8 представлено количество наблюдений, используемых для определения орбиты. Имеется 9 звезд, для которых количество менее точных данных заметно превосходит количество более точных.

Правило 3σ применялось отдельно для каждого класса наблюдений. Веса задавались при каждом запуске программы, используя среднеквадратичные отклонения, полученные на предыдущем этапе вычислений ($p_i = 1/\bar{S}_i^2$). Количество звезд $N_{st} = 25$, средние количества наблюдений $\bar{N}_{Sc} = 33.88$, $\bar{N}_{PTI} = 42.36$, $\bar{N} = 76.24$. Среднеквадратичные отклонения $\bar{S}_{\Delta\rho}$, $\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$ и \bar{S} представлены в табл. 9, их уточненные значения в табл. 10.

№	Sc, N=904				PTI, N=1132			
	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, 10^{-3} "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, 10^{-3} "	\bar{S} , 10^{-3} "	N	$\bar{S}_{\Delta\rho}$, 10^{-3} "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta}$, 10^{-3} "	\bar{S} , 10^{-3} "	N
1	3.453	2.963	3.217	850	0.639	0.766	0.706	1086
2	3.518	3.085	3.309	847	0.441	0.668	0.566	1064
3	3.541	3.109	3.332	847	0.428	0.666	0.560	1058
4	3.545	3.112	3.335	847	0.428	0.666	0.560	1059
5	3.545	3.112	3.335	847	0.428	0.666	0.560	1059

σ_p , 10^{-3} "	$\bar{\sigma}_{\Delta\rho(Sc)}$, 10^{-3} "	$\bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta(Sc)}$, 10^{-3} "	$\bar{\sigma}_{(Sc)}$, 10^{-3} "	$\bar{\sigma}_{\Delta\rho(PTI)}$, 10^{-3} "	$\bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta(PTI)}$, 10^{-3} "	$\bar{\sigma}_{(PTI)}$, 10^{-3} "
0.743	3.549	3.116	3.339	0.457	0.685	0.582

В процессе проведения исследования были обнаружены звезды, у которых среднеквадратичные отклонения для PTI значительно превосходят среднее значение $\bar{\sigma}_{(PTI)}$ из табл. 10: WDS 02366+1227 $S_{\Delta\rho} = 0.00145''$, WDS 07351+3058 $S_{\Delta\rho} = 0.00098''$, WDS 10279+3642 $S_{\Delta\rho} = 0.00225''$ и $S_{\rho\Delta\theta} = 0.00598''$, WDS 19490+1909 $S_{\rho\Delta\theta} = 0.00088''$. Исключим данные объекты из рассмотрения и снова применим метод последовательных уточнений. Результаты исследований представлены в табл. 11 и 12. Количество звезд $N_{st} = 21$, среднее количество наблюдений $\bar{N} = 83.43$.

Количество высокоточных данных (PTI) в проводимых расчетах велико, поэтому уточненные значения $\bar{\sigma}_{(PTI)}$ мало отличаются от $\bar{S}_{(PTI)}$ (табл. 9-12). Погрешности CHARA speckle табл. 10 и 12 примерно равны значениям из табл. 7 § 3.3 дис-

сертации. Результаты для РТИ по порядку величины совпадают с погрешностями, представленными в четвертом интерферометрическом каталоге.

Таблица 11. Одновременная обработка данных CHARA speckle и РТИ после исключения звезд с большими среднеквадратичными отклонениями

№	Sc, N=784				РТИ, N=1095			
	$\bar{S}_{\Delta\rho},$ 10 ⁻³ "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta},$ 10 ⁻³ "	$\bar{S},$ 10 ⁻³ "	N	$\bar{S}_{\Delta\rho},$ 10 ⁻³ "	$\bar{S}_{\rho\Delta\theta},$ 10 ⁻³ "	$\bar{S},$ 10 ⁻³ "	N
1	3.350	3.061	3.209	738	0.570	0.503	0.538	1049
2	3.417	3.161	3.291	735	0.349	0.364	0.357	1022
3	3.405	3.174	3.291	733	0.342	0.358	0.350	1019
4	3.407	3.175	3.293	733	0.342	0.358	0.350	1019
5	3.407	3.175	3.293	733	0.342	0.358	0.350	1019

Таблица 12. Уточненные значения $\bar{\sigma}_i$

$\sigma_p,$ 10 ⁻³ "	$\bar{\sigma}_{\Delta\rho(\text{Sc})},$ 10 ⁻³ "	$\bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta(\text{Sc})},$ 10 ⁻³ "	$\bar{\sigma}_{(\text{Sc})},$ 10 ⁻³ "	$\bar{\sigma}_{\Delta\rho(\text{РТИ})},$ 10 ⁻³ "	$\bar{\sigma}_{\rho\Delta\theta(\text{РТИ})},$ 10 ⁻³ "	$\bar{\sigma}_{(\text{РТИ})},$ 10 ⁻³ "
0.457	3.408	3.176	3.294	0.355	0.370	0.362

Выводы

В данной главе посредством численных экспериментов с модельными данными исследованы особенности работы метода параметров видимого движения и протестированы два новых метода изучения точности наблюдений. Для получения модельных данных была написана программа. Ее отличительная особенность – управление распределением наблюдений на дуге: задаваемыми параметрами являются не моменты времени наблюдений, а расстояния между наблюдениями на видимой орбите. Были реализованы следующие случаи: 1) равномерное распределение на дуге (расстояние между ближайшими наблюдениями на дуге одинаково); 2) увеличение плотности наблюдений на заданном участке дуги; 3) случайное распределение наблюдений. Описаны особенности внесения ошибок в модельные данные, принято решение добавлять ошибки к декартовым координатам, при этом должны выполняться условия: $\Delta\rho \ll \rho$ и $\rho\Delta\theta \ll \rho$.

Для статистических исследований был написан комплекс программ, позволяющий работать с большими совокупностями данных. Получение модельных данных осуществлялось по следующей схеме: 1) генерировалось заданное количество орбит (как правило, использовалась 1000 объектов); 2) вычислялись модель-

ные наблюдения (количество наблюдений, длина дуги и особенности распределения наблюдений на ней задавались заранее); 3) в наблюдения добавлялись ошибки, подчиненные нормальному распределению.

Изучена работа метода ПВД на дугах различной длины при различной точности наблюдений. Численные эксперименты с точными модельными данными показали, что качество получаемых элементов орбит с ростом длины дуги ухудшается. Это связано с тем, что увеличиваются систематические ошибки разложений координат. Так для дуги 30° у метода ПВД относительные ошибки определения периода и большой полуоси $\sim 1\%$, для дуги 10° – около 0.1% . Доказано, что имеется диапазон длин дуг, оптимальный для определения орбиты методом ПВД. Появление данного диапазона связано с двумя эффектами: систематические ошибки разложений снижают точность вычислений при увеличении длины дуги, а ошибки наблюдений повышают свое влияние на результат при уменьшении длины дуги. Чем меньше точность наблюдений, тем большую нужно использовать длину дуги для получения надежных результатов. Предельная точность фотографических наблюдений $\Delta\rho/\rho \sim 0.001$, метод ПВД в этом случае работает эффективно на дугах 25° – 50° .

Основная проблема метода ПВД связана с необходимостью определения радиуса кривизны (ρ_c). В работе рассмотрены различные методы его вычисления: посредством разложений полярных и декартовых координат второго и третьего порядков, с использованием закона площадей, с поворотом осей координат. Наиболее точно ρ_c определяется с помощью следующих двух подходов: 1) используются разложения полярных координат, $\dot{\rho}$ и $\dot{\theta}$ вычисляются из разложения третьего порядка, $\ddot{\rho}$ – второго порядка, $\ddot{\theta}$ – из закона площадей; 2) с поворотом осей координат, в основе лежат разложения декартовых координат третьего порядка. Для перечисленных методов построены ограничивающие кривые. Если известна точность наблюдений, то с помощью ограничивающих кривых можно выбрать длину дуги, оптимальную для определения радиуса кривизны.

Предложено два метода оценки точности наблюдений, первый работает с данными одного инструмента и учитывает малое количество наблюдений, второй работает с данными различных классов точности и основан на идее последовательно-

го уточнения. Применение первого метода стало возможным в связи с тем, что в настоящее время орбиты нескольких сотен звезд можно определить по данным отдельно взятых инструментов. Получаемые среднеквадратичные отклонения позволяют оценить погрешности измерений инструмента. Достоинство этого подхода в том, что наблюдения, выполненные на различных инструментах, изучаются независимо друг от друга, недостаток – малое количество наблюдений, используемых при определении орбит. В работе для повышения надежности получаемых результатов введены поправки, учитывающие малое количество наблюдений. Численные эксперименты со вторым методом показали, что при использовании совокупностей данных, в которых доминируют наблюдения более низких классов точности, происходит завышение весов наблюдений более высоких классов точности. Для устранения данного недостатка, как и в первом методе, были введены поправки.

Первый метод применен для изучения точности наблюдений отдельно выбранных исследователей: 1) CHARA speckle; 2) выполненных на БТА; 3) полученных Хорчем и др. Доказано, что точность спекл-интерферометрических измерений, выполненных на БТА и полученных Хорчем и др., примерно одинакова, точность наблюдений CHARA speckle несколько ниже. Основная причина получения такого результата, по-видимому, связана с тем, что спекл-интерферометрические наблюдения 80-х годов уступают в точности современным наблюдениям. Вторым методом определена точность наблюдений CHARA speckle и Palomar Testbed Interferometer (PTI).

Заключение

Рассмотрим основные выводы и результаты диссертации.

1. Исследованы известные методы определения элементов орбит: геометрический, Тиле-Иннеса-ван ден Боса, Данжона, Докобо, Паласиоса, дифференциальных поправок в полярных и декартовых координатах, метод, развитый в CHARA (метод Харткопфа и др.), метод ПВД. Описаны наиболее часто встречаемые недостатки методов, как правило, они связаны с искажением весов наблюдений. В результате анализа методов сделан вывод, что наиболее точно орбиты определяются с помощью методов дифференциальных поправок в декартовых и полярных координатах и метода, развитого в CHARA. На коротких дугах имеет преимущество метод ПВД.
2. Разработан метод определения эллиптических и гиперболических орбит на основе закона площадей.
3. Предложены новые методы определения орбит двойных звезд с помощью генетических алгоритмов. Методы являются глобально сходящимися, поэтому их можно использовать в случаях, когда у методов дифференциальных поправок отсутствует сходимость. Наиболее удачным оказался модифицированный метод Харткопфа и др., в котором три величины вместо подбора определяются с помощью генетических алгоритмов. Достоинства метода следующие: в качестве первых приближений использует стандартные для всех звезд интервалы изменения искомых величин, является глобально сходящимся, по точности получаемых результатов не уступает методу дифференциальных поправок. К недостаткам можно отнести более длительное время вычисления орбиты в сравнении с классическими методами.
4. Изучены особенности работы классических методов на малых дугах. Доказано, что орбиту можно вычислить классическими методами по дуге длиной более 25° , если использовать наблюдения с относительными погрешностями $\Delta\rho/\rho \sim 10^{-3} - 10^{-4}$.
5. Разработаны динамические методы, использующие старые удаленные наблюдения, и динамические методы, требующие современных высокоточных данных: параллакс обеих звезд и рядов наблюдений относительных лучевых скоростей. В новых методах решена одна из основных проблем метода ПВД, связанная с необходимостью вычисления радиуса кривизны видимой орбиты.

6. Предложен новый метод определения орбит с помощью генетических алгоритмов, использующий дополнительные данные (суммы масс и относительные лучевые скорости). Применение дополнительных данных позволило повысить надежность определяемых элементов орбит. Полученный метод можно применить для большого количества двойных звезд, у которых накоплены наблюдения на дугах более 20° и есть возможность найти массы компонентов по фотометрическим данным.

7. Впервые определены орбиты 17 звезд каталога Отто Струве. Использовался модифицированный метод Харткопфа и др. с тремя величинами, вычисляемыми с помощью генетических алгоритмов. Орбиты STT 28, 75, 119, 132, 182, 201, 228, 241, 250, 296, 369, 383, 424, 430, 520 получены методом, в котором условие отбора в новую популяцию связано с суммой масс изучаемых пар (метод § 2.7 диссертации с коэффициентом k_M). Массы звезд STT 81 и 306 не удалось оценить надежно по спектральным классам и фотометрическим данным, поэтому орбиты определены без наложения дополнительных условий на отбор в новую популяцию (применен метод § 1.4 диссертации).

8. Изучена работа метода ПВД. Наиболее точные результаты с его помощью можно получить на дугах 25° - 50° . Чем больше погрешность наблюдений, тем большую длину дуги, охваченную наблюдениями, необходимо использовать.

9. Предложены новые методы оценки точности наблюдений. С их помощью изучена точность наблюдений CHARA speckle, БГА, звездного интерферометра PTI (Palomar Testbed Interferometer) и наблюдений, полученных Хорчем и др.

Описанные в диссертации методы могут быть применены для исследования движений и точности наблюдений двойных и кратных звезд.

Завершая изложение диссертационной работы, автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю доценту ЯГПУ им. К.Д. Ушинского Н.И. Перову и сотрудникам ГАО РАН А.А. Киселеву и Л.Г. Романенко за оказанную помощь и внимание к работе.

Литература

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Байдин А.Э. Постановка лабораторной работы “Расчет невозмущенных орбит визуально-двойных звезд по пяти и более наблюдениям” // Сборник «Методика преподавания астрономии» / под ред. А.Ю. Румянцева. – Магнитогорск: МаГУ, 2005. – С. 66-68.
3. Байдин А.Э. Определение орбит визуально-двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. – С. 66-71.
4. Байдин А.Э. Метод определения элементов орбиты визуально-двойной звезды для эллиптического и гиперболического движения // Электронный научный журнал «Исследовано в России». – 2007. – С. 480-490. – Режим доступа: <http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2007/044.pdf>.
5. Байдин А.Э. Особенности современных методов определения орбит по коротким дугам // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – С. 36-42.
6. Байдин А.Э. Новые подходы определения орбит визуально-двойных звезд по коротким дугам // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 60-66.
7. Байдин А.Э. Определение веса позиционных наблюдений визуально-двойных звезд при вычислении орбит // Сборник «Инновационная деятельность в астрономии, астрономическом образовании и просвещении» / под ред. Н.И. Перова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 115-127.
8. Байдин А.Э. О вековых и периодических возмущениях в тройных звездных системах // Ярославский педагогический вестник. Серия «Физико-математические и естественные науки». – 2010. – №2. – С. 71-77.
9. Байдин А.Э. Особенности определения орбит визуально-двойных звезд на основе наблюдений коротких дуг видимого движения // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – Т. III (Естественные науки). – №4. – С. 32-39.

10. Байдин А.Э. О систематическом ходе невязок при работе с наблюдениями визуально-двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. – С. 63-73.
11. Байдин А.Э. Анализ классических методов определения орбит визуально-двойных звезд // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – Т. III (Естественные науки). – №4. – С. 71-75.
12. Байдин А.Э. Определение орбит ярких визуально-двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2012. – С. 56-64.
13. Байдин А.Э. Особенности алгоритмов получения эталонных наблюдений двойных звезд // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2014. – С. 9-19.
14. Байдин А.Э. Определение орбит визуально-двойных звезд с помощью генетических алгоритмов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2015. – Т. 7. – №1. – С. 11-19.
15. Байдин А.Э. Изучение точности спекл-интерферометрических измерений двойных звезд // Известия ГАО в Пулкове. – 2015. – №222. – С. 5-10.
16. Байдин А.Э. Определение орбит визуально-двойных звезд STF каталога по коротким дугам // Материалы конференции «Чтения Ушинского» физико-математического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2017. – С. 185-191.
17. Байдин А.Э., Перов Н.И., Романенко Л.Г. Определение орбит визуально-двойных звезд, открытых Отто Струве в Пулкове // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2018. – Т. 5(63). – Вып. 1. – С. 148-157.
18. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. – М.: Мир, 1964. – 516 с.
19. Быков О.П., Холшевников К.В. Прямые методы определения орбит небесных тел. – СПб: СПбГУ, 2013. – 150 с.
20. Бэттен А. Двойные и кратные звезды. – М.: Мир, 1976. – 324 с.
21. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Изд-во «Высшая школа», 2002. – 840 с.
22. Воронцов-Вельяминов Б.А. Курс практической астрофизики. – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. – 648 с.

23. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: ООО «Издательство АСТ», 2005. – 991 с.
24. Дейч А.Н., Орлова О.Н. О невидимых спутниках двойной звезды 61 Лебеда // Астрон. журн. – 1977. – Т. 54. – №2. – С. 327-339.
25. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978. – 456 с.
26. Дубяго А.Д. Определение орбит. – М: Гостехиздат, 1949. – 444 с.
27. Измайлов И.С., Ховричева М.Л., Ховричев М.Ю. и др. Астрометрические ПЗС-наблюдения визуально-двойных звезд в Пулковской обсерватории // Письма в Астрон. журн. – 2010. – Т. 36. – №5. – С. 365-371.
28. Киселев А.А, Кияева О.В. Определение орбиты визуально-двойной звезды методом параметров видимого движения из наблюдений на короткой дуге // Астрон. журн. – 1980. – Т. 57. – №6. – С. 1227-1241.
29. Киселев А.А., Калиниченко О.А., Плюгин Г.А. и др. Каталог относительных положений и движений 200 визуально-двойных звезд по наблюдениям в Пулкове на 26" рефракторе в 1960-1986 гг. – Л.: Наука, 1988. – 40 с.
30. Киселев А.А. Теоретические основания фотографической астрометрии. – М: Наука, 1989. – 264 с.
31. Киселев А.А, Романенко Л.Г. Динамическое исследование девяти широких визуально-двойных звезд в окрестностях Солнца // Астрон. журн. – 1996. – Т. 73. – №6. – С. 875-882.
32. Киселев А.А., Кияева О.В. Определение минимальной суммы масс компонентов двойной звезды с известным параллаксом из наблюдений короткой дуги видимого движения. // Письма в Астрон. журн. – 2003. – Т. 29. – №1. – С. 46-49.
33. Киселев А.А., Кияева О.В., Романенко Л.Г., Горыня Н.А. Орбиты визуально-двойных звезд ADS 8814 и ADS 8065, полученные по короткой дуге // Астрон. журн. – 2012. – Т. 89. – №7. – С. 581-592.
34. Киселев А.А., Кияева О.В., Измайлов И.С. и др. Пулковский каталог относительных положений и движений визуально-двойных и кратных звезд на основе фотографических наблюдений на 26-дюймовом рефракторе в 1960-2007 гг. // Астрон. журн. – 2014. – Т. 91. – №2. – С. 130-149.

35. Кияева О.В. Определение динамического параллакса и оценка наклона орбиты двойной звезды на основе наблюдений короткой дуги // Известия ГАО в Пулкове. – 1982. – №199. – С. 13-18.
36. Кияева О.В. Использование далеких по времени наблюдений для уточнения орбиты визуально-двойной звезды, полученной методом параметров видимого движения по короткой дуге // Астрон. журн. – 1983. – Т. 60. – №6. – С. 1208-1216.
37. Кияева О.В., Киселев А.А., Поляков Е.В., Рафальский В.Б. Астрометрическое исследование тройной системы ADS 48 // Письма в астрон. журн. – 2001. – Т. 27. – №6. – С. 456-463.
38. Курс астрофизики и звездной астрономии. Т. I / под ред. А.А. Михайлова. – М.: Наука, 1973. – 608 с.
39. Курс астрофизики и звездной астрономии. Т. II / под ред. А.А. Михайлова. – М.: Физматгиз, 1962. – 688 с.
40. Куто П. Наблюдения визуально-двойных звезд. – М.: Мир, 1981. – 238 с.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Механика. Т. I. – М.: Физматлит, 2002. – 224 с.
42. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1988. – 239 с.
43. Максимов А.Ф., Балега Ю.Ю., Бекман У. и др. Спекл-интерферометр 6-м телескопа БТА. – Preprint №182. – Spec. Astrophys. Observatory, 2003. – 18 с.
44. Методы астрономии / под ред. В.А. Хилтнера. – М.: Мир, 1967. – 536 с.
45. Панченко Т.В. Генетические алгоритмы. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет», 2007. – 87 с.
46. Рой А.Е. Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.
47. Романенко Л.Г. Определение орбит широких двойных звезд ADS 10759 (Ψ Dra) и ADS 12815 (16 Cyg) методом параметров видимого движения // Астрон. журн. – 1994. – Т. 71. – №6. – С. 875-881.
48. Смарт У.М. Небесная механика. – М.: Мир, 1965. – 504 с.
49. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. – М.: Наука, 1968. – 800 с.

50. Токовинин А.А. Лучевые скорости компонентов широких визуально-двойных звезд // *Астрон. журн.* – 1994. – Т. 71. – №2. – С. 293-296.
51. Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений. – Л., М.: ОНТИ, Главная редакция общетехнической литературы, 1935. – 364 с.
52. Херрик С. Астродинамика. – М.: Мир, 1976. – 938 с.
53. Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел: Учеб. пособие. – СПб: СПбГУ, 2007. – 180 с.
54. Хольцнер С. РНР в примерах. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2007. – 352 с.
55. Цветков А.С. Руководство по практической работе с каталогом Hipparcos. – СПб.: СПбГУ, 2005. – 104 с.
56. Aitken R.G. The binary stars. – New York: D.C. McMurtrie, 1918. – 316 p.
57. Armstrong J.T., Mozurkewich D., Rickard L.J. et al. The Navy Prototype Optical Interferometer // *Astrophys. J.* – 1998. – V. 496. – P. 550-571.
58. Astronomical Database Simbad. – Режим доступа: <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>.
59. Balega I., Balega Y.Y., Maksimov A.F. et al. Speckle interferometry of nearby multiple stars. II // *Astron. Astrophys.* – 2004. – V. 422. – P. 627-629.
60. Casertano S., Lattanzi M.G., Sozzetti A. et al. Double-blind test program for astrometric planet detection with Gaia // *Astron. Astrophys.* – 2008. – V. 482. – P. 699-729.
61. Colavita M.M., Wallace J.K., Hines B.E. et al. The Palomar Testbed Interferometer // *Astrophys. J.* – 1999. – V. 510. – P. 505-521.
62. Cox A.N. Allen's astrophysical quantities, 4th ed. – New York: AIP Press; Springer, 2000. – 719 p.
63. Cuypers J., Seggewiss W. CCD photometry and astrometry of visual double and multiple stars of the HIPPARCOS Catalogue. II. CCD photometry and differential astrometry of 288 southern "Intermediate" systems // *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* – 1999. – V. 139. – P. 425-431.
64. Cvetkovic Z., Novakovic B. Orbits for sixteen binaries // *Serbian Astronomical Journal.* – 2006. – V. 173. – P. 73-82.
65. Docobo J.A. On the analytic calculation of visual double star orbits // *Celest. Mech.* – 1985. – V. 36. – P. 143-153.

66. Docobo J.A., Ling J.F., Prieto C. Adaptation of Docobo's method for the calculation of orbits of spectroscopic-interferometric binaries with mixed data // IAU Colloquium 135, ASP Conference Series. – 1992. – V. 32. – P. 220-222.
67. Douglass G.G., Worley C.E. Systematic errors in double star observations // IAU Colloquium 135, ASP Conference Series. – 1992. – V. 32. – P. 311-313.
68. Fabricius C., Hog E., Makarov V.V. et al. The Tycho double star catalogue // *Astron. Astrophys.* – 2002. – V. 384. – P. 180-189.
69. Flower P.J. Transformations from theoretical Hertzsprung-Russell diagrams to color-magnitude diagrams: effective temperatures, B-V colors, and bolometric corrections // *Astrophys. J.* – 1996. – V. 469. – P. 355-365.
70. Gaia Collaboration, Prusti T., de Bruijne J.H.J. et al. The Gaia mission // *Astron. Astrophys.* – 2016. – V. 595. – id.A1. – 36 p.
71. Gaia Collaboration, Brown A.G.A., Vallenari A. et al. Gaia Data Release 1. Summary of the astrometric, photometric, and survey properties // *Astron. Astrophys.* – 2016. – V. 595. – id.A2. – 23 p.
72. Girardi L., Bressan A., Bertelli G., Chiosi C. Evolutionary tracks and isochrones for low- and intermediate-mass stars: From 0.15 to 7 M_{sun} , and from $Z=0.0004$ to 0.03 // *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* – 2000. – V. 141. – P. 371-383.
73. Hartkopf W.I., McAlister H.A., Franz O.G. Binary star orbits from speckle interferometry. II. Combined visual/speckle orbits of 28 close systems // *Astron. J.* – 1989. – V. 98. – P. 1014-1039.
74. Hartkopf W.I., Mason B.D., Worley C.E. The 2001 US Naval Observatory Double Star CD-ROM. II. The Fifth Catalog of Orbits of Visual Binary Stars // *Astron. J.* – 2001. – V. 122. – P. 3472-3479.
75. Hartkopf W.I., Mason B.D. Sixth Catalog of Orbits of Visual Binary Stars. – Washington: US Naval Observatory, 2017. – Режим доступа: <http://ad.usno.navy.mil/wds/orb6.html>.
76. Hartkopf W.I., Mason B.D., Wycoff G.L., McAlister H.A. Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars. – Washington: US Naval Observatory, 2017. – Режим доступа: <http://ad.usno.navy.mil/wds/int4.html>.

77. Heintz W.D. Errors of observation in double-star work // *Astrophys. Space Sci.* – 1971. – V. 11. – P. 133-135.
78. Heintz W.D. Orbits of 20 visual binaries // *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* – 1988. – V. 72. – P. 543-549.
79. Hertzsprung E. Discussion on personal errors in photographic measures of double stars // *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands.* – 1942. – V. 9. – P. 253-258.
80. Horch E.P., Ninkov Z., van Altena W.F. et al. Speckle observations of binary stars with the WIYN telescope. I. Measures during 1997 // *Astron. J.* – 1999. – V. 117. – P. 548-561.
81. Hussey W.J. Micrometrical observations of the double stars discovered at Pulkowa made with the thirty-six-inch and twelve-inch refractors of the Lick Observatory, together with the mean results of the previous observations of these stars // *Publications of Lick Observatory.* – 1901. – V. 5. – P. 3-227.
82. Izmailov I.S., Roshchina E.A. Astrometric observations of visual binaries using 26-inch refractor during 2007-2014 at Pulkovo // *Astrophys. Bull.* – 2016. – V. 71. – P. 225-231.
83. Lampens P., Oblak E., Duval D., Chareton M. CCD photometry and astrometry for visual double and multiple stars of the HIPPARCOS catalogue. III. CCD photometry and differential astrometry for 253 southern "intermediate" systems // *Astron. Astrophys.* – 2001. – V. 374. – P. 132-150.
84. Lane B.F., Muterspaugh M.W. Differential astrometry of subarcsecond scale binaries at the Palomar Testbed interferometer // *Astrophys. J.* – 2004. – V. 601. – P. 1129-1135.
85. Marcy G.W., Benitz K.J. A search for substellar companions to low-mass stars // *Astrophys. J.* – 1989. – V. 344. – P. 441-453.
86. Mason B.D., Wycoff G.L., Hartkopf W.I. *The Washington Visual Double Star Catalogue.* – Washington: US Naval Observatory, 2017. – Режим доступа: <http://ad.usno.navy.mil/wds/wds.html>.
87. Michalewicz Z. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs.* – Berlin: Springer, 1996. – 388 p.

88. Morbey C. L. A Synthesis of the solutions of spectroscopic and visual binary orbits // Publ. Astron. Soc. Pacific. – 1975. – V. 87. – P. 689-693.
89. Muterspaugh M.W., Hartkopf W.I., Lane B.F. et al. The PHASES differential astrometry data archive. II. Updated binary star orbits and a long period eclipsing binary // Astron. J. – 2010. – V. 140. – P. 1623-1630.
90. NASA's Astrophysical Data System bibliographic database. – Режим доступа: <http://adswww.harvard.edu>.
91. Olevic D., Cvetkovic Z. Orbits of 10 interferometric binary systems calculated by using the improved Koval'skij method // Astron. Astrophys. – 2004. – V. 415. – P. 259-264.
92. Palacios R.C. On the necessary and sufficient observations for determination of elliptic orbits in double stars // Astron. J. – 1958. – V. 63. – P. 395-397.
93. Pannunzio R., Zappala V., Massone G., Morbidelli R. Statistical analysis of the errors in visual double star observations. I. “Old-generation” observers // Astron. Astrophys. – 1986. – V. 166. – P. 337-348.
94. Pannunzio R., Massone G., Morbidelli R. Statistical analysis of the errors in visual double star observations. II. “New-generation” observers // Astron. Astrophys. – 1988. – V. 203. – P. 388-398.
95. Popovic G.M., Pavlovic R. Orbital elements for 8 double stars // Bull. Astron. Belgrade. – 1996. – №153. – P. 57-78.
96. Pourbaix D. Simultaneous least-squares adjustment of visual and spectroscopic observations of binary stars // Astron. Astrophys. Suppl. Ser. – 1998. – V. 131. – P. 377-382.
97. Pravdo S.H., Shaklan S.B. An ultracool star's candidate planet // Astrophys. J. – 2009. – V. 700. – P. 623-632.
98. Rabe W. Neue Methoden zur Bahnbestimmung und Bahnverbesserung visueller Doppelsterne // Astron. Nachr. – 1951. – V. 280. – P. 1-23.
99. Salaris M., Cassisi S. Evolution of stars and stellar populations. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2005. – 388 p.
100. Shao M., Colavita M.M., Hines B.E. et al. The Mark III stellar interferometer // Astron. Astrophys. – 1988. – V. 193. – P. 357-371.

101. Struve F.G.W. *Catalogus Novus Stellarum Duplicium et Multiplicium*. – Dorpat: Universitatis Caesariae Dorpatensis, 1827. – 88 p.
102. Struve O.W. *Catalogue de 514 Étoiles Doubles et Multiples découvertes sur l'hémisphère céleste boréal par la grande lunette de l'Observatoire Central de Poulkova, et Catalogue de 256 Étoiles Doubles Principales où la distance des composantes est de 32 secondes à 2 minutes et qui se trouvent sur l'hémisphère boréal*. – St. Petersburg: Imperial Academy of Sciences, 1843. – 37 p.
103. The double star website of Nice Observatory. – Режим доступа: <http://sidonie.obs-nice.fr/scripts/SidonieWelcome.asp>.
104. The Hipparcos and Tycho Catalogues. – ESA SP-1200, 1997.
105. Tokovinin A., Mason B.D., Hartkopf W.I. et al. Speckle interferometry at SOAR in 2014 // *Astron. J.* – 2015. – V. 150. – article id. 50. – 17 p.
106. Van de Kamp P. Astrometric study of Barnard's star from plates taken with the 24-inch Sproul refractor // *Astron. J.* – 1963. – V. 68. – P. 515-521.
107. Van Leeuwen F. Validation of the new Hipparcos reduction // *Astron. Astrophys.* – 2007. – V. 474. – P. 653-664.
108. Vogt S.S., Marcy G.W., Butler R.P., Apps K. Six new planets from the Keck precision velocity survey // *Astrophys. J.* – 2000. – V. 536. – P. 902-914.

Приложение

Особенности наиболее часто используемых алгоритмов

Определение эксцентрической аномалии.

Необходимо по известной средней аномалии найти эксцентрическую. Используется уравнение Кеплера, оно является трансцендентным. Задача решается численно с помощью метода Ньютона [21].

Метод Ньютона позволяет найти корень нелинейного уравнения

$$f(x) = 0. \quad \text{П.1}$$

Разложим функцию в ряд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(\Delta x) = 0, \quad \text{П.2}$$

где $\varepsilon(\Delta x)$ – малая величина более высокого порядка, чем $\Delta x = x - x_0$.

Пренебрегая значением $\varepsilon(\Delta x)$, для искомого корня можно записать

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad \text{П.3}$$

При $\Delta x \rightarrow 0$ формула является точной. Если Δx конечно, то равенство не является строгим, но, используя метод последовательных приближений, можно ожидать, что величина Δx будет приближаться к нулю, и на определенном шаге принять: x есть решение уравнения.

Применим описанный метод к уравнению Кеплера

$$E - e \sin E - M = 0. \quad \text{П.4}$$

Эксцентриситет и средняя аномалия рассматриваются как константы. Производная левой части уравнения по эксцентрической аномалии

$$f'(E_0) = 1 - e \cos E_0. \quad \text{П.5}$$

Формула для уточнения значения E

$$E = E_0 - \frac{E_0 - e \sin E_0 - M}{1 - e \cos E_0}. \quad \text{П.6}$$

Запишем алгоритм нахождения эксцентрической аномалии:

1. $M = n(T - T_p)$; $E = M$;
2. повторять пока ($|\Delta E| > \varepsilon$)

$$3. \left\{ \Delta E = -\frac{E - e \sin E - M}{1 - e \cos E}; E = E + \Delta E; \right\}.$$

В качестве первого приближения используется значение средней аномалии. Величина ε определяет вычислительную погрешность, во всех проводимых в работе расчетах $\varepsilon \leq 10^{-6}$ радиан.

Вычисление истинной аномалии и позиционного угла.

Используются формулы

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad \text{П.7}$$

$$\operatorname{tg}(\theta - \Omega) = \operatorname{tg}(\nu + \omega) \cos i. \quad \text{П.8}$$

Алгоритмы определения ν и θ подобны: 1) определяется номер оборота; 2) вычисляются искомые величины с учетом того, что у функции $\operatorname{arctg} x$ область значений $(-\pi/2; \pi/2)$.

Алгоритм нахождения истинной аномалии:

1. $k = 0; C = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}};$
2. если $(E < 0) \{ \text{пока } (E < 0) \{ E = E + 2\pi; k = k - 1; \} \}$
3. если $(E \geq 2\pi) \{ \text{пока } (E \geq 2\pi) \{ E = E - 2\pi; k = k + 1; \} \}$
4. если $(E > \pi) \{ \nu = 2 \operatorname{arctg}(C * \operatorname{tg} E/2) + 2\pi; \}$
5. иначе $\{ \nu = 2 \operatorname{arctg}(C * \operatorname{tg} E/2); \}$
6. $\nu = \nu + 2\pi k.$

Метод Гаусса.

Связь между элементами орбиты и наблюдаемыми величинами нелинейная. В методах определения элементов орбит используются различные подходы, позволяющие свести задачу к линейной: раскладываются координаты в ряд Тейлора (метод ПВД), производится последовательное уточнение элементов орбит (метод дифференциальных поправок), искомые величины находятся с помощью подбора или генетических алгоритмов (метод Докобо и программы CHARA). Поэтому для определения элементов орбит необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений. В данной работе используется метод Гаусса. Алгоритм метода:

1. для $(k \text{ от } 1 \text{ до } n-1) \{ \max = k; \}$
2. для $(i \text{ от } k+1 \text{ до } n) \{$
3. если $(|a_{ik}| > |a_{\max k}|) \{ \max = i; \} \}$
4. если $(\max \diamond k) \{ \text{для } (i \text{ от } k \text{ до } n) \{$
5. $r = a_{\max i}; a_{\max i} = a_{ki}; a_{ki} = r; \} r = b_{\max}; b_{\max} = b_k; b_k = r; \}$

6. для (m от $k+1$ до n) $\{ c_{mk} = a_{mk}/a_{kk};$
7. для (l от k до n) $\{ a_{ml} = a_{ml} - c_{mk} * a_{kl}; \}$
8. $b_m = b_m - c_{mk} * b_k; \}$
9. $x_n = b_n/a_{nn};$
10. для (m от $n-1$ до 1) $\{$
11. для (k от $m+1$ до n) $\{ b_m = b_m - a_{mk} * x_k; \} x_m = b_m/a_{mm}; \}$.

Величина n равна количеству неизвестных. В строках 2-5 производится поиск наибольшего по модулю значения в обрабатываемом столбце, при выполнении условия ($\max \langle k$) строки под номерами k и \max меняются местами. Использование наибольшего значения ($a_{\max k}$) позволяет уменьшить вычислительные ошибки. Метод с описанным дополнением называют методом Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента [21]. В строках 1, 6-8 система уравнений приводится к треугольному виду, в строках 9-11 производится вычисление неизвестных. Величина ($a_{\max k}$) позволяет контролировать точность вычислений, при $a_{\max k} = 0$ программа выдаст ошибку, если $a_{\max k} \approx 0$, вычислительные ошибки значительно возрастают.

Программы чтения данных из текстового файла.

В современных каталогах [75, 76, 86] наблюдаемые величины и технические характеристики записываются строго в определенные положения строки. Например, в файле “Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars: Format” [76] отмечены позиции, начиная с которых в строке идет запись определенных величин. Это облегчает написание алгоритмов для чтения данных из файла.

Алгоритм чтения данных посредством PHP:

1. $\$fh = fopen("obr.txt", "r");$
2. $\$tt = fgets(\$fh);$
3. $\$i = 0;$
4. $while (!feof(\$fh)) \{ \$i++;$
5. $\$tt = fgets(\$fh);$
6. $\$theta[\$i] = substr(\$tt, 14, 8);$
7. $\$theta[\$i] = trim(\$theta[\$i]); \}$
8. $fclose(\$fh).$

Данная программа читает значения позиционных углов отдельно взятой звезды из файла obr.txt, если структура документа аналогична четвертому интерферометрическому каталогу. Строки 1, 8 – открытие и закрытие файла, 2 – чтение первой строки, в ней указаны координаты звезды, ее номера в различных каталогах, 4 – запускается цикл, пока не будет достигнут указатель конца файла (feof), 5 – последовательно читаются строки, 6 – возвращается участок строки, на котором в ка-

талогe записано значение позиционного угла, 7 – удаляются конечные и начальные пробельные символы.

В четвертом каталоге имеется множество меток, дающих дополнительную информацию о наблюдениях, в работе использовались следующие: “V” – наблюдение получено методом лунных покрытий, “:” – пониженная точность, “?” – сомнительное значение. В случае знаков “>” и “<” наблюдения неполные, они исключались из вычислений.

Программа записи данных в текстовый файл.

В современных каталогах используется фиксированное положение точек на строке, точки отделяют целую и дробную части, если часть данных отсутствует, на строке фиксируются точки без цифр. В работе при создании текстовых файлов также использовалось данное правило.

Алгоритм записи в файл отдельного значения:

1. \$fh = fopen ("obr.txt", "w");
2. \$tt=" "; \$nt=10;
3. if (\$x<>".") {
4. \$w1 = strlen(\$x); \$w2 = strlen(floor(\$x));
5. \$str="\$x";
6. \$n=\$nt-\$w2-1;
7. for (\$j = 0; \$j <= \$w1-1; \$j++) { \$tt[\$n+\$j]="\$str[\$j]"; } }
8. else { \$tt[\$nt-1] = "."; }
9. fwrite(\$fh, \$tt);
10. fclose(\$fh).

В строке 4 определяется количество знаков (w1) в числе x и количество знаков перед запятой (w2), в строке 6 вычисляется положение (n), начиная с которого ведется запись числа x в строку tt, nt – положение точки на строке, в 7 и 8 в зависимости от условия (x<>".") производится запись числа или точки в строку tt, в 9 строка tt записывается файл obr.txt.

Программа рисования пиксельных рисунков.

При обработке наблюдений визуально-двойных звезд одно из важных мест занимает визуализация полученных результатов. В картинной плоскости рисуется проекция истинной орбиты, отмечаются наблюдения, расстояния между вычисленными и наблюдаемыми положениями, название звезды, положение главной компоненты и линии узлов, направление вращения, на рамке, окружающей рисунок, ука-

зываются масштабы. В полной версии каталога WDS имеются рисунки в картинной плоскости для звезд, орбиты которых определены.

При построении графиков необходимо сопоставить значения функции и ее аргумента с координатами пикселей на рисунке и окрасить данные пиксели в определенный цвет. Рассмотрим последовательность операций, используемую при построении орбит с помощью языка программирования PHP.

1) Задается размер картинки (size) и полей (margin) в пикселях, определяется размер орбиты (npix), например

$$\$size = 600; \$margin = 60; \$npix = \$size - 2 * \$margin.$$

2) Вычисляются максимальные и минимальные относительные координаты звезды-спутника x и y посредством формул:

$$x = AX + FY, \quad y = BX + GY, \quad \text{П.9}$$

где $X = \cos E - e$, $Y = (1 - e^2)^{1/2} \sin E$ – приведенные координаты.

3) Определяются интервалы изменения переменных x и y : $\Delta x = x_{\max} - x_{\min}$,

$$\Delta y = y_{\max} - y_{\min}.$$

4) Вычисляется размер одного пикселя и положение главной компоненты

1. if ($\$dx \geq \dy) { $\$d = \$dx / \$npix$; $\$Ymin = \$Ymin - (\$dx - \$dy) / 2$;}
2. else { $\$d = \$dy / \$npix$; $\$Xmin = \$Xmin + (\$dx - \$dy) / 2$;}
3. $\$Vert0 = \text{round}(\text{abs}(\$Xmin / \$d - \$margin))$;
4. $\$Gor0 = \text{round}(\text{abs}(\$Ymin / \$d - \$margin))$.

В программе величины Δx и Δy обозначены dx и dy , максимальные и минимальные значения x и y обозначены X_{\max} , X_{\min} , Y_{\max} , Y_{\min} . Переменная d – размер одного пикселя, переменные $Vert0$ и $Gor0$ определяют положение главной компоненты, совпадающее с началом координат, они вычислены так, чтобы орбита располагалась по центру рисунка.

5) По точкам строится эллипс

1. for ($\$E = 0$; $\$E < 2 * M_PI$; $\$E += \$step$) {
2. $\$XX = \text{Cos}(\$E) - \$e$; $\$YY = \$De * \text{sin}(\$E)$;
3. $\$x = \$A * \$XX + \$F * \$YY$; $\$y = \$B * \$XX + \$G * \$YY$;
4. $\$Vert = \$Vert0 + \text{round}(\$x / \$d)$; $\$Gor = \$Gor0 + \text{round}(\$y / \$d)$;
5. $\text{imageSetPixel}(\$img, \$Gor, \$Vert, \$gray)$; }

В строке (2) XX и YY обозначены приведенные координаты, $De=(1-e^2)^{1/2}$. Для увеличения толщины линии функция `imageSetPixel()` в цикле запускается несколько раз с указанием ближайших координат $Gor\pm 1$ и $Vert\pm 1$.

Наиболее трудным является вопрос выбора шага – переменная $step=\Delta E$. Ее можно сделать малой величиной (на порядок меньше d/ρ_{\max}), так как на рисунке не произойдет никаких изменений, если окрасить точку в один и тот же цвет несколько раз. В работе используется другой подход – определяется максимально возможная длина шага, при которой линия не будет прерываться. При любом значении эксцентрисической аномалии должно выполняться условие:

$$|d\vec{r}/dE|\Delta E \leq d . \quad \text{П.10}$$

Задача сводится к нахождению выражения

$$\Delta E = \frac{d}{|d\vec{r}/dE|_{\max}} , \quad \text{П.11}$$

где d – размер одного пикселя, функция в знаменателе

$$d\vec{r}/dE = (-A \sin E + F\sqrt{1-e^2} \cos E)\vec{i} + (-B \sin E + G\sqrt{1-e^2} \cos E)\vec{j} = x_E\vec{i} + y_E\vec{j} ,$$

$$|d\vec{r}/dE| = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} . \quad \text{П.12}$$

Функция (П.12) на одном обороте ($E \in [0, 2\pi)$) имеет два максимума и два минимума, необходимо выбрать максимум. Для экстремумов функции получено

$$E = \frac{1}{2} \arctg \frac{C_1}{C_2} + \frac{\pi}{2} k , \quad \text{П.13}$$

где $k \in Z$, $C_1 = \sqrt{1-e^2} (AF + BG)$, $C_2 = \frac{1}{2} (A^2 + B^2 - (1-e^2)(F^2 + G^2))$.

Кроме рассмотренных операций программа, рисующая относительную траекторию звезды-спутника, содержит множество дополнительных функций: 1) создает рамку с автоматическим выбором масштаба (за основу взято правило: не менее 5 и не более 10 меток на каждой оси); 2) отмечает наблюдения; если расстояние между наблюденной точкой и вычисленной больше 5 пикселей, соединяет их; 3) в правом нижнем углу отмечает направление вращения; 4) рисует линию узлов.

Приведем несколько примеров, поясняющих работу рассмотренной программы. Для получения рис. 1-3 использовались следующие элементы орбиты: $n = 1^\circ/\text{г}$, $a = 0.1''$, $i = 30^\circ$, $\Omega = 50^\circ$, $T_p = 0$, $e = 0.3$, $\omega = 20^\circ$. На рис. 1 и 2 по эталонным данным

построена орбита для двух случаев: 1) шаг ΔE определен описанным выше алгоритмом (рис. 1); 2) величина шага увеличена в 4 раза (рис. 2), отчетливо видны пробелы между точками. На рис. 3 изображен график функции (П.12) с экстремумами, отстоящими друг от друга на расстоянии $\pi/2$. На рис. 4 представлена орбита Сириуса, определенная Ван ден Босом [75], с большим количеством наблюдательного материала, толщина линии, очерчивающей орбиту, увеличена.

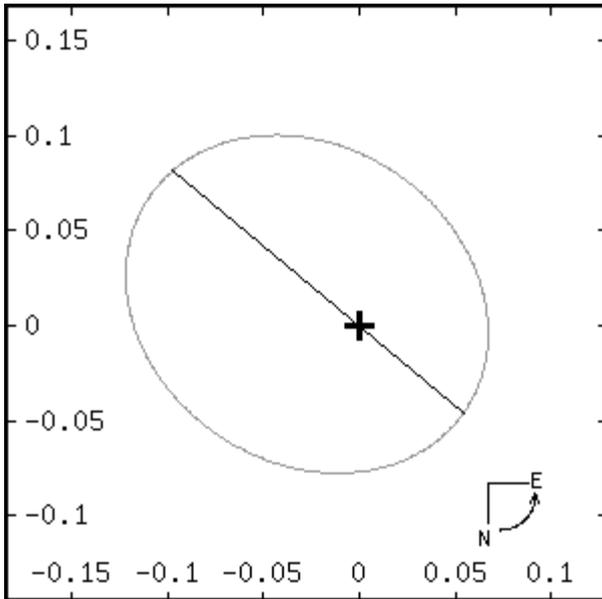


Рис. 1. Видимая орбита, шаг ΔE определен описанным в работе методом

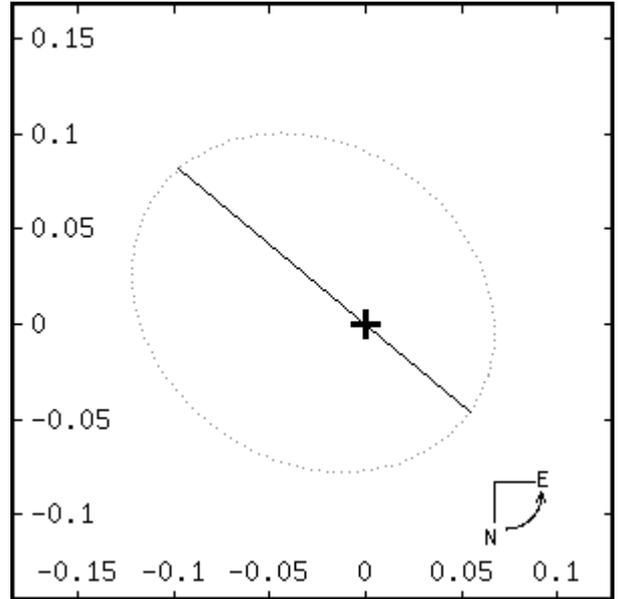


Рис. 2. Видимая орбита, величина шага ΔE увеличена в четыре раза

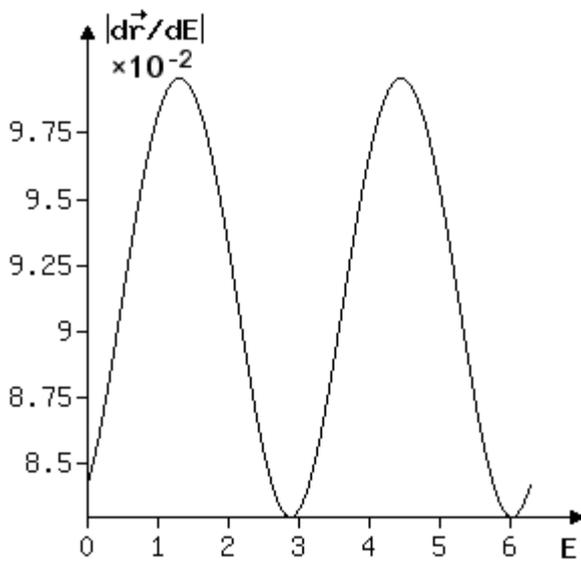


Рис. 3. График функции $|\dot{r}/dE|$

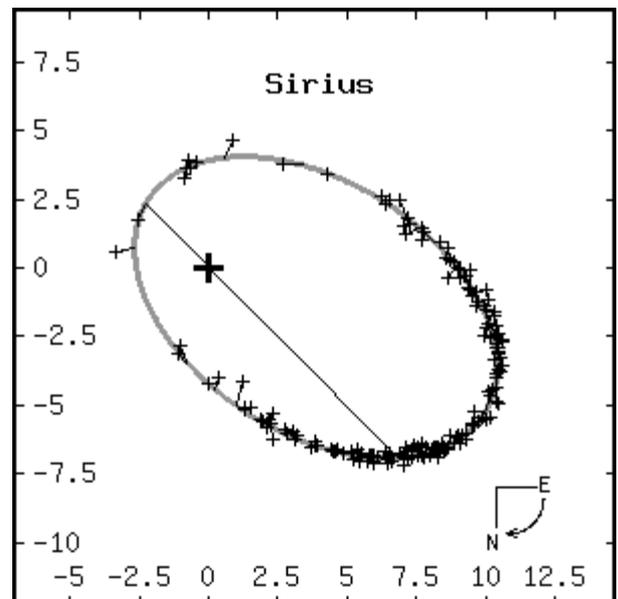


Рис. 4. Орбита Сириуса