

ГЛАВНАЯ (ПУЛКОВСКАЯ) АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Уртьев Федор Андреевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИХ МАГНИТНЫХ
ПОЛЕЙ МЕТОДАМИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ**

(01.03.02 — Астрофизика и звёздная астрономия)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук

Князева Ирина Сергеевна

Санкт-Петербург – 2017

Содержание

Введение	4
1 Случайные поля космологических гамма-всплесков	12
1.1 Резонансное переходное излучение в плазме с магнитными неоднородностями	12
1.2 Случайные магнитные поля космологических гамма-всплесков .	24
1.3 Выводы к Главе 1	36
2 Элементы топологического анализа данных (TDA) для 2D случайных полей	37
2.1 Алгоритм топологической фильтрации	39
2.2 Анализ и сравнение диаграмм персистентности. Расстояние в пространстве диаграмм персистентности	44
2.3 Ранговые функции	45
2.4 Персистентные изображения	48
2.5 Выводы к Главе 2	50
3 Моделирование случайных полей с предписанным законом корреляции	53
3.1 Моделирование гауссовых случайных полей с заданным законом корреляции	72
3.2 Моделирование логнормальных случайных полей с заданным законом корреляции	74
3.3 Моделирование фонового фотосферного магнитного поля	84
3.4 Выводы к Главе 3	88

4	Прямой прогноз времени до сильных вспышечных событий в АО на основе дескрипторов TDA	90
4.1	Данные	91
4.2	Методы	96
4.3	Результаты	98
4.4	Выводы к Главе 4	100
	Заключение	101
	Приложения	103
	Список используемых сокращений	103
	Реализация алгоритма топологической фильтрации (скрипт Matlab)	104
	Список цитированной литературы	112

Введение

Диссертационная работа посвящена моделированию нелинейных и нестационарных астрофизических процессов в стохастических средах методами геометрии и топологии случайных полей.

Рассматриваются два класса таких моделей. В первом из них речь идет о взаимной связи корреляционных свойств турбулентной среды и характеристик наблюдаемых сигналов, которые формируются этими свойствами. Важным является здесь не энергия флуктуаций возмущений поля, а его «архитектура», т.е. стохастическая геометрия плазмы. В стохастических средах траектории частиц и создаваемые ими электромагнитные поля описываются случайными функциями. Следовательно, подходящим формальным контекстом для моделирования свойств среды, полей и движения заряженных частиц являются методы статической физики, физической кинетики и стохастической геометрии.

Второй класс моделей имеет дело с диагностикой пространственно-временного беспорядка. Так называют сценарии хаотической динамики распределенных систем. Здесь целью моделирования является выделение минимального набора представительных дескрипторов сложности из наблюдаемых паттернов случайных магнитных полей, которые позволяют отслеживать их динамические режимы. Конкретной задачей является проблема диагностики предвспышечной динамики фотосферных магнитных полей в Активных Областях (АО) Солнца по наблюдаемым магнитограммам.

Актуальность темы диссертации

Нетепловое излучение регистрируется для космических объектов в широком диапазоне расстояний, начиная с источников в солнечной системе, включая геопространство, до источников космологических гамма-всплесков. Оно возникает при движении быстрых, в том числе, ультрарелятивистских, частиц в неоднородной турбулентной магнитоактивной плазме. Свойства такого излучения генерируемого в турбулентной плазме существенно отличаются от случая однородной среды [70]. С одной стороны общеизвестно, что «равномерно движущаяся частица не излучает». Однако, это утверждение относится только к случаю движения частицы в пустом пространстве без внешних полей. В реальных условиях движение частицы происходит в среде и при наличии внешних полей. В частности, наличие мелкомасштабных неоднородностей диэлектрической проницаемости среды (которые могут обеспечиваться случайными неоднородностями плотности плазмы и/или магнитного поля) приводит к генерации переходного излучения [28].

Интенсивность генерации нетеплового излучения определяется корреляционными свойствами случайных неоднородностей магнитного поля и плотности плазмы. Например, в последние несколько лет посредством детального численного моделирования [33, 48, 63] было продемонстрировано, что взаимодействие релятивистских ударных волн друг с другом и с внешней средой в источниках гамма-всплесков приводит к генерации весьма мощных и крайне мелкомасштабных магнитных полей в результате реализации двухпоточковых неустойчивостей. Взаимодействие быстрых частиц с указанными неоднородностями приводит к генерации электромагнитного излучения, в частности, переходным механизмом, включая резонансное переходное излучение на неоднородностях магнитного поля (МРПИ).

Конкретным примером источника, где весьма вероятно присутствие релятивистских направленных выбросов заряженных частиц (джетов) и возникновение двухпоточковых неустойчивостей различных типов являются источники космологических гамма-всплесков (GRB). Общепризнанная на сегодняшний день модель основного процесса излучения fireball model (файербол – огненная оболочка) предполагает, что основная часть излучения в гамма-диапазоне генерируется, когда центральный механизм продуцирует релятивистские направленные выбросы, в которых возникают внутренние ударные волны. Однако, возникновение ударных волн требует присутствия эффективного механизма поглощения энергии. Когда столкновения отсутствуют, наиболее эффективным способом диссипации энергии является генерация флуктуаций электромагнитных полей и ускорения заряженных частиц вплоть до высоких энергий.

Микроскопически, генерация полей, вызываемая двухпоточковой неустойчивостью связывается с распространением ударных волн, а ускорение частиц происходит путем их взаимодействия со сгенерированными ударными волнами, случайными и регулярными электромагнитными полями. На сегодняшний день надежно установлено, что магнитные и электрические поля, возникающие при взаимодействии ударных волн часто несут в себе значительную случайную компоненту на разных пространственных масштабах. В результате, ускоренные такими ударными волнами заряженные частицы распространяются в плазме с случайными электромагнитными полями испытывая случайные силы Лоренца, следуя по случайным траекториям и демонстрируя случайную диффузию. Наблюдаемым сигналом является обычно электромагнитное излучение, свойства которого связано с спектрами случайных полей и движениями частиц среды [15]. Частицы, которые осуществляют «случай-

ную диффузию», обладают спектром зависящим как от типа поля, магнитное или электрическое, так и от распределения спектра энергии поля по пространственным масштабам [21, 24, 35, 70]. Индивидуальные спектры основного излучения гамма-всплесков обычно хорошо аппроксимируются феноменологической функцией Бэнда [8], которая содержит две степенные функции (α – спектральный индекс низких энергий, и β – спектральный индекс высоких энергий) плавно соединяющиеся при значении энергии E_{break} .

В диссертационной работе рассматриваются ключевые моменты модели диффузионного синхротронного излучения (ДСИ), как части основного механизма образования галактических гамма-всплесков. С помощью численного моделирования делаются оценки параметров, характеризующих структуру случайных магнитных полей. Установлена совместимость модели ДСИ с наблюдаемыми распределениями спектральных параметров гамма-всплесков [68]. Определены возможные диапазоны физических параметров гамма-всплесков, в том числе, параметров описывающих структуру случайного магнитного поля в источнике, необходимых для согласования модельного спектра с наблюдаемыми.

Верификация упомянутых моделей требует подходящих компьютерных реализаций 1D и 2D стохастических полей. Эта задача не является тривиальной уже в случае логнормальных полей с предписанными корреляционными свойствами. Кроме этого, необходимы корректные статистические методы сравнения моделей между собой и моделей с наблюдениями. Эта задача также не является простой: перемежаемые поля имеют степенные асимптотики хвостов и следовательно, методы основанные на Пирсоновской дисперсии становятся не эффективными. Именно поэтому столь актуальны новые подходы в теории случайных полей, ориентированные на практически важные

случаи степенного скейлинга.

Топологические характеристики случайных полей активно используются в последнее время в широком круге задач. В значительной степени это обусловлено развитием новой прикладной области алгебраической топологии – Топологическому Анализу Данных (TDA). Неоспоримыми преимуществами топологических дескрипторов является их устойчивость к шумам и отсутствие необходимости априорных предположений до обработки данных. Иными словами TDA не предполагает знания природы источника сигнала. В диссертационной работе тестируется эффективность применения дескрипторов, являющихся топологическими инвариантами к практическим задачам анализа модельных и наблюдаемых случайных магнитных полей.

В диссертационной работе применение TDA к случайным полям, полученным в результате численного моделирования демонстрируется на примере задачи моделирования фонового фотосферного магнитного поля с помощью комбинации двух логнормальных случайных полей разной полярности с предписанным законом корреляции.

Эффективность топологических дескрипторов для анализа динамических режимов случайных магнитных полей по магнитограммам исследуется на примере предсказания больших солнечных вспышек. Этой проблеме было посвящено много исследований (см., например, [1, 11, 32, 56]). Практический ее аспект обусловлен прежде всего негативным воздействием вспышек на функционирование космических аппаратов в окрестности Земли [55].

Трудности моделирования связаны с отсутствием корректной модели солнечных вспышек и отсутствием прямых измерений параметров солнечной плазмы. Построение прогностических схем ограничено по меньшей мере двумя обстоятельствами [1].

Во-первых, сильные (класса $> M5.0$) солнечные вспышки являются достаточно редкими событиями. Следовательно, трудно получить статистически состоятельную выборку магнитограмм, охватывающих эволюцию таких АО с достаточно большим предвспышечным временем прохождения области по диску.

Во-вторых, современное описание сложности АО опирается на высокоразмерное пространство признаков. В качестве дескрипторов обычно используется чрезмерно большое (>30) количество коррелированных физических характеристик наблюдаемой «сложности» фотосферного магнитного поля АО. Это токи, градиенты, знаковые и беззнаковые магнитные потоки, спиральность и т.п. [32].

Кроме того, предположение о независимости обучающих примеров, приводит к тому, что в обучающую и тестовую выборку одновременно попадают фрагменты одной и той же АО. Таким образом, некоторое число «будущих» в прогнозе событий, уже присутствуют в обучающих примерах.

В диссертационной работе для описания сложности наблюдаемых магнитных паттернов LOS магнитограмм предлагается использовать так называемые персистентные числа Бетти. Грубо говоря, это число компонент связности и число «дыр» на каждом подуровне, в процессе фильтрации поля с помощью функции высоты. Числа Бетти имеют ясный математический смысл и легко вычисляются непосредственно по магнитограммам.

Надежды на успех подхода заключаются в двух особенностях предложенных характеристик. Они инвариантны, и следовательно устойчивы относительно непрерывных деформаций данных. С другой стороны, они вычисляются непосредственно по данным, без каких либо априорных предположений, а свойство персистентности позволяет реализовать топологическую фильтра-

цию шумов.

Цели работы

Целью диссертационной работы является разработка эффективных методов моделирования случайных магнитных полей в астрофизике. Эта цель достигается решением следующих задач:

1. Реконструкция геометрии случайных магнитных полей в источниках гамма-всплесков методами прямого моделирования на основе наблюдаемых спектров. При взаимодействии ударных волн в источниках гамма-всплесков ускорение заряженных частиц на ударных фронтах и генерация полей весьма вероятна. Поэтому в качестве основного механизма излучения в этом случае используется модель диффузионного синхротронного излучения (ДСИ).

2. Сравнительный анализ предсказательной эффективности топологических дескрипторов сложности случайных полей для задачи прогноза больших солнечных вспышек.

Научная новизна

1. Впервые продемонстрировано, что механизм ДСИ в сильном случайном магнитном поле совместим с наблюдаемыми распределениями параметров Бэнда источников гамма-всплесков и позволяет получить правильные корреляционные зависимости между ними. Исходя из требования совместности модели с наблюдаемыми распределениями, проведенный в диссертационной работе анализ позволяет наложить ограничения на значения физических параметров и в том числе дает представление о структуре случайных магнитных полей в источниках гамма-всплесков.

2. Методы вычислительной топологии впервые применяются для анали-

за сложности фотосферных магнитных полей АО. Приведена практическая реализация прогноза вспышечной активности АО на основе чисел Бетти.

Достоверность научных результатов

Достоверность результатов подтверждается строгой теоретической основой TDA – алгебраической топологией и статистическими методами диагностики диаграмм персистентности. По результатам исследований опубликовано 11 работ, 6 из них – в рецензируемых изданиях.

Основные положения, выносимые на защиту

1. С помощью механизма ДСИ для гамма-всплесков в сильных случайных полях впервые воспроизведены основные свойства параметров функции Бэнда: положения максимумов наблюдаемых гистограмм, их форма, а также – корреляционные зависимости между различными парами параметров этой функции. Полученные результаты дают дополнительное подтверждение присутствия в источниках гамма-всплесков сильных и крайне неоднородных случайных магнитных полей.

2. Разработан и реализован метод диагностики динамических режимов Активных Областей на основе топологического анализа фотосферных случайных магнитных полей в АО. В основе метода лежит вычисление топологических инвариантов непосредственно по HMI/SDO магнитограммам.

3. Статистически доказана прогностическая эффективность предложенных топологических дескрипторов для прогноза сильных вспышек.

1 Случайные поля космологических гамма-всплесков

При определенных значениях физических параметров в астрофизических источниках, включающих спектральные параметры неоднородностей, излучение на различных типах неоднородностей может вносить значительный вклад в основной механизм излучения. Обнаружение неоднородностей различного рода в источниках излучения приводит к необходимости иных механизмов излучения, существенно отличающихся от традиционно известных для регулярных полей. Поэтому топологический анализ неоднородностей различных типов в астрофизических источниках может дать важную информацию о преобладании излучения того или иного типа. В свою очередь это позволит лучше понять физическую природу источника излучения.

Так как получить прямые наблюдения неоднородностей в астрофизических объектах зачастую не представляется возможным, возникает задача анализа неоднородностей и статического сравнения различных реализаций случайных полей в источнике излучения при 3D моделировании. Имеющиеся аналитические [12, 72] и компьютерные [30, 47, 48] модели предсказывают генерацию сильных мелкомасштабных стохастических магнитных и/или электрических полей в результате реализации различных неустойчивостей.

1.1 Резонансное переходное излучение в плазме с магнитными неоднородностями

Нетепловое излучение регистрируется для космических объектов в широком диапазоне расстояний, начиная с источников в солнечной системе, включая геопространство, до источников космологических гамма-всплесков. Оно возникает при движении быстрых, в том числе, ультрарелятивистских, ча-

стиц в неоднородной турбулентной магнитоактивной плазме. Свойства такого излучения генерируемого в турбулентной плазме существенно отличаются от случая однородной среды [70]. С одной стороны общеизвестно, что “равномерно движущаяся частица не излучает”. Однако, это утверждение относится только к случаю движения частицы в пустом пространстве без внешних полей. В реальных условиях движение частицы происходит в среде и при наличии внешних полей. В частности, наличие мелкомасштабных неоднородностей диэлектрической проницаемости среды (которые могут обеспечиваться случайными неоднородностями плотности плазмы и/или магнитного поля) приводит к генерации *переходного излучения* [28]. Данное излучение формируется фоновыми частицами в ответ на электромагнитное возмущение, вызванное быстрой частицей.

Спектр переходного излучения, генерируемого быстрыми частицами в плазме с неоднородностями *плотности* содержит мощный пик (называемый резонансным переходным излучением – РПИ) [52] вблизи электронной плазменной частоты $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi N_0 e^2 / m}$, где N_0 – концентрация тепловых электронов, e, m – заряд и масса электрона. Происхождение этого пика связано с тем, что отклик любой системы (в нашем случае – плазмы) на внешнее возмущение (быстрая частица) оказывается наибольшим в области собственных резонансных частот системы (плазменная частота). Естественно ожидать поэтому, что и в спектре переходного излучения на неоднородностях *магнитного поля* [9], будет наблюдаться аналогичный резонансный пик (который мы для краткости назовем “магнитным” РПИ – МРПИ) вблизи плазменной частоты. В этом разделе вычисляется спектр МРПИ и обсуждается его роль в ряду других конкурирующих механизмов излучения (включая обычное РПИ на неоднородностях плотности плазмы).

Вычисление интенсивности резонансного переходного излучения при наличии магнитных неоднородностей. Спектр переходного излучения может быть вычислен как интенсивность излучения тока среды $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m$, возникающего под действием поля внешней быстрой частицы [28]

$$I_{\omega, \mathbf{n}}^R = (2\pi)^6 \frac{\omega^2 \varepsilon^{1/2}}{c^3 T} \langle |\mathbf{n} \times \mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m|^2 \rangle, \quad (1.1)$$

где $I_{\omega, \mathbf{n}}^R$ – энергия, излучаемая в единицу времени в расчете на единичный интервал частот ω в единичный телесный угол, $\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ – диэлектрическая проницаемость плазмы, а $T \rightarrow \infty$ – время движения быстрой частицы, c , \mathbf{n} – скорость света и единичный вектор в направлении излучения.

Выражение (1.1) справедливо в изотропной плазме. При наличии магнитного поля (в частности, мелкомасштабных неоднородностей магнитного поля), плазма становится гиротропной (т.е. анизотропной) средой. Поэтому применимость (1.1) к вычислению излучения в плазме с магнитными неоднородностями, ограничена условием слабой гиротропии $\omega_{st} \ll \omega_{pe}$, где $\omega_{st}^2 = e^2 \langle B_{st}^2 \rangle / (m^2 c^2)$, $\langle B_{st}^2 \rangle$ – средний квадрат величины магнитного поля (включающего, вообще говоря, как случайную, так и регулярную составляющие), которое в дальнейшем будем считать выполненным.

Величину Фурье-компоненты тока $\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m$ электронов среды, наводимого полем $\mathbf{E}_{q_0, \mathbf{q}}^Q$ быстрой частицы в плазме с неоднородностями плотности и магнитного поля, легко найти из решения кинетического уравнения по теории возмущений [28]:

$$\mathbf{j}_{\omega, \mathbf{k}}^m = \frac{ie^2}{m\omega} \int d^3 \mathbf{k}' d\omega' \mathbf{E}_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q \delta N_{\omega', \mathbf{k}'} - \frac{e^3 N_0}{m^2 c \omega^2} \int d^3 \mathbf{k}' d\omega' [\mathbf{E}_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^Q \times \delta \mathbf{B}_{\omega', \mathbf{k}'}], \quad (1.2)$$

где $\delta N_{\omega', \mathbf{k}'}$, $\delta \mathbf{B}_{\omega', \mathbf{k}'}$ – Фурье-компоненты неоднородностей плотности и магнитного поля плазмы.

РПИ, генерируемое током, зависящим от неоднородностей плотности (первый член в (1.2)), рассматривалось в [52], тогда как переходное излучение на магнитных неоднородностях на частотах много выше плазменной частоты исследовано в [9]; здесь же мы проанализируем резонансный вклад в излучение на частотах вблизи плазменной частоты, связанный со вторым членом в (1.2). Обратим внимание на то, что векторная структура двух членов в (1.2) не одинакова (поскольку δN – скалярная, а $\delta \mathbf{V}$ – векторная величина), поэтому результаты, полученные для РПИ на неоднородностях плотности не могут быть механически перенесены на случай неоднородностей магнитного поля.

Квазистационарное электрическое поле $\mathbf{E}_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}' }^Q$, создаваемое током частицы, движущейся равномерно и прямолинейно,

$$\mathbf{j}_{q_0, \mathbf{q}}^Q = \frac{Q\mathbf{v}}{(2\pi)^3} \delta(q_0 - \mathbf{q}\mathbf{v}), \quad (1.3)$$

где Q и v – заряд и скорость частицы, выражается через этот ток посредством продольной и поперечной функций Грина. Однако, поскольку вблизи ω_{pe} фазовая скорость поперечных волн v_{ph} значительно больше скорости света c , то $v/v_{ph} \ll 1$, и для любых $v < c$ при вычислении РПИ с точностью до $(v/v_{ph})^2$ достаточно ограничиться вкладом продольного по отношению к вектору $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ поля быстрой частицы (то есть учитывать только продольную функцию Грина). При этом [52], диэлектрическая проницаемость, входящая в выражение для продольного поля, должна быть записана с учетом пространственной дисперсии плазмы $\varepsilon(q_0, \mathbf{q}) = \varepsilon(q_0) - 3\mathbf{q}^2 d^2 + i\varepsilon''$, где $d = v_T/\omega_{pe}$ – дебаевский радиус экранирования, v_T – тепловая скорость плазменных электронов, а ε'' – мнимая часть диэлектрической проницаемости. Таким образом $\mathbf{E}_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}' }^{Q,i}$

принимает вид:

$$E_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{Q,i} = -\frac{4\pi i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')_i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')_j}{\omega(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2([\varepsilon(\omega-\omega')-3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 d^2]^2+i\varepsilon'')} \times \\ \times \frac{Qv_j}{(2\pi)^3} \delta[(\omega-\omega')-(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{v}]. \quad (1.4)$$

Подставив (1.2) в (1.1), представим интенсивность излучения в виде:

$$I_{\omega, \mathbf{n}}^R = (2\pi)^6 \frac{\omega^2 \varepsilon^{1/2}}{c^3 T} e_{\alpha k_1 l_1} e_{\alpha k_2 l_2} \left(\frac{e^3 N_0}{m^2 c \omega^2} \right)^2 \times \\ \times \int d^3 k' d^3 k'' d\omega' d\omega'' n_{k_1} n_{k_2}^* e_{l_1 \beta_1 \gamma_1} e_{l_2 \beta_2 \gamma_2} E_{\omega-\omega', \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{Q, \beta_1} E_{\omega-\omega'', \mathbf{k}-\mathbf{k}''}^{*Q, \beta_2} \left\langle \delta B_{\omega', \mathbf{k}'}^{\gamma_1} \delta B_{\omega'', \mathbf{k}''}^{* \gamma_2} \right\rangle. \quad (1.5)$$

Здесь * означает комплексное сопряжение, а $d^3 k' = k'^2 dk' d\varphi d \cos \vartheta$ (ϑ – угол между вектором \mathbf{k}' и скоростью частицы \mathbf{v}).

Результат преобразований (1.5) зависит от статистических свойств случайного магнитного поля. Рассмотрим модель, в которой случайное поле является квазистатическим, статистически однородным и состоит из случайных волн с *изотропным* распределением волновых векторов:

$$\left\langle \delta \mathbf{B}_{\mathbf{k}', \omega'}^\alpha, \delta \mathbf{B}_{\mathbf{k}'', \omega''}^{\beta*} \right\rangle = |\delta B|_{\mathbf{k}'}^2 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \delta(\omega' - \omega'') \delta(\omega') \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k'_\alpha k'_\beta}{k'^2} \right). \quad (1.6)$$

Тогда суммирование тензорных множителей в (1.5) по дважды повторяющимся индексам [71], приводит к результату:

$$I_{\omega, \mathbf{n}}^R = \frac{8\pi Q^2 \varepsilon^{1/2}}{c^5} \left(\frac{e^3 N_0}{m^2 \omega} \right)^2 \int k'^2 dk' \frac{|\delta B|_{\mathbf{k}'}^2 \omega^2 \delta[\omega - (\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{v}]}{(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^4([\varepsilon(\omega)-3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 d^2]^2 + \varepsilon'')} \times \\ \times \{[\mathbf{n} \times \mathbf{k}']^2 + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}')^2\} d\varphi d \cos \vartheta. \quad (1.7)$$

В полученном выражении, в отличие от формулы (180) работы [53], появился дополнительный положительный член, удвоенный квадрат скалярного произведения в фигурных скобках, по сравнению с аналогичным выражением для случая РПИ на неоднородностях плотности, что является след-

ствием различия микроскопических токов плазмы, порождаемых неоднородностями ее плотности и магнитного поля соответственно.

При вычислениях излучения с принятой точностью (до $(v/v_{ph})^2$) следует пренебречь \mathbf{k} по сравнению с \mathbf{k}' везде, кроме резонансного знаменателя, т.к. на рассматриваемых частотах $\varepsilon(\omega) \ll 1$ и $k \ll k'$ (длина волны много больше характерных размеров неоднородностей). Проинтегрируем полученное выражение по азимутальному углу вектора \mathbf{k}' и по углам вектора \mathbf{n} с учетом δ -функции (фактически, вместо интегрирования по углам вектора \mathbf{n} удобно выполнить интегрирование по углам вектора скорости частицы, которые в изотропном случае эквивалентны друг другу), т.е. найдем энергию, излучаемую в полный телесный угол

$$I_{\omega}^R = \frac{32\pi^3 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{vc^5} \left(\frac{e^3 N_0}{m^2 \omega} \right)^2 \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'} |\delta B|_{\mathbf{k}'}^2 \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{(1 + \cos^2 \vartheta) d \cos \vartheta}{[\varepsilon(\omega) + 6kk'd^2 \cos \vartheta - 3k'^2 d^2]^2 + \varepsilon''^2}. \quad (1.8)$$

После разбиения подынтегрального выражения на простейшие дроби и интегрирования по углу ϑ получим

$$I_{\omega}^R = \frac{32\pi^3 e^6 N_0^2 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{v\omega^2 m^4 c^5} \int_{\omega/v}^{\infty} \frac{dk'}{k'} |\delta B|_{\mathbf{k}'}^2 \frac{\mathcal{L}_{\vartheta}}{36k^2 k'^2 d^4}, \quad (1.9)$$

где

$$\mathcal{L}_{\vartheta} = 2 - a \ln \frac{(1+a)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} + \frac{1+a^2-b^2}{b} \times \\ \times \left[\pi \Theta(1-a^2-b^2) + \arctan \frac{2b}{a^2+b^2-1} \right], \quad (1.10)$$

$a = [3k'^2 d^2 - \varepsilon(\omega)] / (6kk'd^2)$, $b = \varepsilon'' / (6kk'd^2)$. Выражение для \mathcal{L}_{ϑ} отличается от аналогичного (J_{ϑ} в (181) [53]) для РПИ на неоднородностях плотности знаком у членов, образовавшихся в результате интегрирования $\cos^2 \vartheta$ в числителе дроби (1.8), поскольку, в отличие от (181) [53], в числителе (1.8) стоит не $(1 - \cos^2 \vartheta)$, а $(1 + \cos^2 \vartheta)$.

Упростим полученное выражение \mathcal{L}_ϑ (1.10) способом, предложенным в [52], т.е. будем рассматривать только ту область параметров, в которой не выполнено условие излучения Вавилова-Черенкова для продольных плазменных волн, $a^2 + b^2 \geq 1$. В этом случае член $\pi\Theta(1 - a^2 - b^2)$ выпадает, так что

$$\mathcal{L}_\vartheta = 2 - a \ln \frac{(1+a)^2 + b^2}{(a-1)^2 + b^2} + \frac{1+a^2-b^2}{b} \arctan \frac{2b}{a^2 + b^2 - 1}. \quad (1.11)$$

Разложим полученное выражение для \mathcal{L}_ϑ в ряд по степеням $1/a$, который сходится в круге $1/|a| < 1$ (см. Приложение 2 в [71]):

$$\mathcal{L}_\vartheta \simeq \left(\frac{8}{3a^2} + \frac{16}{5a^4} \right) \Theta(a^2 - 1). \quad (1.12)$$

Второй член этого разложения составляет не более 70% от первого члена. На самом деле, учет лишь первого члена обеспечивает по крайней мере вдвое лучшую точность (ошибка не превышает 35%), поскольку при $|a| > 1$ вклад в интегралы члена $1/a^4$ оказывается существенно меньше вклада члена $1/a^2$. Поэтому в дальнейшем ограничимся учетом лишь первого члена разложения (1.12).

Подстановка первого члена (1.12) в (1.9) позволяет выразить интенсивность МРПИ через однократный интеграл от спектра магнитных неоднородностей

$$I_\omega^R = \frac{256\pi^3 e^6 N_0^2 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{3\nu\omega^2 m^4 c^5} \int_{\omega/\nu}^{\infty} \frac{dk'}{k'} \frac{|\delta B|_{\mathbf{k}'}^2 \Theta(a^2 - 1)}{[3k'^2 d^2 - \varepsilon(\omega)]^2}. \quad (1.13)$$

Последующие вычисления не могут быть выполнены в общем виде, а требуют конкретизации спектра случайного магнитного поля. Рассмотрим степенную зависимость

$$|\delta B|_{\mathbf{k}'}^2 = \frac{\nu - 1}{4\pi} \frac{k_0^{\nu-1} \langle \Delta B^2 \rangle}{k'^{\nu+2}}, \quad (1.14)$$

аналогичную спектру неоднородностей плотности, использованному в [53],

тогда

$$I_{\omega}^R = \frac{64\pi^2(\nu-1)}{27} \frac{e^6 N_0^2 Q^2 \varepsilon^{1/2}}{v\omega^2 m^4 c^5} k_0^{\nu-1} \langle \Delta B^2 \rangle \left(\frac{v}{\omega}\right)^{\nu+2} \left(\frac{v}{\omega d}\right)^4 \int_1^{\infty} \frac{d\mu \Theta(a^2-1)}{\mu^{\nu+3}(\mu^2-\alpha)^2}, \quad (1.15)$$

где $\alpha = \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{v}{\omega d}\right)^2 \approx \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{v}{v_T}\right)^2$, $\mu = \frac{k'v}{\omega}$.

Аналогичное *по структуре* выражение (но с другим множителем перед интегралом) анализировалось в [52], поэтому мы можем сразу представить интенсивность МРПИ в форме, сходной с интенсивностью РПИ [53]:

$$I_{\omega}^R = \frac{64\pi^2(\nu-1)}{3(\nu+2)} \frac{e^6 N_0^2 Q^2}{v\omega^2 m^4 c^5} k_0^{\nu-1} \langle \Delta B^2 \rangle \left(\frac{v}{\omega}\right)^{\nu+2} F(\alpha), \quad (1.16)$$

где

$$F(\alpha) \equiv \frac{(\nu+2)\varepsilon^{1/2}}{9} \left(\frac{v}{\omega d}\right)^4 \int_1^{\infty} \frac{d\mu \Theta(a^2-1)}{\mu^{\nu+3}(\mu^2-\alpha)^2}. \quad (1.17)$$

Приближенное выражение для функции $F(\alpha)$, вычисленное аналитически для случая $\nu = 2$, приведено в [53], уравнение (189), здесь же выпишем более точное выражение:

$$\begin{aligned} F(\alpha) = & 2\varepsilon^{-3/2} \left(\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{1-\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{\alpha} \ln(1-\alpha) \right] \Theta(\omega_1 - \omega) + \right. \\ & + \frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{2 \cdot 3^{1/2} v_T} \left[1 - \frac{6 \cdot 3^{1/2} v_T}{c} \ln \frac{c}{2 \cdot 3^{1/2} v_T} + \frac{5 \cdot 3^{1/2} v_T}{c} \right] \Theta(\omega - \omega_1) \Theta(\omega_2 - \omega) + \\ & \left. + \left[\frac{1}{\alpha^2} \frac{c}{3^{1/2} v_T} + \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} + 2 + \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{\alpha} \ln(\alpha-1) \right\} \right] \Theta(\omega - \omega_2) \right), \quad (1.18) \end{aligned}$$

где

$$\omega_{1,2} = \omega_{pe} \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{v_T}{v}\right)^2 \left(1 \mp \frac{2 \cdot 3^{1/2} v_T}{c} \right) \right], \quad (1.19)$$

Выражение (1.18) отличается от формулы (189) работы [53] наличием слагаемого $5 \cdot 3^{1/2} v_T / c$ при $\omega_1 < \omega < \omega_2$, вклад которого имеет тот же порядок малости, что и вклад логарифмического члена. На рис. 1.1 приведены графики функции I_{ω}^R , определяющей спектр МРПИ, построенные по аналитической

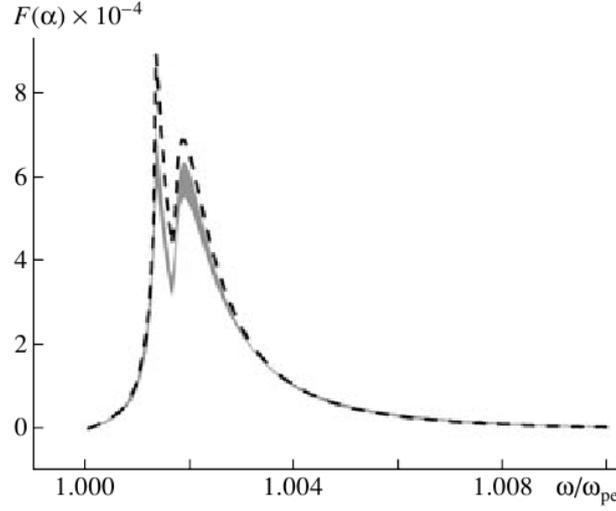


Рис. 1.1: Функция $F(\alpha)$, которая определяет частотную зависимость спектра излучения полученного с использованием аналитической формулы 1.18 при $\nu = 2$ (пунктирная линия) и путем численного интегрирования выражения (1.17) при различных $\nu = 1.2 - 2.0$ (серая область). Нижняя и верхняя границы этого региона соответствуют $\nu = 1.2$ и 2.0 , соответственно. Численные кривые лежат систематически ниже аналитической кривой. В наших вычислениях мы использовали $v_T/c = 0.0315$ и $v/c = 0.995$.

формуле (1.18) при $\nu = 2$ и в результате численного интегрирования (1.17) при разных значениях ν . Графики нормированы на интенсивность

$$I_0 = \frac{64\pi^2(\nu - 1) e^6 N_0^2 Q^2 \langle \Delta B^2 \rangle v^{\nu+1}}{3(\nu + 2) m^4 \omega_p^5 c^{\nu+4}}, \quad (1.20)$$

где использовано представление $k_0 = \omega_{pe}/c$. Если в плазме наряду с неоднородностями магнитного поля присутствуют и неоднородности плотности, то результирующее переходное излучение представляется суммой соответствующих выражений (1.16) и (186) в [53]. В случае одинаковых спектральных индексов ν в спектрах неоднородностей плотности и магнитного поля, полное РПИ принимает особенно простой и наглядный вид:

$$I_\omega^R = \frac{32\pi^2 e^4 Q^2}{3(\nu + 2) \nu m^2 c^3} k_0^{\nu-1} \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^{\nu+2} N_0^2 \left[\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N_0^2} + \frac{2e^2 \langle \Delta B^2 \rangle}{\omega^2 m^2 c^2} \right] F(\alpha). \quad (1.21)$$

Отметим, что при наличии регулярного магнитного поля в плазме, фор-

ма спектра РПИ (описываемого в изотропной плазме функцией $F(\alpha)$) существенно меняется [53] и становится различной для обыкновенных и необыкновенных волн. Формально это изменение описывается заменой функции $F(\alpha)$ на функцию $n_\sigma \Phi(\alpha, \beta)$, ур-е (210) [53], где $\beta = \frac{\omega_{Be}^2}{3\omega_{pe}^2} \left(\frac{v}{v_T}\right)^2$, n_σ – показатель преломления для обыкновенной ($\sigma = o$) и необыкновенной ($\sigma = x$) волн, что, разумеется, справедливо как для РПИ, так и для МРПИ. Поэтому, при учете регулярного магнитного поля вместо (1.21) для интенсивности излучения каждой из двух собственных мод получим:

$$I_\omega^{R,\sigma} = \frac{16\pi^2 e^4 Q^2 n_\sigma}{3(\nu + 2) \nu m^2 c^3} k_0^{\nu-1} \left(\frac{v}{\omega}\right)^{\nu+2} N_0^2 \left[\frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N_0^2} + 2 \frac{\langle \Delta B^2 \rangle}{B_0^2} \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \right] \Phi(\alpha, \beta), \quad (1.22)$$

где B_0 – величина регулярного магнитного поля, а $\omega_{Be} = eB_0/(mc)$ – соответствующая циклотронная частота.

Из (1.22) легко понять, когда интенсивность МРПИ будет преобладать над РПИ на неоднородностях плотности среды. Учитывая, что в области пика РПИ $\omega \approx \omega_{pe}$, найдем:

$$\frac{\langle \Delta B^2 \rangle}{B_0^2} \geq \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_{Be}^2} \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N_0^2}. \quad (1.23)$$

Как уже указывалось в начале этого раздела, проведенное рассмотрение справедливо в случае слабой гиротропии плазмы, $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$, поэтому величина $\omega_{pe}^2/(2\omega_{Be}^2)$, входящая в условие доминирования МРПИ над РПИ, представляет собой большой множитель. Это значит, что при $\frac{\langle \Delta B^2 \rangle}{B_0^2} \sim \frac{\langle \Delta N^2 \rangle}{N_0^2}$ (что характерно, например, для магнитозвуковых волн), основной вклад в излучение будет связан с неоднородностями плотности среды, а не с неоднородностями магнитного поля. Однако, в плазме может существовать турбулентность, для которой условие (1.23) выполняется. Это, в частности, относится к турбулентности, состоящей из альфвеновских волн.

Если нетепловые неоднородности плотности в плазме отсутствуют, то интенсивность РПИ определяется уровнем тепловых флуктуаций (соответствующий радиационный процесс обычно называют резонансным поляризационным тормозным излучением, РПТИ [6, 53]). Сравнение интенсивности МРПИ и РПТИ [53] показывает, что МРПИ будет доминировать при

$$\frac{e^2 \langle \Delta B^2 \rangle}{m^2 c^2 \omega_{pe}^2} \geq \frac{3}{32\pi^2 N_0} \left(\frac{\omega_{pe}}{v} \right)^3. \quad (1.24)$$

Например, для параметров, реализующихся в солнечных вспышках

$$N_0 = 5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}, \quad v \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}, \quad B_0 \approx 100 \text{ Gs}, \quad (1.25)$$

получим

$$\frac{\langle \Delta B^2 \rangle}{B_0^2} \geq 3 \cdot 10^{-9}. \quad (1.26)$$

что соответствует среднеквадратичной величине флуктуации магнитного поля $\sqrt{\langle \Delta B^2 \rangle}$ порядка 10^{-2} Гс.

Таким образом, МРПИ, связанное с магнитными неоднородностями, является важным механизмом электромагнитного излучения, доминирующим на частотах вблизи плазменной частоты при благоприятной комбинации соответствующих параметров.

Обсуждение результатов. Полученные формулы для интенсивности РПИ быстрых частиц в плазме с неоднородностями плотности и неоднородностями магнитного поля актуальны в связи с их многочисленными астрофизическими приложениями. Например, недавно было надежно установлено, что РПИ ответственно за генерацию низкочастотной (дециметровой) компоненты примерно 10% континуальных микроволновых всплесков солнечного радиоизлучения [46]. По-видимому, переходное излучение ответственно и за другие типы естественного радиоизлучения, в частности, генерируемые в

геопространстве [37]. Какой из каналов РПИ – на неоднородностях плотности или магнитного поля – доминирует в каждом конкретном случае, определяется, как было показано, относительной интенсивностью соответствующих неоднородностей.

Кроме этого, в последние несколько лет было продемонстрировано (в частности, посредством детального численного моделирования) [33, 48, 63], что взаимодействие релятивистских ударных волн (друг с другом и с внешней средой) в источниках гамма-всплесков (и ряде других объектов с сильным энерговыделением) приводит к генерации весьма мощных и крайне мелко-масштабных магнитных полей. Взаимодействие быстрых частиц с указанными неоднородностями приводит к генерации электромагнитного излучения, в частности, переходным механизмом, включая МРПИ. Как ясно из формы спектра МРПИ, соответствующий мощный пик формируется если фоновая тепловая плазма является нерелятивистской ($v_T \ll c$). Подчеркнем, что в случае источников космологических гамма-всплесков фоновая плазма обычно оказывается релятивистской, так что наряду с резонансным, важную роль может играть и обычное (нерезонансное) переходное излучение, свойства которого в экстремальных условиях космологических гамма-всплесков требуют специального исследования.

Надежная идентификация этого излучения быстрых частиц на неоднородностях магнитного поля в астрофизических объектах (также как и идентификация РПИ в солнечных всплесках [46]) приведет к получению принципиально новой информации о физических процессах и условиях, в которых они протекают, и позволит существенно уточнить и конкретизировать модели указанных источников.

1.2 Случайные магнитные поля космологических гамма-всплесков

Модель фаербола космологических гамма-всплесков предполагает генерацию множественных внутренних ударных волн, которые затем эффективно ускоряют заряженные частицы и генерируют магнитные и электрические поля. Ускоренные частицы испытывают диффузию в пространстве при взаимодействии с этими случайными полями и излучают так называемое диффузионное синхротронное излучение (ДСИ). В этом разделе будут представлены результаты всестороннего моделирования спектральных параметров гамма-всплесков в концепции модели фаербола/внутренних ударных волн.

Введение. В качестве стандартной модели механизма основного излучения гамма-всплесков общепринятой считается модель фаербола [43, 44]. Предполагается, что центральная машина продуцирует релятивистские ударные волны, которые затем взаимодействуют друг с другом. Возникновение ударных волн требует эффективного механизма поглощения энергии. В случае бесстолкновительной плазмы наиболее эффективным путем диссипации энергии является генерация флуктуирующих электромагнитных полей и ускорение заряженных частиц до высоких энергий.

На микроскопическом уровне генерация поля может вызываться двухпоточковыми неустойчивостями, связанными с распространением ударных волн [12, 30, 33, 48], а ускорение частиц происходит за счет их взаимодействия со случайными и регулярными электромагнитными полями сгенерированными ударными волнами [47, 51, 62]. Надежно установлено, что магнитные и электрические поля сгенерированные ударными волнами несут в себе значительную случайную компоненту на различных пространственных масштабах.

Присутствие случайной компоненты существенно важно для генерации

нетеплового излучения от соответствующих объектов. Действительно, в отличие от случая движения в регулярном магнитном поле, ускоренные ударными волнами заряженные частицы двигаясь через плазму со случайными электромагнитными полями испытывают случайные Лоренцовы ускорения и таким образом следуют по случайным траекториям наподобии случайной диффузии. Соответственно, частицы генерируют диффузионное излучение, чей спектр зависит от типа поля (магнитное или электрическое) и от распределения спектральной энергии поля по пространственным масштабам [21, 25, 30, 70]. Мы будем использовать аналитическую теорию ДСИ, предложенную в работе [70]. Альтернативным путем вычисления излучения является использование численного PIC (particle-in-cell) моделирования [30, 47], которое подтверждает аналитические результаты в общем пространстве параметров. Однако, широкий динамический диапазон параметров модели в случае сильного магнитного поля и большого углового рассеяния излучающих электронов находится за пределами возможностей современных PIC вычислений, что подтверждает выбор предпочтения хорошо проверенной аналитической теории.

Индивидуальные спектры основного излучения гамма-всплесков обычно хорошо фитируются феноменологической функцией Бэнда [8], которая представляет собой два плавно соединенных степенных закона при энергии излома: $(\alpha - \beta)E_0$. Функция Бэнда содержит четыре независимых параметра: α , β , E_0 и A , где α и β – показатели двух степенных функций, а A – нормировочная постоянная. В литературе эти параметры получили следующие названия: α – низкоэнергетичный спектральный индекс (low energy power law index), β – высокоэнергетичный спектральный индекс (high energy power law index), а $E_{break} = (\alpha - \beta)E_0$ – энергия излома (break energy). В работе [21] бы-

ла продемонстрирована способность ДСИ генерировать спектры излучения совместимые с обычно наблюдаемыми от гамма-всплесков [8]. До сих пор не ясным оставалась, однако, совместимость спектра ДСИ с наблюдаемым распределением спектральных параметров гамма-всплесков [68] и какие диапазоны физических параметров гамма-всплесков необходимы для соответствия теоретических и наблюдаемых спектров.

Модель. Мы использовали стандартную модель фаербола согласно которой основное излучение гамма-всплеска генерируется в коллимированном джете, выброшенному с релятивистской скоростью v из центрального механизма. В общей концепции внутренних ударных волн/фаербола мы будем полагать бинарные столкновения релятивистских внутренних ударных волн при единичном эпизоде основного излучения гамма-всплеска. Мы планируем оценить и подобрать набор стандартных (“средних”) значений параметров соответствующих наиболее общим свойствам гамма-всплесков и затем рассмотреть совместимость некоторого разумного распределения этих стандартных параметров с более детальными свойствами рассматриваемого класса событий в целом – статистические распределения спектральных параметров гамма-всплесков и кросс корреляции между ними.

Основные параметры источника гамма-всплесков. Из анализа так называемой “проблемы компактности” установлено, что объемный Лоренц-фактор распространяющегося джета $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, где c – скорость света, должен быть гораздо больше единицы, $\Gamma \gtrsim 100$ [51, 62]. Максимальное значение Γ не достаточно точно известно из наблюдений; будучи консервативными, мы не будем рассматривать значения более 1000. Полная кинетическая энергия джета $E \sim 10^{51}$ эрг [43] совместно с Γ дает возможность оценить полное число выброшенных из центрального механизма частиц. Мы предпо-

лагаем, что основная масса джета содержится в протонах и следовательно полное число выброшенных протонов оценивается как

$$N = E/(\Gamma m_p c^2) \sim 10^{51}, \quad (1.27)$$

где m_p – масса протона.

Плотность частиц определяется по формуле

$$n = \frac{N}{V}, \quad (1.28)$$

где V – объем джета. Полный объем, занятый веществом джета, является конусом с углом открытия Ω_{ang} (для моделирования мы предполагаем постоянное значение $\Omega_{ang} = 10^{-3}$ ср) и выражается как $V_{cone} = (4\pi/3)\Omega_{ang}R^3$. Объем сферического слоя с толщиной Δ этого конуса будет $V = (4\pi/3)\Omega_{ang}(R^3 - (R - \Delta)^3)$. Этот объем не имеет существенных ограничений из наблюдательных данных, однако его оценка может быть сделана с использованием наблюдаемого временного масштаба δt варибельности излучения. Действительно, для релятивистки движущегося источника (напр. см. [51]) мы имеем $\delta t \approx \Delta/(2c\Gamma^2)$; соответственно, в подвижной системе отсчета мы можем оценить

$$V' = \frac{4\pi}{3}\Omega_{ang}\Delta'^3 = \frac{4\pi}{3}\Omega_{ang}8c^3\Gamma^3\delta t^3. \quad (1.29)$$

Тогда плотность частиц в подвижной системе отсчета будет

$$n' = \frac{N}{V'}. \quad (1.30)$$

Спектр излучения для каждого набора параметров источника вычисляется в подвижной системе отсчета. Затем частота излучения преобразуется в систему отсчета наблюдателя принимая во внимание релятивистское движение источника и космологическое расширение Вселенной:

$$\omega' = \frac{\omega}{2\Gamma}(1 + z). \quad (1.31)$$

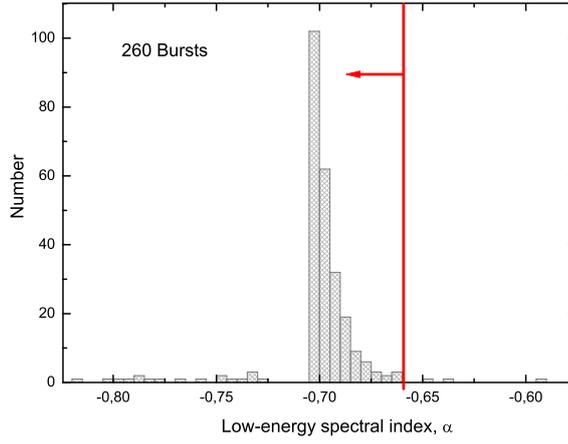


Рис. 1.2: Гистограмма распределения нижнего спектрального индекса α , полученная в модели генерации излучения синхротронным механизмом. Отметим, что большинство индексов имеют меньшие значения по сравнению со значением у асимптоты, $-2/3$ (“линия смерти”).

Рассмотрим энергетические характеристики (см. например [62]) составляющих, ответственных за генерацию излучения. Одна из них – магнитное поле:

$$\epsilon_B \equiv \frac{U_B}{w} = \frac{B^2}{8\pi w}, \quad (1.32)$$

где $w = \Gamma n m_p c^2$ – кинетическая плотность энергии расширяющейся оболочки, и $U_B = B^2/8\pi$ – плотность энергии магнитного поля.

Вторая составляющая – ускоренные электроны:

$$\epsilon_e \equiv \frac{U_e}{w} = \frac{\gamma \xi_e m_e}{\Gamma m_p}, \quad (1.33)$$

где $U_e = n_e \gamma \xi_e m_e c^2$ – плотность энергии ускоренных электронов, ξ_e – доля электронов, которые подверглись ускорению ($\xi_e < 1$ в случае когда только часть электронов ускоряется [14], а другие остаются “холодными”, и $\xi_e > 1$, если e^+e^- -пары генерируются в источнике излучения), γ – характерный Лоренц-фактор ускоренных электронов и m_e – масса электрона.

Стандартное синхротронное излучение. Стандартные механизмы излучения, которые встречаются во многих типах астрофизических ис-

точников, не могут адекватно описать наблюдательные данные по гамма-всплескам. Например синхротронный механизм (см. рис. 1.2) в оптически тонком источнике и при отсутствии эффекта плотности не может дать фотонные спектральные индексы большие, чем $-2/3$ (что соответствует спектру излучения отдельного электрона на низких частотах). Узкий асимметричный вид гистограммы распределения с пиком вблизи $\alpha = -0.7$ находится в противоречии с наблюдаемыми гистограммами [68, 69], которые представляют собой относительно симметричное широкое распределение с пиком вблизи $\alpha \approx -1$. Требуется более детальное моделирование, чтобы достигнуть согласованности между наблюдениями и теорией электромагнитного излучения в источниках гамма-всплесков. Обращаясь к этой проблеме, Medvedev и Loeb [42] предположили, что излучение быстрых электронов движущихся в мелкомасштабном случайном магнитном поле может обладать спектральными свойствами совместимыми с теми, что наблюдаются от гамма-всплесков. Соответствующий процесс диффузионного синхротронного излучения (ДСИ) в контексте гамма-всплесков позднее был количественно исследован Флейшманом [21] в рамках общей концепции стохастической теории излучения предложенной Флейшманом и Топтыгиным [70].

Теория ДСИ: основные уравнения и параметры. С целью данного более детального моделирования отметим, что в областях источников гамма-всплесков где происходит взаимодействие внутренних ударных волн, ускорение заряженных частиц и двух-поточковые неустойчивости генерируют случайные электрические и/или магнитные поля высоких энергий весьма вероятно генерация ДСИ [21]. Приведем здесь основные уравнения описывающие ДСИ и параметры определяющие его спектр. Мы предполагаем здесь, что энергия случайного магнитного поля имеет степенное распределение по

пространственным масштабам:

$$K_{\alpha\beta}(q_0, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}K(q_0, \mathbf{q}) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) = \frac{1}{2}K(\mathbf{q})\delta(q_0 - q_0(\mathbf{q})) \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right), \quad (1.34)$$

где

$$K(\mathbf{q}) = \frac{A_\nu}{q^{\nu+2}}, \quad A_\nu = a_\nu q_{min}^{\nu-1} \langle B_{st}^2 \rangle = \frac{(\nu-1)q_{min}^{\nu-1} \langle B_{st}^2 \rangle}{4\pi}, \quad q_{min} < q < q_{max}, \quad (1.35)$$

ν – спектральный индекс распределения случайного поля, спектр $K(\mathbf{q})$ нормирован на d^3q так, что

$$\int_{q_{min}}^{q_{max}} K(\mathbf{q})d^3q = \langle B_{st}^2 \rangle, \quad q_{min} \ll q_{max}, \quad \nu > 1, \quad (1.36)$$

$\langle B_{st}^2 \rangle$ – средний квадрат случайного магнитного поля.

Для заданного спектра случайного магнитного поля, спектр ДСИ [21] с применением теории возмущений может быть вычислен аналитически:

$$I_\omega^\perp = \frac{8Q^2\gamma_*^2}{3\pi c}q(\omega), \quad (1.37)$$

где $\gamma_*^{-2} = \gamma^{-2} + \omega_{pe}^2/\omega$,

$$q(\omega) = \begin{cases} \frac{3 \times 2^{\nu-1} \pi^2 (\nu^2 + 3\nu + 4) a_\nu \omega_0^{\nu-1} \omega_{st}^2 \gamma_*^{2\nu}}{\nu(\nu+2)^2(\nu+3) \omega^\nu \gamma^2} & \omega < \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0}, \text{ или } \omega > 2\gamma^2\omega_0, \\ \frac{\pi^2 a_\nu \omega_{st}^2}{2\nu\omega_0\gamma^2} \left[1 + \frac{3\nu(\nu+1)\omega^2}{4(\nu+2)^2\gamma_*^4\omega_0^2} - \frac{\nu\omega^3}{2(\nu+3)\gamma_*^6\omega_0^3} + \frac{3\nu\omega^2}{4(\nu+2)\gamma_*^4\omega_0^2} \ln\left(\frac{\omega}{2\gamma_*^2 k_0 c}\right) \right] & \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_0} \leq \omega \leq 2\gamma^2\omega_0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Эти выражения описывают ДСИ частиц движущихся вдоль почти прямолинейной траектории и справедливы таким образом только для относительно слабого магнитного поля. Однако, при взаимодействии внутренних ударных волн зачастую может возникать сильное случайное магнитное поле. Для вычисления спектра в таких случаях требуется более общий подход, не использующий теорию возмущений [21, 23], в котором спектр ДСИ имеет вид

$$I_\omega = \frac{8Q^2q(\omega)}{3\pi c} \gamma^2 \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2 \gamma^2}{\omega^2} \right)^{-1} \Phi(s), \quad (1.39)$$

где $\Phi(s) = 24s^2 \int_0^\infty dt \exp(-2st) \sin(2st) [\coth t - (1/t)]$ – функция Мигдала от параметра $s = (1/8\gamma^2)[\omega/q(\omega)]^{1/2}[1 + (\omega_{pe}^2\gamma^2/\omega^2)]$; частота рассеяния $q(\omega)$ определена в выражении 1.38.

Таким образом интенсивность ДСИ зависит от следующих (микроскопических) параметров: электронная плазменная частота ω_{pe} , гирочастота ω_{st} (определяемая случайным полем), частота $\omega_0 = q_{min}c$ задаваемая основным масштабом $L_{max} = 2\pi/q_{min}$ спектра случайного поля, спектральный индекс ν случайного поля, Лоренц-фактор γ излучающих релятивистских электронов, а также число (и спектральное распределение) излучающих электронов.

Связь между микроскопическими и макроскопическими параметрами гамма-всплесков. Одной из сложностей прямого моделирования спектров гамма-всплесков является их зависимость от микроскопических параметров, которые изначально неизвестны. Однако, мы можем связать многие из них с макроскопическими и феноменологическими параметрами в источнике гамма-всплесков представленными в разделе 1.2.

Электронная плазменная частота определяется плотностью электронов n_e :

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}. \quad (1.40)$$

Здесь мы должны воспользоваться плотностью электронов (1.30), найденной из оценок общего числа частиц (1.27) и объема источника (1.29), и тогда

$$\begin{aligned} \omega_{pe} &= \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m_e V'}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m_e V'} \frac{E}{\Gamma m_p c^2}} = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m_e} \frac{3}{4\pi \Omega_{ang} R^3} \frac{E}{\Gamma m_p c^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{3e^2 E}{m_c \Omega_{ang} (2c\delta t \Gamma)^3 \Gamma m_p c^2}} = \sqrt{\frac{3e^2 E}{8m_c \Omega_{ang} \delta t^3 \Gamma^4 m_p c^5}}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где e и m_e – заряд и масса электрона, m_p – масса протона, δt – наблюдаемое время варибельности излучения, Ω_{ang} – угол раскрытия джета и E – объемная кинетическая энергия оболочки. Следовательно, плазменная частота

выражается через некоторое число величин, которые либо могут наблюдаться напрямую (например как δt) либо оцениваются из наблюдений (например E , Γ и Ω_{ang}).

Схожим образом, стохастическая гирочастота

$$\omega_{st}^2 = \frac{e^2 \langle B_{st}^2 \rangle}{m_e^2 c^2} \quad (1.42)$$

определяется величиной случайного магнитного поля и может быть выражена через феноменологический параметр ϵ_B , описывающий энергию запасенную в магнитном поле:

$$\omega_{st} = \sqrt{\frac{8\pi e^2 \epsilon_B E}{m_e^2 c^2 V'}} = \sqrt{\frac{8\pi e^2 \epsilon_B E}{m_e^2 c^2 (4\pi/3) \Omega_{ang} (2c\delta t \Gamma)^3}} = \sqrt{\frac{3e^2 \epsilon_B E}{4m_e^2 c^5 \Gamma^3 \delta t^3}}. \quad (1.43)$$

Третий параметр спектра ДСИ также имеет размерность частоты, $\omega_0 = q_{min} c = 2\pi c / L_{max}$, и определяется основным масштабом распределения случайного магнитного поля. Для задания его значения мы введем безразмерный параметр модели $\Lambda = \omega_0 / \omega_{st}$ такой, что

$$\omega_0 = \Lambda \omega_{st}. \quad (1.44)$$

Тогда $\Lambda \gg 1$ соответствует слабому случайному полю, а $\Lambda \ll 1$ – сильному случайному полю.

Наконец, распределение энергии магнитного поля по пространственным масштабам определяется спектральным индексом ν . У нас отсутствуют достоверные ограничения на его значения из наблюдений гамма-всплесков, однако, используя аналогию с другими астрофизическими объектами и лабораторными опытами, мы выберем $1 < \nu < 2$.

Рассмотрим параметры, характеризующие излучающие релятивистские элнетроны. Типичный Лоренц-фактор γ электронов при помощи уравнения (1.33) может быть выражен через параметры ϵ_e , ξ_e и Γ :

$$\gamma = \frac{\epsilon_e \Gamma m_p}{\xi_e m_e}. \quad (1.45)$$

Следовательно, индивидуальный спектр ДСИ полностью определяется заданием следующих 10 параметров: E , Γ , ϵ_e , ϵ_B , Λ , ξ_e , δt , Ω_{ang} , ν и z .

Стратегия моделирования. Для дальнейшего моделирования спектров гамма-всплесков с использованием модели ДСИ отметим, что спектральные параметры α , β и E_{break} фитирующей функции Бэнда демонстрируют одномодовые распределения. В терминах статистических свойств источников гамма-всплесков из указанного следует, что физические параметры определяются схожими теоретическими распределениями.

В работе выполнено статистическое моделирование спектра гамма-всплесков. Для этого мы были сгенерировано большое число (~ 5000) спектров ДСИ с разными комбинациями входных параметров. Более точно, 10 независимых параметров случайным образом выбирались из соответствующих теоретических распределений, а зависимые параметры вычислялись по формулам из параграфа 1.2.

Выбор значений независимых параметров, где это было возможно, основывался на данных наблюдений и стандартную модель фаербола. Например, мы предположили, что полная энергия оболочки $E \sim 10^{51}$ эрг, угол открытия джета $\Omega_{ang} \sim 10^{-3}$ ср и $\Gamma \sim 300$ (>100) имеют нормальное распределения около своих средних значений. Опираясь на данные наблюдений из [45], временной масштаб вариабельности спектров излучения δt мы задали логнормальным распределением со средним $\langle \delta t \rangle = 10^0$ с и стандартным отклонением $\sigma(\delta t) = 10^{0.3}$ с. Параметры ϵ_e и ϵ_B плохо определены наблюдениями – мы выбирали их значительно меньше единицы во всех случаях. Для спектрального индекса ν , для которого также отсутствуют указания из наблюдательных данных, мы пробовали несколько различных распределений. С целью уменьшения числа свободных параметров модели, те из них,

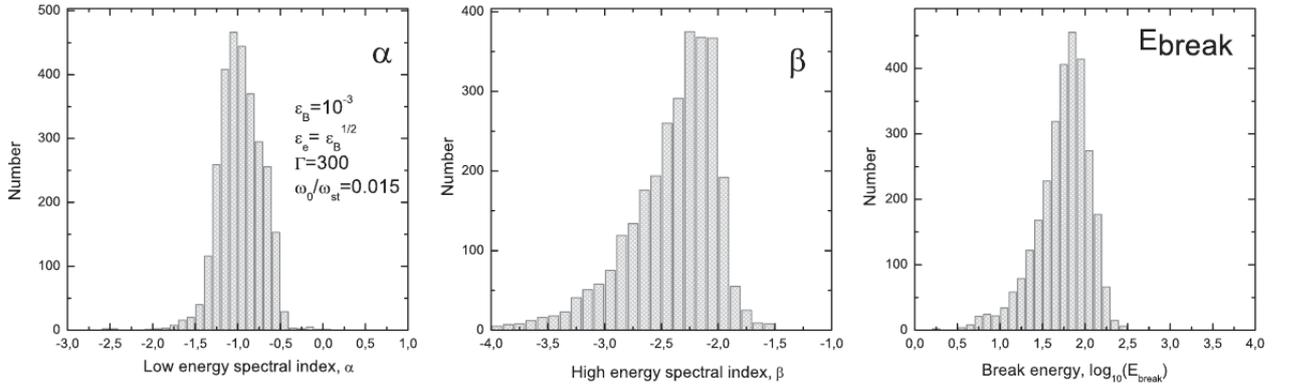


Рис. 1.3: Пример модельных распределений спектральных параметров функции Бэнда (α , β , и E_{br}), полученных в модели ДСИ в присутствии сильного случайного поля.

которые оказывают слабое влияние на форму спектра ДСИ мы определяли константами: $z = 2$ и $\xi_e = 1$.

Результаты. Модель ДСИ в слабом случайном магнитном поле (режим дрожания – jitter regime), возмущенном или невозмущенном, не может предложить согласующегося фитирования наблюдаемых гистограмм параметра α . Это согласуется с уже имеющейся независимой критикой режима дрожания: Kumar с коллегами [36] отмечали, что он может заключать в себе нереалистично высокий уровень обратного Комптоновского излучения. Более того, в работе [35] авторы указывают на то, что случай режима дрожания противоречит требуемой высокой эффективностью ускорения частиц на ударных волнах и, что необходимы сильные магнитные флуктуации для самосогласованного ускорения электронов до энергий, производимых гамма-всплесками.

Следовательно, модель слабого случайного поля (режим дрожания) была отвергнута [26] и мы обратились к анализу случая сильного магнитного поля. В соответствии с работами [22, 23, 35] в этом случае возникают новые асимптоты, которые дают более широкое распределение для α . В режиме сильного поля, модель распределения α зависит от адаптированного ν распределения, которое, в рамках адаптированной модели напрямую связано с распреде-

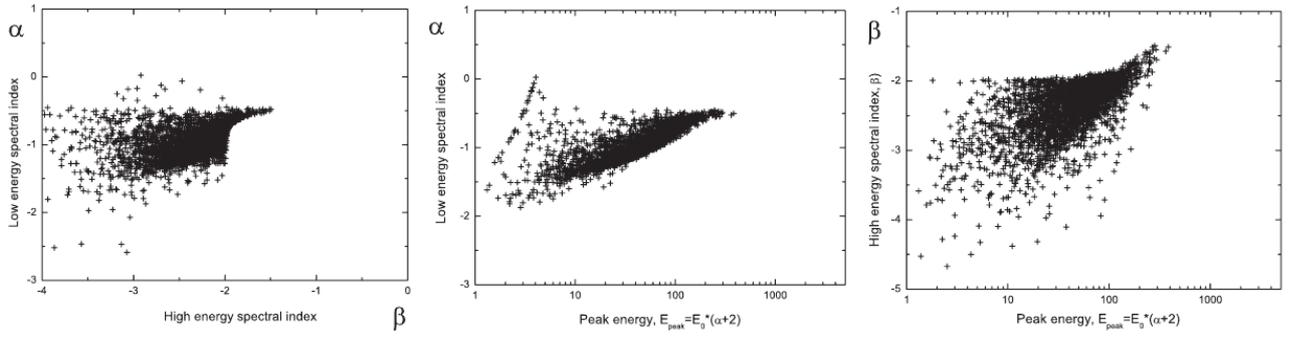


Рис. 1.4: Кросс-корреляции модельных спектральных параметров Бэнда α и β (слева); α и $E_{\text{peak}} = (\alpha + 2)E_{\text{br}}$ (в середине); и β и $E_{\text{peak}} = (\alpha + 2)E_{\text{br}}$ (справа).

лением β , т.к. $\beta = -\nu - 1$. Результаты моделирования (Рис. 1.3) для такой модели находятся в значительном согласии с наблюдениями. Действительно, α гистограмма симметрична и демонстрирует максимум в правильном месте, $\alpha = -1$, и его ширина сравнима с той, что наблюдается для наблюдаемых гистограмм. Гистограмма значений параметра β почти полностью повторяет наблюдаемую, демонстрируя корректную асимметричную форму и положение пика в правильной точке $\beta = -2.2$. Гистограмма энергии излома E_{br} также согласуется с наблюдательными данными, обладая правильной формой и диапазоном значений.

Кросс-корреляции между спектральными параметрами полученными из модели (Рис. 1.4) могут быть сопоставлены с Рис. 31 из работы [69]. Как и в наблюдательных данных, спектральные индексы α и β не сильно коррелированы, хотя в модельном графике область $-0.5 < \alpha < 0$ имеет большую плотность в сравнении с наблюдательным графиком [69]. Два других графика находятся в значительном согласии с наблюдательными графиками кросс-корреляций, представленных в [69].

1.3 Выводы к Главе 1

Разработанная модель естественным образом способна воспроизвести наблюдаемые гистограммы распределения параметров Бэнда и их кросс-корреляции, что является значительным успехом модели не возмущенного ДСИ в присутствии сильного случайного магнитного поля.

Полученные результаты дают дополнительное подтверждение к выводам в более ранних работах о сложности структуры случайных магнитных полей в источниках гамма-всплесков. Для анализа и сравнения результатов численного моделирования таких полей в качестве дескрипторов в работе предлагается использование топологических инвариантов.

Данная часть работы выполнена под руководством д.ф.-м.н. Флейшмана Григория Давыдовича (NJIT, USA).

2 Элементы топологического анализа данных (TDA) для 2D случайных полей

В этой главе изложены основные идеи вычислительной топологии, используемые для вычисления предлагаемых дескрипторов описания сложности случайных магнитных полей астрофизических объектов.

Архитектура случайного поля задается его корреляционной структурой, которая, в свою очередь, определяется строением локальных окрестностей максимумов: как много и на каком уровне появляются пики, близкие к конкретному максимуму; до какого уровня максимумы поля остаются уединенными в некоторой локальной окрестности. Удобно наделить множество пиков в окрестности максимума некоторой простой структурой их вершин, ребер и граней [27]. Такую структуру называют симплициальной. Тогда анализ структуры поля можно перевести на язык алгебраической топологии и фильтрации симплексов для отсортированных по высоте максимумов поля.

Геометрическим симплексом называется выпуклая оболочка непустого и аффинно независимого множества точек в \mathbb{R}^n , где n – размерность симплекса, совпадающая с максимальной размерностью граней, входящей в симплекс.

Конечный набор K геометрических симплексов, замкнутый относительно отношения граней: если $\sigma, \tau \in K$, то $\sigma \cap \tau$ либо пусто, либо является общей гранью обоих симплексов, называется *геометрическим симплициальным комплексом*.

Нервом $NrvS$ называют множество вершин комплекса и его симплексы, для которых вершины имеют непустое пересечение. Если множества выпуклы (например, он триангулируем) то нерв гомотопен их объединению (теорема о нерве).

Комплекс Чеха $\check{C}ech(X)$ – это нерв объединения окрестностей (шаров) $B(x, r)$ радиуса $r \geq 0$ для множества точек $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$. Пересечение двух шаров стягивается к ребру, соединяющему пару точек, пересечение трех шаров – к треугольной грани и т.д. Теорема о нерве утверждает, что $\check{C}ech(X) \sim \bigcap_{x \in X} B(x, r)$.

Цепью является формальная сумма упорядоченных симплексов $c = \sum_i a_i \sigma_i$ одинаковой размерности p . Коэффициенты a_i – элементы абелевой группы. Множество цепей размерности p симплициального комплекса K образуют группу $C_p = C_p(K)$. Если a_i – элементы поля, то C_p – векторное пространство.

Граничным отображением называется линейное отображение $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$, определяемого для симплекса $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_p]$ отображением в альтернированную сумму его $(p-1)$ -мерных граней $\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \hat{\sigma}_i$, где $\hat{\sigma}_i$ – симплекс σ_i без вершины v_i . Отметим, что $\partial_0[v_i] = 0$ для любого i . Легко показать, что $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ для любого p .

Граничное отображение является гомоморфизмом. Цепной комплекс генерируется гомоморфизмами групп $\dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots$. Ядро гомоморфизма образуют циклы: $Z_p = \ker \partial_p$, а его образ называют границей: $B_p = \text{img} \partial_{p+1}$. Очевидно, $C_p \supset Z_p \supset B_p$.

Два цикла гомологичны $Z_p \sim Z'_p$ если они отличаются на границу: $Z_p - Z'_p = \partial_{p+1} B_{p+1}$. Классом p -гомологий называют максимальный набор гомологичных циклов Z_p в комплексе. Они образуют p -гомологическую группу: $H_p = Z_p / B_p$. Если H_p векторное пространство, то его размерность называют p -м числом Бетти $\beta_p = \dim H_p$. Альтернированная сумма чисел Бетти дает характеристику Эйлера: $\chi(X) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p \beta_p(X)$.

Фильтрацией симплициального комплекса K называют пару $K, f : K \rightarrow$

\mathbb{R} , где $f(\sigma) \leq f(\tau)$ если σ грань τ . Множество субуровней для величин $r \in \mathbb{R}$ это $f^{-1}(-\infty, r)$, образованное субкомплексами K . Для $r_0 < r_1 < \dots < r_m$ такими субкомплексами являются множества $K_i = f^{-1}(-\infty, r_i)$ фильтрации или флага $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$.

В процессе фильтрации топологические свойства проявляются на одном уровне фильтрации и исчезают на другом. Взаимное расположение этих уровней определяет понятие *персистентности*. Время жизни каждого отдельного пика (его персистентность) можно измерить длиной интервала, на котором он остается изолированным (такие интервалы называют баркодами). Удобно изображать их на плоскости, используя начало и конец баркода в качестве координат точек. Результатом будет множество точек, лежащих выше диагонали, которой соответствуют баркоды нулевой длины. При этом диаграмма персистентности является мультимножеством, где одна точка может представлять одно и более топологических свойств.

Непосредственно алгоритм построения диаграммы персистентности был впервые предложен в книге [17] и содержит два последовательных этапа: построения фильтрации симплексов (для двумерных изображений в роли симплексов выступают вершины, рёбра и треугольники) и вычисления чисел Бетти по уже построенной фильтрации. Реализация алгоритма в виде скрипта Matlab приведена в Приложении.

2.1 Алгоритм топологической фильтрации

Идея фильтрации заключена в следующем [17]. Рассмотрим фрагмент достаточно регулярного случайного поля $F(t)$, заданного в ограниченной области $t \in M \subset \mathbb{R}^2$ как поверхность, вложенную в трехмерное евклидово пространство. Обозначим множество выбросов (excursion set) $F(t)$ за уровень u

как $A_u = \{t \in M | F(t) \in [u, \infty]\}$. Для достаточно регулярного поля преобразы $F^{-1}(u)$ принадлежат кольцу выпуклости (convex ring). Напомним, что кольцом выпуклости называют множество выпуклых множеств, замкнутое относительно операций их конечного объединения и пересечения [64]. Легко видеть, что если $u \geq v$, то $A_u \subseteq A_v$. Таким образом, сканирование поля по высоте горизонтальной плоскостью, параллельной носителю M приводит к вложенной (nested) последовательности множеств выбросов, так что выбросы более высокого уровня содержатся в выбросах более низкого уровня [2]. Множества A_u для разных u будет представлено кластерами «островов», образованных пикселями принадлежащими A_u . Некоторые острова могут содержать «дыры», т.е. пиксели, для которых значения поля ниже уровня u . Подсчитаем для каждого интервала $[u_1, u_2]$ высот число компонент связности β_0 и число дыр $-\beta_1$ в них. Эти числа будут меняться, если интервал содержит критическую точку функции F – минимум, максимум или седло. Легко понять, что минимум и седло увеличивают число Бетти 0 на единицу, а максимум уменьшает его. Существенным для описанного анализа является понятие *персистентности*, т.е. «время» жизни компоненты или дыры, измеренное диапазоном уровней на которых рождается компонента и уровнем, на котором она «умирает».

Для того чтобы облегчить понимание, мы практически не используем терминологию групп гомологий. Ради простоты опишем алгоритм [41], на примере анализа черно-белого изображения размером 6x6 пикселей, содержащего 256 градаций серого (рис. 2.1). Представим, что на Рис. 2.1 слева изображен горный ландшафт с заснеженными вершинами. Справа приведен его растр с численными значениями интенсивностей. Пусть каждый пиксель, который не принадлежит границе, имеет окрестность Мура, т. е. 8 соседей.

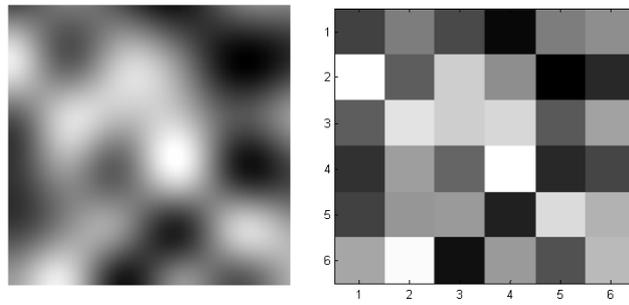


Рис. 2.1: Тестовое сглаженное изображение (*слева*); *справа* – растр с значениями уровня серого

Упорядочим по возрастанию интенсивности все пиксели и будем подниматься вертикально вверх «от подножья гор к вершинам», руководствуясь списком высот. Заметим, что достаточно проходить не все 256 уровней серого, а лишь те, на которых появляются новые вершины. При появлении новой вершины в окрестности уже существующей (отмеченной) вершины мы соединяем их ребром, которое добавляем в фильтрацию. Значения функции на ребре определим как $f[ab] = \max\{f[a], f[b]\}$. Как только в фильтрации появляются три соседние точки, соединяем их треугольником, значение функции на треугольнике определим как $f[abc] = \max\{f[a], f[b], f[c]\}$. В результате получится фильтрация, состоящая из вершин, ребер и треугольников, упорядоченных по возрастанию функции и по размерности симплекса в случае равных значений функции. При одинаковых значениях в фильтрации приоритет получает та вершина, которая находится на изображении выше и левее. На основе полученной фильтрации можно вычислять числа Бетти. Ради простоты будем использовать латиницу для чисел Бетти: $B_0 \equiv \beta_0$, $B_1 \equiv \beta_1$. Каждая новая вершина добавляет новую компоненту связности ($B_0 = B_0 + 1$), а ребро, в том случае, если оно соединяет разные компоненты, наоборот, убивает компоненту ($B_0 = B_0 - 1$). Появление треугольника означает появление дыры B_1 . В процессе вычисления можно определить время жизни (перси-

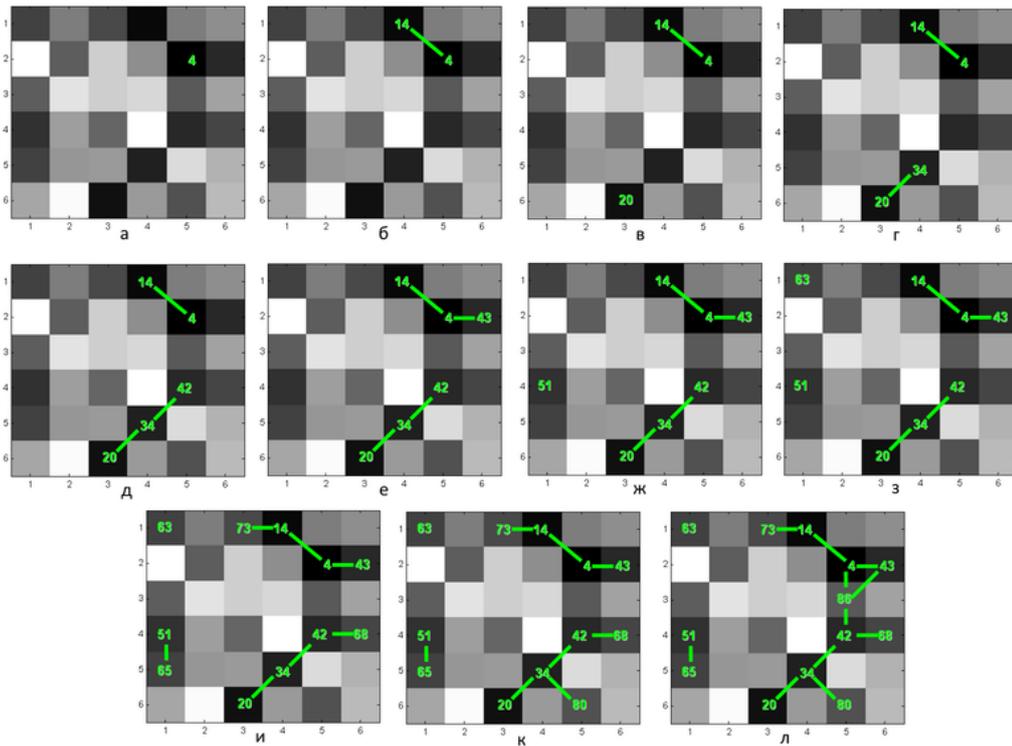


Рис. 2.2: Алгоритм вычисления чисел B_0

стенность) каждой из компонент B_0 , измеряя его разностью высот уровней на появления компоненты и ее слияния с уже существующим кластером. Иллюстрация алгоритма дана на Рис. 2.2. При сканировании по высоте первая вершина появляется на уровне 4 (Рис. 2.2 а). В список вносится ее уровень как момент рождения компоненты B_0 . Следующая по величине вершина с уровнем 14 не дает новой компоненты (Рис. 2.2 б), т. к. она является соседней по Муру с более ранней вершиной, на уровне 4. Мы записываем в список фильтрации образовавшееся ребро (4-14). Следующая по уровню интенсивность 20 порождает новую компоненту (рис. 2.2 в), поскольку она не граничит ни с какой из существующих компонент. Она заносится в список с моментом ее рождения 20. Следуя той же стратегии, движемся по панелям 2г-2к, исследуя время рождения и смерти компонент. На панели Рис. 2.2л с $B_0 = 3$ при вершине 86 образуется первый «треугольник» (4-43-86). Мы записываем

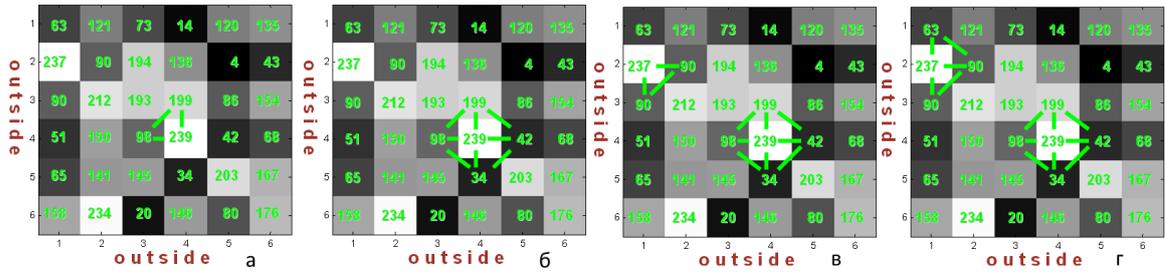


Рис. 2.3: Алгоритм вычисления чисел $B1$

координату его рождения и приписываем ему индивидуальный номер. Для подсчета количества дыр, или $B1$, и их времени жизни нам будет нужна та же фильтрация, только проходить ее нужно в обратном порядке, сверху вниз, и добавить один внешний элемент «outside». В процессе обратного прохождение при появлении каждого треугольника добавляется дыра $B1 = B1 + 1$; при появлении ребра, которое является смежным для двух треугольников, ограничивающих разные дыры, компонента умирает $B1 = B1 - 1$. В случае появления ребра на границе дыра также погибает. Формально мы считаем, что она соединяется с внешним треугольником «outside». В этом процессе, конечно, возникают и дыры, образованные треугольниками и многоугольниками, с ребрами не принадлежащими границам изображения. По аналогии с компонентами, мы можем определить персистентность каждой дыры $B1$. Иллюстрация этого этапа алгоритма дана на Рис. 2.3.

Начнем спускаться от максимального значения 256 вниз по списку уже существующих треугольников. На уровне 239 появляется 4 треугольника в следующей последовательности: вначале треугольник (199-98-239), который был последним в фильтрации снизу вверх (Рис. 2.3а). Затем вокруг точки 239 образуются еще три треугольника (Рис. 2.3б). Так как все они имеют общие ребра, на уровне 239 мы имеем всего одну дыру, т. е. $B1 = 1$. На уровне 237 (Рис. 2.3в) в фильтрации появляется новый треугольник (237-90-

90). Однако, на этом же уровне появляется ребро (237-90), которое сливает треугольник с наружным окружением – outside. Оно является более старшим, и треугольник становится частью окружения outside и не дает вклада в $B1$. На этом же уровне (рис. 2.3г) появляется соседний треугольник (237-90-63), который имеет общую грань с треугольником (237-90-90), поэтому также не вносит вклада в компоненту $B1$. Продолжая движение вниз, мы получим полную фильтрацию для дыр. На выходе алгоритм записывает в отдельные текстовые файлы координаты рождения и смерти компонент $B0$ и $B1$. Они позволяют построить диаграмму персистентности. Кроме того, количество компонент связности и дыр для каждого уровня сохраняется в отдельный файл.

2.2 Анализ и сравнение диаграмм персистентности. Расстояние в пространстве диаграмм персистентности

Стандартным представлением чисел Бетти является диаграмма персистентности, представляющие собой облако точек в координатах рождение-смерть, характеризующих время рождения и смерти компонент. Главной проблемой представления данных в такой форме является сложность их статистического анализа. Стохастическая природа большинства входных данных, для анализа которых используются методы вычислительной топологии, обуславливает необходимость работать с большим количеством диаграмм, представляющими некоторое распределение или процесс. Вычисления расстояний между диаграммами персистентности их средних значений и дисперсий требует большого количества вычислений. Альтернативные подходы к решению этой сложности переопределяют персистентные диаграммы как некоторые суммирующие функционалы, лежащие в Гильбертовом пространстве. В ка-

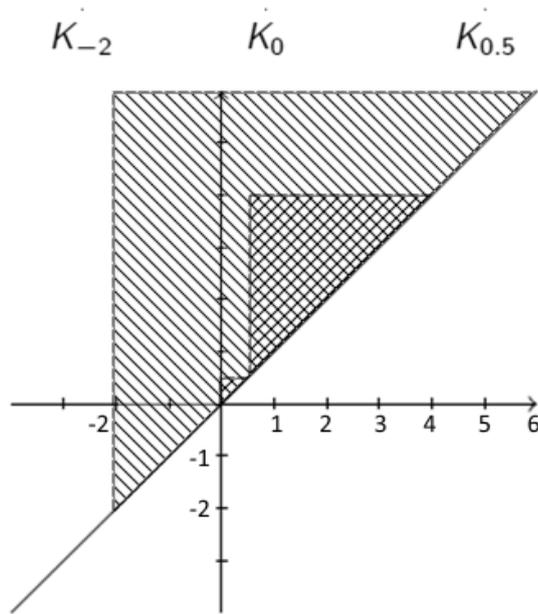


Рис. 2.4: Построение ранговых функций в пространстве диаграммы персистентности.

честве таких функционалов наибольшее распространения получили персистентные ландшафты [13], ранговые функции [59] и персистентные изображения [50]. Остановимся более подробно на двух представлениях диаграмм персистентности, которые нам понадобятся в дальнейшем.

2.3 Ранговые функции

Katherina Turner в работе [59] предложила меру сравнения, основанную на ранговых функциях. Этот инструмент хорошо известен в непараметрической статистике. Речь идет о задании ранговой функции в пространстве диаграммы персистентности $\beta_k\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x < y\} \rightarrow \mathbb{Z}$. Так для каждой точки на плоскости $\beta_k(x, y)$ определяет число топологических свойств, которые родились к моменту времени x и все еще живы в момент y . Для каждой точки диаграммы персистентности определяются область правее и ниже ее, простирающаяся вплоть до диагонали, которой присваивается значение ранга на единицу большее, чем всем другим областям. Данная процедура выпол-

няется для всех точек диаграммы персистентности и полученные в результате ранговые функции задают границы областей разных рангов. На Рис. 2.4 наиболее удаленная точка диаграммы персистентности с координатами $(-2, 6)$ делит пространство на выделенную область с рангом 1 (показана диагональной штриховкой) и остальное пространство, вне нее, с рангом 0 (показано белым). Далее для точек $(0, 0.5)$ и $(0.5, 4)$ на диаграмме персистентности, тем же способом, задаются области с рангом 2 (на рисунке заштрихованы диагональной сеткой). Turner предложила называть функции, задающие эти области на плоскости, *ранговыми функциями*. Так, ранг функции в произвольной точке на плоскости показывает количество точек диаграммы персистентности левее и выше ее. При таком определении ранговые функции диаграммы персистентности изменятся лишь незначительно (на 1), при добавлении в диаграмму персистентности долгоживущей компоненты. Сдвинутся не все ранги, а изменятся лишь величина значения функции на 1.

Ранговые функции в качестве дескрипторов АО позволяют сократить число используемых независимых параметров фотосферного магнитного поля для построения прогноза вспышечной активности до двух (Ранговые функции компонент Бетти 0 и Бетти 1 с дискретным разбиением на равномерной сетке), при этом не теряя информации о топологической структуре магнитного поля. Важным свойством метода описания магнитограмм с помощью топологических параметров (диаграмм персистентности) является их устойчивость к изменениям пространственного масштаба области наблюдения и разрешающей способности прибора. Примеры ранговых функций для магнитограммы активной области AR11158 для разных дпредставлены на рис. 2.5.

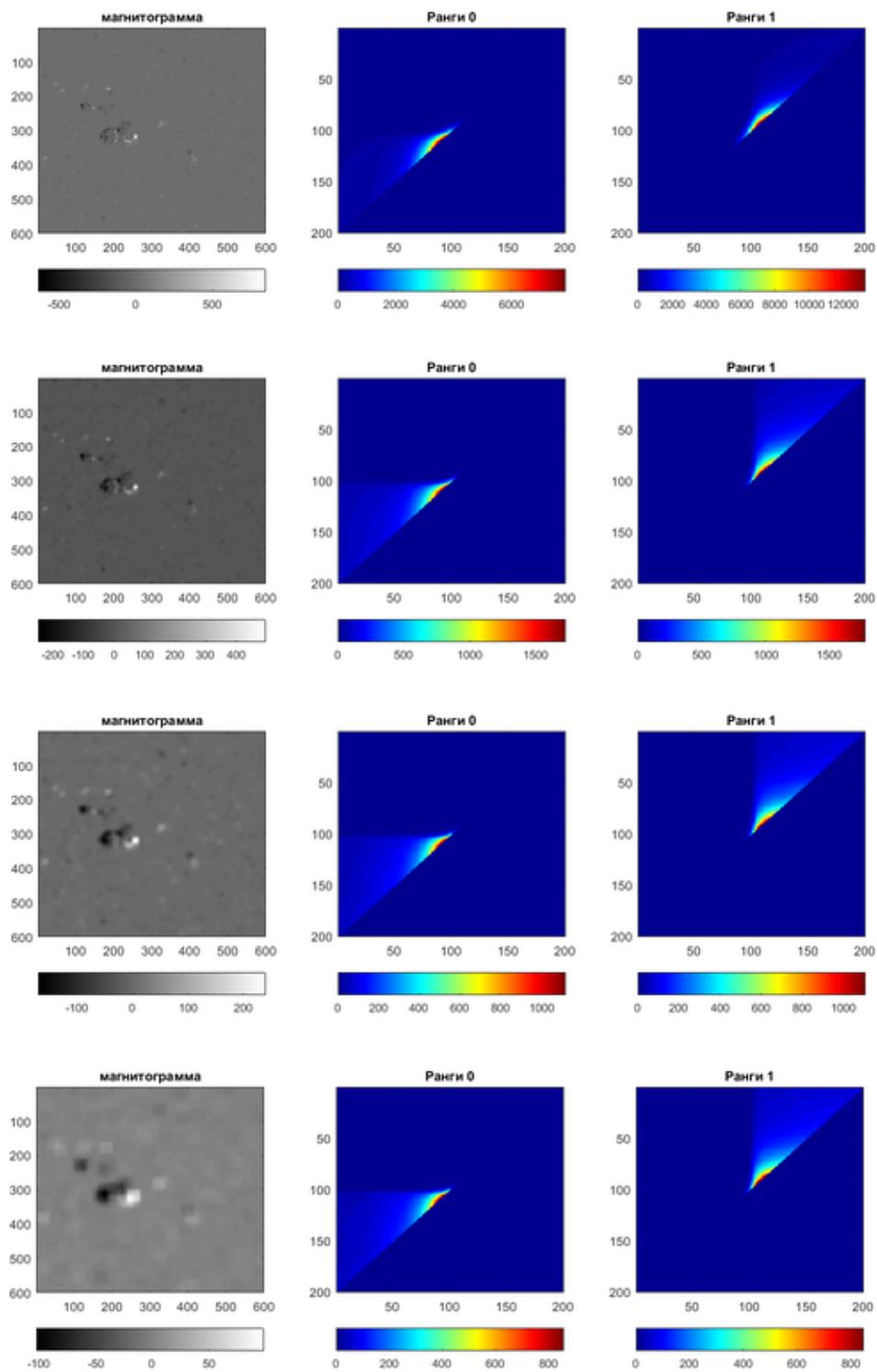


Рис. 2.5: Построение ранговых функций для магнитограммы АО 11158 с разным пространственным разрешением

2.4 Персистентные изображения

Современное развитие топологии, растущий общий интерес к анализу данных, привели к росту интереса к методам обработки данных, распознаванию образов и машинному обучению. Для задач построения связи топологического анализа данных и машинного обучения удобным инструментом являются персистентные изображения, впервые предложенные [50].

Персистентные изображения получаются путем преобразования диаграммы персистентности в интегрируемую функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. В качестве такой функции G_p , выберем сумму Гауссовых функций, которая представляет собой сумму вкладов набора гауссовых ядер, центры которых помещены в каждую точку (x, y) диаграммы персистентности. Для дискретизации G_p пространство диаграммы персистентности покрывается равномерной сеткой. Изображение может быть получено вычислением интеграла от G_p по каждой ячейке сетки. Значение интеграла в каждой ячейке дает пиксель изображения. Такая «векторизация» диаграммы персистентности несет в себе новое средство для сравнения диаграмм между собой, включая разнообразные метрики для вычисления расстояний между векторами конечной длины и широкий диапазон техник машинного обучения. Предположим, что каждая точка (b_x, b_y) в диаграмме персистентности является центром двумерного нормального распределения. Располагая гауссиан в каждой точке исходной диаграммы персистентности мы накладываем равномерную сетку. Интеграл от суммы всех гауссиан по площади ячейки сетки становится пикселем персистентного изображения. Формально определим значение $I(p)$ в каждом пикселе p изображения:

$$I(p) = \iint_p \sum_{(b_x, b_y) \in B} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-b_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} dy dx, \quad (2.1)$$

где σ_x и σ_y дисперсии гауссианы по оси x и y соответственно. Предполагается отсутствие кросс-корреляций. В дальнейшем для задачи построения классификатора будем использовать симметричные распределения с $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$. Вспоминая о том, что персистентная диаграмма может содержать множество точек с одинаковыми координатами, мы допускаем присутствие в сумме нескольких гауссиан с одинаковым центром. Точки расположенные вблизи от диагонали (которые зачастую являются шумом) и далекие от диагонали точки (которые представляют основной сигнал) вносят вклад в персистентные изображения с одинаковым весом. В случае сильно зашумленного исходного изображения, множество точек диаграммы персистентности созданное шумом будет столь велико, что суммирование по всем гауссианам с центрами в этих точках вымоет оставшееся небольшое число точек, которые представляют основной сигнал. С целью борьбы с эффектом шума, разумно учитывать гауссианы в сумме с весом пропорциональным расстоянию до диагонали $|\mathbf{b}| = b_y - b_x$. Такое взвешенное изображение будет иметь вид:

$$I(p) = \iint_p \sum_{(b_x, b_y) \in B} f(|\mathbf{b}|) \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(x-b_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-b_y)^2}{\sigma_y^2} \right)} dy dx, \quad (2.2)$$

где параметр $f(|\mathbf{b}|) = e^{M(|\mathbf{b}|)} - 1$ есть весовая функция, которая зависит от расстояния до диагонали. Весовая функция будет подавлять эффект шума и усиливать сигнал. Параметр M определяется интуитивно $\ln(2)/b_{max}$, где $b_{max} = \max\{|\mathbf{b}|, |\mathbf{b}| \in B\}$. Он равен 0 для точек лежащих на диагонали и становится 1 для точки диаграммы персистентности, наиболее удаленной от диагонали. В случае, когда сравниваются несколько диаграмм, в качестве величины максимального расстояния b_{max} выбирается длина наибольшего баркода среди всех диаграмм. На рис. 2.6 можно наблюдать эффект использования данного метода для подавления вклада большого числа точек

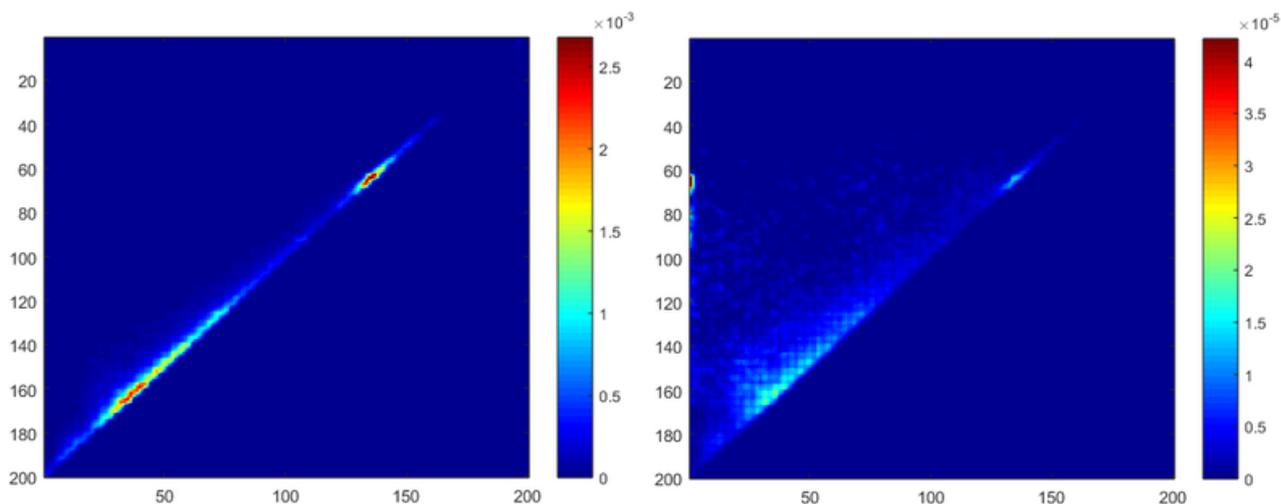


Рис. 2.6: Персистентные изображения, построенные со значением дисперсии $\sigma = 1$ и разрешением 200×200 пикселей. Слева – без экспоненциального подавления вклада точек вблизи диагонали, справа – с подавлением вклада короткоживущих компонент.

вблизи диагонали. Основными параметрами персистентных изображений является дисперсия гауссиан, разрешение изображения и весовая функция для подавления вклада короткоживущих компонент. На Рис. 2.7 построены персистентные изображения с различным значением параметра дисперсии. После исследования влияния разрешения персистентного изображения на результат распознавания и классификации, в качестве рабочего было выбрано разрешение 20×20 . На Рис. 2.8 справа персистентное изображение представлено в том виде, в котором оно может использоваться в работе классификатора Support Vector Machine.

2.5 Выводы к Главе 2

Компьютерная реализация методов вычисления и анализа топологических характеристик цифровых изображений высокого разрешения основана на *ранговых функциях* и так называемых *персистентных изображениях*. Эффективность методов проверялась на стандартных базах данных природных

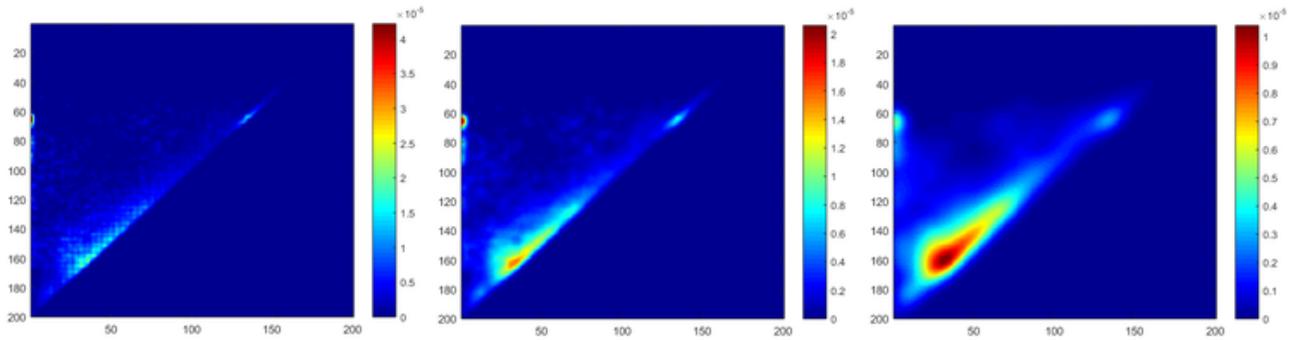


Рис. 2.7: Персистентные изображения, построенные со значением дисперсии слева направо: $\sigma = 1$, $\sigma = 2$, $\sigma = 5$ и разрешением 200×200 пикселей.

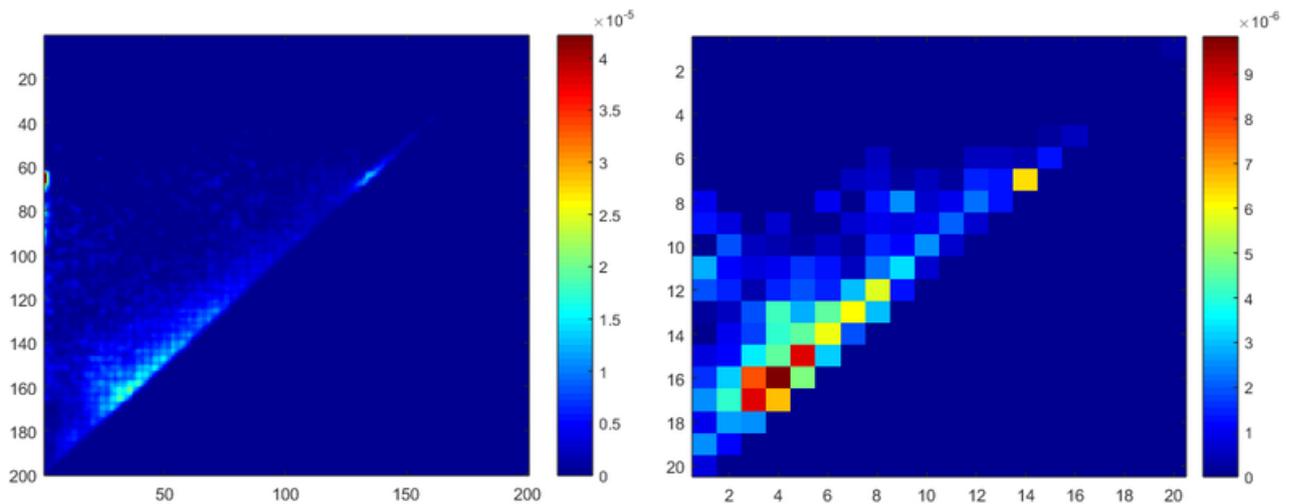


Рис. 2.8: Персистентные изображения, построенные со значением дисперсии $\sigma = 1$. Слева – персистентное изображение полученное наложением гауссова фильтра с разрешением 200×200 пикселей, а справа – это же изображение с выполненным дополнительно загроублением разрешения до 20×20 .

текстур с помощью машинного обучения бинарных и SVM классификаторов. Алгоритм тестировался на задаче распознавания текстур HR-изображений. В работе [57] показано, что использование в качестве признаков исключительно вычисляемых топологических инвариантов позволяет выполнять классификацию с относительно высокой точностью.

Для применения алгоритма фильтрации к биполярным магнитным полям солнечной фотосферы, требуется его модификация. Фильтрация должна охватывать как положительные, так и отрицательные уровни интенсивности магнитного поля, а времена рождения и смерти компонент, в смысле фильтрации, могут принимать отрицательные значения.

Кроме того, в работе было проверено свойство устойчивости дескрипторов вычислительной топологии к изменениям пространственного масштаба области наблюдения и разрешающей способности прибора несет в себе потенциальную возможность использования таких дескрипторов для анализа наблюдательных данных полученных из приборов с разным пространственным разрешением (например, MDI и HMI магнитограммы).

3 Моделирование случайных полей с предписанным законом корреляции

В данной главе рассматриваются особенности реализации алгоритмов генерации биполярных случайных полей с использованием моделей гауссовских и логнормальных полей с предписанным законом корреляции. Подходящие модели 1D и 2D стохастических полей необходимы для построения альтернативных статистик при сравнении аналитики с наблюдениями. Эта задача не является тривиальной уже в случае логнормальных полей с заданными корреляционными свойствами. Стандартная процедура Холецкого не эффективна при экспоненцировании случайной переменной, а линеаризация не гарантирует хорошей сходимости к процессу с предписанными корреляционными свойствами.

Контроль полученных численных моделей удобно осуществлять используя топологические характеристики, связанные с распределением экстремумов и седловых точек полей [5].

Исследование случайных полей представляет интерес в связи с их большой распространенностью в источниках излучения, а также с зачастую неэффективностью использования для их анализа стандартных подходов, известных для регулярных полей.

Структуры, возникающие в случайной среде, имеют несимметричный характер распределения: часто они имеют вид пиков, появляющиеся в случайных местах и в случайные моменты времени, а промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяженностью. Данное свойство получило название *перемежаемости*, и подробно описано в работе [49]. Подобные несимметричные распределения зачастую хорошо описыва-

ются логнормальным распределением (например, [4]).

Случайные поля

В этом разделе кратко изложены необходимые сведения из геометрии случайных полей. Они используются в диссертации и приведены здесь для удобства читателя. Основными источниками служили книги [3, 10, 31, 67]].

Случайным полем является стохастический процесс, принимающий значения в Евклидовом пространстве, и определенный над пространством параметров размерности не менее единицы. Случайные поля делятся по типу функции распределения, характеризующей закон распределения ординат случайной функции. Наиболее часто встречающимся в различных разделах физики законом распределения является нормальный закон (закон Гаусса). В однофазной среде с данными средними значениями плотность вероятности флуктуации подчиняется гауссовскому закону. В статистической механике распределение молекул по скоростям также подчиняется гауссовскому закону.

В теории вероятности получено гауссовское распределение для суммы многих случайных величин. Исследование гауссовских случайных величин существенно облегчается тем, что для определения закона распределения системы нормальных величин достаточно знать только их математические ожидания и их вторые моменты. Поэтому выделяют отдельный класс случайных полей, ординаты которых подчиняются нормальному закону распределения, *гауссовы случайные поля*. Несмотря на все удобства использования гауссовского распределения, далеко не все явления в природе им описываются. Примером могут служить фазовые переходы, часть которых связана со спонтанным нарушением симметрии. Кажущимся нарушением термодинамики выглядит всякое живое существо, самопроизвольное возникновение

упорядоченных структур в природе. Структуры, возникающие в случайной среде, имеют своеобразный характер: они имеют вид пиков, появляющихся в случайных местах и в случайные моменты времени. Промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяженностью. Общее название такой картины – *перемежаемость*.

Гауссовы поля

Мы начнем с краткого описания свойств Гауссова поля. Случайная переменная X принимающая вещественные значения называется *Гауссовой* (или *нормально распределенной*) если она имеет конечное среднее $\mu = E\{X\}$ и дисперсию $\sigma^2 = E\{|x - \mu|^2\} > 0$, и ее функция распределения

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right] dx. \quad (3.1)$$

Соответственно, X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right], \quad (3.2)$$

и характеристическую функцию

$$\phi_X(t) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2). \quad (3.3)$$

Будем обозначать такое распределение $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Случай $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ особенный, в этом случае X имеет *стандартное* нормальное распределение.

Свойства гауссовых полей. Математическое описание гауссова случайного поля впервые было предложено в работе Райса для анализа одномерного шума коммуникационных устройств [58]. Позднее, [40] продолжил анализ Райса и ввел описание 2-мерных случайных гауссовых полей для моделирования океанических волн.

Случайной переменной является переменная, значение которой определяется с некоторой вероятностью. Случайная переменная моделирует результат стохастического процесса, значения которого меняются случайно внутри массива переменных. Значение случайной величины не заданно, а определяется функцией распределения. Наиболее распространенная функция распределения – Гауссова функция распределения:

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.4)$$

где σ – стандартное отклонение переменной, а $\bar{x} = 0$. Случайное поле называется *гауссовым случайным полем*, если состоит из случайных переменных с гауссовым законом распределения

Гауссово поле представляет собой набор гауссовских величин в каждой точке пространства. В двух далеких точках пространства эти величины практически независимы, в близких – зависимость сильная. Расстояние, на котором происходит существенное ослабление корреляций, называется корреляционной длиной. Для того чтобы описать скалярное однородное гауссовское поле $\varphi(x, \omega)$, ω – случайный параметр, достаточно задать двухточечную корреляционную функцию $B(x - y) = \langle \varphi(x, \omega) \times \varphi(y, \omega) \rangle$; скобки означают среднее по ансамблю реализаций, т.е. по параметру ω . Эта функция полностью определяет гауссовское поле, через нее могут быть в принципе выражены все необходимые его характеристики. Функция распределения для гауссова случайного поля n переменных

$$P[f_1, \dots, f_m] = \frac{1}{(2\pi)^N (\det M)^{1/2}} \cdot \exp \left(-\frac{\sum_{i,j} \Delta f_i (M^{-1})_{ij} \Delta f_j}{2} \right), \quad (3.5)$$

где ковариационная матрица $M_{ij} = \langle \Delta f_i \Delta f_j^* \rangle$ и $\Delta f_i = f_i - \langle f_i \rangle$, $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по полю, а $*$ – комплексное сопряжение. Для двумерного случайного поля $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, вписанного в плоскость вещественных чисел,

его значение в конкретной точке $r_i \in \mathbb{R}^2$, $\forall i$ определяется функцией $f(\mathbf{r}_i)$.

Интуитивно гауссово случайное поле может быть сконструировано подбрасыванием бесконечного количества игральных кубиков ($n \rightarrow \infty$, где каждый кубик может принимать значение из \mathbb{R}). Таким образом каждой точке из $U \in \mathbb{R}^2$ приписывается случайное значение, которое имеет пространственную корреляцию с другими близкими значениями поля. Эта корреляция задается в матрице M .

Выражение (3.5) демонстрирует фундаментальное свойство гауссовых полей. Такие поля полностью определяются моментом второго порядка, через корреляционную функцию $\xi(\mathbf{r})$, заданную ковариантной матрицей M . Корреляционная функция выражает корреляцию между значениями плотности в двух любых точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , таких что

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.6)$$

Из-за трансляционной и вращательной инвариантности гауссовых случайных полей, корреляционная функция становится функцией только абсолютного расстояния между точками $r = |\mathbf{r}|$:

$$\xi(r) = \xi(|\mathbf{r}|) \equiv \langle f(\mathbf{x})f(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle. \quad (3.7)$$

Другими словами, значения матрицы – это значения автокорреляционной функции для расстояний между точками: $M_{ij} = \xi(r_{ij})$, где $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$. Для выражения вклада на разных масштабах, структура гауссова поля более ясно характеризуется спектром мощности $P(k)$. *Спектр мощности* – это преобразование Фурье автокорреляционной функции, задающее средне-квадратическое флуктуаций Фурье компонент $\hat{f}(\mathbf{k})$ поля $f(x)$,

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.8)$$

как:

$$\langle \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{f}^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^2 P(k) \delta^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (3.9)$$

где $\delta^2(\mathbf{k})$ дельта-функция Дирака, $k = |\mathbf{k}|$, и $*$ означает комплексное сопряжение. Расширяя ковариантную матрицу в пространство Фурье, спектр мощности становится преобразованием Фурье для автокорреляционной функции:

$$\xi(\mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} P(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.10)$$

для достаточно гладкого спектра.

Знание только спектра мощности достаточно для полного описания случайного гауссова поля. Так как различные физические процессы вносят корреляции в случайные поля, почти все наблюдаемые случайные поля в физике несут в себе ту или иную форму корреляции. Ниже представим примеры нескольких наиболее важных примеров спектров мощности в космологии.

Виды корреляционных функций(спектров мощности)

- *Степенной спектр мощности.* Степенной спектр – это собой класс спектров [5], с заданным спектральным индексом n

$$P(k) \propto k^n. \quad (3.11)$$

В случае $n = 1$, спектр становится масштабно инвариантным. Такой спектр известен как спектр Харрисона–Зельдовича [29, 73], и считается общепризнанным спектром мощности в раннем периоде развития вселенной. Это помогает избежать нарастания спектра при больших ($n > 1$) и малых ($n < 1$) значениях волновых чисел. Измеренный спектр ранних возмущений во Вселенной очень близок к такому спектру, $n \sim 0.96$ [20].

- *Спектр мощности LCDM* Спектр LCDM возникает в стандартной модели космологии. Он аппроксимирует наблюдаемый спектр мощности

космического микроволнового фонового излучения, так же как и спектр мощности излучения, измеренный в ближней части Вселенной с высокой точностью. Он определяется выражением [18]

$$P(k) \propto T^2(k)P_0(k), \quad (3.12)$$

где $P_0(k)$ – спектр мощности ранней Вселенной и $T(k)$ функция переноса, которая выражает физические процессы действующие на флуктуации по мере их распространения.

Задача о выбросах: среднее число выбросов случайной функции за данный уровень. Выбросом случайного поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$ называется

$$A_a(X, S) = \{\mathbf{t} \in S : X(\mathbf{t}) \geq a\}. \quad (3.13)$$

Общие формулы решения «задачи о выбросах» были получены в работе [58] и применимы для любых (дифференцируемых) случайных процессов, хотя числовой результат может быть получен просто только для нормальных (Гауссовых) процессов. Необходимо заметить, что приведенные здесь формулы для частоты выбросов за уровень получены Райсом при важных для практики ограничениях, что позднее отметил в своей работе [34]. А именно, речь идет о случае, когда уровень выброса достаточно высокий, для того, чтобы среднее время пребывания функции над уровнем « a » было бесконечно малым. Соответственно формула Райса позволяет вычислить выбросы для функций с узкими пиками вблизи вершины (гауссовы функции таким свойством обладают).

Пусть $X(t)$ – дифференцируемый случайный процесс, о свойствах которого мы никаких специальных предложений делать не будем. Пусть a – значение ординаты функции $X(t)$, «выбросы» за которое нас интересуют. Опре-

делим прежде всего вероятность того, что в бесконечно малый промежуток времени dt , непосредственно следующий за моментом времени t , произойдет выброс. Вероятность выброса в интервале времени dt может быть записана как [67]

$$\mathbf{P}[X(t) < a; X(t + dt) > a]. \quad (3.14)$$

Пользуясь условием дифференцируемости ординат случайной функции неравенства (3.14) и учитывая малость интервала времени dt с точностью до бесконечно малых второго порядка получим

$$X(t + dt) = x(t) + V(t)dt, \quad V(t) \equiv \dot{X}(t). \quad (3.15)$$

и вместо двух неравенств, обуславливающих в (3.14) наличие выброса в интервале времени dt , можно написать одно двойное неравенство

$$a - V(t)dt < X(t) < a \quad (V(t) > 0). \quad (3.16)$$

Для вычисления вероятности осуществления этого неравенства введем в рассмотрение двумерный закон распределения ординаты случайной функции и ее производной в один и тот же момент времени t

$$f(x, v|t). \quad (3.17)$$

Тогда для искомой вероятности выброса получим

$$\mathbf{P}[a - V(t)dt < X(t) < a] = \int_0^{\infty} \int_{a-vdt}^a f(x, v|t) dx dv, \quad (3.18)$$

где пределы интегрирования охватывают все значения $X(t)$ и $V(t)$, удовлетворяющие неравенству (3.16). Для установившегося процесса средняя продолжительность выброса имеет непосредственное наглядное значение. В этом случае $f(x|t) = f(x)$ и $f(x, v|t) = f(x, v)$ не зависят от времени и интегрирование по t сводится к умножению на T . Опустив дальнейшие преобразования,

которые представлены в книге [67] выпишем основные формулы для среднего числа выбросов стационарного случайного процесса в течении времени T :

$$\bar{n}_a = T \int_0^{\infty} v f(a, v) dv. \quad (3.19)$$

Полученные формулы представляют наибольший интерес для стационарных процессов, так только для установившегося процесса средняя продолжительность выброса имеет непосредственное наглядное значение. Для таких процессов $f(x|t) = f(x)$ и $f(x, v|t) = f(x, v)$ не зависят от времени и интегрирование по t сводится к умножению на T . Тогда выражение (3.19) для среднего числа выбросов в течении времени T принимает вид:

$$\bar{n}_a = T \int_0^{\infty} v f(a, v) dv. \quad (3.20)$$

Особые точки случайного гауссова поля. Рисунок 3.1 представляет собой реализацию двумерного гауссова поля показывающего важность максимумов и минимумов в структуре случайного гауссова поля. Для вычисления плотности особых точек в гауссовом случайном поле вкратце будут изложены основные шаги стандартной процедуры поиска особых точек (детально представленная в работе [54]).

Вещественное двумерное случайное гауссово поле $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ имеет особую точку в \mathbf{r}_{cri} , если в этой точке все ее частные производные обращаются в ноль. Это значит что $f_i = \frac{\partial f(\mathbf{r}_{cri})}{\partial r_i} = 0$ для $i = 1, 2$. Природа особой точки в \mathbf{r}_{cri} определяется собственными числами матрицы Гессиана (матрицы вторых производных) в \mathbf{r}_{cri} . Для решения задачи поиска собственных значений

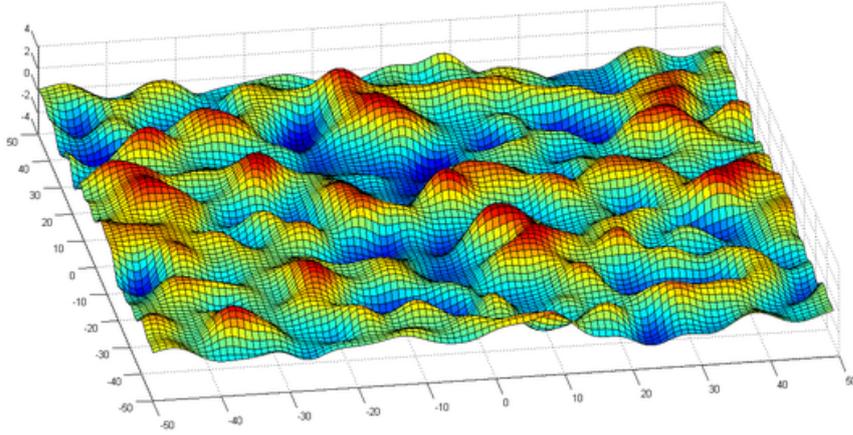


Рис. 3.1: Пример реализации двумерного случайного гауссова поля, показывающий важность максимумов и минимумов в общей структуре поля

матрицы достаточно решить обычное квадратичное уравнение

$$\lambda^2 - \lambda(f_{11} + f_{22}) + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2) = 0 \quad (3.21)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2}}{2}, \quad (3.22)$$

где $f_{ij} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}_{cri})}{\partial r_i \partial r_j}$, а $\lambda_{1,2}$ – собственные числа матрицы Гессиана.

Тип особой точки определяется знаком собственных чисел матрицы Гессиана. Поле f имеет максимум в точке \mathbf{r}_{cri} , когда оба собственных числа отрицательны $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$, седловую точку когда $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ и минимум когда $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$. С этого момента мы называем число положительных собственных чисел индексом особой точки и обозначаем индексом n как особую точку n -того порядка. Когда $\lambda_i = 0$ для $i = 1$ или $i = 2$ (сингулярный Гессиан) это описание не работает и нужно рассматривать производные более высоких порядков. Однако этот тип особых точек не типичен и не будет оказывать влияния на наши вычисления. Мы не будем его рассматривать.

Для вычисления плотностей особых точек можно использовать собственные числа матрицы Гессиана, вычисленные выше вместе со случайным гауссовым полем f и его частными производными f_i . Случайными переменными

нашего поля являются следовательно f, f_i и λ_i , вычисленные в \mathbf{r}_{cri} . Для удобства мы избавимся от квадратного корня в собственных числах, параметризовав их:

$$J_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = f_{11} + f_{22} \quad (3.23)$$

$$J_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}^2, \quad (3.24)$$

так, что случайная переменная $y = (f, f_1, f_2, J_1, J_2)$ точке \mathbf{r}_{cri} .

Вычисляя ковариантную матрицу $M_{ij} = \langle y_i y_j \rangle$ как функцию степенного спектра, мы можем вычислить объединенную вероятностную функцию используя определение случайного гауссова поля. Так как, согласно выражениям (3.23) и (3.24), J_i определяют тип особой точки мы можем различить тип особой точки выбирая области соответствующих параметров. Следующие области были вычислены в работе [54]:

$f_i = 0, \quad J_1 \in (-\infty, 0), \quad J_2 \in (0, J_1^2)$ соответствуют точке максимума;

$f_i = 0, \quad J_1 \in (-\infty, \infty), \quad J_2 \in (J_1^2, \infty)$ соответствуют седловой точке и

$f_i = 0, \quad J_1 \in (0, \infty), \quad J_2 \in (0, J_1^2)$ соответствуют точке минимума.

Для оценки плотности особых точек случайного гауссова поля $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, мы определим функцию:

$$n_{cri}(\mathbf{r}) = \sum_{e \in E} \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e), \quad (3.25)$$

для особой точки \mathbf{r}_e двумерного случайного гауссова поля f . Здесь $\delta^{(2)}$ означает двумерную дельта-функцию Дирака:

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.26)$$

где $x \in \mathbb{R}^2$ и E – множество особых точек.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора поля f вблизи особой точки \mathbf{r}_e и сделаем оценку значения поля в окрестности $G =$

$\{r \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e| < \epsilon, \epsilon > 0\}$:

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_e) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{2,2} H_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)_j + \mathcal{O}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^3) \quad (3.27)$$

$$f_i(\mathbf{r}) = \sum_j^2 H_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e)_j + \mathcal{O}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|^2), \quad (3.28)$$

где H есть Гессиан поля f в точке \mathbf{r}_e , определенный как $H_{ij} \equiv f_{ij}(\mathbf{r}_e)$. Предполагая, что H не имеет сингулярностей и оставляя в разложении f только члены порядка $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e|$, что справедливо для области G , можно инвертировать второе равенство:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_e = H^{-1}(\mathbf{r}_e) \nabla f(\mathbf{r}) \quad (3.29)$$

Применяя к левой и правой части этого выражения дельта-функцию Дирака, для $\mathbf{r} \in G$

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) = |\det H(\mathbf{r}_e)| \delta^2(\nabla f(\mathbf{r})) \quad (3.30)$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\det H^{-1}(\mathbf{r}_e) = |\det H(\mathbf{r}_e)|^{-1}$. Выражение (3.30) позволяет вычислить количество особых точек в выражении (3.25). Это подразумевает, что особая точка в точке \mathbf{r}_e не дает вклада, вне ее ϵ окрестности. Следовательно, выражение (3.30) равно нулю в $\mathbb{R}^2 G$. Следовательно:

$$\delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e) = |\det H(\mathbf{r}_e)| \delta^2(\nabla f(\mathbf{r})), \quad (3.31)$$

для $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$. Подставляя это выражение в (3.25) получим:

$$n_{cri}(\mathbf{r}) = |\det H(\mathbf{r})| \delta^2(\nabla f(\mathbf{r})). \quad (3.32)$$

Если провести усреднение этой функции, мы получим математическое ожидание количества точек в гауссовом случайном поле:

$$\langle n_{cri} \rangle = \int \int \int \int |\det H| P(f, f_i = 0, J_i) df df_{11} df_{12} df_{22} \quad (3.33)$$

$$= \int \int \int P(f, f_i = 0, J_i) |J_1^2 - J_2| df dJ_1 dJ_2, \quad (3.34)$$

где $P(f, f_i = 0, J_i)$ – одноточечная функция вероятности. Интегрирование по соответствующим областям J_1 и J_2 даст математическое ожидание максимумов, седловых точек и минимумов.

Помимо вычисления плотности особых точек и их полного числа, с точки зрения топологического анализа представляет интерес следующий подход. Представим плоскости, пересекающее двумерное случайное гауссово поле на разных высотах. Количество особых точек на некоторой высоте ν является хорошим дескриптором общей структуры поля и содержит больше информации, чем полное число особых точек в гауссовом случайном поле. Поскольку мы имеем дело с двумерным гауссовым случайным полем, высота этой плоскости будет значением $f(\mathbf{r})$. Используя выражение (3.33) мы получим следующую формулу для плотности критических точек с индексом i , $\mathcal{N}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, на уровне ν :

$$\mathcal{N}_i(\nu) = \int \int |\det H| P(f, f_i = 0, J_i) |J_1^2 - J_2| dJ_1 dJ_2. \quad (3.35)$$

Здесь индекс исследуемой особой точки выбирается интегрированием по соответствующим областям J_1 и J_2 . Используя последнее выражение легко вычисляется количество особых точек с индексом i выше заданного порога ν интегрированием:

$$\mathcal{N}_i(\nu_0) = \int_{\nu_0}^{\infty} \mathcal{N}_i(\nu) d\nu. \quad (3.36)$$

Общее число особых точек с индексом i в случайном гауссовом поле следовательно

$$\mathcal{N}_i = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_i(\nu) d\nu. \quad (3.37)$$

Так, мы получили две меры для особых точек случайного гауссова поля: $\mathcal{N}_i(\nu)$, которое есть плотность особых точек для значения поля ν и $\mathcal{N}_i(\nu_0)$, которое является числом особых точек, которые имеют значения поля больше

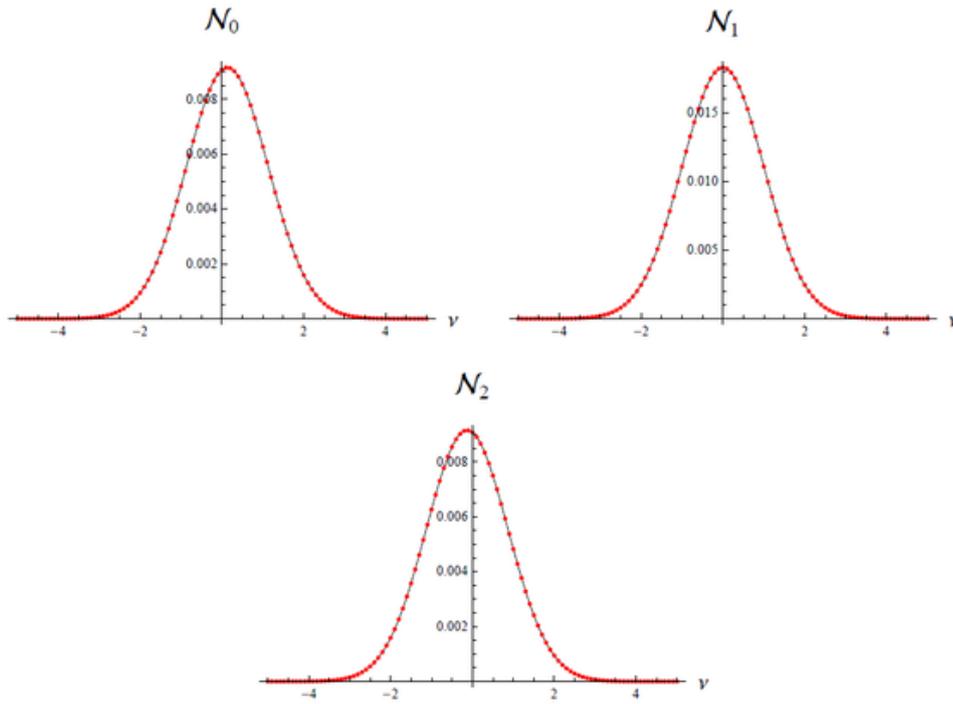


Рис. 3.2: Распределения плотностей максимумов (\mathcal{N}_0), седловых точек (\mathcal{N}_1) и минимумов (\mathcal{N}_2) в зависимости от порога ν [5].

порога ν_0 . На рисунке 3.2 показаны распределения $\mathcal{N}_0(\nu)$, $\mathcal{N}_1(\nu)$ и $\mathcal{N}_2(\nu)$.

Логнормальные поля

Переमेжаемость. Перемежаемые поля. Перемежаемость возникает благодаря фазирующему воздействию случайной среды на переносимую в ней величину [49]. Например, в потоке проводящей жидкости со случайным полем скорости и вложенным начальным магнитным полем найдутся такие места, в которых течение будет наиболее эффективно усиливать магнитное поле за счет растяжения магнитных линий потоком. В этих максимумах будет сосредотачиваться почти вся энергия генерируемого поля, поэтому ими нельзя пренебречь, они вносят главный вклад в среднее и средний квадрат. Однако первых двух моментов недостаточно для полной характеристики распределения. Главным признаком перемежаемости является именно аномальное по

сравнению с гауссовским соотношением между последовательными статистическими моментами. В терминах фурье-анализа перемежаемость характеризуется не только медленным убыванием фурье-гармоник с ростом волнового числа, но и их определенной сфазированностью.

В пространственно однородной с статистическим смыслом среде перемежаемость является чрезвычайно резко выраженным явлением: при наличии неустойчивости, например, при самовозбуждении магнитного поля, соотношение средних квадратов поля, сосредоточенного и не сосредоточенного в пиках, растет экспоненциально по времени. В случае пространственно ограниченной среды оказывается, что характерное расстояние между высокими пиками начинает с некоторого времени превышать размеры системы. После этого средние по пространству и по ансамблю перестают совпадать, причем средние по пространству растут медленнее средних по ансамблю. Таким образом перемежаемость в ограниченной задаче выражена менее резко.

Большой интерес представляет вопрос о структуре перемежаемого распределения. Асимптотически во времени типично образование высоких изолированных пиков. Асимптотически во времени типично образование высоких изолированных пиков; обычно в пространстве эти пики соответствуют пятнам поля, разделенным обширными областями пониженной интенсивности. Однако в качестве промежуточной асимптотики возможно, а может быть типично, образование ячеистой или сетчатой структуры: тонких каналов повышенной интенсивности («богатой фазы»), отделяющих друг от друга изолированные острова «бедной фазы». Примером такой промежуточной перемежаемости является структура Вселенной. Явление перемежаемости обнаруживается как наблюдательно, так и в численных экспериментах.

Возникновение случайных полей, переход от упорядоченного (периодиче-

ского) движения к хаосу, происходит в разных системах весьма по-разному. Одним из типичных маршрутов такого преобразования является возникновение *перемежаемости* [10]. Перемежаемость не имеет канонического определения. Сигнал называется перемежающимся, если он подвержен резким вариациям большой амплитуды. В динамических системах с небольшим числом степеней свободы при переходе от периодического к хаотическому (или квазипериодическому) режиму может существовать *временная перемежаемость*.

Логнормальные случайные поля. Гауссово (нормальное) распределение наиболее часто используется для описания случайных вариаций в наблюдаемых данных во многих областях научных исследований. Хорошо известная колоколообразная форма распределения описывается двумя величинами: средним арифметическим \bar{x} и стандартным отклонением σ . Несмотря на удобство и кажущуюся всеобщность Гауссова распределения результаты наблюдений демонстрируют и иные, отличные от гауссова симметричного распределения формы. В первую очередь, это более или менее не симметричные распределения. Распределения со смещением зачастую встречаются, когда средние значения малы, дисперсия высока, а измеряемая величина может принимать только положительные значения, как, например, в случае с многообразием видов, латентными (скрытыми) периодами инфекционных заболеваний и распределения минеральных ресурсов в земной коре. Подобные несимметричные распределения зачастую хорошо описываются логнормальным распределением (например, работы [4, 16, 60]).

Структуры, возникающие в случайной среде, также имеют несимметричный характер распределения: часто они имеют вид пиков, появляющиеся в

случайных местах и в случайные моменты времени, а промежутки между ними характеризуются малой интенсивностью и большой протяженностью. Данное свойство получило название *перемежаемости*, и подробно описано в работе [49]. Когда распределение вероятностей случайной величины убывает на бесконечности медленнее, чем гауссовское, то высоких пиков, естественно, больше и расположены они чаще, т.е. элемент структурности, связанный с пиками, выражен в таком поле сильнее. В работе [66] указывается на степенной характер спектра фоновых случайных полей в фотосфере Солнца.

В чем заключается различие в природе нормального и логнормального распределений? В обоих случаях вариация случайной величины обусловлена разнообразными силами действующими независимо одна от другой. Основное различие, однако, в том, эффект воздействия различных факторов на случайную величину может быть как аддитивный так и мультипликативный, что приводит к нормальному и логнормальному распределениям соответственно. Некоторые основные особенности аддитивного и мультипликативного эффектов могут быть продемонстрированы с помощью двух простых игральных кубиков с гранями от 1 до 6. Складывая цифры на двух кубиков, как это делается в большинстве игр, можно получить значения от 2 до 12, с средним 7 и с симметричным распределением частоты встречаемости. Весь диапазон может быть описан как 7 ± 5 , где, в этом случае, 5 не является дисперсией. Перемножение двух этих чисел приводит к значениям от 1 до 36 с сильно не симметричным распределением. Полная вариация может быть описана как 6 умноженное или разделенное на 6. В этом случае симметрия переместилась на мультипликативный уровень. Хотя эти примеры не являются ни нормальными ни логнормальными распределениями, они ясно показывают, что аддитивные и мультипликативные эффекты приводят к различным функциям распреде-

ления.

Логнормальные распределения случайных величин обычно характеризуются в терминах логарифмированных переменных, используя в качестве параметров значения математического ожидания, среднего значения распределения и стандартного отклонения. Такие характеристики удобны так как в логарифмическом масштабе распределение снова становится симметричным.

Основные свойства логнормального распределения. Случайная переменная X имеет логнормальный закон распределения, если переменная $\log(X)$ имеет нормальный закон распределения. Логнормальное распределение не настолько давно известно как нормальное и биномиальное распределения, но тем не менее, первые упоминания о нем прослеживаются с 1879 года [39]. Большинство свойств логнормального распределения мгновенно могут быть получены основываясь на свойствах нормального распределения, но не все. Несмотря на уникальные свойства логнормального распределения и большое количество его проявлений в природе, оно подобно Золушке до сих не привлекло достаточное к себе внимание. Нормальное распределение имеет аддитивную природу, так как например образуется сложением (накоплением) множества элементарных отклонений (ошибок). В природе, тем не менее, существует много процессов, где накопление ошибок имеет мультипликативный характер наподобии примера с двумя игральными кубиками, рассмотренного выше.

Рассмотрим переменную X ($0 < x < \infty$) такую, что $Y = \log(X)$ нормально распределена со средним μ и вариацией σ^2 . Тогда будем называть X логнормально распределенной и записывать $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$, а также для соответствующего Y укажем $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Распределение X полностью описывается двумя параметрами μ и σ^2 . Так как имеется связь $Y = \log(X)$, то между

функциями распределения логнормальной и нормальной переменной присутствует связь:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{N}(\log x) \quad (x > 0); \quad (3.38)$$

$$\mathcal{L}(x) = 0 \quad (x \leq 0), \quad (3.39)$$

и

$$d\mathcal{L}(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log(x) - \mu)^2\right) dx, \quad (3.40)$$

описывает частотную кривую моды в точке $x = e^{\mu - \sigma^2}$. Воспользуемся определением функции λ_j для j -го момента нормального распределения:

$$\lambda_j = \int_0^{\infty} x^j d\mathcal{L}(x) \quad (3.41)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jy} d\mathcal{N}(y) \quad (3.42)$$

$$= e^{j\mu + \frac{1}{2}j^2\sigma^2}. \quad (3.43)$$

Тогда выражения для среднего значения α и дисперсии β^2 будут

$$\alpha = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \quad (3.44)$$

$$\beta^2 = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (3.45)$$

Взаимное расположение среднего $e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$, медианы распределения e^μ и моды $e^{\mu - \sigma^2}$ говорит о положительном сдвиге распределения относительно нормального (Рис. 3.3). Зависимость логнормального распределения от величины среднего квадратического отклонения представлены на Рис. 3.4.

Логнормальное распределение обладает рядом интересных свойств, большинство из которых являются прямым следствием свойств нормального распределения. Так как последнее обладает свойством аддитивности, тоже свойство присуще и логнормальному распределению: $\log X_1 + \log X_2 = \log X_1 X_2$. В более общем виде:

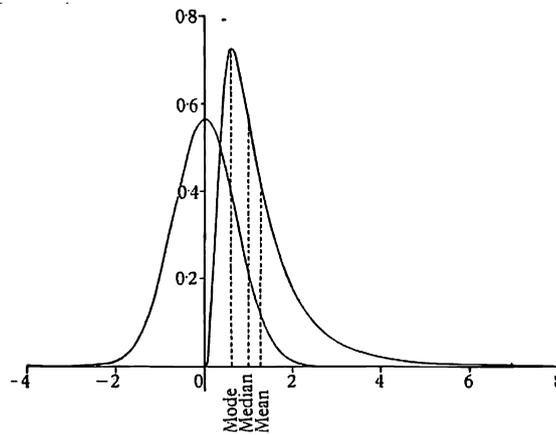


Рис. 3.3: Сравнение спектров нормального $\mathcal{N}(0, 0.5)$ и логнормального $\mathcal{L}(0, 0.5)$ распределений.

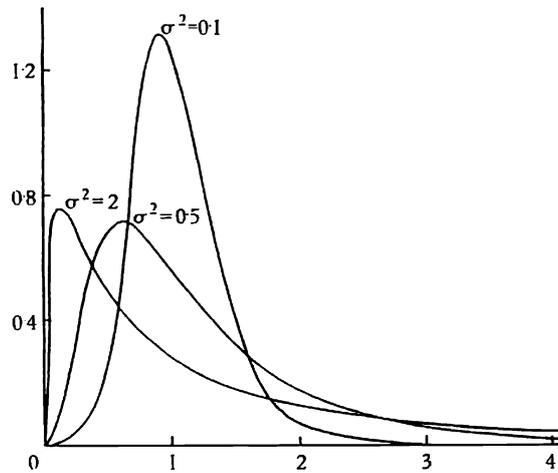


Рис. 3.4: Логнормальное распределение с тремя значениями дисперсии $\sigma^2 = 0.5, 1, 2$

Если X имеет логнормальное распределение $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$, а b и c константы, так, что $c > 0$, тогда cX^b также распределено логнормально с параметрами $\mathcal{L}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$.

3.1 Моделирование гауссовых случайных полей с заданным законом корреляции

Моделирование реализаций Гауссова случайного поля с желаемым спектром энергии (заданной корреляцией) осуществляется с применением преобразования Фурье. Опишем процесс генерации дискретного случайного поля с

идентично распределенной одноточечной гауссовой статистикой и заданным энергетическим спектром [38]. Благодаря свойству инвариантности гауссова распределения относительно преобразования Фурье, результатом применения преобразования Фурье к гауссову случайному полю снова будет гауссово случайное поле. Следовательно, преобразование Фурье может быть использовано для генерации гауссова случайного поля со спектром энергии любой формы.

Процесс генерации дискретного Гауссова случайного поля $f(x_n) \equiv f_n$ (где x_n , $n - N$ дискретных значений поля в вещественном пространстве) со средним значением μ и дисперсией σ^2 включает следующие шаги

- Создание некоррелированного Гауссова шума, g_n , со средним μ и дисперсией σ^2 . Пример реализации такого шума в одномерном случае представлен на Рис. 3.6.
- Вычисление дискретного преобразования Фурье для g_n и получение коэффициентов Фурье \hat{g}_k , где k – волновой вектор. Например, для одномерного поля с $x_n = n : n = 0, 1, \dots, N - 1$ (см. Рис. 3.7),

$$\hat{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{2\pi i n k / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.46)$$

- Задание требуемого спектра зависимости энергии $E_k^{(t)}$ от волнового вектора k , который должен быть нормирован для корректного значения дисперсии σ^2 . Для этого достаточно нормировать степенной спектр энергии:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} E_k^{th} = 1. \quad (3.47)$$

Дополнительно, чтобы сохранить при усреднении по реализациям среднее значение шума μ мы должны доопределить $E_{k=0}^{th} = 1$.

- В Фурье пространстве наложим степенной закон корреляции на Фурье-образ белого шума \hat{g}_k умножением на $\sqrt{E_k^{th}}$ (Рис. 3.9):

$$\hat{f}_k = \hat{g}_k \sqrt{E_k^{th}}. \quad (3.48)$$

- Вычисляем обратное преобразование Фурье для \hat{f}_k для получения Гауссова случайного поля f_n с заданным энергетическим спектром $\langle |\hat{f}_k|^2 \rangle = \langle |\hat{g}_k \sqrt{E_k^{th}}|^2 \rangle = \langle |\hat{g}_k|^2 \rangle E_k^{th} = N\sigma^2 E_k^{th}$, где $\langle |\hat{g}_k|^2 \rangle = N\sigma^2$ не зависит от k (так как g_n представляет собой некоррелированный шум), и угловые скобки, $\langle \cdot \rangle$, означают усреднение по ансамблю. Следует отметить, что задавая E_k^{th} мы задаем усредненный спектр энергии. Так, если $\langle |\hat{f}_k|^2 \rangle = N\sigma^2 E_k^{th}$, то для конкретной реализации $\langle |\hat{f}_k|^2 \rangle$ спектр энергии будет флуктуировать относительно усредненных значений.

Наблюдаемые магнитные поля активных областей на Солнце и других астрофизических объектов имеют положительную и отрицательную компоненту. Воспользуемся тем, что суперпозиция Гауссовых полей является Гауссовым полем и возьмем линейную сумму двух сгенерированных Гауссовых случайных полей с разным знаком. Это позволит получить модельные поля с двумя полярностями. На Рис. 3.5 приведены примеры реализаций смоделированных Гауссовых случайных полей для разных значений показателя спектра.

3.2 Моделирование логнормальных случайных полей с заданным законом корреляции

Логнормальное распределение используется в широком спектре задач, когда в функция распределения несимметрична относительно масштаба и логарифмическое преобразование функции распределения привносит

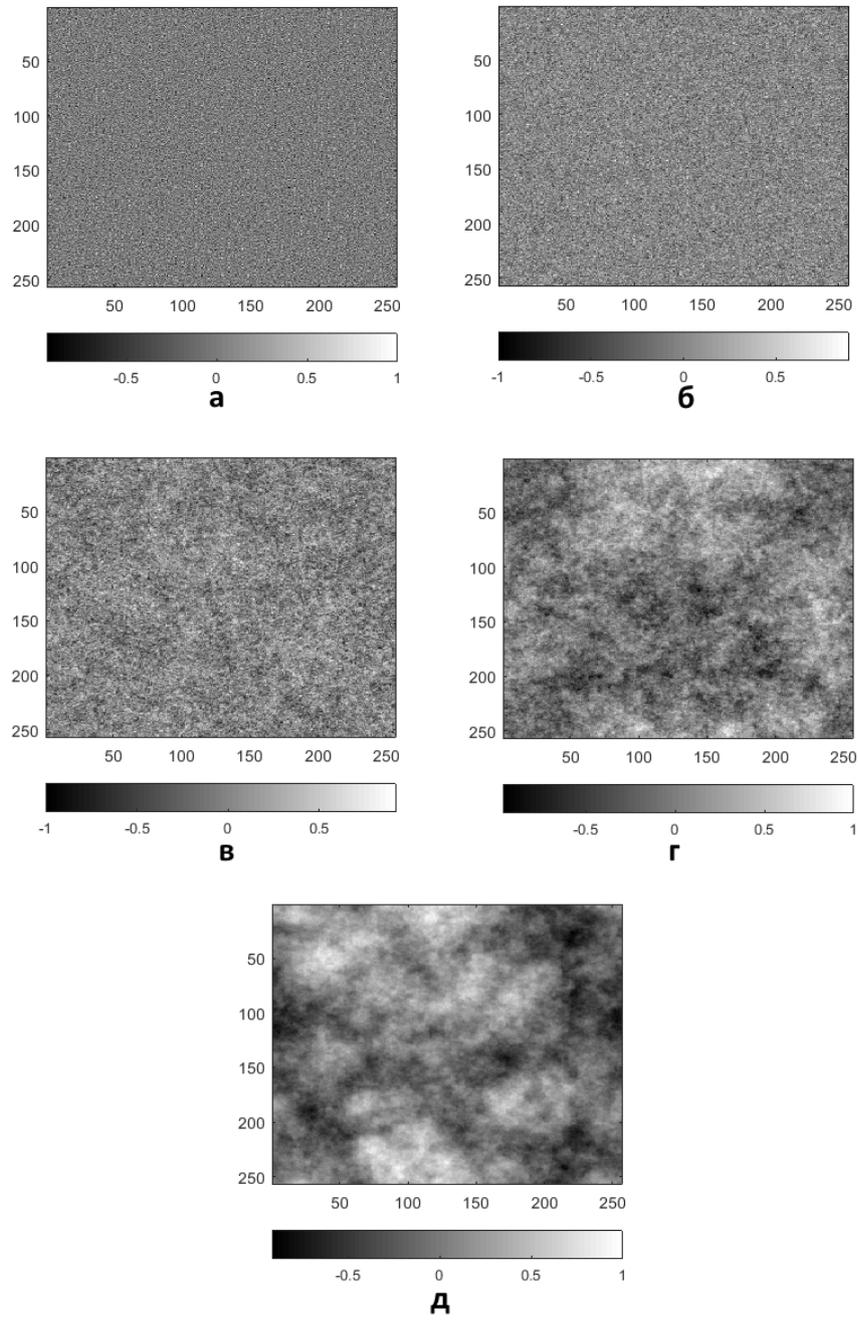


Рис. 3.5: Моделирование Гауссова случайного поля с дисперсией $\sigma = 1$ и различными значениями показателя наклона спектра энергии $E_k \propto k^{-\beta}$: (а) $\beta = -1$, (б) $\beta = 0$, (в) $\beta = 1$, (г) $\beta = 2$, (д) $\beta = 3$

симметрию. Спектры определенных параметров Земных облаков, а также многих астрофизических объектов в том числе межзвездной среды имеют положительно-смещенные спектры схожие с функциями плотности вероятности лог-нормальных случайных величин (см. например [7]). Наложение степенного закона корреляции на спектр случайного процесса, предполагает степенной вид спектра энергии:

$$E_k \propto k^{-\beta}, \quad 1 < \beta < 3, \quad (3.49)$$

где k – волновой вектор, а спектр энергии получается при возведении в квадрат модуля Фурье-образа исходного поля. Гауссово случайное поле с любым желаемым спектром энергии может быть легко сгенерировано применением фильтрации в Фурье-пространстве благодаря свойству устойчивости Гауссовых переменных (сумма Гауссовых случайных переменных снова является гауссовой переменной). Таким способом логнормальное случайное поле может быть смоделировано экспоненцированием случайного Гауссова поля. Однако полученное таким образом случайное поле уже не будет иметь спектр энергии родительского Гауссова поля. В идеальном случае, возможно задать требуемый спектр энергии и создать метод аналитического вычисления энергетического спектра материнского Гауссова поля, такого, что оно приведет к логнормальному полю с таким заданным спектром. Такой подход был предложен в работе [19] для случая, когда может быть задана автокорреляционная функция, которая зависит только от расстояния между значениями поля. Следовательно, техника Evans ограничена симуляцией стационарных полей. Условие стационарности в данном случае требует ограничения $\beta < 1$. Идея простого итерационного метода численной аппроксимации энергетического спектра Гауссова поля, предложенная в работе [38], позволяет расширить возможности генерации на случай нестационарных случайных полей

с более широким диапазоном значений параметра β . Алгоритм создает последовательность Гауссовых случайных полей, где разница между целевым спектром (для логнормального поля) и энергетическим спектром полученным экспоненцированием поля в последовательности используется для генерации следующего Гауссова поля в последовательности (следующей итерации). В данном методе предполагается, что экспоненцирование Гауссова поля существенно не изменит форму энергетического спектра. Это предположение работает, когда вариация Гауссова поля все же не слишком высока. Процесс повторяется до тех пор, пока усредненный спектр случайной реализации не станет близок к теоретическому с заданной точностью.

Гауссово поле (белый шум) с наложенным на его спектр энергии законом корреляции. Представим его в виде:

Для более наглядного представления идеи алгоритма будет рассмотрен случай генерации одномерного логнормального случайного поля. В конце будут сделаны замечания, относящиеся к случаю генерации полей больших размерностей.

- На первом шаге итерационного процесса мы должны сделать начальное предположение о виде усредненного спектра энергии Гауссова случайного поля до экспоненцирования

$$\langle |\hat{f}_k^{(0)}|^2 \rangle = c_f^2 k^{-\beta}, \quad (3.50)$$

где коэффициент c_f определяется из условия нормировки о которой будет сказано чуть ниже.

- Начнем итерационный цикл с $j = 0$:

1. Создадим вектор некоррелированного Гауссова шума g_n , со средним μ и вариацией σ^2 с помощью функции *normrnd* (Рис. 3.6). Для сгенери-

рованного Гауссова шума вычисляются коэффициенты \hat{g}_k дискретного преобразования Фурье для g_n , где k – волновые числа. Для одномерного поля с $x_n = n : n = 0, 1, \dots, N - 1$,

$$\hat{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{2\pi i n k / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.51)$$

При вычислении Фурье-образа используется функция *fft* быстрого преобразования Фурье, а также *fftshift* для смещения компоненты с нулевой частотой в центр спектра (Рис. 3.7). Задается функция $E_k^{th} = c_f^2 k^{-\beta}$, определяющая требуемую спектральную зависимость энергии от волнового вектора k (Рис. 3.8. Спектр энергии должен быть нормирован таким образом, чтобы при его последующем наложении на спектр белого шума сохранялась дисперсия σ^2 некоррелированного шума. Для этого достаточно нормировать степенной спектр энергии:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} E_k^{th} = 1. \quad (3.52)$$

Дополнительно, чтобы сохранить при усреднении по реализациям среднее значение шума μ мы должны доопределить $E_{k=0}^{th} = 1$.

В Фурье пространстве наложим степенной закон корреляции на Фурье-образ белого шума \hat{g}_k (Рис. 3.9):

$$\hat{f}_k = \hat{g}_k \sqrt{E_k^{th}}. \quad (3.53)$$

Следует отметить, что задавая E_k^{th} мы задаем усредненный спектр энергии (то есть $\langle |\hat{f}_k|^2 \rangle = N \sigma^2 E_k^{th}$, то для конкретной реализации $\langle |\hat{f}_k|^2 \rangle$ спектр энергии будет флуктуировать относительно усредненных значений. Вычислим пространственную компоненту Гауссова случайного поля f_n со степенным спектром энергии $\langle |\hat{f}_k|^2 \rangle = \langle |\hat{g}_k \sqrt{E_k^{th}}|^2 \rangle = \langle |\hat{g}_k|^2 \rangle E_k^{th} =$

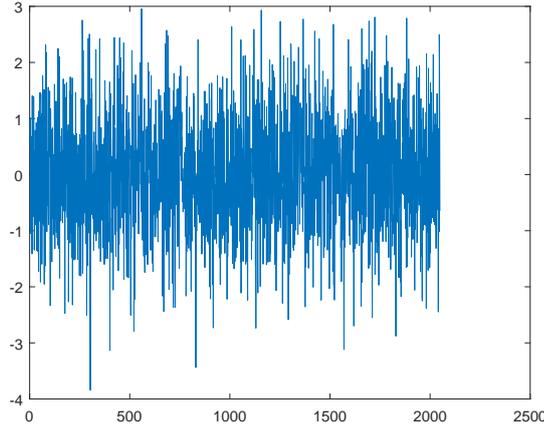


Рис. 3.6: Генерация некоррелированного Гауссова шума g_n , со средним $\mu = 0$ и вариацией $\sigma^2 = 1$.

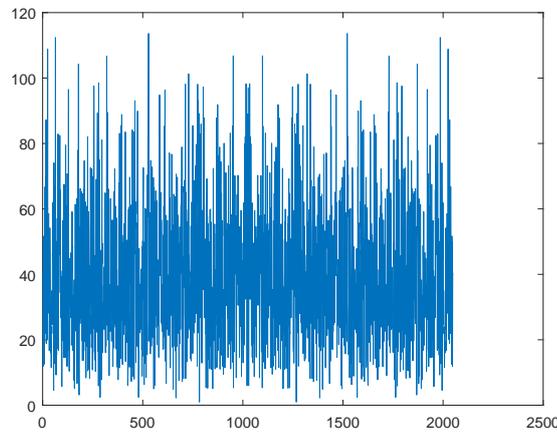


Рис. 3.7: Фурье-образ Гауссова шума.

$N\sigma^2 E_k^{th}$, где $\langle |\hat{g}_k|^2 \rangle = N\sigma^2$ не зависит от k (так как g_n представляет собой некоррелированный шум), и угловые скобки, $\langle \cdot \rangle$, означают усреднение по ансамблю.

2. Вычислим $F_n^{(j)} = e^{f_n^{(j)}}$ и $|\hat{F}_k^{(j)}|^2$ – соответствующий ему спектр энергии (Рис. 3.10) для $F_n^{(j)}$.

3. Усредним спектр энергии $|\hat{F}_k^{(j)}|^2$ по всем реализациям случайного поля $F_n^{(j)}$. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов и аппроксимируем спектр полиномом степени l на графике $\log_{10} \left(|\hat{F}_k^{(j)}|^2 \right)$ от

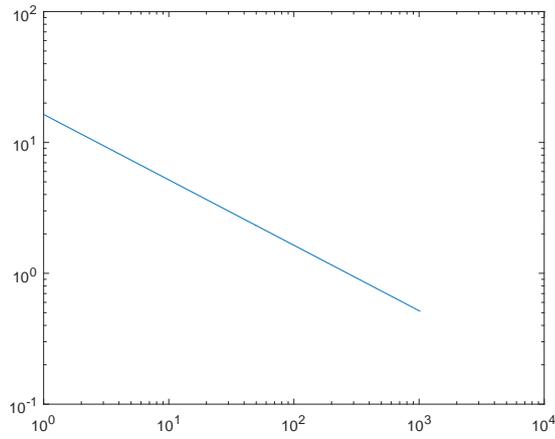


Рис. 3.8: Степенной энергетический спектр $\sqrt{E_k^{th}}$.

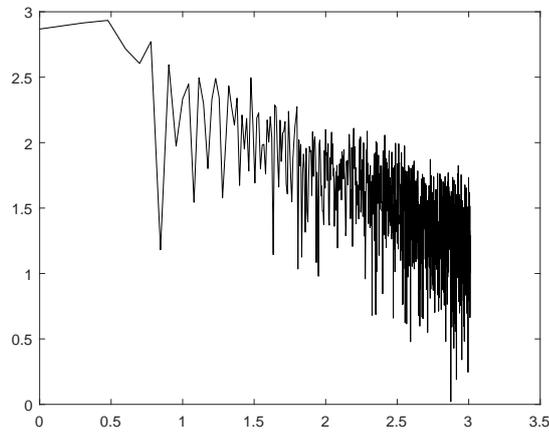


Рис. 3.9: Реализация случайного гауссова поля с наложенным законом корреляции. Спектр корня из энергии $\hat{f}_k^{(j)} = \sqrt{E_k^{(j)}}$ в логарифмическом масштабе

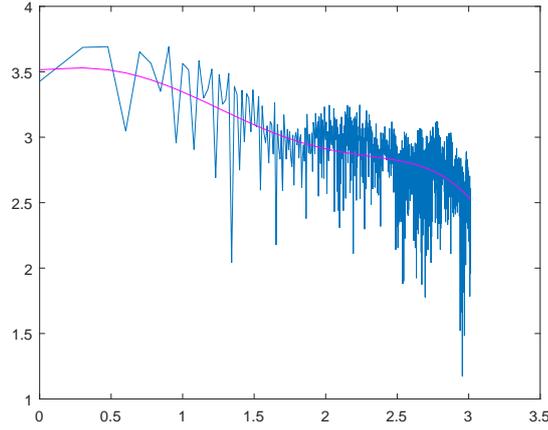


Рис. 3.10: Усредненный полиномом 5 степени, спектр энергии логнормального случайного поля, полученного на 1 шаге итерационного процесса, в логарифмическом масштабе (пурпурная линия)

$\log_{10} k$. Если в линейном масштабе спектр энергии был степенной, тогда $\log - \log$ график будет линейным. В работе [38] было установлено, что полиномы 5 степени будут одинаково хорошо описывать отклонения $|\hat{F}_k^{(j)}|^2$ от степенного спектра и сгладить флуктуации при усреднении по реализациям (Рис. 3.10).

4. Определяется направление поиска как отличие спектра энергии, полученного экспоненцированием Гауссова поля, на текущей итерации от желаемого спектра энергии логнормального случайного поля $\hat{d}_k^{(j)} = \langle |\hat{H}_k|^2 \rangle - \langle |\hat{F}_k^{(j)}|^2 \rangle$, где $\langle |\hat{H}_k|^2 \rangle = c_H^2 k^{-\beta}$ – есть желаемый усредненный спектр энергии логнормального поля (Рис. 3.11). Здесь β – показатель степени, а c_H – константа, которая может быть определена на графике усредненного спектра энергии в логарифмическом масштабе, как точка пересечения прямой с наклоном β и ось ординат. Для улучшения качества сходимости эта величина определяется имперически для каждого шага итерации.

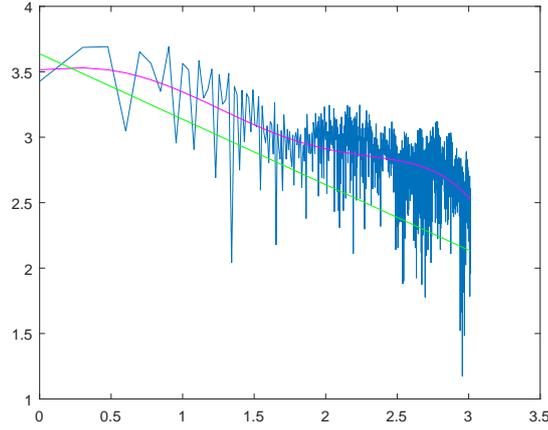


Рис. 3.11: Сравнение усредненного спектра энергии логнормального случайного поля на 1 шаге итерационного процесса (пурпурная линия) и желаемого степенного спектра энергии в логарифмическом масштабе

5. Выберем для родительского Гауссова поля на следующей итерации $f_n^{(j+1)}$ спектр энергии $\langle |\hat{f}_k^{(j+1)}|^2 \rangle = \langle |\hat{f}_k^j|^2 \rangle + \Delta^{(j)} \hat{d}_k^{(j)}$, где $0 < \Delta^{(j)} \leq 1$ величина шага.

6. Если $\hat{d}_k^{(j)}$ больше определенного допустимого порога, отправляемся в начало цикла. В противном случае выбираем $J = j$, и заканчиваем цикл.

- конец цикла
- Финальное логнормальное поле, сгенерированное программой есть поле $F_n^{(J)} = \exp(f_n^{(J)})$, спектр энергии, которого $\langle |\hat{F}_k^{(J)}|^2 \rangle \approx c_H^2 k^{-\beta}$.

Для всех реализаций выбрано значение дисперсии для родительского Гауссова поля $\sigma = 0.5$.

Результаты. На Рис. 3.12 - 3.15 представлены примеры сгенерированных программой реализаций 2D случайного логнормального поля с показателями спектра энергии $\beta = 0, 1, 2$ и 3 . Для всех реализаций выбрано значение дисперсии для родительского Гауссова поля $\sigma = 0.5$. Все поля нормированы на максимальное значение поля внутри реализации для удобства последующего

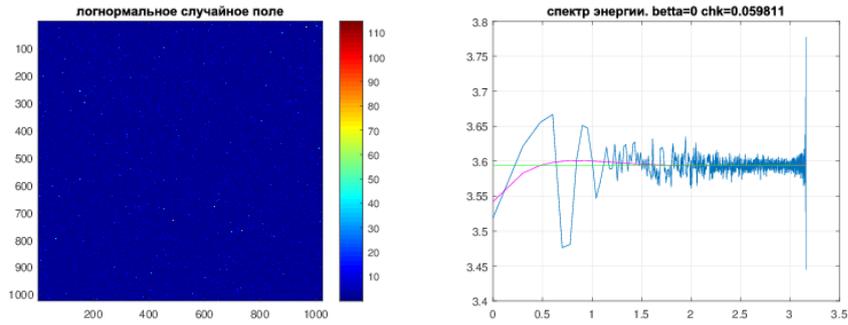


Рис. 3.12: Пример генерации 2D случайного логнормального поля с показателем спектра энергии $\beta = 0$. Слева – пространственная компонента, справа – спектр корня из энергии $\hat{f}_k^{(j)} = \sqrt{E_k^{(j)}}$ в логарифмическом масштабе

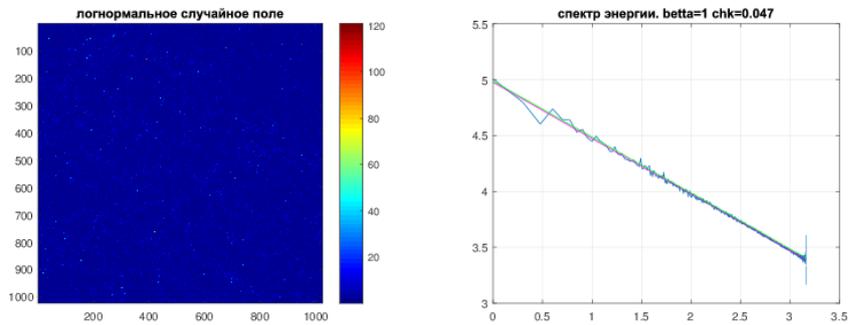


Рис. 3.13: Пример генерации 2D случайного логнормального поля с показателем спектра энергии $\beta = 1$. Слева – пространственная компонента, справа – спектр корня из энергии $\hat{f}_k^{(j)} = \sqrt{E_k^{(j)}}$ в логарифмическом масштабе

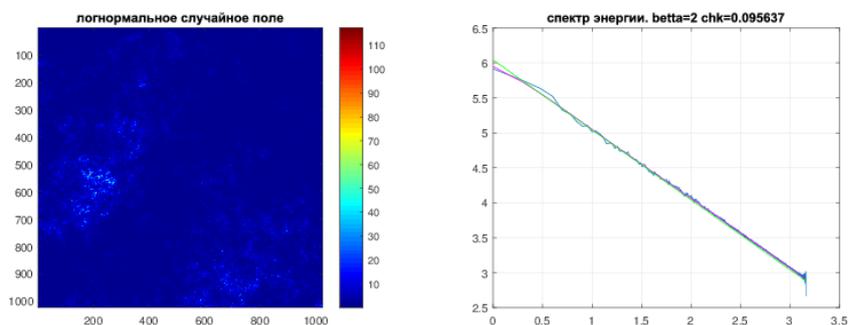


Рис. 3.14: Пример генерации 2D случайного логнормального поля с показателем спектра энергии $\beta = 2$. Слева – пространственная компонента, справа – спектр корня из энергии $\hat{f}_k^{(j)} = \sqrt{E_k^{(j)}}$ в логарифмическом масштабе

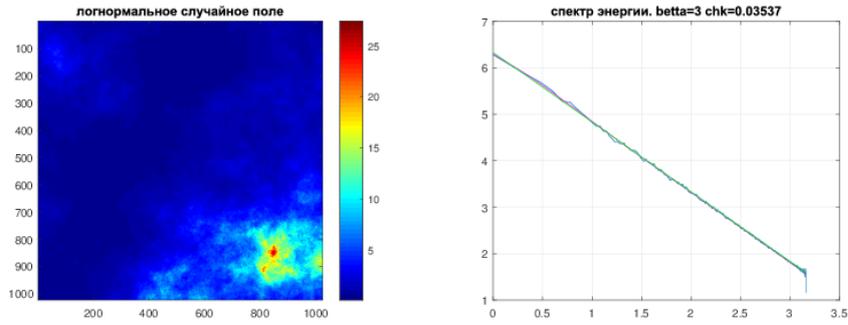


Рис. 3.15: Пример генерации 2D случайного логнормального поля с показателем спектра энергии $\beta = 3$. Слева – пространственная компонента, справа – спектр корня из энергии $\hat{f}_k^{(j)} = \sqrt{E_k^{(j)}}$ в логарифмическом масштабе

сравнения. На Рис. 3.16 – 3.19 для соответствующих реализаций двумерного логнормального случайного поля построены диаграммы персистентности и распределения суммы длин баркодов Бетти 0 и Бетти 1 по уровням, а также характеристика Эйлера. Изменение спектрального показателя β энергии заметно сказывается как на диаграммы персистентности так и на кривые суммы длин баркодов Бетти 0. Влияние изменения параметра дисперсии σ на результаты генерации логнормального случайного поля работы представлены на Рис. 3.20. Приведены примеры реализации логнормальных случайных полей для разных значений показателя спектра β и дисперсии σ .

3.3 Моделирование фонового фотосферного магнитного поля

Логнормальный закон распределения энергии запасенного в магнитном поле по пространственным масштабам проявляется во многих астрофизических источниках. Достаточно часто отклонение от гауссовости в распределении энергии в случайных полях связано с возникновением различного рода неустойчивостей и явления перемежаемости.

Применение модели логнормального поля дает правильные распределе-

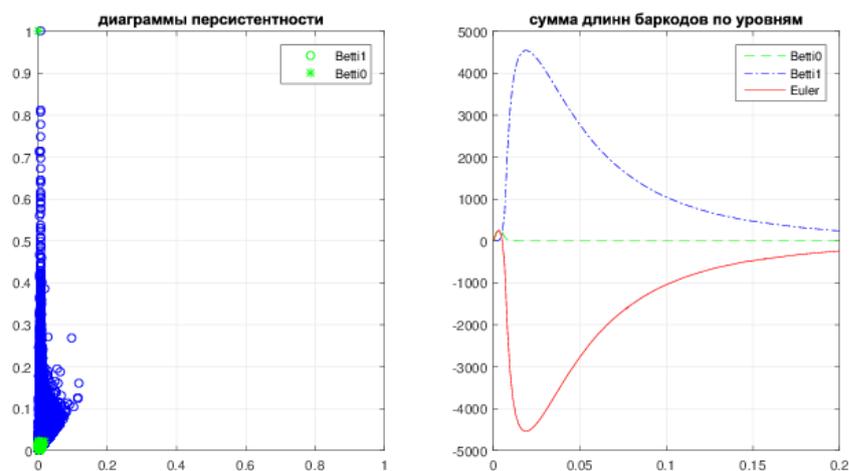


Рис. 3.16: Топологические характеристики 2D случайного логнормального процесса с показателем спектра энергии $\beta = 0$. Слева – диаграмма персистентности, справа – сумма длин баркодов по уровням

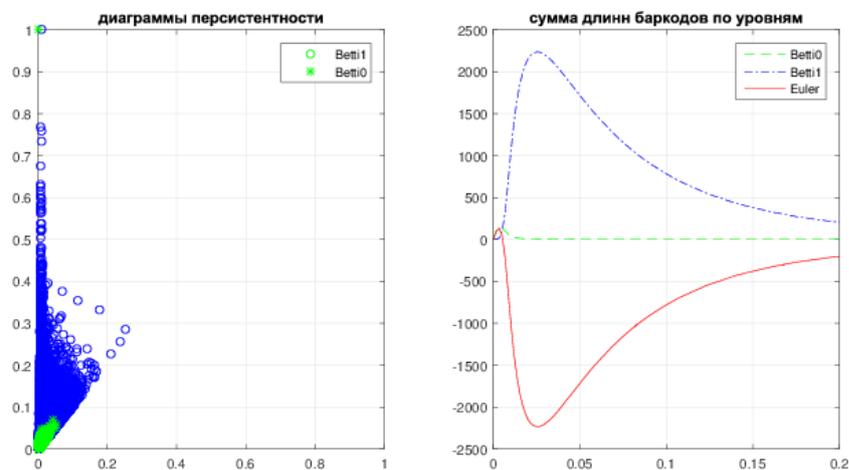


Рис. 3.17: Топологические характеристики 2D случайного логнормального процесса с показателем спектра энергии $\beta = 1$. Слева – диаграмма персистентности, справа – сумма длин баркодов по уровням

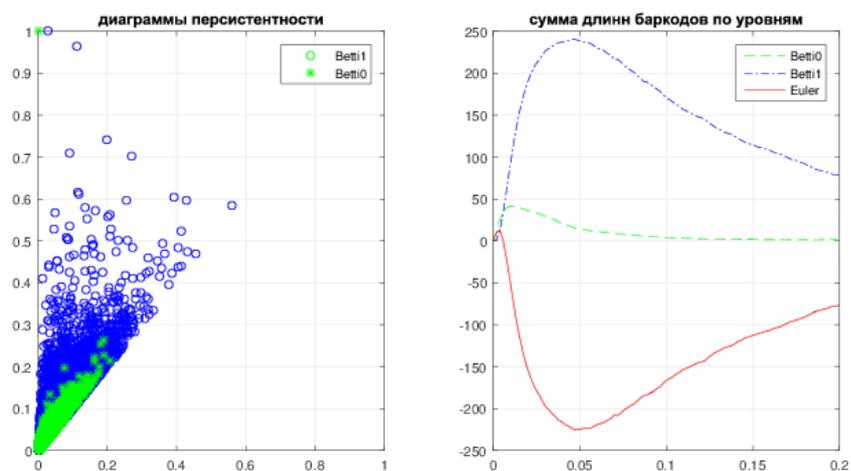


Рис. 3.18: Топологические характеристики 2D случайного логнормального процесса с показателем спектра энергии $\beta = 2$. Слева – диаграмма persistence, справа – сумма длин баркодов по уровням

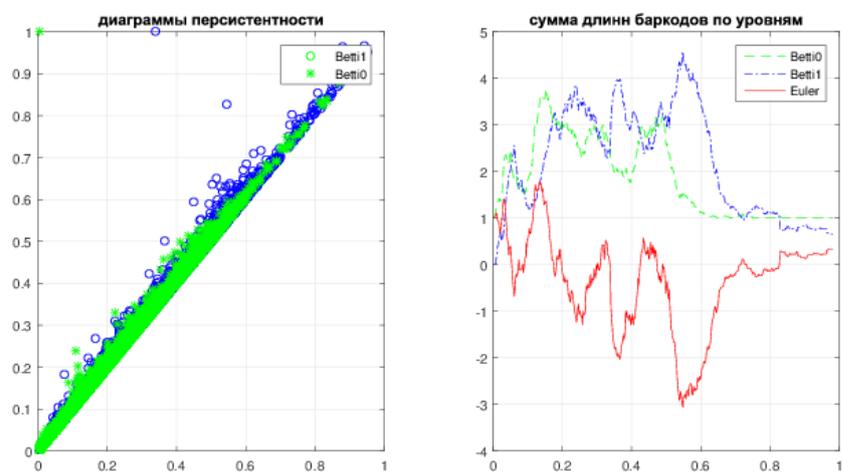


Рис. 3.19: Топологические характеристики 2D случайного логнормального процесса с показателем спектра энергии $\beta = 3$. Слева – диаграмма persistence, справа – сумма длин баркодов по уровням

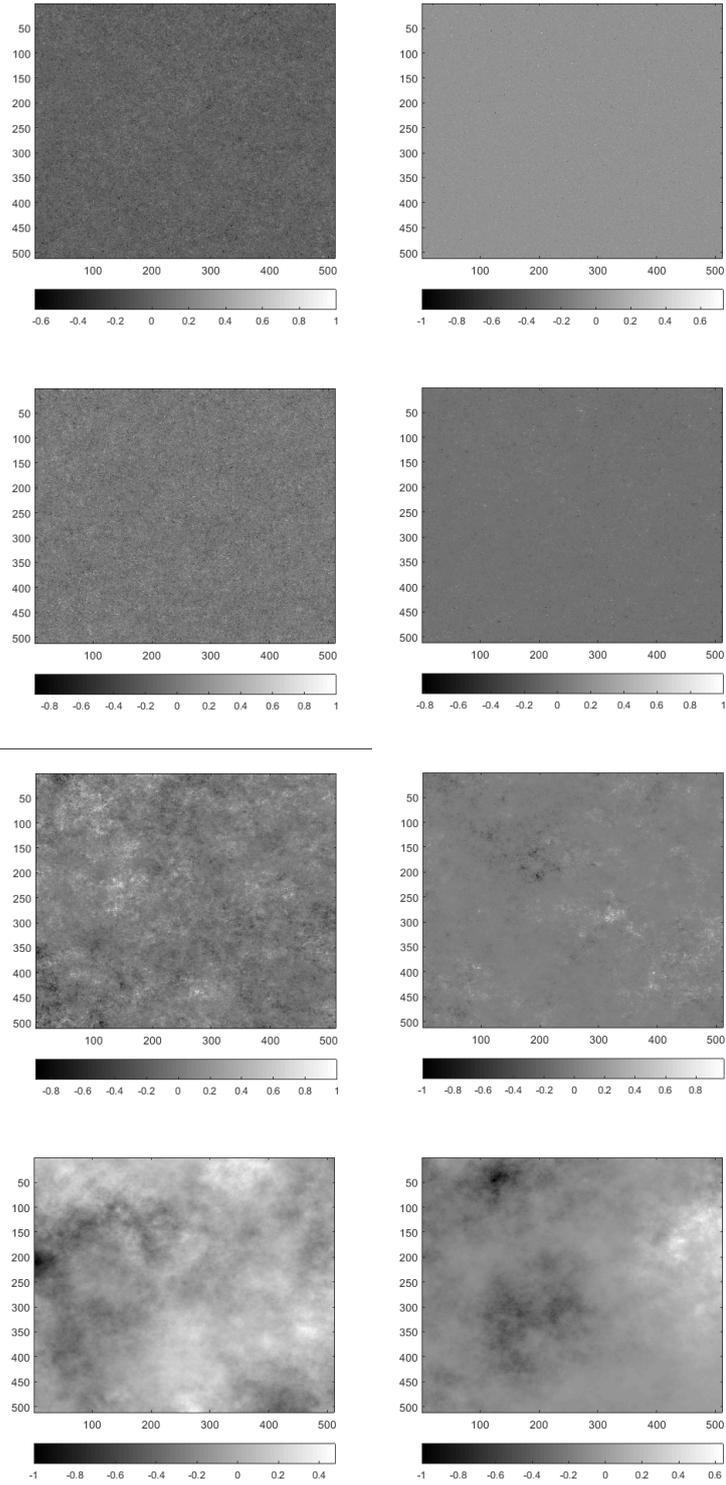


Рис. 3.20: Моделирование логнормального случайного поля для различных значений дисперсии и углов наклона степенного спектра. Сверху вниз показатель наклона спектра, $E_k \propto k^{-\beta}$, $\beta : 0, 1, 2, 3$. В колонке слева дисперсия $\sigma = 0.5$, справа – $\sigma = 1$.

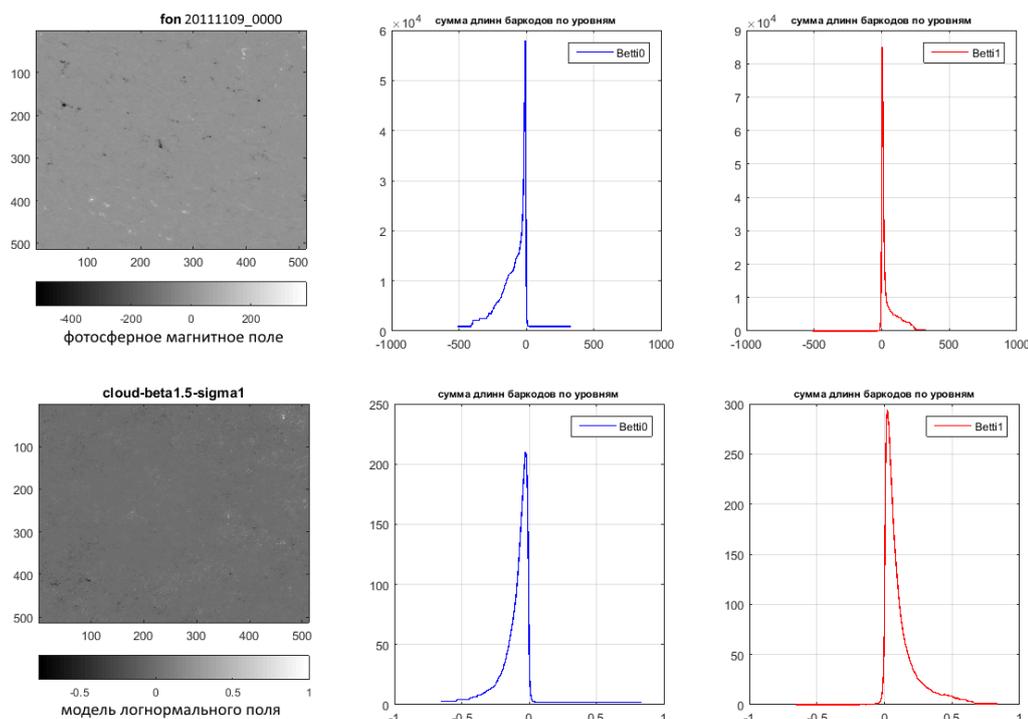


Рис. 3.21: Моделирование фонового фотосферного магнитного поля с использованием логнормального распределения (значение дисперсии $\sigma = 1$ и показатель спектра $\beta = 1.5$).

ния топологических дескрипторов (чисел Бетти) в задаче моделирования фонового фотосферного магнитного поля. Как видно на Рис. 3.21, модель логнормального случайного поля позволяет получить правильную форму распределения двух топологических дескрипторов (сумм длин баркодов Бетти 0 и Бетти 1). Логнормальная природа случайного фонового магнитного поля в солнечных вспышках подтверждается также присутствием в фотосфере большого числа турбулентных потоков, которые в свою очередь приводят к образованию стохастически сложной структуры магнитных полей.

3.4 Выводы к Главе 3

Применение методов вычислительной топологии для анализа случайных полей сможет дать возможность предложить универсальные дескрипторы для широкого круга задач. Мы модифицировали алгоритм, предложенный в [38]

для логнормального распределения облаков и смогли получить первые подходящие модели перемежаемого поля.

С использованием дескрипторов вычислительной топологии в работе проведено сравнение модельных гауссовых и логнормальных полей с фоновым фотосферным случайным магнитным полем. Полученные результаты подтверждают существующие предположения о том, что фоновые случайные магнитные поля в фотосфере имеют логнормальный характер распределения.

4 Прямой прогноз времени до сильных вспышечных событий в АО на основе дескрипторов TDA

В данной главе рассматривается конкретный пример применения топологических дескрипторов сложности к анализу наблюдаемых случайных магнитных полей фотосферы. Целью работы здесь является сравнение прогностической эффективности инвариантов, полученных в результате топологического анализа наблюдаемых НМІ магнитограмм, с наиболее часто используемыми морфологическими методами описания сложности магнитного поля

Эффективность предсказательной силы дескрипторов TDA мы рассмотрели на примере задачи прогноза времени до ближайшей вспышки (в часах) [11]. Для решения задачи регрессии времени до вспышки на признаках из топологических инвариантов можно использовать различные методы машинного обучения. В работе использовалась модификация метода опорных векторов для задачи регрессии (support vector regression или SVR [65]), как хорошо зарекомендовавший себя метод для решения задач и построения прогноза [61].

От экстремальных событий в солнечной активности во многом зависит работа GPS навигации, радиосвязи и множества других видов техники. Солнечная погода определяется возмущениями в потоках заряженных частиц солнечного ветра, которые могут нарушить работу космических аппаратов или вывести их из строя [55]. Главными источниками возмущений являются корональные выбросы масс (СМЕ) и большие солнечные вспышки. Поэтому вспышечные Активные Области (АО) стали популярным объектом для построения прогностических моделей.

В качестве характеристик сложности магнитных паттернов мы использовали так называемые числа Бетти – ранги первых двух групп гомологий (см. главу 2), полученные в результате топологического анализа магнитограмм по лучу зрения (LOS – line of sight). Мы сравнивали их с физическими параметрами, представленными параметрами Space-weather HMI Active Region Patches (SHARP-параметры). Эти параметры вычисляются онлайн на сайте Стэнфордской лаборатории по векторным магнитограммам (<http://jsoc.stanford.edu/doc/data/hmi/sharp/sharp.htm>) и представляют собой численные оценки модельных структур, которые, в некотором смысле, являются аналогами известных из физики плазмы величин: потоков, спиральности, и т.п. Важным условием возможности использования топологических дескрипторов сложности случайного магнитного поля для прогноза сильных вспышечных событий на Солнце является отклик чисел Бетти на изменение динамического режима АО. На Рис. 4.1, в качестве примера, представлены HMI магнитограммы АО 11283 в разные моменты времени до вспышки X2.1: 6 сентября 2011 22:12. Справа от каждой магнитограммы можно наблюдать, как с течением времени, по мере приближения вспышки, происходит взаимное перераспределения максимумов сумм длин баркодов Бетти 0 и Бетти 1 в распределении по уровням напряженности магнитного поля.

4.1 Данные

Для анализа использовались данные HMI/SDO за период 2010–2015 гг. для АО, которые продуцировали вспышки $> M5.0$. В указанном временном интервале нашлось 37 таких АО. Для обработки использовались фрагменты line of sight магнитограмм размером 600x600 пикселей, с временным дискретом 1 час. Полная выборка содержала 5853 фрагментов. Для всех типов де-

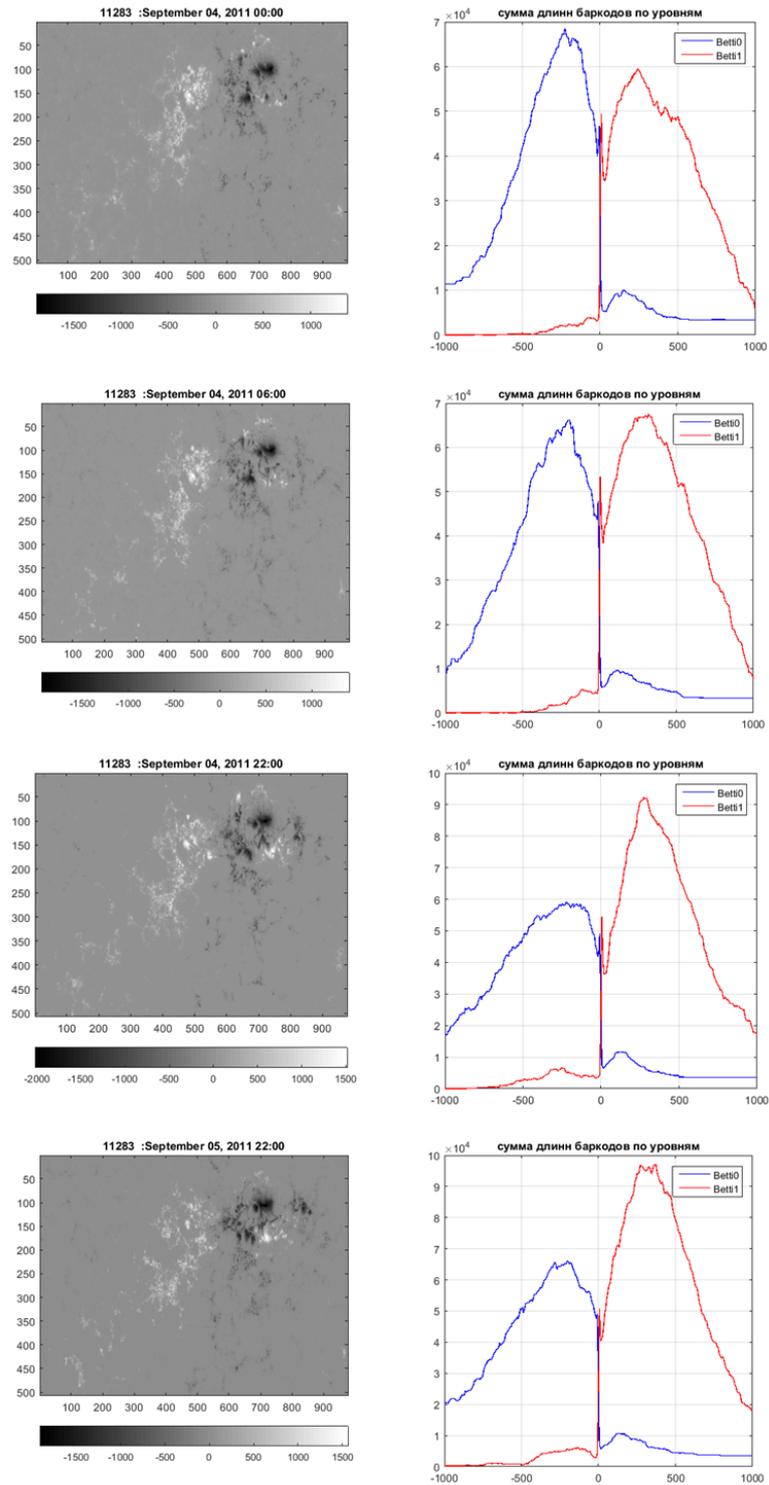


Рис. 4.1: Магнитограммы АО 11283 за 60, 54, 48 и 24 часа до вспышки X2.1 : 6 сентября 2011 22:12. Справа от каждой магнитограммы представлены распределения сумм длин баркодов Бетти 0 и Бетти 1. По мере приближения вспышки, происходит взаимное перераспределения максимумов сумм длин баркодов Бетти 0 и Бетти 1.

скрипторов вектор признаков содержал данные 3-х магнитограмм: текущей магнитограммы, магнитограмм за 12 и за 24 часа до нее.

Мы сформировали вектор признаков для возможности работы с алгоритмами регрессии на опорных векторах (SVR) протестировав несколько вариантов векторного представления диаграмм персистентности: ранговые функции и персистентные изображения.

Ранговые функции. Для каждой магнитограммы строилось дискретное представление в виде ранговых функций [59] с закруглением 20×20 . Схематически процесс их построения, в деталях описанный в главе 2, кратко можно разделить на несколько этапов. Вначале для магнитограммы строились диаграммы персистентности (ДП) двух чисел Бетти. Затем на сетке 200×200 , в пространстве ДП с границами $[-2000 \text{ Гс}, 2000 \text{ Гс}]$ каждому бину (ячейке) приписывалось значение, равное числу точек диаграммы персистентности расположенных левее и выше ячейки на картинной плоскости. Далее, производилось закругление до разрешения 20×20 для последующего векторного представления признаков в алгоритмах SVR. Фактически, ранговые функции представляют собой кумулятивные функции плотности распределения вероятностей. Результат такой векторизации диаграмм персистентности, на примере одной из магнитограмм АО 11158, приведен на Рис. 4.2. Такое представление для Бетти 0 и Бетти 1 содержит не по 400 элементов, а 210 уникальных значений (так как на диаграмме персистентности по определению все точки лежат не ниже диагонали). Ранговые функции для групп Бетти 0 и Бетти 1 совмещались в один вектор, а также добавляя в конце вектора элемент-индикатор присутствия вспышки перед магнитограммой мы получали вектор признаков длиной 421 элемент. Следует отметить, строго говоря, не все элементы этого вектора являются независимыми. Так как большин-

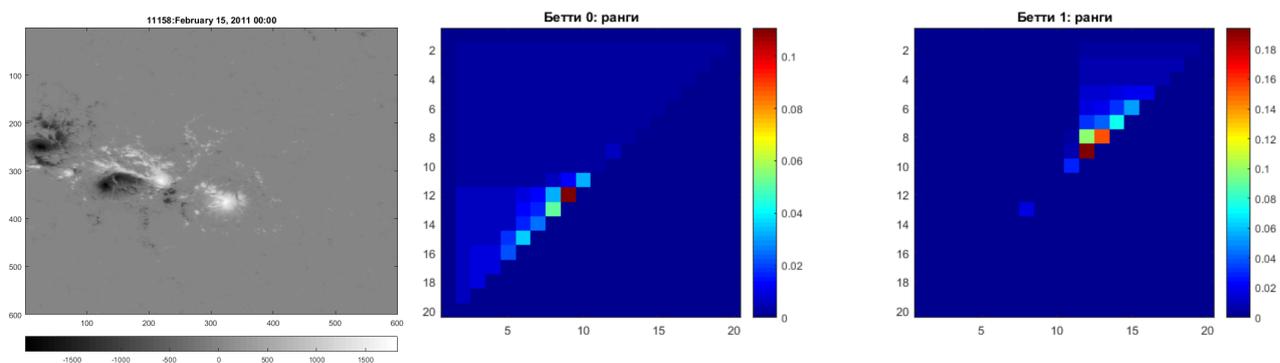


Рис. 4.2: Дискретное представление двух топологических дескрипторов, числа компонент и числа дырок, с использованием ранговых функций на примере АО 11158. Слева: исходная магнитограмма. В центре и справа: соответствующие ранговые функции Бетти 0 и Бетти 1 соответственно

ство элементов фактически дискретно описывают ранговые функции всего для двух групп гомологий Бетти 0 и Бетти 1.

Персистентные изображения. Персистентные изображения наравне с ранговыми функциями являются дискретным представлением для двух топологических дескрипторов Бетти 0 и Бетти 1. Схему их построения (детально описанную в главе 2) можно условно разбить на несколько этапов.

Вначале для магнитограммы строились диаграммы персистентности Бетти 0 и Бетти 1. Затем на сетке 200×200 в пространстве диаграммы персистентности с границами $[-2000 \text{ Гс}, 2000 \text{ Гс}]$ помечались бины (ячейки), содержавшие как минимум одну точку из диаграммы персистентности. Значения, выходящие за границы сетки, приписывались граничным бинам.

Полученные персистентные изображения для Бетти 0 и Бетти 1 размывались гауссовым фильтром. После этого выполнялось их закругление до разрешения 20×20 (этот шаг необходим для сокращения числа элементов в векторе признаков SVR). В таком виде персистентные изображения нормировались на 1, для представления в виде pdf. Пример персистентных изображений для одной из магнитограмм АО 11261 представлен на Рис. 4.3. Такое представле-

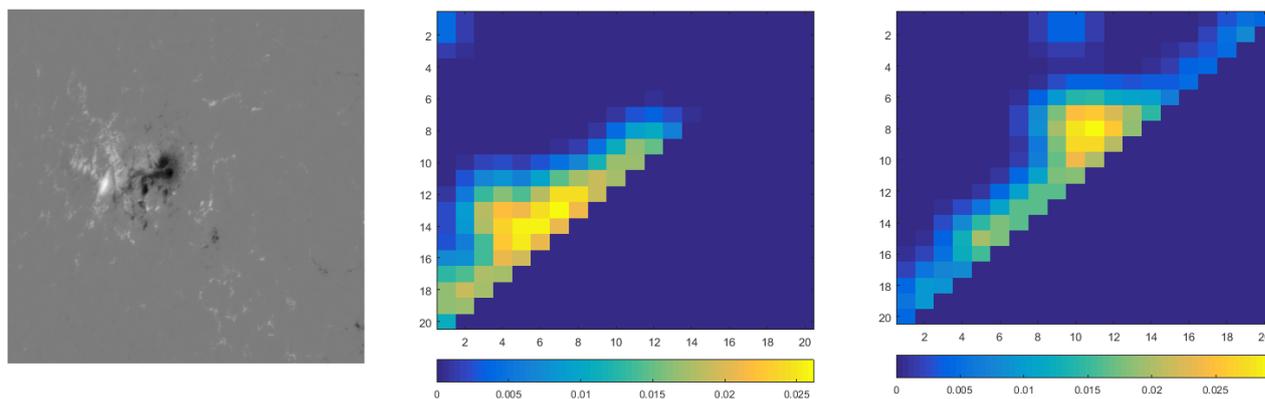


Рис. 4.3: Дискретное представление двух топологических дескрипторов, числа компонент и числа дырок, с использованием персистентных изображений на примере АО 11261. Слева: исходная магнитограмма. В центре и справа: соответствующие персистентные изображения Бетти 0 и Бетти 1 соответственно

ние для Бетти 0 и Бетти 1 содержит не по 400 элементов, а 210 уникальных значений. Для каждой из 3 магнитограмм в векторе признаков использовалось дискретное представление персистентных изображений (420 значений) и один элемент – индикатор присутствия вспышек в АО, до текущего момента времени.

В качестве вектора признаков на вход алгоритма SVR подавались данные о трех магнитограммах: текущей магнитограммы, магнитограмм за 12 и за 24 часа до нее. Суммарная длина вектора признаков при таком подходе составляла $3 \cdot 420 + 1 = 1263$ элемента.

В рассматриваемом диапазоне НМІ данных наша выборка содержала 4849 магнитограммы, для которых были доступны данные за 12 и 24 часа в прошлое. Для того, чтобы избежать эффекта переобучения, разбиение на обучающую и тестовую выборки выполнялось для магнитограмм не в произвольном порядке, а по принадлежности к АО.

SHARP параметры. SHARP означает Spaceweather HMI Active

Region Patch. SHARP параметры представляют собой серию данных, которые содержат различные величины вычисленные из векторных фотосферных магнитограмм и хранятся в заголовке файлов FITS (<http://jsoc.stanford.edu/doc/data/hmi/sharp/sharp.htm>). Всего имеется 31 сегмент данных, включающих все компоненты напряженности векторного магнитного поля, токи, градиенты, знаковые и беззнаковые магнитные потоки, спиральность и т.п. Мы использовали выборку из 18 SHARP параметров, обладающих наибольшей предсказательной эффективностью [32]. Параметры SHARP вычисляются не для всего диска, а для отдельных областей, помеченных соответствующим номером HARP, которые формируются в автоматическом режиме. SHARP параметры вычисляются каждые 12 минут. Для некоторых АО имеется однозначное соответствие номера в системах HARP (HMI Active Region Patch Number) и NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration), а некоторые HARP номера содержат вклад от двух и более NOAA активных областей. В нашей базе присутствовало 18 АО, где соответствие между номерами HARP и NOAA было однозначным.

Для каждой из 3 магнитограмм в векторе признаков использовались 18 SHARP параметров [32]. К ним вручную добавлялся еще один элемент – индикатор присутствия вспышек в АО, до текущего момента времени. Так, с учетом сказанного выше, вектор признаков каждого события имел длину в $3 \times 19 = 57$ элементов.

4.2 Методы

Для решения задачи регрессии времени до вспышки на признаках из топологических инвариантов можно использовать различные методы машинного обучения. В работе использовалась модификация метода опорных век-

торов для задачи регрессии (support vector regression или SVR [65]), как хорошо зарекомендовавший себя метод для решения задач и построения прогноза [61]. В общем случае в задаче предсказывается некоторое непрерывное значение целевой переменной t по данному D -мерному входному вектору \mathbf{x} . В работе использовался алгоритм регрессии на опорных векторах (SVR) из пакета libSVM (<https://www.csie.ntu.edu.tw/~cjlin/libsvm/>).

Принцип работы SVR построен на минимизации регуляризованной функции ошибки. Параметрами алгоритма SVR выступают: обратный параметр регуляризации C , определяющий гладкость границы пространства решений и параметр ядра γ , устанавливающий гладкость входных данных. Для нашей задачи регрессии с многомерным вектором признаков в качестве ядра мы выбирали радиальную базисную функцию $\exp(-\gamma|u - v|^2)$, которая делает нелинейным границу пространства решений. Оптимизация параметров C и γ осуществлялась на равномерной сетке с использованием данных из обучающей выборки в ходе процесса кросс-валидации. В качестве вектора признаков выступали данные анализа топологической сложности магнитограмм. Этими данными являлись ранговые функции и персистентные изображения первых двух групп гомологий (Бетти 0 и Бетти 1).

Прогнозом времени до вспышки считалось время до ближайшей сильной вспышки ($> M5.0$) от текущей магнитограммы в часах. Для магнитограммы сразу после вспышки, время до вспышки менялось скачком – на время до следующей вспышки. Если уже произошла крайняя вспышка данной АО, то в качестве времени до вспышки указывалось время, прошедшее после последней вспышки со знаком минус. Так, прогноз с отрицательным значением времени до вспышки для исследуемой магнитограммы указывал на то, что в АО более не ожидалось вспышечной активности. Данный нюанс важен для

предсказания завершения вспышечной активности в исследуемой АО и указания на отсутствие опасности солнечной активности. Проще говоря, предсказывается следует ли ожидать новых вспышек. Такие данные важны для возможности как можно скорее вернуть космические аппараты в строй.

По аналогии с работой [11], точность прогноза оценивалась по значениями следующих величин: средней квадратической ошибки

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum(t - \hat{t})^2}{N}}, \quad (4.1)$$

где t – истинное значение выходного параметра регрессии, \hat{t} – прогноз, а N – количество данных;

средней абсолютной ошибки

$$MAE = \frac{\sum(|t - \hat{t}|)}{N}, \quad (4.2)$$

и относительной средней ошибки

$$RME = \frac{\sum(t - \hat{t})}{N}. \quad (4.3)$$

4.3 Результаты

В нашей базе присутствовало 18 АО, где имело место однозначное соответствие номеров HARP и NOAA. Обучающая выборка была представлена 14 АО, а тестовая – 4 АО. Для того, чтобы избежать эффекта переобучения, разбиение на обучающую и тестовую выборки выполнялось для магнитограмм не в произвольном порядке, а по принадлежности к АО. Вектор признаков содержал данные о 3-х магнитограммах: текущей магнитограммы, магнитограмм за 12 и за 24 часа до нее.

В таблице 4.1 результаты представлены для одинакового разбиения АО на обучающую и тестовую выборки во всех экспериментах. Данный при-

Таблица 4.1: Сравнение результатов прогноза времени до вспышки ранговых функций, персистентных изображений и SHARP параметров

	Коэффициент корреляции R (max=1)	Средняя относительная ошибка RME (часы)	Средняя абсолютная ошибка MAE (часы)	Среднеквад- ратическая ошибка RMSE (часы)
Ранговые функции	0.61	-6.43	30.6	38.6
Персистент. изображения	0.53	-8.6	33.7	41.4
SHARP параметры	0.57	-31.4	34.8	43.8

мер необходим, чтобы создать для сравниваемых дескрипторов максимально близкие условия.

В таблице 4.2 приведены результаты прогноза, усредненные по 10 случайным разбиениям на обучающую и тестовую выборки. В этом случае в каждом эксперименте участвует уникальный набор выборок, что несколько затрудняет сравнение относительных результатов, но делает полученные абсолютные значения характеристик более объективными.

В результате оценки регрессии времени до вспышки на топологических признаках мы получили значение коэффициента, характеризующего эффективность выбранной регрессии на тестовой выборке, $R=0.61$, при максимально возможном его значении $R=1$. Значения среднеквадратической ошибки, средней абсолютной и средней относительной ошибки прогноза представлены в Таблице 1. Полученные значения среднеквадратической ошибки $RMSE = 38.6$ часов даже несколько лучше результатов, полученных с ис-

Таблица 4.2: Сравнение усредненных (по 10 случайным выборкам) результатов прогноза времени до вспышки ранговых функций, персистентных изображений и SHARP параметров

	Коэффициент корреляции R (max=1)	Средняя относительная ошибка RME (часы)	Средняя абсолютная ошибка MAE (часы)	Среднеквад- ратическая ошибка RMSE (часы)
Ранговые функции	0.46 ± 0.13	4.6 ± 15.7	43.9 ± 4.9	55.4 ± 5.6
Персистент. изображения	0.36 ± 0.17	-4.4 ± 20.2	50.1 ± 6.9	62.2 ± 7.2
SHARP параметры	0.26 ± 0.06	-4.5 ± 11.1	51.1 ± 4.4	63.9 ± 6.4

пользованием набора морфологических дескрипторов [11]. При этом положительное значение средней относительной ошибки, аналогичное полученному в указанной работе указывает на систематическую недооценку регрессией времени до вспышки. Иными словами, предсказанное время возникновения вспышки опережает действительное.

4.4 Выводы к Главе 4

1. Результаты регрессии на топологических характеристиках и регрессии на основе SHARP параметров указывают на то, что модель основанная на топологическом описании незначительно превосходит модель основанную на векторных параметрах. Эффективность прогноза больших вспышек, основанного на топологических дескрипторах LOS магнитограмм, по меньшей мере не хуже, чем результаты прогностических схем, основанных на векторных признаках.

2. Важно отметить большую устойчивость результатов прогноза с топологическими дескрипторами сложности случайного поля к процедуре «встряхивания» обучающей и тестовой выборки в сравнении с общеизвестными SHARP параметрами. Данный результат дает основание предполагать о возможно большей эффективности применения именно универсальных топологических инвариантов для построения системы прогноза сильных вспышек в реальном времени.

Заключение

Основные результаты работы

1. Механизм ДСИ в сильном случайном магнитном поле совместим с наблюдаемыми распределениями параметров Бэнда источников гамма-всплесков и позволяет получить правильные корреляционные зависимости между ними. Исходя из требования совместимости модели с наблюдаемыми распределениями, данный анализ позволяет наложить ограничения на значения физических параметров и в том числе дает представление о структуре случайных магнитных полей в источниках гамма-всплесков.

2. Топологические инварианты для описания сложности случайных магнитных полей обладают потенциалом для прогнозирования солнечных вспышек сравнимым с обычно используемым большим количеством морфологических признаков сложности. Признаки TDA мультимасштабны, легко вычисляются и не требуют предобработки данных.

В задаче прогноза топологические дескрипторы демонстрируют большую устойчивость к «встряхиванию» обучающей выборки наблюдательных дан-

ных, что возможно сделает их более подходящим инструментом для систем анализа сложности случайных магнитных полей в реальном времени.

Список публикаций, содержащих описание основных результатов диссертации

[A1]. **Urtiev, F.A.**, Fleishman, G.D., Platonov, K.Yu. "Resonant transition radiation in plasma with magnetic inhomogeneities" Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics, 102, 1, 2006, p. 96-103

[A2]. Fleishman, G. D., **Urtiev, F.A.** "Gamma-ray burst spectral parameters within the fireball model" Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol 406, 1, 2010, p. 644-655

[A3]. Fleishman, G. D., **Urtiev, F.A.** "GRB spectral parameter modeling" Advances in Plasma Astrophysics, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium, Vol 274, 2011, p. 243-245

[A4]. Knyazeva, I.S., Makarenko, N.G., **Urt'ev, F.A.** "Comparison of the dynamics of active regions by methods of computational topology" Geomagnetism and Aeronomy, Vol 55, 8, 2015, p.1134-1140

[A5]. Knyazeva, I.S., Makarenko, N.G., **Urtiev, F.A.** "The Dynamical Regime of Active Regions via the Concept of Persistent Homology" Physics Procedia, Vol 74, 2015, p. 363-367

[A6]. Knyazeva, I.S., Makarenko, N.G., Makarenko, I., Vdovina, A., **Urtiev, F.A.** "Analysis of the Solar magnetograms evolution using a spectral gap of critical nets" Journal of Physics: Conference Series, Vol 738, 1, 2016

[A7]. Макаренко Н.Г., **Уртъев Ф.А.**, Князева И.С., Малкова Д.Б., Пак И.Т., Каримова Л.М. "Распознавание текстур на цифровых изображениях методами вычислительной топологии" Современные проблемы дистанционного

зондирования Земли из космоса, Т. 12., 1, 2015, с.131-144

[A8]. Флейшман Г.Д., **Уртьев Ф.А.** "Физические параметры гамма-всплесков" Труды X Конференции молодых ученых «Современные проблемы в астрофизике и физике космической плазмы». БШФФ-2007, ИСЗФ СО РАН, Иркутск, 2009, с.250-252.

[A9]. Флейшман Г.Д., **Уртьев Ф.А.** "Низкочастотное галактическое излучение" Труды XI Конференции молодых ученых «Гелио- и геофизические исследования». БШФФ-2009, ИСЗФ СО РАН, Иркутск, 2009, с.293-295.

[A10]. Knyazeva, I., Makarenko, I., **Urtiev, F.** "Diagnosis of Dynamic Regimes of Chaotic Systems by Methods of Topological Data Analysis" - 9thCHAOS Conference Proceedings 23-26 May 2016, Senate House, University of London UK, 2016

[A11]. Knyazeva, I.S., Nagovitsyn Yu.A., **Urt'ev F.A.**, Makarenko N.G. "Topological diagnostics of the cyclic component of the time series associated with helium" Geomagnetism and Aeronomy, Vol 56, 7, 2016, p. 853-857

Приложения

Список используемых сокращений

АО – активная область на Солнце;

ПИ – переходное излучение;

РПИ – резонансное переходное излучение;

МРПИ – магнитное резонансное переходное излучение;

РПТИ – резонансное поляризационное тормозное излучение;

GRB – gamma-ray bursts (гамма-всплеск);

ДСИ – диффузионное синхротронное излучение;

TDA – topological data analysis (топологический анализ данных);
HMI – Helioseismic and Magnetic Imager;
SDO – Solar Dynamics Observatory;
LCDM – Lambda cold dark matter;
кэВ – килоэлектронвольт;
МэВ - мегаэлектронвольт;
ГэВ - гигаэлектронвольт;
BATSE – Burst and Transient Source Experiment;
Мпк – мегапарсек;
SVM – support vector machine;
SVR – support vector regression;
pdf – probability density function;
HR – high resolution;
LOS – line of sight;
SHARP – Spaceweather HMI Active Region Patch;
HARP – HMI Active Region Patches;
CME - coronal mass ejection;
ДП – диаграмма персистентности;

Реализация алгоритма топологической фильтрации (скрипт Matlab)

```
1 clear all;  
2 text1={'Программа для вычисления количества компонент персистентности.';  
3 '2014.06.10 '};  
4 'На ВХОД программа принимает данные в форматах:';  
5 '* изображения 256–grayscale в формате *.BMP '};  
6 '* изображения из файла *.fits '};  
7 '* матрица с изображением – переменная image_data из файла *.mat';  
8 ''};  
9 ' ВЫХОД. Результат работы программы будет помещен в 3 файла в папке с программой:';
```

```

10     '(1) bars0.txt      - координаты рождения и смерти Бэтти 0 компонент. ';
11     '(2) bars1.txt      - координаты рождения и смерти Бэтти 1 компонент. ';
12     '(3) blevels_01.txt - содержит в каждой строке 6 значения: ';
13     '_____';
14     '| уровень среза | количество Бэтти0 | количество Бэтти 1 | Эйлер x=b1-b0 | сумма баркодов
        B0| сумма баркодов B1';
15
16     '';
17     'Для выбора файла с входными данными нажмите ОК' } ;
18 h=warndlg( text1, 'Persistence calculator v1.2 ' ) ;
19 waitfor(h);
20 % Получение имени и пути к файлу
21 Filter={'*.bmp', '256-grayscale image (*.bmp)'; '*.mat', 'variable "image_data" in Matlab (*.
        mat)'; '*.fits', 'Fits data (*.fits)'};
22 [FName, PName, FilterIndex] = uigetfile(Filter);
23 if FName~=0
24     % Формирование полного пути к файлу
25     FullName = [PName FName];
26     switch (FilterIndex)
27     case 1 % Считывание изображения из BMP файла
28         imgray1 = imread(FullName);
29         imgray1=double(imgray1);
30     case 2
31         load(FullName);
32         imgray1=image_data;
33     case 3
34         imgray1= fitsread(FullName);
35     end
36 else
37     break;
38 end
39
40
41 [imheight, imwidth] = size(imgray1 );
42 imgoriginal=imgray1;
43 amount=imheight*imwidth;
44 amount_edges=3*amount-2*(imheight+imwidth-1)-1;
45 vertexes=zeros(amount,3);
46 edges=zeros(amount_edges,3);
47 amount_triag=2*amount-2*(imheight+imwidth-1);
48 triages=zeros(amount_triag,6);
49 flag=true;
50 N=imwidth;
51 num_edge=1;
52 num_triag=1;
53 num=1;
54
55 image_sort=sort(imgray1(:)); % tut mnogo povtorov
56 levels_size=max(size(image_sort));

```

```

57 amountB01=zeros(levels_size,5); % kolichestva barkodov na sreze: |INTENSE|B0 amount|B1 amount|
    B0 sum|B1 sum
58
59 size_amB01=1;
60 amountB01(size_amB01,1)=image_sort(1);
61 max_B01=max(max(image_sort));
62 for i=2:(levels_size)
63     if ne(image_sort(i), image_sort(i-1))
64         size_amB01=size_amB01+1;
65         amountB01(size_amB01,1)=image_sort(i);
66     end
67 end
68 level_sumB01=zeros(size_amB01,2);
69
70 %CHAST 1: filtratsia
71 for i=1:imheight-1 % perebiraem matritsu do elementov N-lxM-1 chtobi srazu zapisat rebra i
    treugolniki
72     for k=1:imwidth-1
73         vertexes(num,:)= [num num imgray1(i,k)]; % coord | roditel | intensivnost
74         edges(num_edge,:)= [num num+1 max([imgray1(i,k) imgray1(i,k+1)])]; %gorizontalnoe
            rebro nomer levoi verhnei vertex | nomer pravoi nignei | max intens vershin
75         num_edge=num_edge+1;
76         edges(num_edge,:)= [num num+N max([imgray1(i,k) imgray1(i+1,k)])]; %vertikalnoe rebro
77         num_edge=num_edge+1;
78         if (max([imgray1(i,k) imgray1(i+1,k+1)]) < max([imgray1(i+1,k) imgray1(i,k+1)])) % esli
            ranshe poiavliaetsia rebro "\ "
79             edges(num_edge,:)= [num num+N+1 max([imgray1(i,k) imgray1(i+1,k+1)])]; % rebro \
80             num_edge=num_edge+1;
81             triages(num_triag,:)= [num_triag num_triag max([imgray1(i,k) imgray1(i,k+1) imgray1
                (i+1,k+1)]) num num+1 num+N+1]; %pravii verhnii treug
82             num_triag=num_triag+1; % triages= prisvoenie nomera tekushemu treug| nomer
                roditelia|max intensivnost vershin| koord toчек
83             triages(num_triag,:)= [num_triag num_triag max([imgray1(i,k) imgray1(i+1,k) imgray1
                (i+1,k+1)]) num+N+1 num+N num]; %levii nigni treug
84             num_triag=num_triag+1;
85         else
86             edges(num_edge,:)= [num+1 num+N max([imgray1(i,k+1) imgray1(i+1,k)])]; % rebro /
87             num_edge=num_edge+1;
88             triages(num_triag,:)= [num_triag num_triag max([imgray1(i,k) imgray1(i,k+1) imgray1
                (i+1,k)]) num+1 num num+N]; % levii verhnii treug
89             num_triag=num_triag+1;
90             triages(num_triag,:)= [num_triag num_triag max([imgray1(i,k+1) imgray1(i+1,k)
                imgray1(i+1,k+1)]) num+N num+N+1 num+1]; % pravii nignii treug
91             num_triag=num_triag+1;
92
93         end
94         num=num+1;
95         if (eq(k,imwidth-1)) %dobavlenie pravoi granitsi risunka
96             vertexes(num,:)= [num num imgray1(i,k+1)]; % vertikalnoe pravaia granitsa

```

```

97     edges(num_edge,:)=[num num+N max([imgray1(i,k+1) imgray1(i+1,k+1)]) ]; % %
          vertikalnoe pravoe rebro
98     num_edge=num_edge+1;
99     num=num+1;
100    end
101    if (eq(i,imheight-1)&&(k<imwidth-1)) %dobavlenie nignei granitsi risunka
102        vertexes(num+N-1,:)=[num+N-1 num+N-1 imgray1(i+1,k)]; % gorizontalnaia nigniaia
          granitsa
103        edges(num_edge,:)=[num+N-1 num+N max([imgray1(i+1,k) imgray1(i+1,k+1)]) ];
104        num_edge=num_edge+1;
105
106    end
107    if (eq(i,imheight-1)&&eq(k,imwidth-1))%nigniaa gran i krainiaa pravaia nignia tochka
108        vertexes(num+N-2,:)=[num+N-2 num+N-2 imgray1(i+1,k)];
109        edges(num_edge,:)=[num+N-2 num+N-1 max([imgray1(i+1,k) imgray1(i+1,k+1)]) ]; %
          gorizontalnaia nigniaia granitsa
110        num_edge=num_edge+1;
111        vertexes(num+N-1,:)=[num+N-1 num+N-1 imgray1(i+1,k+1)];
112    end
113    end
114 end
115
116 %vertexes=sortrows(vertexes,3);% sortiruem vershini po intensivnostiam
117 edges=sortrows(edges,3); %
118
119 disp('Filtration has done. ');
120 disp(' ');
121 % CHAST 2: poisk komponent
122 disp('Poisk komponent Betti0 is began ');
123 fid = fopen('bars0.txt','wt');
124 for i=1:amount_edges
125     if not(mod(i,30000))
126         disp([ num2str(i), ' of ', num2str(amount_edges), ' has done' ])
127     end
128     v1=edges(i,1);
129     v2=edges(i,2);
130     Intense=edges(i,3);
131     parent_v1=vertexes(v1,2);
132     parent_v2=vertexes(v2,2);
133     if (ne(parent_v1,parent_v2)&&(vertexes(parent_v1,3)==vertexes(parent_v2,3)))
134         matrix=find(vertexes(:,2)==parent_v2);
135         vertexes(matrix,2)=parent_v1;
136
137     if (Intense>vertexes(parent_v2,3))
138         fprintf(fid,'%3.4f ',vertexes(parent_v2,3));
139         fprintf(fid,'%3.4f\n',Intense);
140
141     %zanesenie kolichestva B0 na urovniakh poka givet eta komponenta
142     % nahogdenia indexa urovnia roghdenia i smerti

```

```

143     birth=find(amountB01(:,1)==vertexes(parent_v2,3));
144     die=find(amountB01(:,1)==Intense);
145     dlinna_barcode= Intense-vertexes(parent_v2,3); % dlinna barkoda B0 dlya
           vichislenia summi dlin barcodov na urovne
146     for k=birth:die-1
147         amountB01(k,2)=amountB01(k,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
148         amountB01(k,4)=amountB01(k,4)+dlinna_barcode;
149     end
150     if (Intense==max_B01) % dobavlenie B0 lya poslednego urovnia tak kak barkodi
           ostautsia do beskonecnosti
151         amountB01(die,2)=amountB01(die,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
152         amountB01(die,4)=amountB01(die,4)+dlinna_barcode;
153     end
154 end
155 parent_v2=parent_v1;
156 end
157 if (vertexes(parent_v1,3)<vertexes(parent_v2,3))
158     matrix=find(vertexes(:,2)==parent_v2);
159     vertexes(matrix,2)=parent_v1;
160     if (Intense>vertexes(parent_v2,3))
161         fprintf(fid, '%3.4f   ', vertexes(parent_v2,3));
162         fprintf(fid, '%3.4f\n', Intense);
163
164         %zanesenie kolichestva B0 na urovniakh poka givet eta komponenta
165         birth=find(amountB01(:,1)==vertexes(parent_v2,3));
166         die=find(amountB01(:,1)==Intense);
167         dlinna_barcode= Intense-vertexes(parent_v2,3); % dlinna barkoda B0 dlya
           vichislenia summi dlin barcodov na urovne
168         for k=birth:die-1
169             amountB01(k,2)=amountB01(k,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
170             amountB01(k,4)=amountB01(k,4)+dlinna_barcode;
171         end
172         if (Intense==max_B01)
173             amountB01(die,2)=amountB01(die,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
174             amountB01(die,4)=amountB01(die,4)+dlinna_barcode;
175         end
176
177     end
178
179 else
180     if (vertexes(parent_v1,3)>vertexes(parent_v2,3))
181         matrix=find(vertexes(:,2)==parent_v1);
182         vertexes(matrix,2)=parent_v2;
183
184         if (Intense>vertexes(parent_v1,3))
185             fprintf(fid, '%3.4f   ', vertexes(parent_v1,3));
186             fprintf(fid, '%3.4f\n', Intense);
187             %zanesenie kolichestva B0 na urovniakh poka givet eta komponenta
188             birth=find(amountB01(:,1)==vertexes(parent_v1,3));

```

```

189         die=find(amountB01(:,1)==Intense);
190         dlinna_barcode= Intense-vertexes(parent_v1,3); % dlinna barkoda B0 dlya
           vichislenia summi dlin barcodov na urovne
191         for k=birth:die-1
192             amountB01(k,2)=amountB01(k,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
193             amountB01(k,4)=amountB01(k,4)+dlinna_barcode;
194         end
195         if (Intense==max_B01)
196             amountB01(die,2)=amountB01(die,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
197             amountB01(die,4)=amountB01(die,4)+dlinna_barcode;
198         end
199
200     end
201
202
203
204
205     end
206 end
207
208 end
209 if (Intense>vertexes(parent_v1,3))
210     fprintf(fid, '%3.4f ', vertexes(parent_v1,3));
211     fprintf(fid, '%3.4f\n', Intense);
212     %zanesenie kolichestva B0 na urovniakh poka givet eta komponenta
213     birth=find(amountB01(:,1)==vertexes(parent_v1,3));
214     die=find(amountB01(:,1)==Intense);
215     dlinna_barcode= Intense-vertexes(parent_v1,3); % dlinna barkoda B0 dlya vichislenia summi
           dlin barcodov na urovne
216     for k=birth:die-1
217         amountB01(k,2)=amountB01(k,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
218         amountB01(k,4)=amountB01(k,4)+dlinna_barcode;
219     end
220     if (Intense==max_B01) % v kontse ostaetsia odin barkod
221         amountB01(die,2)=amountB01(die,2)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
222         amountB01(die,4)=amountB01(die,4)+dlinna_barcode;
223     end
224 end
225 fclose(fid);
226 disp(' ');
227
228 % CHAST 3: poisk dirok
229 disp('poisk komponent Bettli holes')
230 fid = fopen('bars1.txt', 'wt');
231 for i=amount_edges:-1:1
232     if not(mod(i,30000))
233         disp([ num2str(i), ' before the end. Whole amount: ', num2str(amount_edges)])
234
235     end

```

```

236     v1=edges(i,1);
237     v2=edges(i,2);
238     Intense=edges(i,3);
239     if (v2==v1+1)
240         type=1; % —
241         cur_triag1=find ( triages(:,4)==v1 & triages(:,5)==v2);
242         cur_triag2=find ( triages(:,4)==v2 & triages(:,5)==v1);
243         cur_triag=[cur_triag1 cur_triag2];
244
245     end
246
247     if (v2==v1+N)% |
248         type=2; % |
249         cur_triag1=find ( triages(:,5)==v1 & triages(:,6)==v2);
250         cur_triag2=find ( triages(:,5)==v2 & triages(:,6)==v1);
251         cur_triag=[cur_triag1 cur_triag2];
252
253     end
254     if (v2==v1+N-1)% /
255         type=3; % /
256         cur_triag1=find ( triages(:,4)==v1 & triages(:,6)==v2);
257         cur_triag2=find ( triages(:,4)==v2 & triages(:,6)==v1);
258         cur_triag=[cur_triag1 cur_triag2];
259
260     end
261     if (v2==v1+1+N)% \
262         type=4; % \
263         cur_triag1=find ( triages(:,4)==v1 & triages(:,6)==v2);
264         cur_triag2=find ( triages(:,4)==v2 & triages(:,6)==v1);
265         cur_triag=[cur_triag1 cur_triag2];
266
267     end
268     if (size(cur_triag)<2)
269         triag1=cur_triag(1);
270         parent_t1=triages(triag1,2);
271         matrix=find(triages(:,2)==parent_t1);
272         triages(matrix,3)=700;
273     else
274         triag1=cur_triag(1);
275         triag2=cur_triag(2);
276
277         parent_t1=triages(triag1,2);
278         parent_t2=triages(triag2,2);
279         if (ne(parent_t1,parent_t2)&&(triages(parent_t1,3)==triages(parent_t2,3)))
280             matrix=find(triages(:,2)==parent_t2);
281             triages(matrix,2)=parent_t1;
282             if (triages(parent_t2,3)<700)&&(Intense<triages(parent_t2,3))
283                 fprintf(fid,'%3.4f ',Intense);
284                 fprintf(fid,'%3.4f\n',triages(parent_t2,3));

```

```

285
286 %zanesenie kolichestva B0 na urovniah poka givet eta komponenta
287 birth=find(amountB01(:,1)==Intense);
288 die=find(amountB01(:,1)==triages(parent_t2,3));
289 dlinna_barcode= triages(parent_t2,3)-Intense; % dlinna barkoda B1 dlya
    vichislenia summi dlin barcodov na urovne
290 for k=birth+1:die
291     amountB01(k,3)=amountB01(k,3)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
292     amountB01(k,5)=amountB01(k,5)+dlinna_barcode;
293 end
294 end
295 parent_t2=parent_t1;
296 end
297
298 if (triages(parent_t1,3)>triages(parent_t2,3))
299     matrix=find(triages(:,2)==parent_t2);
300     triages(matrix,2)=parent_t1;
301     if (triages(parent_t2,3)<700)&&(Intense<triages(parent_t2,3))
302         fprintf(fid, '%3.4f ', Intense);
303         fprintf(fid, '%3.4f\n', triages(parent_t2,3));
304
305 %zanesenie kolichestva B0 na urovniah poka givet eta komponenta
306 birth=find(amountB01(:,1)==Intense);
307 die=find(amountB01(:,1)==triages(parent_t2,3));
308 dlinna_barcode= triages(parent_t2,3)-Intense; % dlinna barkoda B1 dlya
    vichislenia summi dlin barcodov na urovne
309 for k=birth+1:die
310     amountB01(k,3)=amountB01(k,3)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
311     amountB01(k,5)=amountB01(k,5)+dlinna_barcode;
312 end
313
314 end
315 else
316     if (triages(parent_t1,3)<triages(parent_t2,3))
317         matrix=find(triages(:,2)==parent_t1);
318         triages(matrix,2)=parent_t2;
319         if (triages(parent_t1,3)<700)&&(Intense<triages(parent_t1,3))
320             fprintf(fid, '%3.4f ', Intense);
321             fprintf(fid, '%3.4f\n', triages(parent_t1,3));
322             %zanesenie kolichestva B0 na urovniah poka givet eta komponenta
323             birth=find(amountB01(:,1)==Intense);
324             die=find(amountB01(:,1)==triages(parent_t1,3));
325             dlinna_barcode= triages(parent_t1,3)-Intense; % dlinna barkoda B1 dlya
                vichislenia summi dlin barcodov na urovne
326             for k=birth+1:die
327                 amountB01(k,3)=amountB01(k,3)+1; % kolichestvo barcodov na urovne
328                 amountB01(k,5)=amountB01(k,5)+dlinna_barcode;
329             end
330

```

```

331         end
332
333     end
334 end
335 end
336 end
337 fclose(fid);
338
339 % количество баркодов b0 i b1 на каждом уровне среза
340 fid = fopen('blevels_01.txt','wt');
341 for k=1:size_amB01
342     fprintf(fid, '%3.4f ', amountB01(k,1)); % уровень среза
343     fprintf(fid, '%6.0f ', amountB01(k,2)); % количество b0 компонент на данном уровне
344     fprintf(fid, '%6.0f', amountB01(k,3)); % количество b1 диок на данном уровне
345     fprintf(fid, '%6.0f', amountB01(k,2)-amountB01(k,3));
346     fprintf(fid, '%6.0f', amountB01(k,4));
347     fprintf(fid, '%6.0f\n', amountB01(k,5));
348 end
349 fclose(fid);
350
351 plot(amountB01(:,1), amountB01(:,2), amountB01(:,1), amountB01(:,3), amountB01(:,1), amountB01(:,2)
    -amountB01(:,3));
352 title('Зависимость количества компонент betti0, betti1 от уровня');
353 ylabel('количество компонент');
354 xlabel('значение уровня');
355 legend('Betti0', 'Betti1', 'Euler characteristic', -1)

```

Список литературы

- [1] A Comparison of Flare Forecasting Methods. I. Results from the All-Clear Workshop / G. Barnes, K. D. Leka, C. J. Schrijver et al. // *ApJ*. — 2016. — Vol. 829. — P. 89.
- [2] *Adler R., Taylor J. E.* Topological Complexity of Smooth Random Functions: École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIX-2009. Lecture Notes in Mathematics. — Springer Berlin Heidelberg, 2011.
<https://books.google.de/books?id=m0qMOZ4NT0UC>.
- [3] *Adler R. J.* The Geometry of Random Fields. — 1981.
- [4] *Aitchison J., Brown J.* The Log-normal Distribution. — Cambridge University Press, 1957.

- [5] Alpha, Betti and the Megaparsec Universe: on the Topology of the Cosmic Web / R. van de Weygaert, G. Vegter, H. Edelsbrunner et al. // *ArXiv e-prints*. — 2013.
- [6] *Amusia M. Ya. et. al.* Polyarizacionnoe tormoznoe izluchenie chastic i atomov. — Moskva: Nauka, 1987.
- [7] *Barker H. W., Wiellicki B. A., Parker L.* A Parameterization for Computing Grid-Averaged Solar Fluxes for Inhomogeneous Marine Boundary Layer Clouds. Part II: Validation Using Satellite Data. // *Journal of Atmospheric Sciences*. — 1996. — Vol. 53. — Pp. 2304–2316.
- [8] BATSE observations of gamma-ray burst spectra. I - Spectral diversity / D. Band, J. Matteson, L. Ford et al. // *ApJ*. — 1993. — Vol. 413. — Pp. 281–292.
- [9] *Belkov S. A., Nikolaev I. A., Tsytovich V. N.* Radiation from relativistic ions due to transition scattering in random magnetic fields // *Radiofizika*. — 1980. — Vol. 23. — Pp. 261–269.
- [10] *Berge P., Pomo I., Vidal K.* Poryadok v haose. — Mir, 1991.
- [11] *Boucheron L. E., Al-Ghraibah A., McAteer R. T. J.* Prediction of Solar Flare Size and Time-to-Flare Using Support Vector Machine Regression // *ApJ*. — 2015. — Vol. 812. — P. 51.
- [12] *Bret A., Firpo M.-C., Deutsch C.* Collective electromagnetic modes for beam-plasma interaction in the whole k space // *Phys. Rev.* — 2004. — Vol. 70, no. 4. — P. 046401.
- [13] *Bubenik P., Dlotko P.* A persistence landscapes toolbox for topological statistics // *ArXiv e-prints*. — 2015.

- [14] *Bykov A. M., Meszaros P.* Electron Acceleration and Efficiency in Nonthermal Gamma-Ray Sources // *ApJ*. — 1996. — Vol. 461. — P. L37.
- [15] *Cosmic Electrodynamics* / Ed. by G. D. Fleishman, I. N. Toptygin. — Vol. 388 of *Astrophysics and Space Science Library*, 2013.
- [16] *Crow E. L., Shimizu K.* Lognormal distributions: Theory and applications. — M. Dekker New York, 1988. — Vol. 88.
- [17] *Edelsbrunner H., Harer J.* Computational topology: an introduction. — American Mathematical Soc., 2010.
- [18] *Eisenstein D. J., Hu W.* Power Spectra for Cold Dark Matter and Its Variants // *ApJ*. — 1999. — Vol. 511. — Pp. 5–15.
- [19] *Evans K. F., McFarlane S., Wiscombe W.* Threedimensional radiative transfer effects of two-point statistical representations of broken cloud structure // Proceedings of the 10th Conference on Atmospheric Radiation. — 1999. — Pp. 579–582.
- [20] Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation / E. Komatsu, J. Dunkley, M. R.olta et al. // *ApJS*. — 2009. — Vol. 180. — Pp. 330–376.
- [21] *Fleishman G. D.* Diffusive Synchrotron Radiation from Relativistic Shocks in Gamma-Ray Burst Sources // *ApJ*. — 2006. — Vol. 638. — Pp. 348–353.
- [22] *Fleishman G. D.* Generation of Emissions by Fast Particles in Stochastic Media // *Geospace Electromagnetic Waves and Radiation* / Ed. by J. W. Labelle, R. A. Treumann. — Vol. 687 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag. — 2006. — P. 87.
- [23] *Fleishman G. D., Bietenholz M. F.* Diffusive synchrotron radiation from pulsar wind nebulae // *MNRAS*. — 2007. — Vol. 376. — Pp. 625–633.

- [24] *Fleishman G. D., Toptygin I. N.* Diffusive radiation in Langmuir turbulence produced by jet shocks // *MNRAS*. — 2007. — Vol. 381. — Pp. 1473–1481.
- [25] *Fleishman G. D., Toptygin I. N.* Diffusive radiation in Langmuir turbulence produced by jet shocks // *MNRAS*. — 2007. — Vol. 381. — Pp. 1473–1481.
- [26] *Fleishman G. D., Urtiev F. A.* Gamma-ray burst spectral parameters within the fireball model // *MNRAS*. — 2010. — Vol. 406. — Pp. 644–655.
- [27] *Ghrist Robert.* Barcodes: the persistent topology of data // *Bulletin of the American Mathematical Society*. — 2008. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 61–75.
- [28] *Ginzburg V. L., Tsytovich V. N.* Transition radiation and transition scattering. Some theoretical questions. — 1984.
- [29] *Harrison E. R.* Fluctuations at the Threshold of Classical Cosmology // *Phys. Rev. D*. — 1970. — Vol. 1. — Pp. 2726–2730.
- [30] *Hededal C. B., Nishikawa K.-I.* The Influence of an Ambient Magnetic Field on Relativistic collisionless Plasma Shocks // *ApJ*. — 2005. — Vol. 623. — Pp. L89–L92.
- [31] *Horsthemke W., Lefever R.* Noise-induced transitions: theory and applications in physics, chemistry, and biology. — Springer Verlag, 1984.
- [32] *Ilonidis S., Bobra M., Couvidat S.* Solar Flare Predictions Using Time Series of SDO/HMI Observations and Machine Learning Methods // *IAU General Assembly*. — 2015. — Vol. 22. — P. 2258117.
- [33] *Jaroscsek C. H., Lesch H., Treumann R. A.* Self-consistent Diffusive Lifetimes of Weibel Magnetic Fields in Gamma-Ray Bursts // *ApJ*. — 2004. — Vol. 616. — Pp. 1065–1071.
- [34] *Kac Mark, Slepian David.* Large Excursions of Gaussian Processes // *Ann. Math. Statist.* — 1959. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 1215–1228.

- [35] *Kirk J. G., Reville B.* Radiative Signatures of Relativistic Shocks // *ApJ*. — 2010. — Vol. 710. — Pp. L16–L20.
- [36] *Kumar P., McMahon E.* A general scheme for modelling γ -ray burst prompt emission // *MNRAS*. — 2008. — Vol. 384. — Pp. 33–63.
- [37] *LaBelle J., Treumann R. A.* Auroral Radio Emissions, 1. Hisses, Roars, and Bursts // *Space Sci. Rev.*. — 2002. — Vol. 101. — Pp. 295–440.
- [38] *Lewis G. M., Austin Ph. H.* An iterative method for generating scaling log-normal simulations // Proc. of the 11th conf. on Atmospheric Radiation. — 2002. — Pp. 3–7.
- [39] Lognormal Distribution. — New York, NY: Springer New York, 2008. — Pp. 321–322.
- [40] *Longuet-Higgins M. S.* The Statistical Analysis of a Random, Moving Surface // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*. — 1957. — Vol. 249. — Pp. 321–387.
- [41] *Makarenko, N. G. and Malkova, D. and Machin, M. and Knyazeva, I. and Makarenko, I.* Methods of computational topology for the analysis of dynamics of active regions of the sun // *Journal of Mathematical Sciences*. — 2014. — Vol. 203, no. 6. — Pp. 806–815.
<http://dx.doi.org/10.1007/s10958-014-2170-y>.
- [42] *Medvedev M. V., Loeb A.* Generation of Magnetic Fields in the Relativistic Shock of Gamma-Ray Burst Sources // *ApJ*. — 1999. — Vol. 526. — Pp. 697–706.
- [43] *Mészáros P.* Gamma-ray bursts // *Reports on Progress in Physics*. — 2006. — Vol. 69. — Pp. 2259–2321.
- [44] *Meszáros P., Rees M. J.* Gamma-Ray Bursts // *ArXiv e-prints*. — 2014.

- [45] *Nakar E., Piran T.* Time-scales in long gamma-ray bursts // *MNRAS*. — 2002. — Vol. 331. — Pp. 40–44.
- [46] *Nita G. M., Gary D. E., Fleishman G. D.* Spatial Evidence for Transition Radiation in a Solar Radio Burst // *ApJ*. — 2005. — Vol. 629. — Pp. L65–L68.
- [47] Particle Acceleration and Magnetic Field Generation in Electron-Positron Relativistic Shocks / K.-I. Nishikawa, P. Hardee, G. Richardson et al. // *ApJ*. — 2005. — Vol. 622. — Pp. 927–937.
- [48] Particle Acceleration in Relativistic Jets Due to Weibel Instability / K.-I. Nishikawa, P. Hardee, G. Richardson et al. // *ApJ*. — 2003. — Vol. 595. — Pp. 555–563.
- [49] Peremegaemost v sluchainoi srede / Ya. B. Zeldovich, S. A. Molchanov, A. A. Razumaikin, D. D. Sokolov // *UFN*. — 1987. — Vol. 152, no. 5. — Pp. 3–32.
- [50] Persistence Images: A Stable Vector Representation of Persistent Homology / H. Adams, S. Chepushtanova, T. Emerson et al. // *ArXiv e-prints*. — 2015.
- [51] *Piran T.* Magnetic Fields in Gamma-Ray Bursts: A Short Overview // Magnetic Fields in the Universe: From Laboratory and Stars to Primordial Structures. / Ed. by E. M. de Gouveia dal Pino, G. Lugones, A. Lazarian. — Vol. 784 of *American Institute of Physics Conference Series*. — 2005. — Pp. 164–174.
- [52] *Platonov K. Y., Fleishman G. D.* Transition radiation of moderately relativistic particles in a plasma with random inhomogeneities // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 1994. — Vol. 79. — Pp. 572–580.

- [53] *Platonov K. Yu., Fleishman G. D.* Perekhodnoe izluchenie v sluchaino-neodnorodnih sredah // *UFN*. — 2002. — Vol. 172, no. 3. — Pp. 241–300.
- [54] *Pogosyan D., Pichon C., Gay C.* Non-Gaussian extrema counts for CMB maps // *Phys. Rev. D*. — 2011. — Vol. 84, no. 8. — P. 083510.
- [55] Power law distribution in statistics of failures in operation of spacecraft onboard equipment / L. M. Karimova, O. A. Kruglun, N. G. Makarenko, N. V. Romanova // *Cosmic Research*. — 2011. — Vol. 49. — Pp. 458–463.
- [56] *Qahwaji R., Colak T.* Automatic Short-Term Solar Flare Prediction Using Machine Learning and Sunspot Associations // *Solar Phys.* — 2007. — Vol. 241. — Pp. 195–211.
- [57] Raspoznavanie tekstur na tsifrovih izobrazheniah metodami vichislitelnoi topologii / N. G. Makarenko, F. Urtiev, I. S. Knyazeva et al. // *Sovrem. Problem. Dist. Zond. Zemli iz Kosmosa*. — 2015. — Vol. 12. — Pp. 131–144.
- [58] *Rice S. O.* Mathematical Analysis of Random Noise // *Bell Systems Tech. J., Volume 23, p. 282-332*. — 1944. — Vol. 23. — Pp. 282–332.
- [59] *Robins V., Turner K.* Principal component analysis of persistent homology rank functions with case studies of spatial point patterns, sphere packing and colloids // *Physica D Nonlinear Phenomena*. — 2016. — Vol. 334. — Pp. 99–117.
- [60] *Sach L.* Angewandte Statistik: Anwendung statistischer Methoden. — Springer, 1997.
- [61] *Sapankevych N. I., Sankar R.* Time Series Prediction Using Support Vector Machines: A Survey // *IEEE Comp. Intel. Mag.* — 2009. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 24–38.

- [62] *Sari R.* Gamma Ray Bursts and Their Afterglows // Relativistic Jets: The Common Physics of AGN, Microquasars, and Gamma-Ray Bursts / Ed. by P. A. Hughes, J. N. Bregman. — Vol. 856 of *American Institute of Physics Conference Series*. — 2006. — Pp. 33–56.
- [63] Self-Organization of a Plasma due to 3D Evolution of the Weibel Instability / D. V. Romanov, V. Y. Bychenkov, W. Rozmus et al. // *Physical Review Letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 21. — P. 215004.
- [64] *Serra J. P.* Image analysis and mathematical morphology. — Academic Press, 1982.
- [65] *Smola Alex J., Schölkopf Bernhard.* A tutorial on support vector regression // *Statistics and Computing*. — 2004. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 199–222.
<https://doi.org/10.1023/B:STCO.0000035301.49549.88>.
- [66] *Stenflo J. O.* Scaling laws for magnetic fields on the quiet Sun // *A&A*. — 2012. — Vol. 541. — P. A17.
- [67] *Sveshnikov A. A.* Prikladnie metodi teorii sluchainih funktsij. — Nauka, 1968.
- [68] The BATSE Gamma-Ray Burst Spectral Catalog. I. High Time Resolution Spectroscopy of Bright Bursts Using High Energy Resolution Data / R. D. Preece, M. S. Briggs, R. S. Mallozzi et al. // *ApJS*. — 2000. — Vol. 126. — Pp. 19–36.
- [69] The Complete Spectral Catalog of Bright BATSE Gamma-Ray Bursts / Y. Kaneko, R. D. Preece, M. S. Briggs et al. // *ApJS*. — 2006. — Vol. 166. — Pp. 298–340.
- [70] *Toptygin I. N., Fleishman G. D.* A role of cosmic rays in generation of radio and optical radiation by plasma mechanics // *Astroph. Space Sci.* — 1987. — Vol. 132. — Pp. 213–248.

- [71] *Urtiev F. A., Platonov K. Y., Fleishman G. D.* Resonant transition radiation in plasma with magnetic inhomogeneities // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2006. — Vol. 102. — Pp. 84–90.
- [72] *Weibel E. S.* Spontaneously Growing Transverse Waves in a Plasma Due to an Anisotropic Velocity Distribution // *Physical Review Letters*. — 1959. — Vol. 2. — Pp. 83–84.
- [73] *Zeldovich Y. B.* A hypothesis, unifying the structure and the entropy of the Universe // *MNRAS*. — 1972. — Vol. 160. — P. 1P.