ФФК 2013:Совещание по прецизионной физике
и фундаментальным физическим константам
7-11 октября, 2013, Санкт-Петербург

Двухпетлевые релятивитские вклады электронной поляризации вакуума в уровни энергии легких мюонных атомов

Е. Ю. Корзинин, В. Г. Иванов, С. Г. Каршенбойм

ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, Санкт-Петербург,
ГАО Пулково, Санкт-Петербург,
Max-Planck-Institut für Quantenoptik, Garching, Germany

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

- Мы использовали два различных подхода для вычисления данных вкладов
  - Аналог уравнения Брейта:

    точное по отношению масс и учитывает только ведущий релятивистский порядок однофотонного приближения
  - Аналог уравнения Гротча

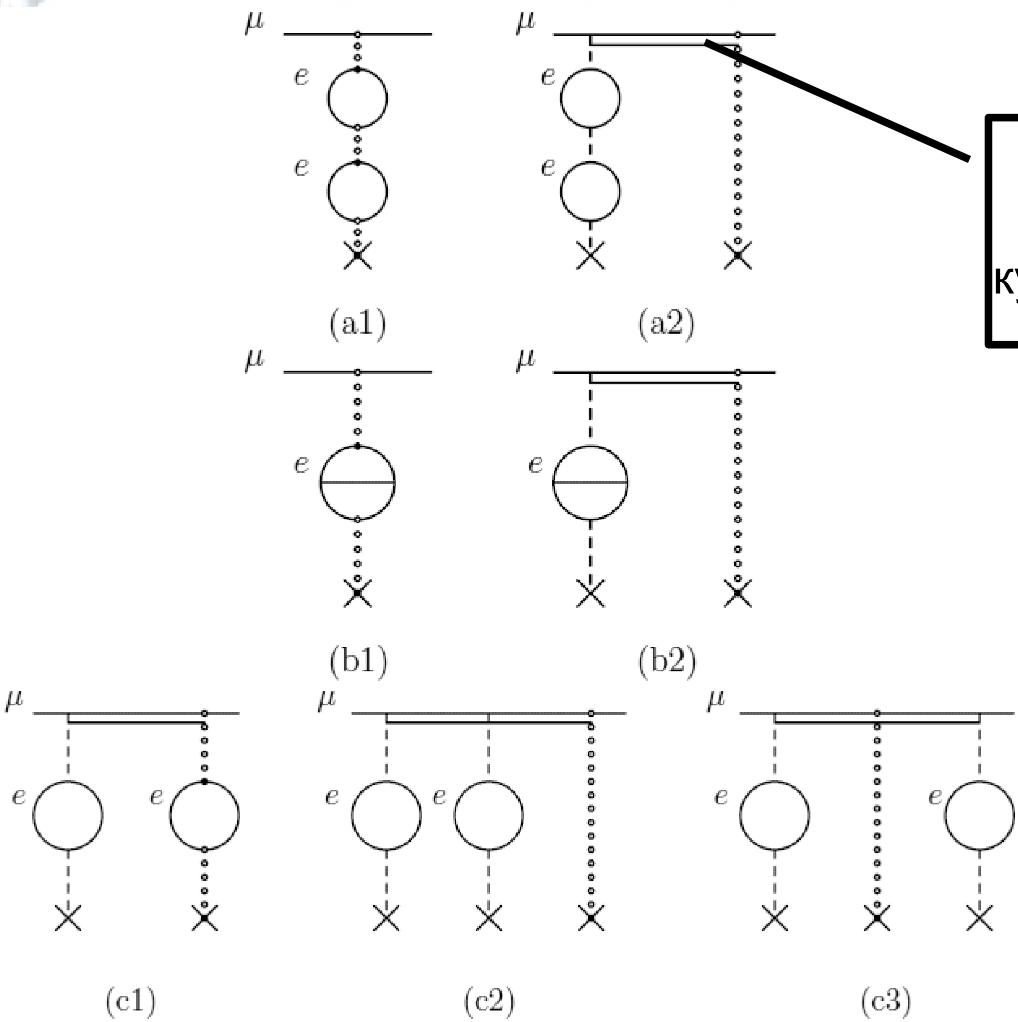
    учитывает только первый порядок по отношению масс и весь релятивистский вклад однофотонного обмена

Применимость этих подходов в однофотонном приближении обсуждалась на ФФК2010 и в статье
S. G. Karshenboim, V. G. Ivanov, E. Yu. Korzinin, Phys. Rev. A , ***85****, 032509 (2012)*

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

- Подход брейтовского типа:
  - Выбор калибровки фотонного пропагатора позволяет ограничиться рассмотрением однофотонного обмена
  - В мюонных атомах характерный импульс $(Z\alpha)m_\mu \sim m_e$ что позволяет использовать нерелятивисткую задачу как нулевое приближение
  - находим дополнительные потенциалы и строим теорию возмущений

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

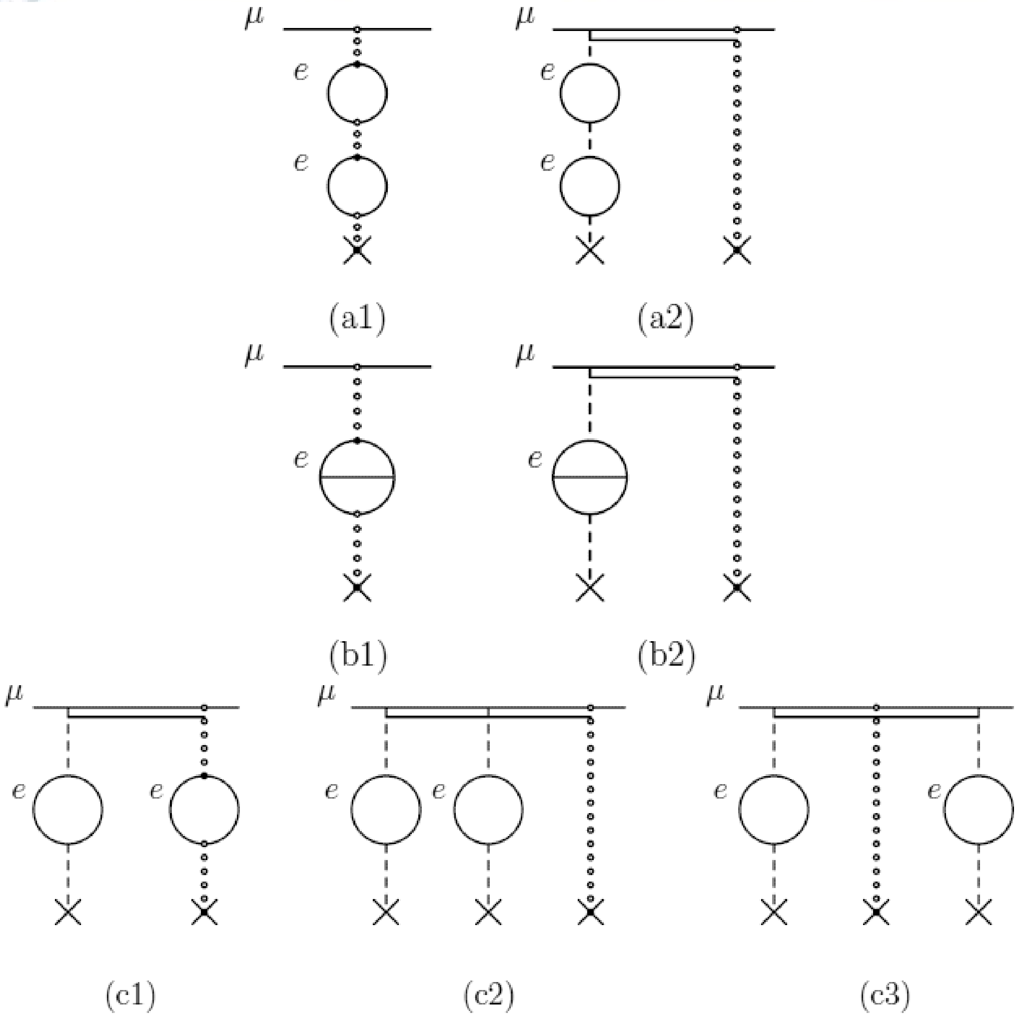


Нерелятивистская редуцированая кулоновская функция Грина $G_{nl}(r;r')$

Два представления для $G_{nl}(r;r')$

- Через больший и меньший радиусы
- Разложение по штурмовскому базису

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов



Два представления для $G_{nl}(r;r')$

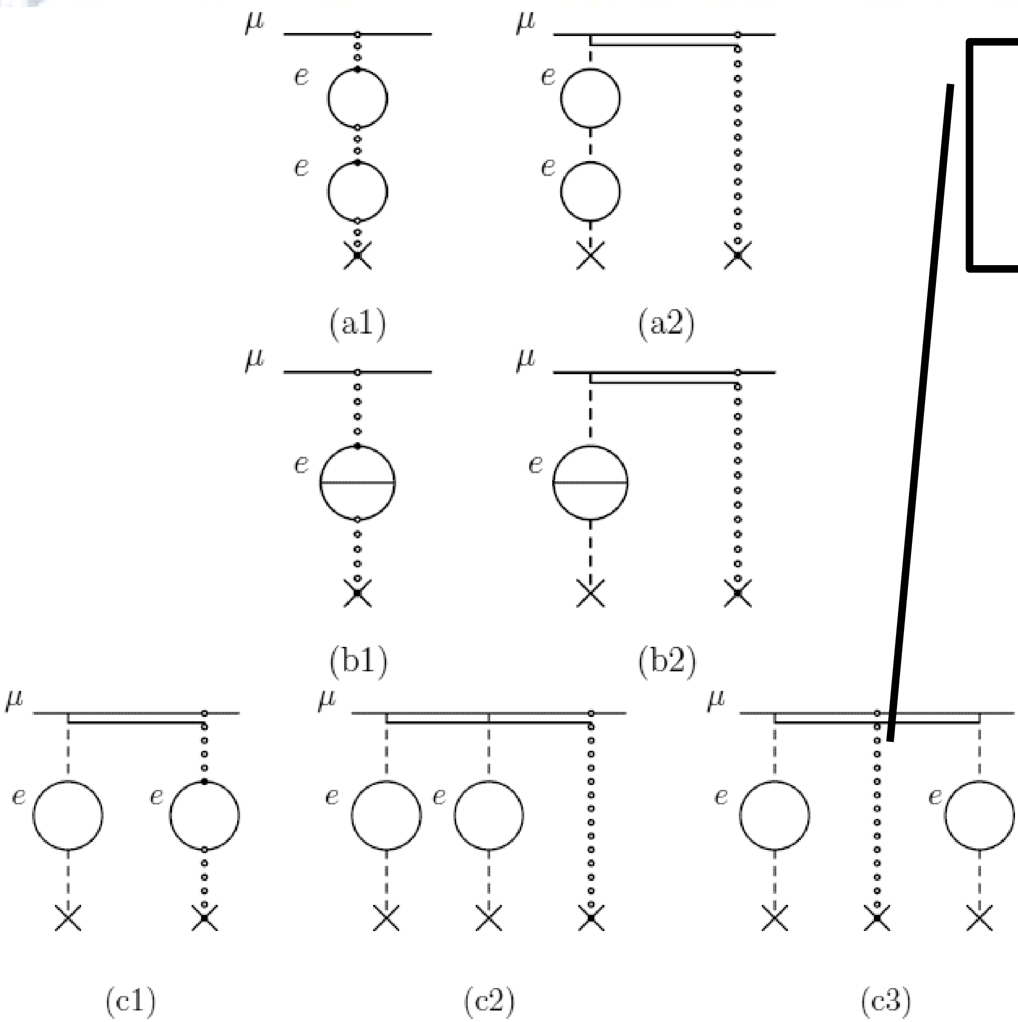
- Через больший и меньший радиусы

  Недостаток: сложно дифференцировать по радиусу

- Разложение по штурмовскому базису

  Недостаток: бесконечный ряд, который не всегда быстро сходится

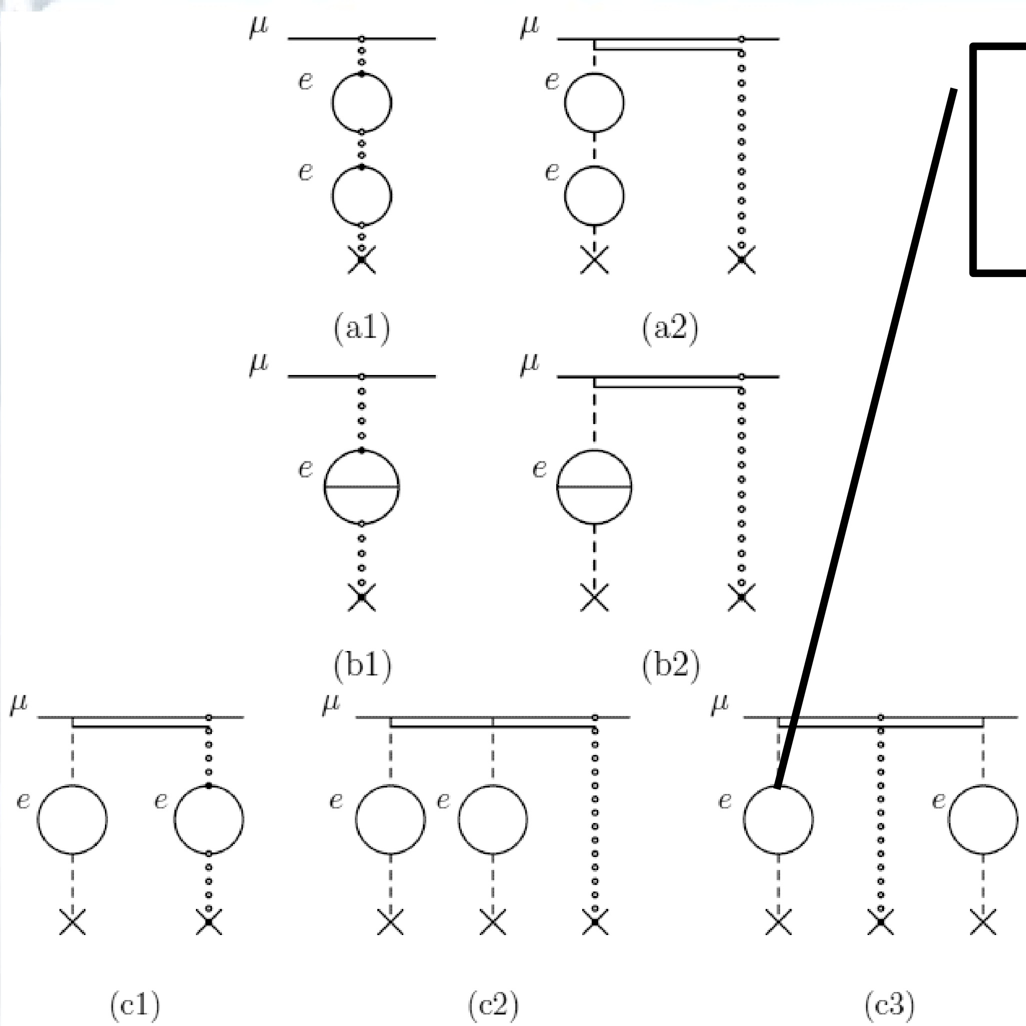
Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов



Потенциал
из уравнения Брейта V_{Br}

$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{Br}}(\mathbf{r}) &= -\left(\frac{1}{m^3}+\frac{1}{M^3}\right)\frac{\mathbf{p}^4}{8} \\
&+ \frac{Z\alpha}{8}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{M^2}\right)4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \\
&+ Z\alpha\left(\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{2mM}\right)\frac{\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{r^3}+\frac{Z\alpha}{2mM}4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \\
&+ \frac{Z\alpha}{2mM}\left[\frac{1}{r^3}\mathbf{L}^2-\mathbf{p}^2\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\mathbf{p}^2\right]
\end{aligned}
$$

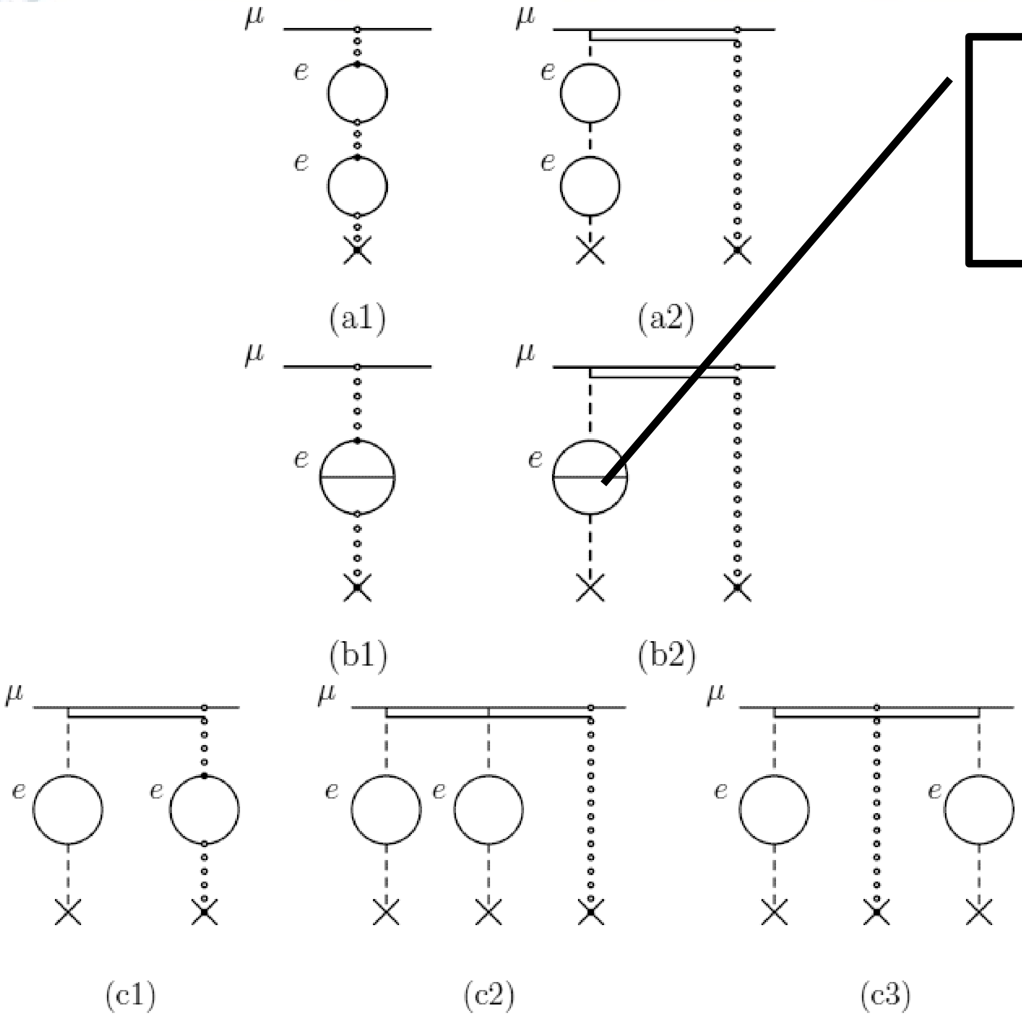
Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов



Однопетлевая eVP
Потенциал Юлинга

$$V_U(\mathbf{r}) = -Z\alpha \int_0^1 dv\, \rho_1(v) \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

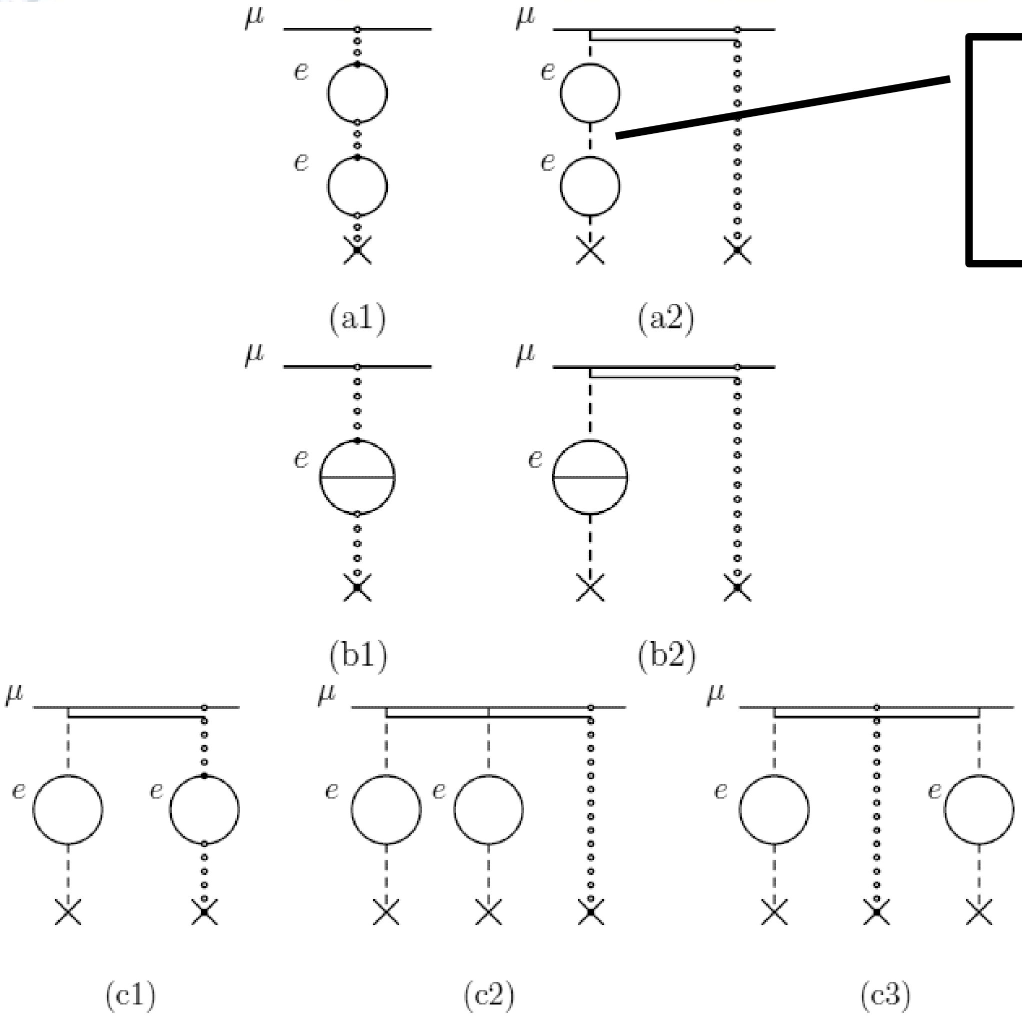


Нередуцируемая часть
Двухпетлевой eVP

$$V_U(\mathbf{r}) = -Z\alpha \int_0^1 dv\, \rho_1(v) \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

$$\begin{aligned}
\rho_2(v) \;=\; & \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{v}{1-v^2} \times \Big\{(3-v^2)(1+v^2) \\
& \left[\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1-v}{1+v}\right) + 2\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-v}{1+v}\right)\right. \\
& \left. + \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)\left(\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+v}{2}\right) - \ln(v)\right)\right] \\
& + \left(\frac{11}{16}(3-v^2)(1+v^2) + \frac{1}{4}v^4\right)\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \\
& + \frac{3}{2}v(3-v^2)\ln\left(\frac{1-v^2}{4}\right) - 2v(3-v^2)\ln(v) \\
& + \frac{3}{8}v(5-3v^2)\Big\},
\end{aligned}$$

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

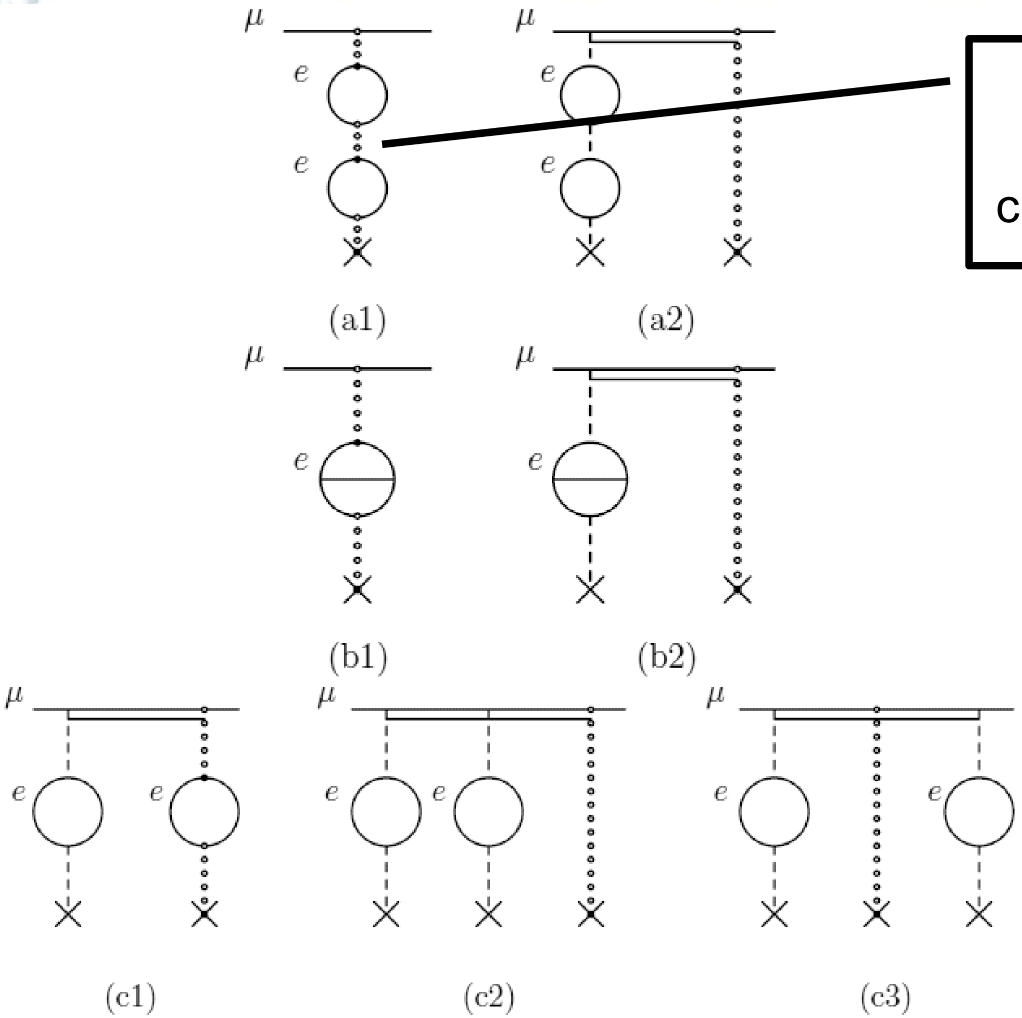


Редуцируемая часть
Двухпетлевой eVP

$$V_U(\mathbf{r}) = -Z\alpha \int_0^1 dv\, \rho_1(v) \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

$$\rho_{1\cdot 1}(v) = -\frac{1}{9}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{v^2(1-v^2/3)}{1-v^2} \times \left\{16 - 6v^2 + 3v(3-v^2)\ln\left(\frac{1-v}{1+v}\right)\right\}$$

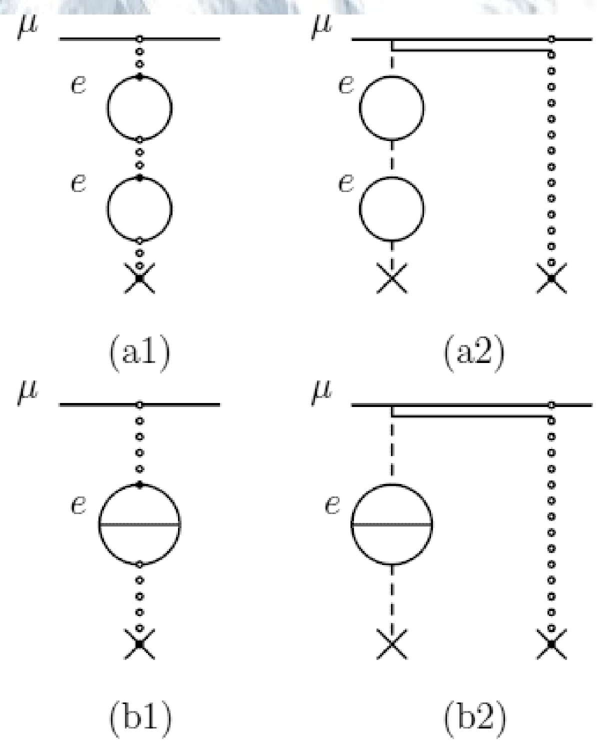
Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов



Аналог потенциала
из уранения Брейта
с поляризационной вставкой

$$
\begin{aligned}
V_{\rm Br}^{\rm VP}(\mathbf{r}) \;=\; & \left(\frac{1}{8m^2}+\frac{1}{8M^2}\right)\nabla^2 V_U \\
& + \left(\frac{1}{4m^2}+\frac{1}{2mM}\right)\frac{V_U'}{r}\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
& + \frac{1}{2mM}\nabla^2\left[V_U-\frac{1}{4}(rV_U)'\right] \\
& + \frac{1}{2mM}\left[\frac{V_U'}{r}\mathbf{L}^2+\frac{\mathbf{p}^2}{2}(V_U-rV_U') \right. \\
& \left. +(V_U-rV_U')\frac{\mathbf{p}^2}{2}\right],
\end{aligned}
$$

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов



- Вычисление отличается от однопетлевой eVP только спектральной функцией.
- Из метода Гротча известен аналитический результат для произвольного состояния

$$E_U^{rec1\ \mathrm{NR}} = \frac{\alpha}{\pi}(Z\alpha)^4 \frac{m}{M} m \sum_i^{n_r} B_i \frac{1}{n\,\kappa_n^{2n_r-2i}} \times$$

$$\times \left[\frac{2n_r-2i-1}{2n} K_{2(n-l-i),2n}(\kappa_n) - \frac{1}{\kappa_n} K_{2(n-l-i)+1,2n+1}(\kappa_n) + \frac{1}{\kappa_n} K_{2(n-l-i)+1,2n}(\kappa_n) \right]$$

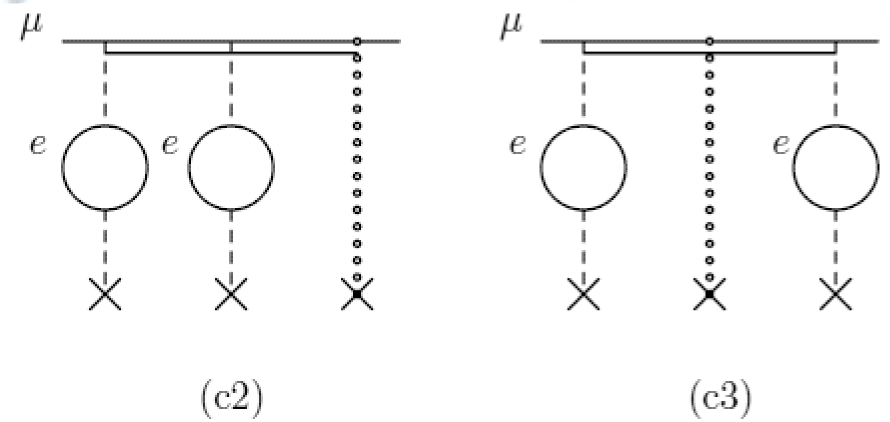
где

$$B_i = \frac{(n+l)!}{n^2 (n_r)!} \frac{1}{i!(2l+i+1)!} \left(\frac{n_r!}{(n_r-i)!} \right)^2$$

$$K_{bc}(\kappa) = K_{1bc}(\kappa) - \frac{1}{3} K_{2bc}(\kappa)\,.$$

$$K_{abc}(\kappa) = \int_0^1 dv\, \frac{v^{2a}}{(1-v^2)^{b/2}} \left(\frac{\kappa\sqrt{1-v^2}}{1+\kappa\sqrt{1-v^2}} \right)^c .$$

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов



- Во всех диаграммах вклады проверялись вычислением с помощью различных представлений кулоновской функции Грина
- Проблема проверки вычисления вкладов с p^2 и p^4 в V_{Br}. Эти вклады были вычислены с помощью разложения G(r;r') по штурмовскому базису.
- Проверка была осуществлена следующим методом.

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

$$\left(\frac{p^2}{2m_r}+V_C+V_U\right)|\psi\rangle=(E_C+E_U)|\psi\rangle\,,$$

где E_U – полный вклад потенциала Юлинга во всех порядках по α/π. Далее мы будем интересоваться только первым и вторым порядком по данному параметру, поэтому введем обозначение

$$E_U=E_U^{(1)}+E_U^{(2)}+\dots$$

где $E_U^{(1)}=\langle\psi_0|V_U|\psi_0\rangle$ – нерелятивистский вклад в энергию первого порядка, $|\psi_0\rangle$ – обычная шредингероваская кулоновская функция, и $E_U^{(1)}=\langle\psi_0|V_UG'V_U|\psi_0\rangle$ – нерелятивистский вклад в энергию второго порядка.
Тогда

$$p^2|\psi\rangle=2m_r(E_C-V_C+E_U-VU)|\psi\rangle\,.$$

Нас интересует матричный элемент $\langle\psi|\left(p^2\frac{Z\alpha}{r}+\frac{Z\alpha}{r}p^2\right)|\psi\rangle$. найдем $|\psi\rangle$ также по теории возмущений, воспользовавшись малостью параметра $\frac{\alpha}{\pi}$:

$$|\psi\rangle=|\psi_0\rangle+|\psi_i\rangle+|\psi_2\rangle\,,$$

где

$$|\psi_1\rangle=G'V_U|\psi_0\rangle\,,$$

$$|\psi_2\rangle=G'V_UG'V_U|\psi_0\rangle-G'G'V_U|\psi_0\rangle\cdot E_U^{(1)}-\frac{1}{2}|\psi_0\rangle\cdot\langle\psi_0|V_UG'G'V_U|\psi_0\rangle\,,$$

и $|\psi_0\rangle$ – обычная шредингероваская кулоновская функция. Соотвественно $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ – поправки к кулоновской функции первого и второго порядка по $\frac{\alpha}{\pi}$.

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

Теперь легко получить

$$\langle\psi|\left(p^2\frac{Z\alpha}{r}+\frac{Z\alpha}{r}p^2\right)|\psi\rangle = 2\langle\psi|\frac{Z\alpha}{r}p^2|\psi\rangle = 4m_r(A+B+C+E)\,,$$

$$A = 2\langle\psi_0|\frac{Z\alpha}{r}(E_U^{(1)}-V_U)|\psi_1\rangle = 2\langle\psi_0|\frac{Z\alpha}{r}(E_U^{(1)}-V_U)G'V_U|\psi_0\rangle\,,$$

$$B = 2\langle\psi_1|\frac{Z\alpha}{r}(E_C-V_C)|\psi_1\rangle = 2\langle\psi_0|V_UG'\frac{Z\alpha}{r}(E_C-V_C)G'V_U|\psi_0\rangle\,,$$

$$C = 2\langle\psi_0|\frac{Z\alpha}{r}(E_C-V_C)|\psi_2\rangle = C_1+C_2+C_3\,,$$

$$C_1 = 2\langle\psi_0|V_UG'V_UG'\frac{Z\alpha}{r}(E_C-V_C)|\psi_0\rangle\,,$$

$$C_2 = -2\,E_U\,\langle\psi_0|V_UG'G'\frac{Z\alpha}{r}(E_C-V_C)|\psi_0\rangle\,,$$

$$C_3 = -\langle\psi_0|\frac{Z\alpha}{r}(E_C-V_C)|\psi_0\rangle\,\langle\psi_0|V_UG'G'V_U|\psi_0\rangle\,,$$

$$E = E_U^{(2)}\langle\psi_0|\frac{Z\alpha}{r}|\psi_0\rangle = E_U^{(2)}\frac{Z\alpha}{n^2}\,.$$

Здесь нет дифференцирования кулоновской функции Грина G'

!!!

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4 m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

Аналогично для p^4

$$\langle\psi|p^4|\psi\rangle = 4m_r^2\langle\psi|(E_C - V_C + E_U - VU)^2|\psi\rangle = m_r^2(A + B + C + D + E)\,,$$

$$\begin{aligned}
A &= 16\langle\psi_0|(E_U^{(1)} - V_U)(E_C - V_C)|\psi_1\rangle = 16\langle\psi_0|(E_U^{(1)} - V_U)(E_C - V_C)G'V_U|\psi_0\rangle\,,\\
B &= 4\langle\psi_1|(E_C - V_C)^2|\psi_1\rangle = 2\langle\psi_0|V_U G'(E_C - V_C)^2 G'V_U|\psi_0\rangle\,,\\
C &= 8\langle\psi_0|(E_C - V_C)^2|\psi_2\rangle = C_1 + C_2 + C_3\,,\\
C_1 &= 8\langle\psi_0|V_U G'V_U G'(E_C - V_C)^2|\psi_0\rangle\,,\\
C_2 &= -8\,E_U\,\langle\psi_0|V_U G'G'(E_C - V_C)^2|\psi_0\rangle\,,\\
C_3 &= -4\langle\psi_0|(E_C - V_C)^2|\psi_0\rangle\,\langle\psi_0|V_U G'G'V_U|\psi_0\rangle\,,\\
D &= 4\langle\psi_0|(E_U^{(1)} - V_U)^2|\psi_0\rangle\,,\\
E &= 8E_U^{(2)}\langle\psi_0|(E_C - V_C)^2|\psi_0\rangle\,.
\end{aligned}$$

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

Atom	$\Delta E(nl_j)$			
	$1s$	$2s$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$
μH	-1.07	-0.171	-0.0338	$-0.003\,70$
μD	-1.13	-0.180	-0.0370	$-0.004\,15$
μ^3He	-2.21	-0.347	-0.113	-0.0163
μ^4He	-2.22	-0.350	-0.115	-0.0165

TABLE IV: Relativistic eVP corrections (Fig. 5) for the low-lying levels in muonic hydrogen in the external field approximation. The result is for the Schrödinger problem with the reduced mass. The units are $(\alpha/\pi)^2\,(Z\alpha)^4 m_r c^2$.

Вклады eVP порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

Atom	$\Delta E(nl_j)$			
	$1s$	$2s$	$2p_{1/2}$	$2p_{3/2}$
μH	1.05	0.176	0.005 01	0.001 97
μD	1.13	0.191	0.004 53	0.002 78
μ^3He	1.39	0.276	0.008 96	0.005 44
μ^4He	1.40	0.280	0.008 52	0.005 81

TABLE V: Relativistic recoil corrections in order $\alpha^2(Z\alpha)^4m_rc^2$ (Fig. 5) for the low-lying levels in muonic hydrogen. The units are $(\alpha/\pi)^2\,(Z\alpha)^4m_rc^2(m_r/M)$.

Вклады порядка $\alpha^2(Z\alpha)^4m$ в уровни энергии легких мюонных атомов

Спасибо за внимание!