

## **СВЯЗИ МЕЖДУ СМЕЖНЫМИ 11-ЛЕТНИМИ СОЛНЕЧНЫМИ ЦИКЛАМИ И ИХ ВЗАИМНАЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ**

**Иванов В.Г.<sup>1</sup>, Наговицын Ю.А.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

## **LINKS BETWEEN ADJACENT 11-YEAR SOLAR CYCLES AND THEIR MUTUAL CONDITIONING**

**Ivanov V.G.<sup>1</sup>, Nagovitsyn Yu.A.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>The Central Astronomical Observatory of RAS at Pulkovo, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia

*There are statistical relations between neighboring 11-year solar cycles that make it possible to predict the upcoming cycle from characteristics of the current one. These characteristics include the length of the current cycle (from minimum to minimum), which anticorrelates with the amplitude of the next one with the correlation coefficient  $r \approx -0.7$  ('the length-amplitude rule', or LAR), and activity at certain moments of the descending phase of the cycle — about 3 years before its minimum ('the rule of the 3rd year', or R3) or 7 years before the next maximum ('the rule of the 7th year', or R7) — both of which correlate with the amplitude of the next cycle with  $r > +0.8$ .*

*In this paper we analyze the mutual conditionality of these rules and their links to the Waldmeier rule (WR). We show that R3 and R7 can be considered as secondary effects that are consequences of LAR and WR.*

**DOI: 10.31725/0552-5829-2022-127-130**

11-летняя цикличность солнечной активности представляет собой ко-процесс, в котором последовательно сменяют друг друга тороидальные и полоидальные солнечные магнитные поля. Естественное следствие этого — наличие связей между характеристиками этих полей и, следовательно, характеристиками смежных циклов. Так, известна антикорреляция между длиной данного цикла от минимума до минимума и амплитудой следующего («правило длина-амплитуда», ПДА) [1–5]. Амплитуда текущего цикла также хорошо коррелирует с уровнем активности в определённые моменты фазы спада предыдущего — примерно за 3 года до минимума [6, 7] («правило третьего года», ПЗ) или, при альтернативном выборе точки отсчёта, примерно за 7 лет до максимума [8] («правило седьмого года», П7). Можно предположить, что ПДА, ПЗ и П7 связаны между собой, и в данной работе мы анализируем эти связи.

В качестве индекса солнечной активности мы будем использовать усреднённые по 13 месяцев среднемесячные значения рекалиброванного ряда чисел Вольфа за 1749–2021 годы [9]. Введём для характерных пара-

метров этого ряда следующие обозначения:  $t_m(k)$  – момент минимума цикла  $k$ -го,  $t_M(k)$  – момент его максимума,  $T_{mM}(k) = t_M(k) - t_m(k)$  – длина его восходящей фазы,  $T_{mm}(k) = t_m(k + 1) - t_m(k)$  – его полная длина от минимума до минимума,  $SN_{m-\Delta}(k)$  – уровень активности в момент  $t_m(k) - \Delta$ ,  $SN_{M-\Delta}(k)$  – уровень активности в момент  $t_M(k) - \Delta$ ,  $SN_M(k)$  – уровень активности в максимуме  $k$ -го цикла (т.е. его амплитуда).

Коэффициент корреляции  $r(SN_M(k), SN_{m-\Delta}(k))$  для ПЗ, достигает максимума при  $\Delta = -3.33y$ , а  $r(SN_M(k), SN_{M-\Delta}(k))$  для П7 – при  $\Delta = -6.83y$ . Уравнения линейной регрессии и корреляции  $r$  для этих правил приведены в таблице 1. Нижняя строка в ней описывает известное «правило Вальдмайера» (ПВ) [10] — антикорреляцию между длиной фазы роста цикла и его амплитудой.

Таблица 1.

| Правило | Уравнение регрессии                                  | $r$               |
|---------|------------------------------------------------------|-------------------|
| ПДА     | $SN_{M,ПДА}(k) = 544.4 - 33.00 y^{-1} T_{mm}(k - 1)$ | $r_{ПДА} = -0.68$ |
| ПЗ      | $SN_{M,ПЗ}(k) = 62.42 + 1.503 SN_{m-3.33y}(k)$       | $r_{ПЗ} = +0.83$  |
| П7      | $SN_{M,П7}(k) = 109.2 + 1.147 SN_{M-6.83y}(k)$       | $r_{П7} = +0.87$  |
| ПВ      | $SN_{M,ПВ}(k) = 341.1 - 36.94 y^{-1} T_{mM}(k)$      | $r_{ПВ} = -0.75$  |

Будем описывать форму циклов двухпараметрическими кривыми [11]

$$f(t; a, b) = a t^n \exp(-t / b), \quad (1)$$

при  $n = 3$ , которые достигают максимума  $f_{max}(a, b) = a (3b/e)^3$  в момент  $t_{max} = 3b$ .

Аппроксимируя на каждом из отрезков времени  $[t_m(k), t_m(k + 1)]$  цикл  $k$  ряда SN функцией  $f(t - t_m(k); a_k, b_k)$ , можно с помощью МНК найти параметры аппроксимации  $a_k$  и  $b_k$ . Эти параметры связаны между собой нелинейной связью, которая линейризуется соотношением

$$1/b = 0.3106 + 0.1183 a^{1/3} \quad (r = 0.935) \quad (2)$$

Для изучения взаимной обусловленности описанных выше правил построим модельный синтетический ряд SS из  $Q = 100$  квазиодинадцатилетних циклов, в котором соблюдаются ПВ и ПА следующим образом:

1) Сгенерируем ряд случайных амплитуд циклов  $SS_M(k)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , нормально распределённых с теми же параметрами, что и амплитуды наблюдаемого ряда SN:  $N(178.7, 57.76)$  (здесь и далее запись  $X \sim N(\mu, \sigma)$  означает нормальное распределение величины  $X$  со средним  $\mu$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ ).

2) Будем описывать форму каждого цикла функцией  $f(t - t_k; a_k, b_k)$ , где  $a_k$  и  $b_k$  – решения системы (см. (1) и (2))

$$SS_M(k) = a_k (3b_k/e)^3 + \delta_1,$$

$$1/b_k = 0.3106 + 0.1183 (a_k)^{1/3}.$$

3) Сдвиг  $t_1 = 0$ , а для  $k > 1$   $t_k = t_{k-1} + T_{mm}(k-1)$  подбираются так, чтобы длина цикла  $T_{mm}(k-1)$  определялась соотношением ПДА (см. таблицу 1):

$$SS_M(k) = 544.4 - 33.00 y^{-1} T_{mm}(k-1) + \delta_2.$$

4) Случайные величины  $\delta_i \sim N(0, \sigma_i)$ , введённые выше, описывают неточное соблюдение ПВ и ПДА, причём эти величины могут быть скоррелированы:  $r(\delta_1, \delta_2) = r_{12}$ .

Проверим, выполняются ли для модельных рядов ПЗ и П7. Для этого, задавшись параметрами модели  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $r_{12}$ , будем генерировать описанным способом  $P = 100$  рядов, вычисляя для каждой корреляции и оптимальные сдвиги  $\Delta$ , а затем их средние величины и стандартные ошибки по всем  $P$  рядам.

В первой строке таблицы 1 приведены коэффициенты корреляции для наблюдаемого ряда. Вторая строка («модель А») соответствует простейшему случаю точного выполнения ПВ и ПДА ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  и  $r_{12} = 0$ ). Как мы видим, при этом корреляции  $r_{ПЗ}$  и  $r_{П7}$  весьма велики, то есть правила ПЗ и П7 воспроизводятся. Мы можем также построить модель, в которой выполняется лишь одно из двух правил. Так, если отключить ПДА и считать, что длины циклов  $T_{mm}(k) \sim N(11.0y, 1.2y)$  (случайные величины, параметры распределения которых соответствуют их распределению в наблюдаемом ряду), мы получим модель А(ПВ), в которой корреляции для ПЗ и П7 малы. Если же отключить ПВ, считая, что  $T_{mm}(k) \sim N(4.1y, 0.7y)$ , мы получим модель А(ПДА), в которой корреляции для ПЗ и П7 несколько выше (около +0.5), но, тем не менее, заметно ниже, чем в ряде SN.

Таблица 2.

| Ряд / модель | Параметры модели                               | $\zeta_{ПВ}$ | $\zeta_{ПДА}$  | $\zeta_{ПЗ}$                               | $\zeta_{П7}$                               |
|--------------|------------------------------------------------|--------------|----------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| SN           |                                                | -0.75        | -0.68          | +0.83<br>[ $\Delta = -3.3y$ ]              | +0.87<br>[ $\Delta = -6.9y$ ]              |
| А            | $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, r_{12} = 0$          | -0.983±0.005 | -0.9982±0.0003 | +0.90±0.02<br>[ $\Delta = -3.7 \pm 0.4y$ ] | +0.85±0.03<br>[ $\Delta = -6.8 \pm 0.4y$ ] |
| А(ПВ)        | $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, r_{12} = 0$          | -0.95±0.04   | -0.03±0.1      | +0.12±0.07<br>[ $\Delta = -5 \pm 4y$ ]     | +0.36±0.09<br>[ $\Delta = -7.0 \pm 1.6y$ ] |
| А(ПДА)       | $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, r_{12} = 0$          | -0.00±0.09   | -0.98±0.08     | +0.49±0.07<br>[ $\Delta = -3.2 \pm 1.6y$ ] | +0.55±0.07<br>[ $\Delta = -3.3 \pm 1.1y$ ] |
| Б(0)         | $\sigma_1 = 48, \sigma_2 = 63, r_{12} = 0$     | -0.73±0.07   | -0.68±0.06     | +0.53±0.07<br>[ $\Delta = -3.4 \pm 0.8y$ ] | +0.65±0.05<br>[ $\Delta = -6.8 \pm 0.7y$ ] |
| Б(0.6)       | $\sigma_1 = 48, \sigma_2 = 63, r_{12} = +0.61$ | -0.75±0.04   | -0.66±0.06     | +0.65±0.05<br>[ $\Delta = -3.7 \pm 0.5y$ ] | +0.75±0.04<br>[ $\Delta = -6.9 \pm 0.5y$ ] |
| Б(1)         | $\sigma_1 = 48, \sigma_2 = 63, r_{12} = +1$    | -0.75±0.04   | -0.65±0.06     | +0.83±0.03<br>[ $\Delta = -3.8 \pm 0.3y$ ] | +0.84±0.03<br>[ $\Delta = -6.8 \pm 0.4y$ ] |
| Б(-1)        | $\sigma_1 = 48, \sigma_2 = 63, r_{12} = -1$    | -0.68±0.14   | -0.70±0.09     | +0.46±0.08<br>[ $\Delta = -3 \pm 1y$ ]     | +0.57±0.06<br>[ $\Delta = -6.4 \pm 0.9y$ ] |

Следующая модель Б(0) создана для более реалистичного случая не-точного выполнения ПВ и ПДА, причём  $\sigma_i$  подобраны так, чтобы корреляции  $r_{ПВ}$  и  $r_{ПДА}$  примерно соответствовали наблюдаемым. При этом корреляции  $r_{ПЗ}$  и  $r_{П7}$  достаточно велики, однако меньше наблюдаемых на две-три десятых. Для дальнейшего заметим, что в случае наблюдаемого ряда SN остаточные отклонения

$$\delta_{ПВ} = SN_M - SN_{M,ПВ}$$

и

$$\delta_{ПДА} = SN_M - SN_{M,ПДА}$$

скоррелированы:  $r(\delta_{ПВ}, \delta_{ПДА}) = +0.61$ . Положив в модельном ряде  $r_{12} = 0.61$ , мы получим модель Б(0.6), в которой  $r_{ПЗ}$  и  $r_{П7}$  на одну-две десятых ниже наблюдаемых. Если же считать, что  $\delta_{ПВ}$  и  $\delta_{ПДА}$  полностью скоррелированы ( $r_{12} = +1$ ), мы получаем модель Б(1), для которой  $r_{ПЗ}$ ,  $r_{П7}$  и соответствующие оптимальные сдвиги  $\Delta$  близки к наблюдаемым. Наконец, в последней модели Б(–1), с полной антикорреляцией отклонений ( $r_{12} = -1$ ), выраженность правил ПЗ и П7 близка к случаю Б(0), когда этой корреляции нет вообще.

Итак, мы продемонстрировали, что ПЗ и П7 могут рассматриваться как вторичные эффекты, которые являются следствиями одновременного выполнения в ряде SN как ПДА, так и ПВ. При этом выраженность ПЗ и П7 повышается, если остаточные отклонения ПДА и ПВ скоррелированы, как это и имеет место в наблюдаемом ряде SN.

Данная работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ (грант № 075-15-2020-780).

#### Литература

1. Chernosky E.J. // 1954, Publ. Astron. Soc. Pac., 1954, v. 392, pp. 241–247.
2. Hathaway D.H., Wilson R.M., Reichmann E.J. // Solar Phys., 1994, v. 151, pp. 177–190.
3. Solanki S.K., Krivova N.A., Schüssler M., Fligge M. // Astron. Astrophys., 2002, v. 396, pp. 1029–1035.
4. Hathaway D.H. // Living Rev. Solar Phys., 2015, v.12, pp. 4–87.
5. Ivanov V.G. // Geomagnetism and Aeronomy, 2021, v. 61, No. 7, pp. 1029–1034.
6. Cameron R., M. Schüssler M. // The Astrophysical Journal, 2007, v. 659, pp. 801–811.
7. Brajša R., Verbanac G., Bandić M., et al. // Astron. Nachr., 2022, v. 343, No. 3, id. e13960.
8. Слоним Ю.М. // Солнечные данные, 1984, No. 5, cc.78–82.
9. Clette F, Svalgaard L, Vaquero J.M., Cliver E.W. // Space. Sci. Rev., 2014, v. 186, pp. 35–103; [https://www.sidc.be/silso/DATA/SN\\_ms\\_tot\\_V2.0.txt](https://www.sidc.be/silso/DATA/SN_ms_tot_V2.0.txt)
10. Waldmeier M. // Astron. Mitt. Eidgenössischen Sternwarte Zürich, 1935, v. 14, pp. 105–136.
11. Stewart J.O., Panofsky A.A. // Astrophysical Journal, 1938, v. 88, pp. 385–407.