

ЭВОЛЮЦИЯ СУММАРНОЙ МАГНИТНОЙ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В КОНВЕКТИВНОЙ ЗОНЕ ЗВЕЗДЫ

Кислов Р.А., Старченко С.В.

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
им. Н.В. Пушкова РАН, Троицк, Москва, Россия*

EVOLUTION OF THE TOTAL MAGNETIC AND KINETIC ENERGY IN THE CONVECTIVE ZONE OF A STAR

Kislov R.A., Starchenko S.V.

*Pushkov institute of terrestrial magnetism, ionosphere and radio wave propagation RAS,
Troitsk, Moscow, Russia*

Knowledge of the evolution of the total magnetic and kinetic energy in the convective zone of a star allows us to assess the global dynamics, stability, magnitude, and characteristic times for these energies. This study examines the energy balance in the convective zone, which includes the specific power of Archimedean forces, viscosity, and magnetic Lorentz forces, as well as the magnetic field evolution equation, which takes into account magnetic diffusivity and advection. The chosen variables are the root-mean-square velocity and magnetic field. Our two-parameter system of two ordinary differential equations is nonlinear. The stationary points of the system, their types, and stability were studied. Analytical and numerical solutions were obtained for different initial conditions. It was shown that there are two stationary points – one with a zero magnetic field and one with a non-zero magnetic field. The first stationary point is a stable node if buoyancy dominates over magnetic field diffusion; otherwise, it is a saddle point. The second point can be a stable focus or node depending on the ratio between buoyancy and the timescales of magnetic diffusion and viscosity. In the case of a focus, even initial velocity and magnetic field values close to zero eventually reach their stable values. If the initial velocity is non-zero and the magnetic field is zero, a solution without a magnetic field is realized. It was found that, regardless of the initial conditions, the root-mean-square magnetic field and velocity tend to non-zero stationary points. Relative to the initial conditions, this can manifest as either strengthening or weakening. A cycle of stellar activity does not arise when both parameters of our system are constant as it is in this study.

<https://doi.org/10.31725/0552-5829-2024-161-164>

Знание о процессах звёздного динамо не только расширяет представления человечества о многообразии явлений в природе. Оно позволяет лучше понять прошлое и будущее Солнца – мы не имеем машины времени, но наблюдая похожие звёзды и моделируя процессы на них, мы можем описать возможные состояния Солнца в разные эпохи. Как правило, технические возможности не позволяют получить распределение параметров плазмы по диску звезды. Вместо этого мы получаем в каждый момент времени одно или несколько чисел, характеризующих магнитное поле и скорость вращения звезды как целого. В подобной ситуации естественно при-

менять модели, описывающие усреднённые по объёму характеристики звезды.

Данный подход ранее был развит в теории магнитного динамо планет, см., например, [1]. Рассматривается уравнение моментов или Навье-Стокса с магнитной силой Лоренца. Движущая конвекцию, а через нее динамо, сила плавучести описывается одним слагаемым вида ρa , где a – ускорение, вызванное силой Архимеда, ρ – плотность вещества. Также учитывается уравнение индукции магнитного поля. После скалярного умножения первого уравнения на скорость и второго – на магнитное поле, их можно проинтегрировать по объёму. Полученные после этого уравнения могут быть заменены на упрощённые, в которых вместо пространственных производных содержатся их оценки в виде дробей, содержащих пространственно-временные масштабы конвективной зоны звезды. При сделанных предположениях в [2] для среднеквадратичных по объёму значений скорости и магнитного поля была получена система с четырьмя параметрами. Не ограничивая общности, сводим эту систему к системе с двумя параметрами:

$$\begin{cases} \frac{db}{dt} = ub - \frac{b}{\tau} \\ u \frac{du}{dt} = \alpha - u^2 - ub^2 \end{cases}, \quad (1)$$

где t – время в единицах среднего вязкого времени T , u – среднеквадратичная скорость измеряемая отношением внешнего масштаба L к T , b – среднеквадратичное магнитное поле в $(\rho\mu)^{1/2}L/T$, τ – отношение характерного времени магнитной диффузии к T , α – удельная плавучесть в L^2/T^3 .

Исследуем стационарные точки системы (1) и их устойчивость. Имеем две стационарные точки: $(u=\alpha^{1/2}, b=0)$ и $(1/\tau, \alpha\tau-1/\tau)$. После линеаризации вблизи первого положения равновесия система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\delta b}{dt} = \sqrt{\alpha}\delta b - \frac{\delta b}{\tau} \\ \frac{d\delta u}{dt} = -2\delta u \end{cases}, \quad (2)$$

где δu и δb – отклонения от положения равновесия. Система (2) может быть легко решена. При $\alpha^{1/2} < 1/\tau$ стационарная точка $(\alpha^{1/2}, 0)$ является **устойчивым узлом**. В противоположном случае получаем **седло** – возмущение скорости убывает до нуля, а магнитное поле растёт и перестаёт быть малым.

Вблизи второго положения равновесия линеаризованное (1) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\delta b}{dt} = 2(\alpha\tau - 1/\tau)\delta u \\ \frac{d\delta u}{dt} = -(\alpha\tau^2 + 1)\delta u - \delta b \end{cases} \quad (3)$$

Характеристическое уравнение системы (3) является квадратным. Оно имеет комплексные решения, если его дискриминант $D = (\alpha\tau^2 + 1)^2 - 8(\alpha\tau - 1/\tau) < 0$. При этом реальная часть решений равна $-(\alpha\tau^2 + 1) < 0$, поэтому при $D < 0$ равновесие является **устойчивым фокусом**. Если $D > 0$, то при $\alpha\tau^2 > 1$ все собственные значения вещественны и отрицательны. Данный случай соответствует **устойчивому узлу**. При $\alpha\tau^2 < 1$ данная стационарная точка отсутствует.

Итак, мы рассмотрели все грубые равновесия системы (1). Негрубые равновесия могут быть рассмотрены в будущем. В зависимости от параметров решения системы (1) достигают одной из устойчивых стационарных точек. Если выполнено $\alpha^{1/2} < 1/\tau$, то существует только первая особая точка, имеющая тип устойчивого узла. Это означает, что вне зависимости от начальных значений, магнитное поле звезды при данных параметрах исчезает, а скорость в конвективной зоне остаётся конечной и определяется плавучестью. При противоположном неравенстве достигается вторая особая точка, имеющая тип устойчивого фокуса или узла в зависимости от знака дискриминанта, поскольку седло является неустойчивым. Любое сколь угодно малое магнитное поле в этом случае достигает конечных значений, зависящих от плавучести и соотношения времён конвекции. Скорость в конвективной зоне также достигнет конечной величины. Отдельно стоит отметить случай, когда начальное магнитное поле равно нулю. Тогда мы всегда будем иметь дело с первой стационарной точкой. Иными словами, если звезда не имела магнитного поля совсем, то оно и не появится в данной модели.

При рассмотренных постоянных значениях параметров в звезде не возникает периодическое или квазипериодическое изменение, подобное циклу Швабе на Солнце. Мы исключили из рассмотрения случаи переменных параметров и/или отрицательной плавучести. Однако нет подтверждений, что такая ситуация с плавучестью возможна в течение долгого времени. В этом случае решения системы (1) становятся неустойчивы к малым возмущениям. Случай переменных параметров будет рассмотрен в будущем.

Ниже на рисунке приведено численное решение системы (1) для параметров $\alpha = 32$, $\tau = 1/2$ при начальных условиях (0.1, 0.1), что соответствует устойчивому фокусу для второй стационарной точки и седлу для первой. Численные решения получены методом Рунге-Кутты четвёртого порядка. Рисунок иллюстрирует приведённый выше анализ. Видно, что скорость (рисунок а) и магнитное поле (рисунок б) достигают равновесных значений. На фазовом портрете заметен виток фокуса (рисунок с), менее одного оборота.

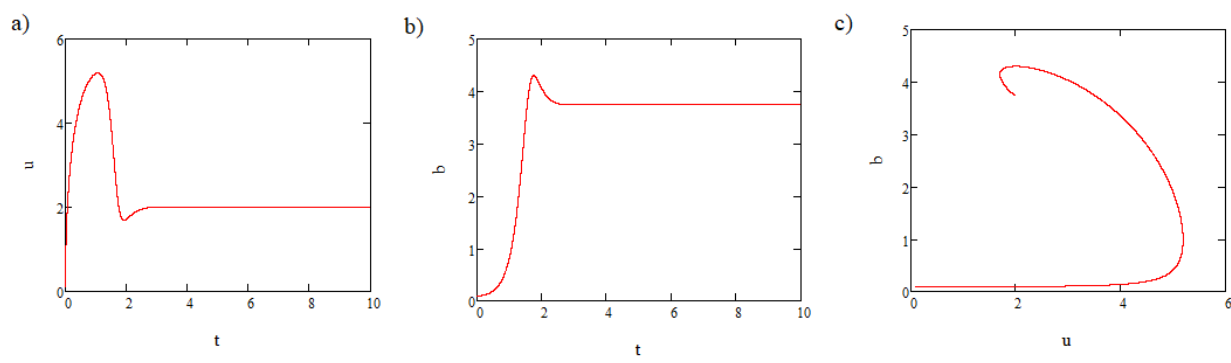


Рисунок. Безразмерные решения системы (1) при $\alpha = 32$, $\tau = 1/2$, и при начальных условиях ($u = 0.1$, $b = 0.1$). а) – скорость, б) – магнитное поле, в) интегральные кривые, зависимость магнитного поля от скорости. Безразмерное время меняется от 0 до 10, число шагов – 50000.

Литература

1. *Starchenko S.V.* Analytic scaling laws in planetary dynamo models // *Geoph. Astroph. Fluid Dyn.* 2019. V. 113. No 1-2. P. 71-79. <https://doi.org/10.1080/03091929.2018.1551531>
2. *Starchenko S.V.* Levels of stabilization of velocity and magnetic induction in the convective zone of the Sun // *Proceedings IAU Symposium No. 365*. A.V. Getling & L.L. Kitchatinov, eds. 2024. P. 364-367. <https://doi.org/10.1017/S1743921323005252>