

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЕТИ, ДУАЛЬНОЙ ВРЕМЕННОМУ РЯДУ ЧИСЕЛ ВОЛЬФА

Макаренко Н.Г., Рыбинцев А.С., Волобуев Д.М.

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия

TOPOLOGICAL ANALYSIS OF A NETWORK DUAL TO THE TIME SERIES OF WOLF NUMBERS

Makarenko N.G., Rybinzev A.S., Volobuev D.M.

Pulkovo Observatory, St Petersburg, Russia

Any time series can be matched with a graph that preserves information about the structure of the series. There are many ways to obtain such a graph. Examples are a binary recurrence graph, which can be viewed as a conjugacy matrix for a graph and a graph whose vertices are defined by delayed Takens vectors. The inverse reconstruction of the time series from the graph, which preserves the preorder relation of the original series, defines a dual representation of the series in the graph. The motivation behind this representation is the possibility of using a set of metrics that are more convenient for the extraction of dynamic patterns than traditional metrics based on Fourier analysis. Such patterns can be extracted by graph filtering methods that allow the use of persistent homology techniques. In this paper, we use this approach to diagnose the dynamical modes of a model producing a time series of Wolf numbers in the sense of Takens' theorem. As a comparison, one of the numerical solutions of the Rössler system is used.

<https://doi.org/10.31725/0552-5829-2024-217-220>

Введение

Под солнечной активностью (СА) понимают комплекс изменяющихся во времени паттернов, наблюдаемых в разных слоях атмосферы Солнца [1]. Как правило, их относят к пространственно-распределенным временным сценам, представленным цифровыми изображениями. Исключением в форме «точечного» сигнала, характеризующим СА интегрально, является число солнечных пятен, представленное индексом, *числом Вольфа*, введенным в 1849 г. Рудольфом Вольфом. Этот индекс не является первичным (физическим) параметром [2, 3], однако, этот ряд принято считать индикатором СА. Причина – это его форма: временной ряд был удобен для анализа Фурье [2] и моделирования традиционными схемами авторегрессии. Такие подходы исключают вопрос о природе источника сигнала; действительно, *modus operandi* – это всегда линейная комбинация гармонических мод. Известные Фурье-спектры инструментального ряда [2] охватывают интервалы времени от года, до векового цикла и более¹. Заметим, что число степеней свободы для Фурье анализа мало, и равномогущий критерий

¹ Мы не рассматриваем здесь набор сверхвековых циклов, полученных по гроху данным

значимости отсутствует. С другой стороны, шумоподобные *осцилляторные* ряды демонстрируют *нонсенс-корреляции*² с множеством климатических и биосферных данных [4] и имеют широкополосные спектры, характерные для хаотической динамики. Неудивительно поэтому, что недавно был предложен вариант спектра [5], который содержит всего одну, по-видимому, хаотическую 11-летнюю моду и является, фактически, огибающей традиционного набора гармоник [2]. Этот вариант восходит к ранним идеям о существовании «странного» солнечного аттрактора [6, 7]. В этом случае, временной ряд чисел Вольфа можно рассматривать как типичную проекцию фазовой траектории аттрактора, т.е. как *детерминированно порожденную наблюдаемую*, по Такенсу [8]. Выполнение необходимого при этом *Кредо Идеального Экспериментатора* [9] становится лишь символом веры. Так, ранние оценки размерности и К-энтропии для СА [10, 11] были получены по ряду, длина которого намного меньше необходимой. Согласно оценке [12] для вычисления корреляционной размерности в R^3 требуется $42^3 \sim 74000$ отсчетов!

Тем не менее, поиск возможных свидетельств в пользу существования странного аттрактора для СА не теряет своей популярности [7, 13, 5]. Так, в работе [13], используя координаты, сохраняющие симметрии второго порядка, были получены вложения для ряда Вольфа и одной из координат системы Ресслера, похожие, по меньшей мере, с точностью до гомотопии. В настоящей статье мы пытаемся проверить это сходство количественно, с точностью до гомологий. Мы используем для этого преобразования рядов в графы [14, 18], для которых, методами Topological Data Analysis (TDA), вычисляются персистентные гомологии [15].

Метод

Любому временному ряду можно поставить в соответствие граф, сохраняющий информацию о структуре ряда [18, 19]. Существует много способов получить такой граф [14]; простейшим является график рекуррентности [16], который в бинарном варианте можно рассматривать как матрицу сопряженности графа. Существует и обратная процедура [17], которая, в общем случае сохраняет масштабные свойства оригинального ряда. В этом смысле, граф и временной ряд дуальны [18, 19], однако, граф имеет более богатый набор метрик. Мы использовали для построения графа один из методов символической динамики – кодирование временного ряда отношением предпорядка [20]. Для этого, каждому фрагменту ряда (слову) длиной k ставится в соответствие подстановка $\pi\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ символов, где $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, так что a_1 кодирует наименьший, а a_k – наибольший отсчет в слове. Сдвиг на один отсчет генерирует следующее слово. Каж-

² Здесь курсивом выделена терминология Джорджа Уидни Юла [4]

дому слову соответствует вершина графа. Вершины располагаются на окружности и соединяются ребрами, которые продуцируются динамикой подстановок. Для фильтрации вершин используется матрица диффузных расстояний. Результатом фильтрации является диаграмма персистентности (PD) для числа Бетти β_1 , которое измеряет количество циклов на каждом уровне фильтрации и является рангом группы H_1 гомологий [15]. Для численных экспериментов использовался пакет *Teaspoon* в среде *Python* [21].

Результаты и выводы

На рисунке приведены результаты моделирования для цензурированного временного ряда чисел Вольфа SSN2, сглаженного по 33 точкам (слева), и решение системы Ресслера (хаотический режим) для x -координаты (справа), вместе с изображениями соответствующих им графов и диаграмм персистентности (PD) для чисел Бетти β_1 . Длина слова для кодирования $k = 7$. Фильтрация для TDA проводилась по матрице диффузных расстояний ребер.

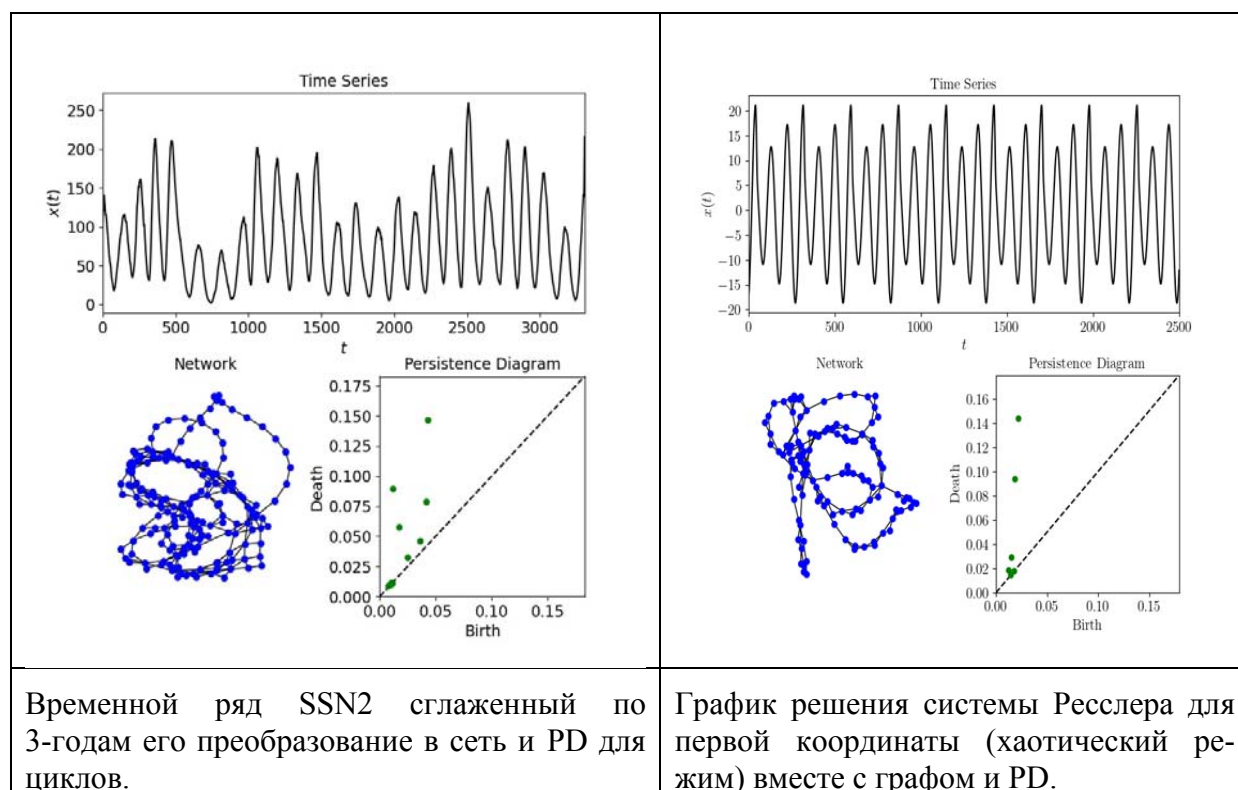


Рисунок.

Нетрудно заметить сходство PD для графа временного ряда СА и графа хаотического аттрактора. Мы не считаем, конечно, что аттрактор СА, если он есть, непременно является решением системы Ресслера. Мы получили лишь независимое подтверждение о возможном существовании детермини-

рованного хаоса в динамике СА, и предложили путь корректной более точной диагностики. Наш результат согласуется с выводами работы [13].

Литература

1. Куклин Г.В. Пространственно-временные закономерности пятнообразования и магнитных полей на Солнце. Доктор. дисс. в форме научного доклада. Иркутск. 1991
2. Витинский Ю.И., Копецкий М., Куклин Г.В. Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. – М: Наука. – 1986.
3. Наговицын Ю.А. Квазипериодические проявления солнечной активности на различных временных шкалах. Автореферат доктор. дисс. СПб, 2006.
4. Yule, G.U. Why do we sometimes get nonsense-correlations between time-series? A study in sampling and the nature of time-series // J. R. Stat. Soc., 1926, **89**, (1), 1–63.
5. Frick P., Okatev R., Sokoloff D. Spectral properties of low-order dynamo systems // Russian Jour. of Nonlinear Dynamics, 2022, **18** (2), 289-296.
6. Рузмайкин А.А. Солнце как странный аттрактор. – М., 1980. Препринт Ин-т прикл. математики АН СССР; № 80.
7. Kremliovsky M.N. Can we understand time scales of solar activity? // Solar Physics, 1994, **151**, 351-370.
8. Takens E. Detecting strange attractors in turbulence // D.A. Rand, L.S. Young (Eds.), Dynamical Systems and Turbulence, 1981, **898**, Springer, Berlin, 365-381.
9. Афраймович В.С., Рейнман А.М. Размерность и энтропия в многомерных системах. Нелинейные Волны. – Наука. – 1989, 238.
10. Макаренко Н.Г., Айманова Г.К. К-энтропия и размерность Реньи Солнечного аттрактора // Астрон. Циркуляр, 1988, № 1533, с. 19.
11. Ostryakov V.M., Usoskin I.G. On the dimension of solar attractor // Solar Physics, 1990, **127**, 405-412.
12. Smith L.A. Intrinsic limits on dimension calculations // Phys. Lett. A., 1988, **133** (6), № 6, 283-288.
13. Letellier, C., Aguirre, L.A., Maquet, J., & Gilmore, R. Evidence for low dimensional chaos in sunspot cycles // Astron. & Astroph., 2006, **449**(1), 379-387.
14. Knyazeva I.S., Makarenko N.G. Network analysis methods of heliorelated time series // Geomagnetism and Aeronomy, 2012, **52**, 849-856.
15. Carlsson G., Vejdemo-Johansson M. Topological data analysis with applications. Cambridge University Press, 2021.
16. Eckmann J.-P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence Plots of Dynamical Systems// Euophys. Lett., 1987, **4** (9), 973-977.
17. Thiel M., Romano M. C., Kurths J. How much information is contained in a recurrence plot? // Physics Letters A, 2004, **330** (5), 343-349.
18. Campanharo A.S.L.O. et al. Duality between time series and networks // PloS one, 2011, **6**(8), e23378.
19. Strozzi F. et al. From complex networks to time series analysis and vice versa: Application to metabolic networks // Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities, 2009.
20. Bandt C., Shiha F. Order patterns in time series // J. of Time Series Anal., 2007, **28** (5), 646-665.
21. Teaspoon: A comprehensive python package for topological signal processing // <https://github.com/TeaspoonTDA/teaspoon>