Взаимная гравитационная энергия однородных вытянутых сфероидов. Коллинеарный случай

Б.П. Кондратьев[1,2,*], В.С. Корноухов[1]

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Физический факультет, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга
[2]Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, 196140, Санкт- Петербург

[*]*e-mail:* work@boris-kondratyev.ru

Аннотация

Поставлена и решена задача о взаимной гравитационной энергии W_{mut} для системы из двух однородных вытянутых сфероидов, оси симметрии которых расположены на одной линии. Применяется метод эквигравитирующих элементов, где внешние потенциалы трехмерных сфероидов представлены потенциалами одномерных неоднородных фокальных стержней. Решение задачи сводится к интегрированию потенциала одного стержня по отрезку второго стержня. В результате, выражение W_{mut} для двух вытянутых сфероидов и силу притяжения между ними удается получить в конечном аналитическом виде через элементарные функции. Функция W_{mut} представлена также рядом по степеням эксцентриситетов сфероидов. Обсуждаются возможные применения полученных результатов.

1 Введение

В физике и астрономии для решения многих задач требуется знать гравитационную (потенциальную) энергию W тел разной формы. В скалярном виде потенциальная энергия необходима для вычисления таких параметров гравитирующих систем, как дисперсия скоростей и давление, компонентов сил и моментов сил; в тензорном виде потенциальная энергия входит в вириальные уравнения второго порядка и используется при изучении равновесия и устойчивости фигур равновесия небесных тел (Чандрасекхар, 1973).

Рассмотрим две массы M_1 и M_2, распределенные в объемах V_1 и V_2 с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно. Каждая из этих масс является источником гравитационного поля с потенциалом

$$\varphi_i\left(x\right) = G\int\limits_{V_i} \frac{\rho_i\left(x\right)}{\left|x-x'\right|}dV, \quad i=1,2, \tag{1}$$

и, находясь в поле притяжения j-ого партнера, имеет гравитационную энергию

$$W_{i,j} = -\int\limits_{V_i} \rho_i\left(x\right)\varphi_j\left(x\right)dV. \tag{2}$$

Гравитационная энергия не относится к величинам, аддитивным по массе. Поэтому если какое-либо тело (или система тел) состоит из двух, например, частей, то его полная энергия может быть представлена в виде

$$W = -\frac{1}{2}\left\{\int\limits_{V_1} \rho_1(x)\,\varphi_1(x)\,dV + \int\limits_{V_2} \rho_2(x)\,\varphi_2(x)\,dV + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{V_1} \rho_1(x)\,\varphi_2(x)\,dV + \int\limits_{V_2} \rho_2(x)\,\varphi_1(x)\,dV \right\}. \tag{3}$$

Два первых интеграла в (3) дают гравитационную энергию W_1 и W_2 каждой подсистемы в отдельности, а два последних интеграла в сумме дают *взаимную гравитационную энергию* W_{mut} двух тел (или частей тела). Известно замечательное свойство равенства этих двух интегралов (Кондратьев, 1989)

$$W_{mut} = -\int\limits_{V_1} \rho_1(x)\,\varphi_2(x)\,dV = -\int\limits_{V_2} \rho_2(x)\,\varphi_1(x)\,dV. \tag{4}$$

Таким образом, полная гравитационная энергия тела состоит из трех частей

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}. \tag{5}$$

Гравитационная энергия зависит от формы и внутренней структуры тела, поэтому нахождение W является сложной математической задачей, решение которой редко удается представить в конечном аналитическом виде. Обычно в литературе даются выражения потенциальной энергии только для шаров или эллипсоидов, см., например, (Субботин, 1936), (Чандрасекхар, 1973). В наше время для нахождения силовых полей и потенциальной энергии тел более сложной формы Б.П. Кондратьевым создан специальный метод эквигравитирующих элементов (Кондратьев, 1989), (Кондратьев, 2001), (Кондратьев, 2003), (Кондратьев, 2007), с помощью которого получен ряд новых результатов в теории потенциала.

Отдельный и важный класс в теории потенциала составляют задачи о нахождении *взаимной гравитационной энергии* тел W_{mut}. Здесь рассматривается задача о взаимной потенциальной энергии системы из двух однородных вытянутых сфероидов, оси симметрии которых находятся на одной линии. Такая двойная система сфероидов является хорошей моделью при решении некоторых астрофизических задач. Примерами являются системы небесный тел с двойным спин-орбитальным резонансом (типа двойной планеты Плутон-Харон или некоторых двойных астероидов с синхронным вращением), а также системы близких двойных звезд и некоторые варианты задачи Роша (Чандрасекхар, 1973). Однако до настоящего времени выражения для взаимной гравитационной энергии двух вытянутых сфероидов не были получены. В данной работе мы решаем эту задачу и находим взаимную гравитационную вытянутых сфероидов W_{mut} в конечном аналитическом виде через элементарные функции.

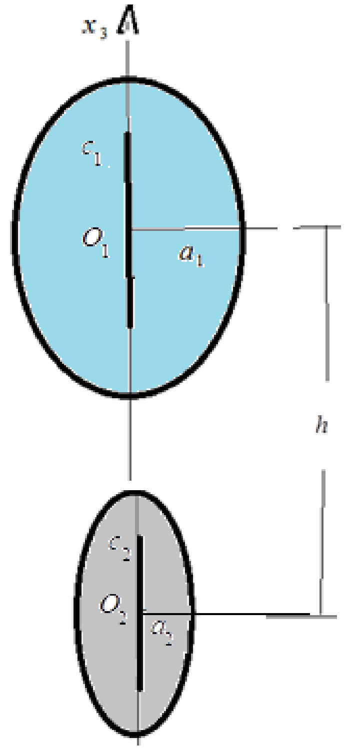

Рис. 1: Сечения двух соосных вытянутых сфероидов. Указаны их полуоси и расстояние h между центрами O_1O_2. Внутри эллиптических сечений выделены фокальные эквигравитирующие отрезки сфероидов с длинами $L_1 = 2R_1$ и $L_2 = 2R_2$.

2 Взаимная энергия сфероидов, вытянутых вдоль одной линии

В цилиндрических координатах (r, x_3) вытянутый сфероид имеет поверхность

$$\frac{r^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, \quad c \geq a_1. \tag{6}$$

Рассмотрим систему из двух гравитирующих однородных вытянутых сфероидов с полуосями $(c_1 \geq a_1)$ и $(c_2 \geq a_2)$. Эти сфероиды расположены в пространстве так, см. (рис. 1), что их оси симметрии находятся на оси Ox_3 а расстояние между центрами фигур равно $O_1O_2 = h$. Заданы также плотности ρ_1 и ρ_2, так что массы тел будут равны $M_1 = \dfrac{4}{3}\pi a_1^2 c_1 \rho_1$ и $M_2 = \dfrac{4}{3}\pi a_2^2 c_2 \rho_2$. За начало системы отсчета выберем указанный на рис. 1 центр O_1 первого сфероида. Тогда (см. монографию Кондратьев (2007), стр. 255), плотность на фокальном эквигравитирующем отрезке длиной $L_1 = 2R_1$ верхнего вытянутого сфероида будет равна

$$\mu_1(x_3) = \frac{3M_1}{4R_1}\left(1 - \frac{x_3^2}{R^1}\right), \quad R_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}, \quad -R_1 \leq x_3 \leq R_1, \tag{7}$$

а внешний потенциал нижнего вытянутого сфероида на оси симметрии Ox_3 будет равен (Кондратьев (2007), стр. 163):

$$\varphi_2(x_3) = \frac{3GM_2}{4R_2}\left\{\frac{2(x_3+h)}{R_2} + \left(1 - \frac{(x_3+h)^2}{R_2^2}\right)\ln\frac{x_3+h+R_2}{x_3+h-R_2}\right\}. \tag{8}$$

Здесь

$$R_2 = \sqrt{c_2^2 - a_2^2} \tag{9}$$

Подчеркнем, что применение метода эквигравитирующих элементов позволяет внешний потенциал любого однородного трехмерного вытянутого сфероида заменить потенциалом его фокального одномерного эквигравитирующего стержня с параболическим законом плотности типа (7), и такая замена значительно упрощает дальнейшие весьма сложные расчеты. Интегрируя потенциал (8) по стержню верхнего сфероида (см. формулы (4)), находим взаимную энергию двух сфероидов (Кондратьев, 2007)

$$W_{mut} = -\int\limits_{-R_1}^{R_1} \mu_1\left(x_3\right)\varphi_2\left(x_3\right)dx_3. \tag{10}$$

Интеграл (10) можно выразить в конечном аналитическом виде. Для этого сделаем в нем замену переменной интегрирования $z = \dfrac{x_3}{R_1}$ и введем обозначения

$$x = \frac{h}{R_1}; \quad n = \frac{R_1}{R_2} = \frac{c_1 e_1}{c_2 e_2}; \quad \alpha = x + \frac{1}{n}; \quad \beta = x - \frac{1}{n}, \tag{11}$$

где $e_1 = \sqrt{1 - \dfrac{a_1^2}{c_1^2}}$ и $e_2 = \sqrt{1 - \dfrac{a_2^2}{c_2^2}}$ эксцентриситеты сфероидов. Тогда интеграл (10) примет вид

$$W_{mut} = -\frac{9}{16}\frac{GM_1M_2}{h}xn\int\limits_{-1}^{1}\left(1-z^2\right)\left\{2n\left(z+x\right)+\left[1-n^2\left(z+x\right)^2\right]\ln\frac{z+\alpha}{z+\beta}\right\}dz. \tag{12}$$

Вычисляя этот интеграл, после многих расчетов и преобразований получим искомое выражение взаимной энергии

$$W_{mut} = -\frac{GM_1M_2}{h}\Phi\left(n,x\right). \tag{13}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi\left(n,x\right) = f_1\ln\frac{n\left(x+1\right)+1}{n\left(x+1\right)-1} + f_2\ln\frac{n\left(x-1\right)+1}{n\left(x-1\right)-1} + f_3\ln\frac{n\left(x-1\right)-1}{n\left(x+1\right)-1} + f_4 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{3x}{160n^2}\left(n\left(x+1\right)+1\right)^3\left(4-12n+2nx+4n^2+3nx+3n^2x-n^2x^2\right)\\
f_2 &= \frac{3x}{160n^2}\left(n\left(x-1\right)+1\right)^3\left(4+12n+2nx+4n^2+3nx-3n^2x-n^2x^2\right)\\
f_3 &= \frac{3x}{20n^2}\left(1-5n^2+5n^2x^2\right)\\
f_4 &= \frac{3x^2}{40}\left(11+11n^2+n^2x^2\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

На рис. 2 показан график вспомогательной функции $\Phi\left(n,x\right)$ которая входит в формулу (13). Мы видим, что взаимная потенциальная энергия двух сфероидов очень быстро убывает на малых расстояниях между центрами тел, и на больших расстояниях уменьшение

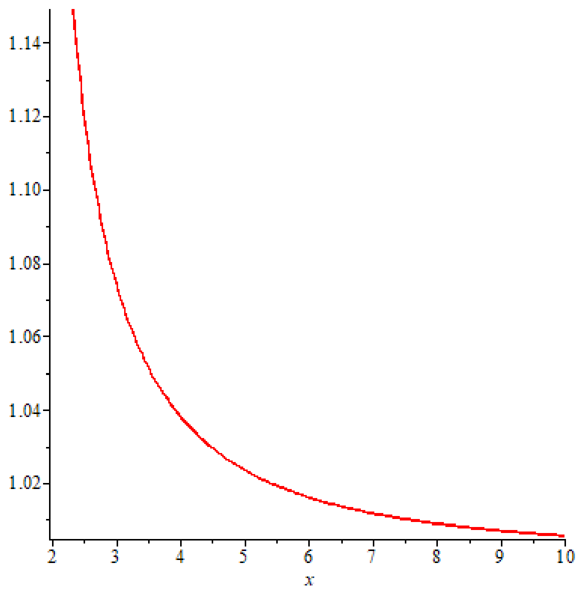

Рис. 2: Зависимость нормированной взаимной энергии $\Phi\,(n,x)$ двух вытянутых сфероидов от расстояния между центрами $x = \dfrac{h}{R_1}$. Расчет сделан по формулам (14) и (15) для $n = 1$.

энергии становится не столь быстрым.

Заметим, что выражение (14) можно представить также рядом по степеням эксцентриситетов сфероидов e_1 и e_2. Для этого введем эквивалентные по объему радиусы $\tilde{R}_1$, $\tilde{R}_2$ и условимся, что при изменении эксцентриситетов сфероиды сохраняют свои массы и объемы, т.е. $\tilde{R}_1^3 = a_1^2 c_1$, $\tilde{R}_2^3 = a_2^2 c_2$. Тогда, как легко показать,

$$R_1 = \frac{e_1 \tilde{R}_1}{\left(1 - e_1^2\right)^{\frac{1}{3}}}; \quad R_2 = \frac{e_2 \tilde{R}_2}{\left(1 - e_2^2\right)^{\frac{1}{3}}}. \tag{16}$$

Вводя обозначения для безразмерных величин $x_s = \dfrac{h}{\tilde{R}_1}$, $n_s = \dfrac{\tilde{R}_1}{\tilde{R}_2}$ имеем

$$x = x_s \frac{\left(1 - e_1^2\right)^{\frac{1}{3}}}{e_1}; \quad n = n_s \frac{e_1 \left(1 - e_2^2\right)^{\frac{1}{3}}}{e_2 \left(1 - e_1^2\right)^{\frac{1}{3}}}. \tag{17}$$

После расчетов с точностью до членов малого порядка e_1^5 и e_2^5 включительно, получим

$$W_{mut} = -\frac{GM_1 M_2}{h} \left\{ 1 + \frac{e_1^2}{5x_s} + \frac{e_2^2}{5x_s n_s^2} + \frac{e_1^2 e_2^2}{5x_s^2 n_s^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5x_s} + \frac{1}{x_s^2} \right) + \ldots \right\}. \tag{18}$$

Заметим, что функция $\Phi\,(n,x)$ представляет взаимную энергию $W = \dfrac{-W_{mut} h}{GM_1 M_2}$ двух однородных вытянутых сфероидов, нормированную на стандартное значение энергии двух эквивалентных по массе шаров или точечных масс. Из рис. 2 и рис. 3 видно, что функция $\Phi\,(n,x)$ быстро убывает с увеличением расстояния между центрами сфероидов, но ограничена снизу и всегда остается больше единицы

$$\Phi\,(n,x) > 1. \tag{19}$$

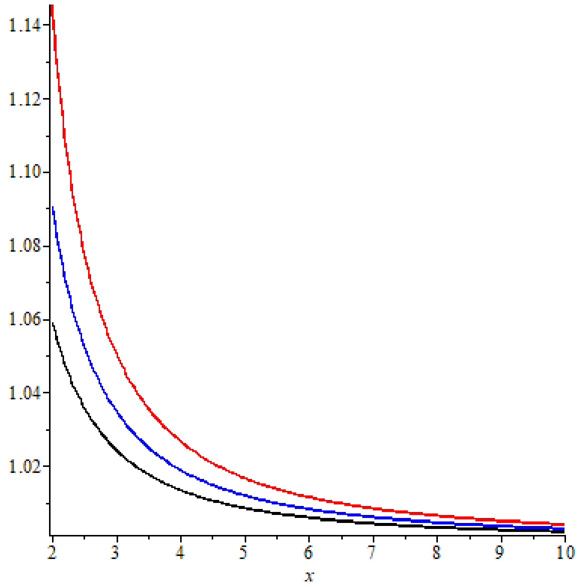

Рис. 3: Зависимость $\Phi(n, x)$ для вытянутых сфероидов при разных n от нормированного расстояния $x = \dfrac{h}{R_1}$. Красным цветом $n = 1$, голубым $n = 1.5$, черным $n = 5$.

Это означает, что взаимная энергия двух однородных вытянутых сфероидов, оси симметрии которых находятся на одной прямой линии, всегда остается больше взаимной энергии двух эквивалентных шаров или точечных масс.

Дифференцируя взаимный потенциал (13), находим силу притяжения между двумя вытянутыми сфероидами:

$$F(n, x) = \frac{GM_1M_2}{h^2}\left(\Phi(n, x) - x\frac{d\Phi(n, x)}{dx}\right). \tag{20}$$

Подставляя сюда $\Phi(n, x)$ из (14), после многих расчетов и преобразований, в итоге получим

$$\begin{gathered}
F(n, x) = \frac{GM_1M_2}{h^2}\cdot \\
\left\{\left[-\frac{3x^2}{32n}(nx+n+1)^2\left(n^2x^2-2n^2x-3n^2-2nx+6n-3\right)\right]\ln\frac{n(x+1)+1}{n(x+1)-1}+\right. \\
+\left[\frac{3x^2}{32n}(nx-n+1)^2\left(n^2x^2+2n^2x-3n^2-2nx-6n-3\right)\right]\ln\frac{n(x-1)+1}{n(x-1)-1}- \\
\left.-\frac{3x^3}{2}\ln\frac{n(x-1)-1}{n(x+1)-1}-\frac{3x^2}{8}\left(n^2x^2+3n^2+3\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Для примера, на рис. 4. показан график для силы притяжения между двумя одинаковыми по массе вытянутыми сфероидами. Мы видим, что сила притяжения между двумя вытянутыми сфероидами оказывается больше, чем сила притяжения между двумя шарами (материальными точками) с теми же массами.

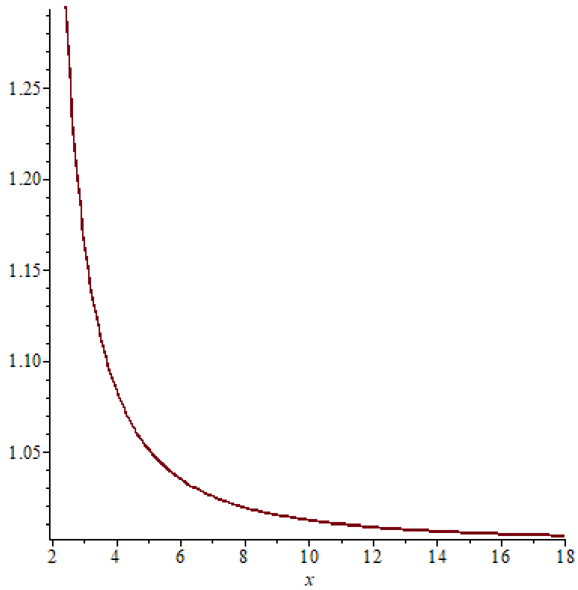

Рис. 4: Зависимость модуля нормированной силы притяжения $F\,(n,x) = \dfrac{GM_1M_2}{h^2}$ от расстояния $x = \dfrac{h}{R_1}$ между двумя однородными соосно расположенными вытянутыми сфероидами. Расчет сделан по формуле (21) для $n = 1$.

3 Обсуждение

Здесь была поставлена и решена задача о взаимной гравитационной энергии W_{mut} для двух однородных вытянутых сфероидов, оси симметрии которых расположены на одной линии. Для решения задачи применялся развитый в работах Б.П.Кондратьева метод эквигравитирующих элементов, в котором внешние потенциалы трехмерных однородных сфероидов представлены потенциалами одномерных неоднородных фокальных стержней. Решение задачи сводится к интегрированию потенциала одного стержня по отрезку второго стержня. В результате, выражение W_{mut} для двух вытянутых сфероидов и силу притяжения между ними удается получить в конечном аналитическом виде и выразить их через элементарные функции. Кроме того, функция W_{mut} была представлена рядом по степеням эксцентриситетов сфероидов.

Полученное здесь выражение взаимной гравитационной энергии можно применять для решения многих задач, например, при изучении динамики тесных двойных звезд, двойных астероидов в Солнечной системе, включая контактные пары, а также двойных планет типа Плутон-Харон.

Заметим, что до недавнего времени среди множества двойных астероидов не было известно ни одного примера пары с двойным синхронным вращением. Так как приливные силы обратно пропорциональны кубу расстояний, приливные захваты следует искать среди пар близких друг к другу астероидов.

Однако недавно пара астероидов с синхронным вращением была обнаружена (Taylor, 2019). Ей был присвоен номер **(190166) 2005 UP156**. Этот двойной астероид удивителен, так как он состоит из астероидов, которые находятся, по-видимому, в режиме двойного приливного захвата. Наблюдения показали, что астероиды этой пары имеют примерно одинаковые массы и конгруэнтную (одинаковую) вытянутую геометрическую форму. Изучение динамики этого двойного астероида является темой отдельной статьи.

Список литературы

Taylor P.A. et al. 50th Lunar and Planetary Science Conference 2019 (LPI Contrib. No. 2132). 2019.

Кондратьев Б.П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: Наука, 1989.

Кондратьев Б.П. Теория потенциала: эквигравитирующие стержни для осесимметричных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. 41, 2. 269–281.

Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007.

Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1936.

Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.

Mutual gravitational energy of homogeneous prolate spheroids. Collinear case

B.P. Kondratyev[1,2,*], V.S. Kornoukhov[1]

[1]Lomonosov Moscow State University. Department of Physics, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia

[2]Central (Pulkovo) Astronomical Observatory, Russian Academy of Sciences, 196140, St. Petersburg, Russia

[*] *e-mail:* work@boris-kondratyev.ru

Abstract

The problem of mutual gravitational energy W_{mut} for a system of two homogeneous prolated spheroids whose symmetry axes are on the same line is set and solved. The method of equigravitating elements is applied, where the external potentials of three-dimensional spheroids are represented by the potentials of one-dimensional inhomogeneous focal rods. The solution of the problem is reduced to the integration of the potential of one rod over the segment of the second rod. As a result, the expression W_{mut} for two prolated spheroids can be obtained in a finite analytic form through elementary functions. The force of attraction between the spheroids is found. The function W_{mut} is also represented by a series of degrees of eccentricity of the spheroids. Possible applications of the obtained results are discussed.