



Зависимость геодезической прецессии от выбора системы координат на примере галилеевых спутников Юпитера

А.Н. Вершков^{1*}, В.В. Пашкевич¹

¹ Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН

Аннотация

В статье исследуется релятивистский эффект геодезической прецессии во вращении Юпитера и его галилеевых спутников (Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто). Для этой цели был модифицирован метод, разработанный в работе (Пашкевич, 2016), который применим для изучения любых тел Солнечной системы, имеющих долгосрочные эфемериды. В данном исследовании были вычислены значения векторов угловой скорости геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно барицентра Солнечной системы и относительно барицентра системы спутников Юпитера. Показано их различие в зависимости от выбора координатной системы отсчёта из-за несимметричности формулы вектора угловой скорости геодезического вращения для любых тел Солнечной системы, используемой для этих вычислений. Полученные аналитические величины геодезической прецессии в параметрах вращения изучаемых объектов могут быть использованы для численного исследования их вращения в релятивистском приближении.

Ключевые слова: геодезическая прецессия, релятивистское вращение, Юпитер, галилеевы спутники, Ио, Европа, Ганимед, Каллисто.

Введение

Эффект геодезической прецессии (De Sitter W., 1916) является наиболее существенным эффектом в релятивистском вращении небесных тел вокруг своей оси. Этот эффект вызывает систематическое (или вековое) изменение геодезического вращения исследуемого тела и имеет формальное сходство с известным в классической механике явлением прецессии. В отличие от прецессии, появление геодезической прецессии не связано с действием на тело каких-либо сил, а обусловлено изменением направления его оси вращения в результате параллельного переноса вектора углового момента тела вдоль его орбиты в искривленном пространстве-времени.

Вековое изменение геодезического вращения исследуемого тела в рассматриваемых параметрах вращения¹ x может быть представлено в виде полинома по степеням времени:

$$\Delta x = \sum_{n=0}^N \Delta x_n t^n,$$

где t – время; Δx_n – коэффициенты вековых членов; N – степень аппроксимирующего полинома.

В предыдущих наших работах (Eroshkin, Pashkevich, 2007), (Пашкевич, 2016), (Pashkevich et al., 2021), (Pashkevich, Vershkov, 2022) производились исследования геодезического вращения тел

*e-mail:avershkov@mail.ru

¹В данной работе $\Delta x = x_{\text{релятивистское}} - x_{\text{ньютоновое}}$ принимает значения рассматриваемых разностей углов Эйлера ($\Delta\psi$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$), разностей возмущающих членов физической либрации ($\Delta\tau$, $\Delta\rho$, $\Delta\sigma$) и абсолютной величины вектора углового поворота геодезического вращения $|\vec{L}|$ исследуемого тела.

Солнечной системы относительно неподвижной эклиптики эпохи J2000.0 и барицентра Солнечной системы.

Далее для краткости в статье, для средних или неподвижных орбит² тела эпохи, экватора Земли и эклиптики всегда будет подразумеваться эпоха J2000.0, а выражение "эпохи J2000.0" в некоторых местах будет опущено.

Реализация современных космических проектов по изучению планет Солнечной системы и их спутников повлияла на появление новых долгосрочных высокоточных эфемерид планет этих небесных тел (Giorgini et al., 2001), (Park et al., 2021). Эти эфемериды позволяют уточнять орбиты исследуемых тел Солнечной системы и, как следствие, строить более высокоточные долгосрочные теории их релятивистского вращения относительно собственных координатных систем. Для этих целей вместо плоскости эклиптики в качестве опорных плоскостей лучше использовать плоскости орбит исследуемых планет и их спутников (Baland et al., 2023).

Знание аналитических значений геодезического вращения небесных тел позволит использовать релятивистские поправки, в частности, как для вычисления параметров собственного вращения небесных тел при построении высокоточных долгосрочных численных или полуаналитических теорий вращения тел вокруг собственного центра масс в релятивистском приближении, так и для оценки степени влияния релятивистских факторов на данные, получаемые из наблюдений.

Основной целью данной работы является исследование зависимости вектора геодезического вращения от выбора системы координат. Для этого будем определять наиболее существенные вековые члены геодезического вращения (геодезической прецессии) Юпитера относительно его неподвижной орбиты и барицентра Солнечной системы, и его галилеевых спутников (Ио (J1), Европы (J2), Ганимеда (J3), и Каллисто (J4)) относительно неподвижной орбиты Юпитера и барицентра Солнечной системы и относительно неподвижной орбиты изучаемого спутника Юпитера и барицентра Юпитерианской системы (Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini et al., 2001)).

В данной работе использовался модифицированный авторами метод, разработанный в статье (Пашкевич, 2016) для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы, для которых имеется долгосрочная эфемерида.

1 Описание метода решения задачи

Далее в четырёх пунктах излагается суть применяемого модифицированного метода (Пашкевич, 2016):

1. Задача о геодезическом (релятивистском) вращении Юпитера и его галилеевых спутников изучается относительно кинематически невращающейся (Koreikin et al., 2011) собственной координатной системы исследуемых тел (Archinal et al., 2018). Для Солнца, Луны, Плутона и больших планет положения и скорости вычисляются с помощью фундаментальной эфемериды JPL DE441/LE441 (Park et al., 2021). Положения, скорости и орбитальные элементы для Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто берутся из Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini et al., 2001).

2. Используя Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini et al., 2001) для каждого исследуемого тела был получен временной ряд оскулирующих элементов его орбиты (для Юпитера на интервале времени от AD999 24 декабря 12 ч. 00 мин. до AD3000 08 января 12 ч. 00 мин. с шагом 1 сутки, для его галилеевых спутников на интервале времени от AD1599 26 декабря 00 ч. 00 мин. до AD2400 13 января 00 ч. 00 мин. с шагом 0.1 периода их обращения вокруг Юпитера). Из временного ряда методом наименьших квадратов, используя разработанный В.В. Пашкевичем комплекс программ (Series of Programs for Calculations of Trends) SPCT2023 (Пашкевич, 2023),

²Здесь и далее понятия средней орбиты тела эпохи, неподвижной орбиты тела эпохи являются синонимами.

были вычислены средние элементы орбит исследуемых тел (табл. 1)³:

$$y = \sum_{n=0}^6 y_n t^n, \quad (1)$$

где y_n – коэффициенты систематических членов; $y = i_0, \Omega, J, \Omega_J$; i_0 – наклон средней орбиты исследуемого тела к эклиптике, Ω – долгота восходящего узла средней орбиты исследуемого тела на эклиптике, J – наклон средней орбиты исследуемого тела к неподвижному экватору Земли (ICRF – International Celestial Reference Frame (Ma et al., 1998)), $\Omega_J = \Upsilon D$ – долгота восходящего узла средней орбиты исследуемого тела на экваторе Земли (ICRF) (рис. 1). t – время в Юлианских днях от эпохи J2000.0.

Таблица 1: Средние элементы орбит Юпитера и его галилеевых спутников эпохи J2000.0.

Объект	P	i_0 (градусы)	Ω (градусы)	J (градусы)	Ω_J (градусы)
Юпитер (B5)	11.862 лет	1.30400566	100.47584272	23.23561035	3.25171174
Ио (J1)	1.769 суток	2.21474943	-22.16602976	25.50314080	-1.94049249
Европа (J2)	3.551 суток	2.23865896	-22.03183642	25.50643617	-1.92829117
Ганимед (J3)	7.155 суток	2.15872228	-22.31943589	25.44569687	-1.90327473
Каллисто (J4)	16.689 суток	2.02604234	-21.45503716	25.33579801	-1.70796843

В табл. 1: P – сидерический период обращения (Юпитера вокруг Солнца, галилеевых спутников вокруг Юпитера).

В результате, из полученных средних элементов орбит Юпитера и его галилеевых спутников, были вычислены средние орбиты Юпитера (вокруг барицентра Солнечной системы) и его галилеевых спутников (вокруг барицентра Юпитерианской системы).

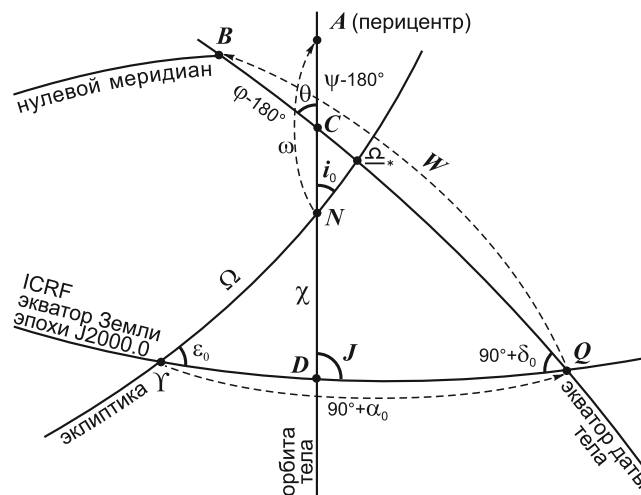


Рис. 1: Определение углов ориентации исследуемого тела для перехода между геоцентрической системой координат и кинематически невращающейся собственной системой координат исследуемого тела.

На рис. 1 изображены углы ориентации исследуемого тела для перехода между геоцентрической системой координат и неподвижной собственной системой координат исследуемого тела:

³Из средних элементов орбит Юпитера и его галилеевых спутников в табл. 1 приводятся только постоянные члены, которые используются в данном исследовании (т.к. для неподвижной орбиты эпохи J2000.0 $t = 0$, следовательно, и вековые члены выражения (1) обращаются в ноль).

α_0 – прямое восхождение северного полюса вращения тела; δ_0 – склонение северного полюса вращения тела; $W = QB$ – угловое расстояние нулевого меридиана тела, отсчитываемое по подвижному экватору даты тела от неподвижного экватора Земли; ε_0 – угол наклона неподвижного экватора Земли к неподвижной эклиптике; ψ – угол долготы нисходящего узла подвижного экватора даты тела на его средней орбите, отсчитываемый от перицентра его орбиты (т. А на рис. 1); θ – угол наклона подвижного экватора даты тела к его средней орбите; φ – угол собственного вращения тела между восходящим узлом его средней орбиты и главной осью OA (рис. 3) минимального момента инерции тела (т. В на рис. 1); ω – угловое расстояние перицентра средней орбиты тела от узла N ; χ – долгота нисходящего узла эклиптики на средней орбите исследуемого тела; Υ – точка весеннего равноденствия Земли; \sphericalangle_* – точка осеннего равноденствия даты исследуемого тела на эклиптике.

3. С помощью формул приведённых в данном пункте вычисляются временные ряды скоростей геодезического вращения для каждого исследуемого тела в углах Эйлера, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора угловой скорости вращения, с шагом: 12ч для Юпитера (J5), 4ч 14 мин 44.160сек для Ио (J1), 8ч 31мин 20.640сек для Европы (J2), 17ч 10мин 19.200сек для Ганимеда (J3) и 1д 16ч 3мин 21.600сек для Каллисто (J4) на 800 летнем интервале времени (от AD1599 26 декабря 00 ч. 00 мин. до AD2400 13 января 00 ч. 00 мин.). Шаг временных рядов для спутников выбирался равным 0.1 периода их обращения вокруг Юпитера для обеспечения достаточной точности интегрирования.

Формула вектора угловой скорости геодезического вращения для любых тел Солнечной системы имеет следующий вид (Eroshkin, Pashkevich, 2007):

$$\vec{\sigma}_i = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|^3} (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \times \left(\frac{3}{2} \dot{\vec{R}}_i - 2\dot{\vec{R}}_j \right), \quad (2)$$

где c – скорость света в вакууме; G – гравитационная постоянная; индекс i соответствует исследуемым телам (Юпитеру и его галилеевым спутникам), а j – возмущающим телам (Солнцу, Луне, Плутону и большим планетам⁴); $\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, \vec{R}_j, \dot{\vec{R}}_j$ – барицентрические векторы положений и скоростей i -го и j -го тела, соответственно; m_j – масса j -го тела; символ \times означает векторное произведение.

Разность векторов скоростей в правой части векторного произведения формулы (2) не является симметричной⁵ относительно выбора начала отсчёта координатной системы, таким образом результирующее значение вектора, вычисленного по этой формуле, будет зависеть от выбранной системы координат.

Для наглядности вышесказанного сравним два исследуемых вектора угловой скорости геодезического вращения в различных системах координат:

1. вектор угловой скорости геодезического вращения вычисляемый относительно барицентра Солнечной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{(SSB)i} &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} (\vec{r}_{ji}) \times \left(\frac{3}{2} \dot{\vec{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}_{(SSB)j} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} \left(\frac{3}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{R}}_{(SSB)j} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{R}_{(SSB)i}, \dot{\vec{R}}_{(SSB)i}, \vec{R}_{(SSB)j}, \dot{\vec{R}}_{(SSB)j}$ – барицентрические векторы (относительно барицентра Солнечной системы) положений и скоростей i -го и j -го тела, соответственно; $\vec{r}_{ji} = \vec{R}_{(SSB)i} - \vec{R}_{(SSB)j}$; $\dot{\vec{r}}_{ji} = \dot{\vec{R}}_{(SSB)i} - \dot{\vec{R}}_{(SSB)j}$;

⁴Юпитер исключается из возмущающих тел, когда становится исследуемым телом.

⁵т.е., в данном случае, формула не является симметричной из-за разных величин коэффициентов в разности барицентрических векторов скоростей исследуемого и возмущаемого тел. Для симметричной формулы результирующее значение величины вектора не зависит от выбора координатной системы.

2. вектор угловой скорости геодезического вращения вычисляемый относительно барицентра Юпитерианской системы имеет вид:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{(JSB)i} &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} (\vec{r}_{ji}) \times \left(\frac{3}{2} \dot{\vec{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \dot{\vec{R}}_{(JSB)j} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} \left(\frac{3}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{r}}_{ji} - \frac{1}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{R}}_{(JSB)j} \right),\end{aligned}\quad (4)$$

где $\vec{R}_{(JSB)i}$, $\dot{\vec{R}}_{(JSB)i}$, $\vec{R}_{(JSB)j}$, $\dot{\vec{R}}_{(JSB)j}$ – барицентрические векторы (относительно барицентра Юпитерианской системы) положений и скоростей i -го и j -го тела, соответственно; $\vec{r}_{ji} = \vec{R}_{(JSB)i} - \vec{R}_{(JSB)j}$; $\dot{\vec{r}}_{ji} = \dot{\vec{R}}_{(JSB)i} - \dot{\vec{R}}_{(JSB)j}$.

В результате, выражение разности этих векторов угловой скорости геодезического вращения имеет вид:

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{(SSB)i} - \vec{\sigma}_{(JSB)i} &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} \left(\frac{1}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{R}}_{(JSB)j} - \frac{1}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{R}}_{(SSB)j} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} \frac{1}{2} (\vec{r}_{ji}) \times \left(\dot{\vec{r}}_{(SSB)(JSB)} \right),\end{aligned}\quad (5)$$

где $\dot{\vec{r}}_{(SSB)(JSB)} = \dot{\vec{R}}_{(JSB)j} - \dot{\vec{R}}_{(SSB)j}$ – вектор скорости движения барицентров друг относительно друга. Далее в формулах индекс i будет опущен. Следовательно⁶: $\vec{\sigma}_{SSB} \neq \vec{\sigma}_{JSB}$.

Тем самым показана зависимость величины эффекта геодезического вращения от выбора координатной системы из вида самой формулы.

Поэтому для исследуемых спутников относительно разных систем координат существуют разные векторы угловой скорости их геодезического вращения, более того, эти векторы не переходят один в другой путём параллельного переноса или угловых поворотов, как это происходит для векторов угловой скорости в евклидовом пространстве, (т.е. не проецируются друг в друга и имеют разные величины своих абсолютных значений).

Таким образом, вектор угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно барицентра Солнечной системы $\vec{\sigma}_{SSB}$ не будет совпадать с аналогичным вектором исследуемого спутника относительно барицентра Юпитерианской спутниковой системы $\vec{\sigma}_{JSB}$ (рис. 2).

Известно, что не возмущаемый⁷ вектор угловой скорости геодезического вращения исследуемого тела перпендикулярен плоскости орбиты этого тела (Baland et al., 2023). Поэтому, для наглядности различия между векторами на рис. 2 будем пренебрегать возмущениями от других тел, таким образом, вектор спутника Юпитера $\vec{\sigma}_{JSB}$ перпендикулярен плоскости своей средней орбиты, а другой вектор спутника Юпитера $\vec{\sigma}_{SSB}$ перпендикулярен плоскости средней орбиты Юпитера.

⁶Если формула была бы симметричной, например $\vec{\sigma}_i = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|^3} (\vec{R}_i - \vec{R}_j) \times \left(\frac{3}{2} \dot{\vec{R}}_i - \frac{3}{2} \dot{\vec{R}}_j \right)$, тогда

$$\vec{\sigma}_{(SSB)i} = \vec{\sigma}_{(JSB)i} = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_{ji}|^3} \left(\frac{3}{2} \vec{r}_{ji} \times \dot{\vec{r}}_{ji} \right).$$

⁷не возмущаемый другими телами, кроме центрального тела – задача двух тел.

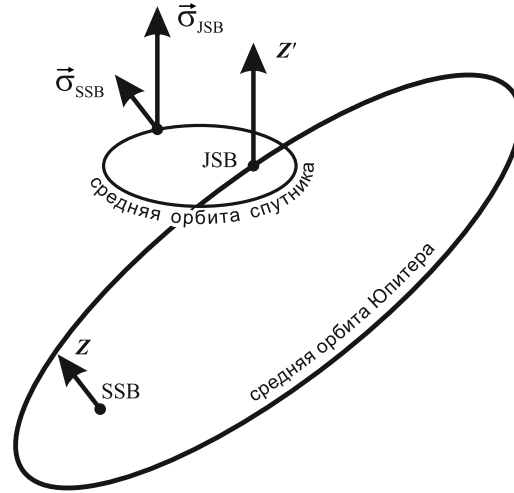


Рис. 2: Различие между вектором угловой скорости геодезического вращения исследуемого спутника относительно барицентра Солнечной системы (SSB (Solar System Barycenter)) и аналогичным вектором исследуемого спутника относительно барицентра Юпитерианской спутниковой системы (JSB (Jovian System Barycenter)); (ось Z перпендикулярна плоскости средней орбиты Юпитера, а ось Z' перпендикулярна плоскости средней орбиты спутника Юпитера).

В данном исследовании были вычислены значения векторов угловой скорости геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно барицентра Солнечной системы и относительно барицентра системы спутников Юпитера, и значение вектора угловой скорости геодезического вращения Юпитера относительно барицентра Солнечной системы. Для их вычисления в формуле (1) используются барицентрические координаты и скорости, взятые из эфемерид JPL DE441/LE441 (Park et al., 2021), Horizons On-Line Ephemeris System (Giorgini et al., 2001), координатная система которых является геоцентрической. Поэтому необходимо произвести редукцию компонент вектора угловой скорости геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников от геоцентрической системы координат к телоцентрической координатной системе (Archinal et al., 2018).

Формула редукции имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = r(W)p(90^\circ - \delta_0)r(\alpha_0 + 90^\circ) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\sigma_X, \sigma_Y, \sigma_Z$ – компоненты геоцентрического вектора угловой скорости геодезического вращения тела; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – компоненты телоцентрического вектора угловой скорости геодезического вращения тела; X, Y, Z – компоненты вектора \vec{R} в формуле (2); значения величин α_0, δ_0, W можно найти в работе (Archinal et al., 2018); матрицы поворота на угол a определяются формулами (Абалакин, 1979):

$$r(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Итак, как показано на рис. 1, с помощью трёх матриц в формуле (6) производится редукция компонент вектора угловой скорости геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников от геоцентрической системы координат (координатная система используемых в данном исследовании эфемерид (Park et al., 2021), (Giorgini et al., 2001)) к телоцентрической координатной системе (Archinal et al., 2018), осуществляя следующие повороты:

- поворот на угол $\alpha_0 + 90^\circ$ вдоль неподвижного геоэкватора (ICRF) от точки весеннего равноденствия Земли эпохи J2000.0 к точке восходящего узла экватора даты изучаемого тела;

- поворот на угол $90^\circ - \delta_0$ от неподвижного геоэкватора (ICRF) к экватору даты изучаемого тела;
- поворот на угол W вдоль экватора даты изучаемого тела от точки восходящего узла экватора даты изучаемого тела к точке пересечения нулевого меридиана планеты с экватором даты изучаемого тела.

Скорости геодезического вращения тел Солнечной системы определяются для Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера и в возмущающих членах физической либрации, используя следующие выражения (Пашкевич, 2016):

$$\left. \begin{aligned} \Delta\psi &= -\frac{\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi}{\sin \theta} \\ \Delta\dot{\theta} &= -\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi \\ \Delta\dot{\varphi} &= \sigma_3 - \Delta\dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \sin \theta \Delta\dot{\psi} &= -\sigma_1 \sin \varphi - \sigma_2 \cos \varphi = \Delta(I\dot{\sigma}) \\ \Delta\dot{\theta} &= -\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi = \Delta\dot{\rho} \\ \Delta\dot{\psi} + \Delta\dot{\varphi} &= \sigma_3 - (\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi) \tan \frac{\theta}{2} = \Delta\dot{\tau} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

Здесь ψ , θ , φ – углы Эйлера (рис. 1 и 3); τ , ρ и σ^8 – возмущающие члены физической либрации исследуемого тела для его неподвижной средней орбиты в долготе, в наклоне и в долготе узла, соответственно; I – постоянный угол наклона экватора исследуемого тела эпохи J2000.0 к его средней орбите; $\Delta\dot{\psi} = \dot{\psi}_r - \dot{\psi}$, $\Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}_r - \dot{\theta}$ и $\Delta\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}$ – разности релятивистских и ньютоновых скоростей углов Эйлера исследуемого тела, соответственно; $\Delta(I\dot{\sigma}) = I\dot{\sigma}_r - I\dot{\sigma}$, $\Delta\dot{\rho} = \dot{\rho}_r - \dot{\rho}$ и $\Delta\dot{\tau} = \dot{\tau}_r - \dot{\tau}$ – разности релятивистских и ньютоновых скоростей возмущающих членов физической либрации исследуемого тела, соответственно; точка означает дифференцирование по времени. По сути эти разности являются скоростями геодезического вращения исследуемого тела в углах Эйлера и в его возмущающих членах физической либрации.

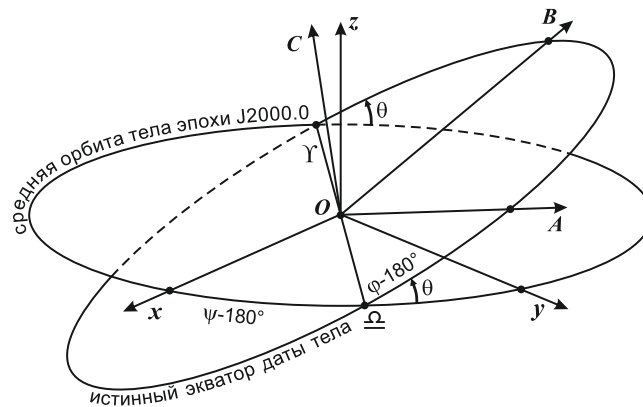


Рис. 3: Определение углов Эйлера исследуемого тела относительно кинематически невращающейся его собственной системе координат. (ось инерции OC перпендикулярна плоскости истинного экватора даты исследуемого тела⁹, а ось OZ перпендикулярна плоскости средней орбиты исследуемого тела эпохи J2000.0)

Значения углов θ и φ , используемых в вычислениях формулы (7), получаются из решения сферического треугольника DCQ (рис.1), применяя для этого формулы сферической геометрии (Жаров, 2006). В нём известны два угла (D и Q) и сторона между ними ($DQ = \Upsilon Q - \Upsilon D = \alpha_0 + 90^\circ - \Omega_J$). В результате вычисляются стороны DC и QC и угол θ , а угол $\varphi = QB - QC + 180^\circ = W - QC + 180^\circ$.

⁸Не стоит путать с вектором $\vec{\sigma}$.

⁹Заметим, что в данном исследовании углы Эйлера (рис.3) относятся к экватору вращения (истинному экватору даты) исследуемого тела, как определено в работе (Archinal et al., 2018), и могут не совпадать с углами Эйлера определёнными в классической механике относительно экватора фигуры исследуемого тела (Суслов, 1946), за исключением случаев, когда экватор фигуры исследуемого тела совпадает с экватором его вращения.

Выражение для абсолютной величины вектора угловой скорости геодезического вращения исследуемого тела имеет вид¹⁰:

$$|\vec{\sigma}| = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}. \quad (8)$$

4. Наиболее существенные составляющие геодезического вращения исследуемого тела получаются из вычисленных временных рядов аналитическими и численными методами – численного интегрирования и наименьших квадратов. В результате получают значения коэффициентов основных вековых членов геодезического вращения тела (для углов Эйлера, параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота).

Рассмотрим два способа их вычисления:

Способ I: Вычисление наиболее существенных вековых членов геодезического вращения методом наименьших квадратов.

Выражения для систематических членов скорости геодезического вращения тела имеют вид, соответствующий формуле (7) из (Пашкевич, 2016):

$$\Delta \dot{x} = \sum_{n=1}^N \Delta \dot{x}_n t^{n-1}, \quad (9)$$

где $\Delta \dot{x}_n$ – коэффициенты систематических членов; $N = 1$; значения $\Delta \dot{x} = \Delta \dot{\psi}$, $\Delta \dot{\theta}$, $\Delta \dot{\varphi}$, $\Delta \dot{\tau}$, $\Delta \dot{\rho}$, $\Delta \dot{I}\sigma$, $|\vec{\Lambda}| = |\vec{\sigma}|$ вычисляются по формулам (7) и (8); t – время в Юлианских днях.

Сначала методом наименьших квадратов в рассматриваемых параметрах вращения для каждого исследуемого тела из полученного для него численного временного ряда вычисляются коэффициенты систематических членов $\Delta \dot{x}_n$ скорости геодезической прецессии.

Затем после их аналитического интегрирования вычисляются вековые члены геодезического вращения тела:

$$\Delta x = \sum_{n=1}^N \Delta x_n t^n, \quad (10)$$

где $\Delta x_n = \Delta \dot{x}_n / n$ – коэффициенты систематических членов; $\Delta x = x_{\text{релятивистское}} - x_{\text{ньютоновое}}$; $\Delta x = \Delta \psi$, $\Delta \theta$, $\Delta \varphi$, $\Delta \tau$, $\Delta \rho$, $\Delta I\sigma$, $|\vec{\Lambda}| = \left| \int \vec{\sigma} dt \right|$; t – время в Юлианских днях; $N = 1$.

Данный способ применялся авторами в предыдущих работах.

Способ II: Вычисление наиболее существенных вековых членов геодезического вращения методами численного интегрирования и наименьших квадратов.

Численно интегрируются методом “Гаусса-Лежандра по 10 точкам” (William et al., 1986), полученные из выражений (7) и (8), численные временные ряды скоростей геодезического вращения исследуемого тела в рассматриваемых параметрах его вращения (углах Эйлера, его возмущающих членах физической либрации и абсолютной величине вектора угловой скорости вращения). В результате, вычисляются численные временные ряды величин геодезического вращения исследуемого тела в рассматриваемых углах и абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения тела $|\vec{\Lambda}| = \left| \int \vec{\sigma} dt \right|$.

При численном интегрировании полагалось, что значения интегралов равны нулю в эпоху J2000.0, которая является начальной датой численного интегрирования. Соответственно, интегрирование производилось в два этапа – от J2000.0 назад до начала интервала исследования (1600 г.) и вперед до конца интервала (2400 г.). Вычисления выполнялись с четверной точностью.

¹⁰Формула (8) верна, так как величина вектора не зависит от выбранной для его проецирования системы координат.

Выражения для систематических членов геодезического вращения тела имеют вид:

$$\Delta x = \sum_{n=0}^N \Delta x_n t^n, \quad (11)$$

где Δx_n – коэффициенты систематических членов; $\Delta x = \Delta\psi, \Delta\theta, \Delta\varphi, \Delta\tau, \Delta\rho, \Delta I\sigma, |\vec{\Lambda}|$; t – время в Юлианских днях; $N = 1$.

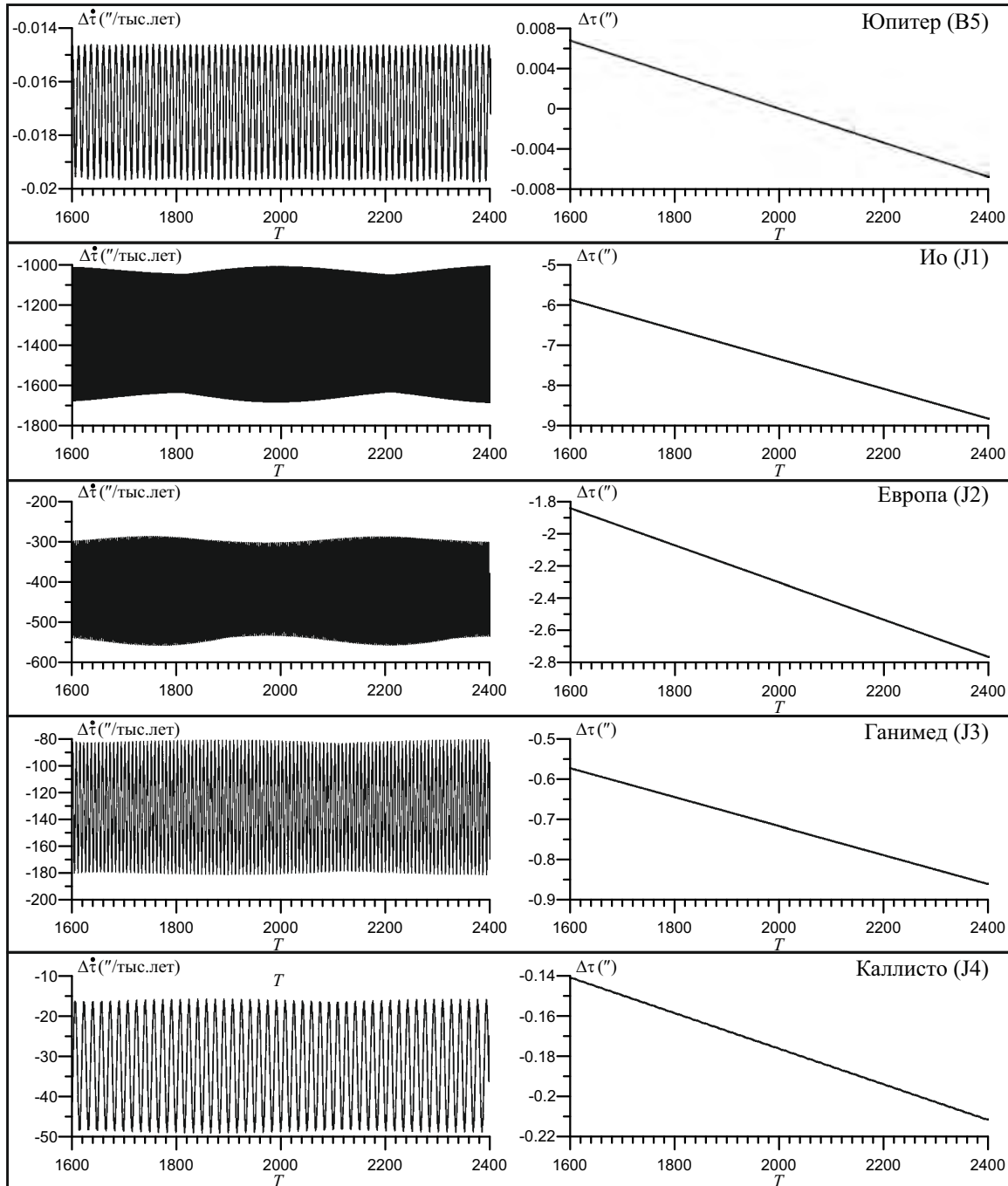


Рис. 4: Значения временных рядов для $\Delta\dot{\tau}$ и $\Delta\tau$ геодезического вращения исследуемых тел в системе координат относительно барицентра Солнечной системы (SSB) и средней орбиты Юпитера.

Методом наименьших квадратов в рассматриваемых параметрах вращения для каждого исследуемого тела из полученного для него численного временного ряда вычисляются коэффициенты систематических членов Δx_n геодезической прецессии.

В качестве примера, на рисунках 4 и 5 приведены вычисленные в различных системах координат временные ряды изменения геодезического вращения исследуемых тел в угле $\Delta\tau$, полученные в результате численного интегрирования, и его скорости $\Delta\dot{\tau}$.

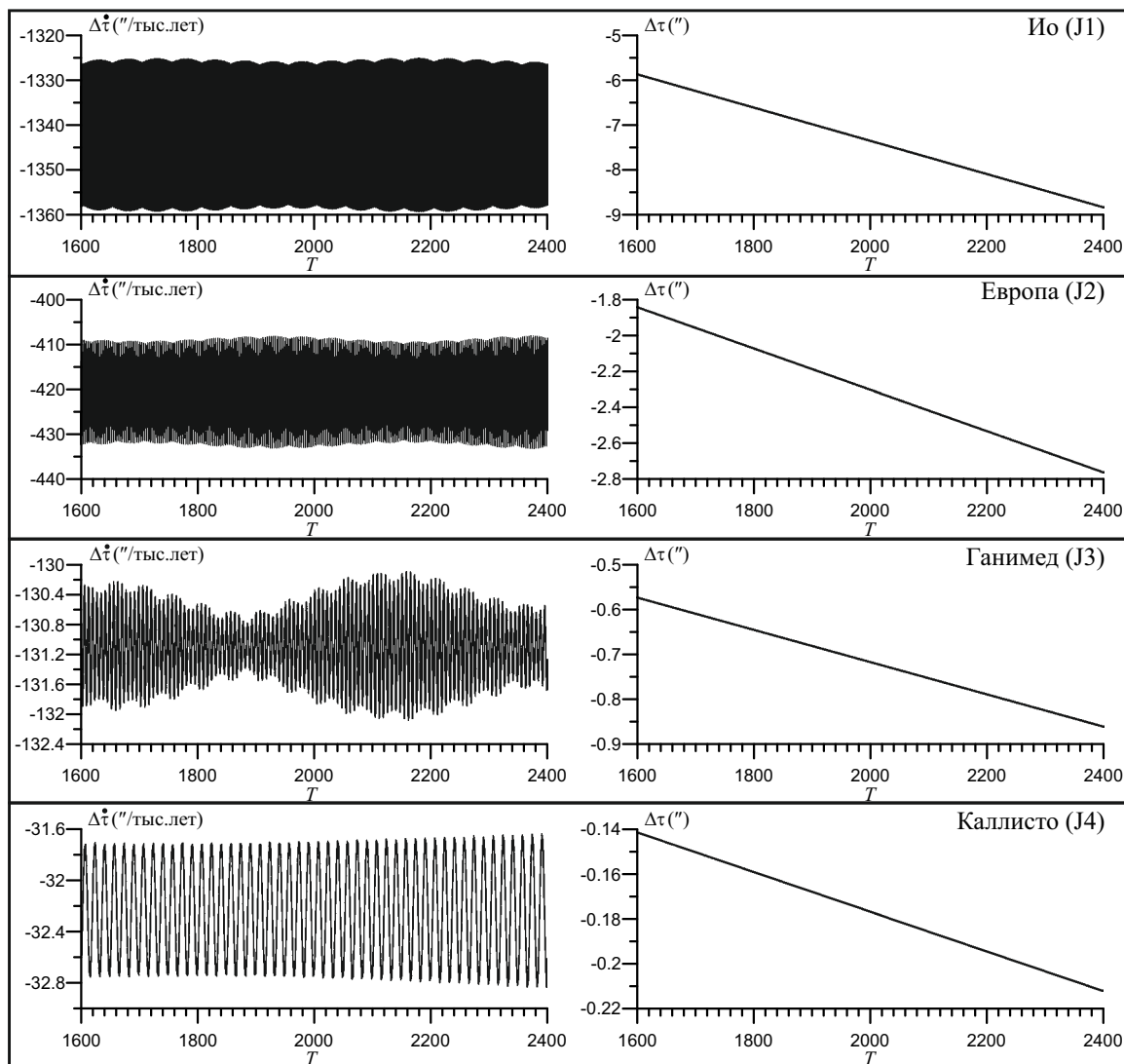


Рис. 5: Значения временных рядов для $\Delta\dot{\tau}$ и $\Delta\tau$ геодезического вращения исследуемых тел в системе координат относительно барицентра Юпитерианской системы (JSB) и средней орбиты спутника.

В Способе I используются ряды, представленные на графиках рисунков 4 и 5 слева, а в Способе II – справа.

В результате применения метода наименьших квадратов были получены не только сами искомые величины геодезической прецессии исследуемых тел, но и значения их среднеквадратичных отклонений S , позволяющие оценить эффективности различных способов.

2 Результаты

Для Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера¹¹, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота геодезического вращения вы-

¹¹Вековые и периодические члены геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно барицентра Юпитерианской системы (JSB) из-за особенности в синусе наклона $(\sin\theta)^{-1}$ (7) вычисляются только

числены их вековые члены их геодезического вращения (табл. 2 и 3). Их значения используются в выражениях (10) (для Способа I) и (11) (для Способа II) для вычисления величины эффекта геодезического вращения небесного тела.

Таблица 2: Вековые члены геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников, вычисленные для углов Эйлера, параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно барицентра Солнечной системы (SSB) и средней орбиты Юпитера.

a	Юпитер (B5)		Ио (J1)		Европа (J2)	
	5.2029 (ае)		421800 (км)		671100 (км)	
	угол	S	угол	S	угол	S
Способ I						
$\Delta\psi$ (угл.с)	$-0.31154 t$	4.2×10^{-5}	$-0.4 t$	1.3×10^{-1}	$-0.22 t$	7.3×10^{-2}
$\Delta\theta$ (угл.с)	$9.0 \times 10^{-7} t$	7.7×10^{-8}	$-0.120 t$	7.1×10^{-3}	$-0.024 t$	4.0×10^{-3}
$\Delta\varphi$ (угл.с)	$-4.04 \times 10^{-5} t$	2.9×10^{-7}	$-1341.6 t$	1.3×10^{-1}	$-420.21 t$	7.4×10^{-2}
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-0.31158 t$	4.2×10^{-5}	$-1342.0 t$	1.9×10^{-1}	$-420.4 t$	1.0×10^{-1}
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$-0.016955 t$	2.3×10^{-6}	$-0.022 t$	7.1×10^{-3}	$-0.013 t$	4.0×10^{-3}
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$0.31158 t$	4.2×10^{-5}	$1342.0 t$	1.9×10^{-1}	$420.5 t$	1.0×10^{-1}
Способ II						
$\Delta\psi$ (угл.с)	$-0.311744 t$	3.6×10^{-7}	$-0.4264 t$	1.0×10^{-4}	$-0.24895 t$	6.5×10^{-5}
$\Delta\theta$ (угл.с)	$4.6 \times 10^{-7} t$	3.5×10^{-8}	$-0.12102 t$	2.4×10^{-5}	$-0.023618 t$	8.1×10^{-6}
$\Delta\varphi$ (угл.с)	$-0.000018 t$	1.3×10^{-7}	$-1341.5587 t$	1.0×10^{-4}	$-420.18206 t$	6.5×10^{-5}
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-0.311762 t$	3.4×10^{-7}	$-1341.985117 t$	6.7×10^{-7}	$-420.431014 t$	7.6×10^{-7}
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$-0.016965 t$	2.0×10^{-8}	$-0.023905 t$	5.7×10^{-6}	$-0.015105 t$	3.5×10^{-6}
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$0.311762 t$	3.4×10^{-7}	$1342.048984 t$	6.8×10^{-7}	$420.463727 t$	7.8×10^{-7}

Таблица 2: продолжение.

a	Ганимед (J3)		Каллисто (J4)	
	1070400 (км)		1882700 (км)	
	угол	S	угол	S
Способ I				
$\Delta\psi$ (угл.с)	$-0.29 t$	4.1×10^{-2}	$-0.29 t$	2.0×10^{-2}
$\Delta\theta$ (угл.с)	$-0.006 t$	2.2×10^{-3}	$-0.0049 t$	9.3×10^{-4}
$\Delta\varphi$ (угл.с)	$-130.74 t$	4.1×10^{-2}	$-31.88 t$	2.0×10^{-2}
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-131.03 t$	5.8×10^{-2}	$-32.17 t$	2.8×10^{-2}
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$-0.015 t$	2.2×10^{-3}	$-0.0134 t$	9.3×10^{-4}
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$131.05 t$	5.7×10^{-2}	$32.18 t$	2.8×10^{-2}
Способ II				
$\Delta\psi$ (угл.с)	$-0.29772 t$	2.8×10^{-5}	$-0.29440 t$	2.9×10^{-5}
$\Delta\theta$ (угл.с)	$-0.006153 t$	4.6×10^{-6}	$-0.004414 t$	2.1×10^{-6}
$\Delta\varphi$ (угл.с)	$-130.73242 t$	2.8×10^{-5}	$-31.87926 t$	2.9×10^{-5}
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-131.030142 t$	8.8×10^{-7}	$-32.173666 t$	1.1×10^{-6}
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$-0.0157 t$	1.5×10^{-6}	$-0.01385 t$	1.8×10^{-6}
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$131.045568 t$	9.2×10^{-7}	$32.179034 t$	1.3×10^{-6}

возмущающих членах физической либрации и абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения тела относительно средней орбиты исследуемого спутника

Таблица 3: Вековые члены геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера, вычисленные для параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота относительно барицентра Юпитерианской системы (JSB) и средней орбиты спутника.

	Ио (J1)		Европа (J2)		
a	421800 (км)		671100 (км)		
	угол		S	угол	
Способ I					
$\Delta\theta$ (угл.с)	$-0.05915 t$	6.7×10^{-5}	$0.0089 t$	1.1×10^{-4}	
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-1342.088 t$	9.2×10^{-3}	$-420.534 t$	9.2×10^{-3}	
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$-0.12217 t$	8.2×10^{-5}	$-0.02351 t$	2.9×10^{-5}	
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$1342.088 t$	9.2×10^{-3}	$420.534 t$	9.2×10^{-3}	
Способ II					
$\Delta\theta$ (угл.с)	$-0.060947 t$	1.8×10^{-6}	$0.00857 t$	4.9×10^{-5}	
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-1342.088120 t$	2.7×10^{-7}	$-420.534273 t$	3.9×10^{-7}	
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$-0.119506 t$	7.2×10^{-6}	$-0.022898 t$	7.3×10^{-7}	
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$1342.088085 t$	2.7×10^{-7}	$420.534189 t$	3.9×10^{-7}	

Таблица 3: продолжение.

	Ганимед (J3)		Каллисто (J4)		
a	1070400 (км)		1882700 (км)		
	угол		S	угол	
Способ I					
$\Delta\theta$ (угл.с)	$0.00353 t$	2.7×10^{-5}	$0.00277 t$	3.4×10^{-5}	
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-131.1331 t$	8.1×10^{-4}	$-32.277 t$	1.2×10^{-3}	
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$0.00245 t$	2.8×10^{-5}	$0.01140 t$	2.0×10^{-5}	
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$131.1331 t$	8.1×10^{-4}	$32.277 t$	1.2×10^{-3}	
Способ II					
$\Delta\theta$ (угл.с)	$0.002733 t$	3.3×10^{-6}	$0.00266 t$	1.2×10^{-5}	
$\Delta\tau$ (угл.с)	$-131.133352 t$	5.5×10^{-7}	$-32.276966 t$	8.3×10^{-7}	
$\Delta(I\sigma)$ (угл.с)	$0.002013 t$	2.5×10^{-6}	$0.009352 t$	5.4×10^{-6}	
$ \vec{\Lambda} $ (угл.с)	$131.133362 t$	5.5×10^{-7}	$32.277007 t$	8.4×10^{-7}	

В табл. 2 - 3: t – динамическое барицентрическое время (Dynamical Barycentric time) (TDB) измеряется в юлианских тысячелетиях (tjy) (365250 суток) от эпохи J2000.0; a – большая полуось орбит Юпитера и его спутников; S – среднеквадратичное отклонение величины геодезической прецессии исследуемого тела.

На рисунках 6 и 7 представлены значения среднеквадратичного отклонения для величин геодезической прецессии исследуемых тел (в процентах к полученной величине).

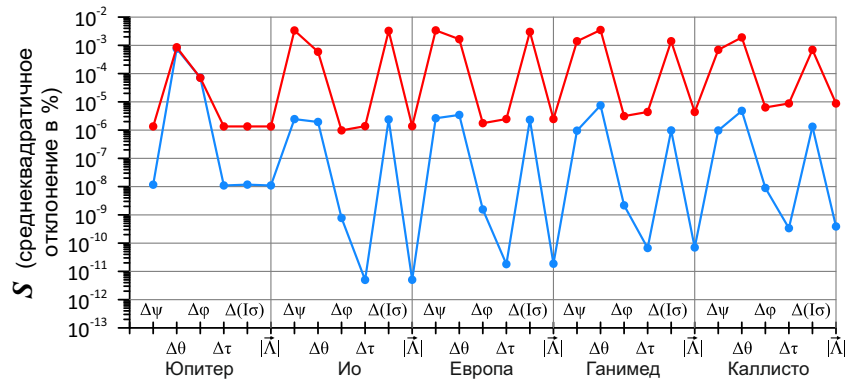


Рис. 6: Среднеквадратичные отклонения геодезической прецессии для Юпитера и его галилеевых спутников, вычисленные для углов Эйлера, параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота в системе координат относительно барицентра Солнечной системы (SSB) и средней орбиты Юпитера. Красная линия соответствует Способу I, синяя – Способу II.

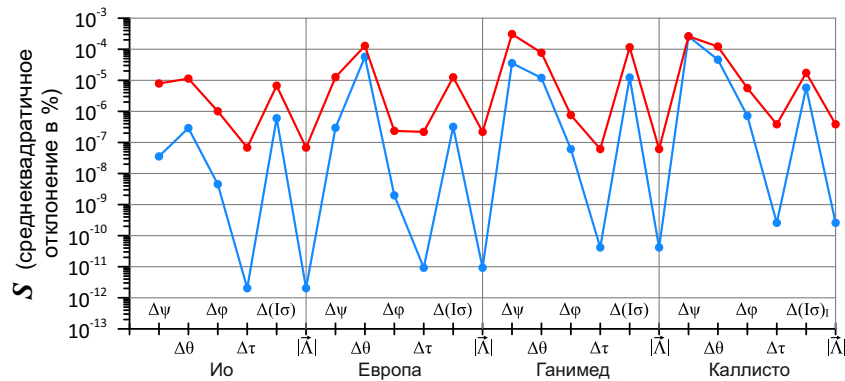


Рис. 7: Среднеквадратичные отклонения геодезической прецессии для галилеевых спутников Юпитера, вычисленные для параметров физической либрации и в абсолютной величине вектора их углового поворота в системе координат относительно барицентра Юпитерианской системы (JSB) и средней орбиты спутника. Красная линия соответствует Способу I, синяя – Способу II.

Вышеописанные Способы I и II для вычисления вековых и периодических величин геодезического вращения исследуемого тела являются равнозначными. Способ I является более быстрым в нём используются только аналитические методы вычислений. Способ II более медленный так как в нём помимо аналитических методов используется метод численного интегрирования. Из таблиц 2, 3 и рисунков 6, 7 можно заключить, что использование Способа II даёт меньшие среднеквадратичные ошибки, а, следовательно, в данном исследовании более точные значения вычисляемых величин геодезической прецессии. Особенностью Способа II является то, что на точность конечного результата может влиять ошибка метода численного интегрирования. Выбор для решения данной задачи 10 узловых точек в численном методе “Гаусса-Лежандра” и шага численного интегрирования, равного 0.1 периода обращения исследуемого спутника вокруг Юпитера, позволяет обеспечить необходимую точность. Так же, для контроля получаемых результатов производилось сравнение с величинами, полученными Способом I.

Поскольку масса Солнца является доминирующей в Солнечной системе, одна из частей вектора угловой скорости геодезического вращения относительно барицентра Солнечной системы $\vec{\sigma}_{SSB}$ для планет имеющих спутники и их спутников является результатом их орбитального движения вокруг барицентра Солнечной системы. Юпитер и его спутники находятся в среднем на одном расстоянии от Солнца и движутся относительно него в среднем с одной скоростью. Вследствие этого, величины их геодезического вращения, вызванные влиянием Солнца, подобно Земле

и Луне (Пашкевич, 2016), должны быть достаточно близки между собой. Подтверждения этого можно увидеть в значениях геодезической прецессии в долготе нисходящего узла экватора исследуемого тела $\Delta\psi$ для всех исследуемых тел (табл. 2), которые являются близкими по величине.

На Юпитер его спутники оказывают малое влияние, поэтому величины коэффициентов его геодезического вращения при вековых составляющих (табл. 2) близки друг к другу. Для Юпитера влияние от Солнца является основным, что отражается в доминирующей величине его геодезической прецессии в долготе $\Delta\psi$ (табл. 2) над аналогичными величинами в других углах Эйлера.

Геодезическое вращение спутников Юпитера определяется не только Солнцем, но и Юпитером. Таким образом, другая часть вектора угловой скорости геодезического вращения относительно барицентра Солнечной системы $\vec{\sigma}_{SSB}$ для планет имеющих спутники и их спутников является результатом их орбитального движения вокруг барицентра планетной системы планеты. Из-за близости галилеевых спутников к Юпитеру, её вклад является основным для них и отображается для каждого спутника в значении геодезического вращения в угле его собственного вращения $\Delta\varphi$ (табл. 2), которое является доминирующей величиной над аналогичными величинами в других углах Эйлера. В то же время, величины полного геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера $\Delta\tau$ и $|\vec{\Lambda}|$ значительно превосходят аналогичные величины геодезического вращения Юпитера. Поэтому величины их коэффициентов в $\Delta\psi$ и $\Delta\tau$ при вековых составляющих (табл. 2) заметно отличаются друг от друга. Это связано с тем, что из-за близкого к ним расстояния Юпитер оказывает большее влияние на их геодезическое вращение, чем Солнце на Юпитер.

Из табл. 2 и 3 видно, что для всех исследуемых спутников абсолютная величина вектора углового поворота геодезического вращения тела относительно средней орбиты исследуемого спутника и барицентра Юпитерианской системы $|\vec{\Lambda}|$ (JSB) больше абсолютной величины вектора углового поворота геодезического вращения тела относительно плоскости средней орбиты Юпитера и барицентра Солнечной системы $|\vec{\Lambda}|$ (SSB). Следовательно, для всех исследуемых спутников абсолютная величина вектора угловой скорости геодезического вращения $|\vec{\sigma}_{JSB}|$ больше абсолютной величины вектора угловой скорости геодезического вращения $|\vec{\sigma}_{SSB}|$.

Из формулы (2) видно, что величина геодезического вращения спутников Юпитера убывает с увеличением их расстояния от Юпитера (табл. 2 и 3).

3 Заключение

В данном исследовании, на примере Юпитера и его галилеевых спутников (Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто), показано различие векторов угловой скорости геодезического вращения в зависимости от выбора координатной системы отсчёта. Были определены значения векторов угловой скорости геодезического вращения галилеевых спутников Юпитера относительно барицентра Солнечной системы и относительно барицентра системы спутников Юпитера. На их основе впервые вычислены наиболее существенные вековые (табл. 2 и 3) члены геодезического вращения:

- Юпитера и его галилеевых спутников в углах Эйлера, в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения исследуемого тела относительно барицентра Солнечной системы и плоскости средней орбиты Юпитера эпохи J2000.0;
- галилеевых спутников Юпитера в возмущающих членах физической либрации и в абсолютной величине вектора углового поворота геодезического вращения исследуемого тела относительно барицентра системы спутников Юпитера и средней орбиты исследуемого спутника эпохи J2000.0.

Для их вычисления использовался модифицированный авторами метод, разработанный в статье (Пашкевич, 2016), который применим для изучения любых тел Солнечной системы, имеющих долгосрочные эфемериды.

Для всех исследуемых спутников абсолютная величина вектора угловой скорости геодезического вращения относительно средней орбиты исследуемого спутника и барицентра Юпитерианской системы (JSB) $|\vec{\sigma}_{JSB}|$ больше абсолютной величины вектора угловой скорости геодезического вращения относительно плоскости средней орбиты Юпитера и барицентра Солнечной системы (SSB) $|\vec{\sigma}_{SSB}|$.

Полученные аналитические значения для геодезического вращения Юпитера и его галилеевых спутников могут быть использованы для численного исследования их вращения в релятивистском приближении. На примере тел Солнечной системы, как и в предыдущей работе (Pashkevich et al., 2021), данное исследование ещё раз подтвердило, что величина геодезического вращения может быть существенной не только у объектов, которые вращаются вокруг сверхмассивных релятивистских центральных тел, но и у тел с малым расстоянием до менее массивного центрального тела. В Солнечной системе одними из таких объектов являются галилеевы спутники Юпитера. В частности, величина геодезической прецессии галилеевых спутников Юпитера (для которых Юпитер является менее массивным возмущающим центральным телом, чем Солнце) находится в пределах от $-32''.2$ за тысячу лет до $-1342''.0$ за тысячу лет (табл. 2 и 3), что от 100 до 4300 раз больше, чем у Юпитера ($-0''.3$ за тысячу лет) вращающегося вокруг своего более массивного центрального тела (Солнца).

Список литературы

- Абалакин В.К. (1979) Основы эфемеридной астрономии. М.: Наука, 448 с.
- Жаров В.Е. (2006) Сферическая астрономия. Фрязино. 480 с.
- Пашкевич В.В. (2016) Геодезическое (релятивистское) вращение тел Солнечной системы. Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Том 3. Вып. 3. с. 506–516.
- Пашкевич В.В. (2023) Частное сообщение.
- Суслов Г.К. (1946) Теоретическая механика. ОГИЗ. Москва–Ленинград. 655 с.
- Archinal B.A., Acton C.H., A’Hearn M.F., Conrad A., Consolmagno G.J., Duxbury T., Hestroffer D., Hilton J. L., Kirk R. L., Klioner S. A., McCarthy D., Meech K., Oberst J., Ping J., Seidelmann P. K., Tholen D. J., Thomas P. C., Williams I. P. (2018) Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* Vol. 130. № 22. с. 21–46. (<https://doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5>).
- Baland R.-M., Hees A., Yseboodt M., Bourgoin A., and Le Maistre S. (2023) Relativistic contributions to the rotation of Mars. *A&A.* Vol. 670. A29. с. 1–15. (<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202244420>).
- De Sitter W. (1916) On Einstein’s Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1916. № 77. с. 155–184. (<https://doi.org/10.1093/mnras/77.2.155>).
- Eroshkin G.I., Pashkevich V.V. (2007) Geodetic rotation of the Solar system bodies. *Artificial Satellites.* Vol. 42. № 1. с. 59–70. (<https://doi.org/10.2478/v10018-007-0017-1>).
- Giorgini J.D., Chodas P.W., Yeomans D.K. (2001) Orbit Uncertainty and Close-Approach Analysis Capabilities of the Horizons On-Line Ephemeris System. 33rd AAS/DPS meeting in New Orleans. LA. Nov 26. – Dec 01. 2001.
- Kopeikin S., Efroimsky M. and Kaplan G. (2011) *Relativistic Celestial Mechanics in the Solar System.* CityplaceHoboken, StateNJ : John Wiley & Sons. с. 1–894. (DOI: 10.1002/9783527634569).

- Ma C., Arias E.F., Eubanks T.M., Fey A.L., Gontier A.-M., Jacobs C.S., Sovers O.J., Archinal B.A., Charlot P. (1998) The international celestial reference frame as realized by very long baseline interferometry. *Astron. J.* Vol. 116, c. 516–546. (DOI: 10.1086/300408).
- Pashkevich V.V., Vershkov A.N., Mel'nikov A.V. (2021) Rotational dynamics of the inner satellites of Jupiter. *Sol. Syst. Res.* Vol. 55. № 1. c. 47–60. (<https://doi.org/10.1134/S0038094620330035>).
- Pashkevich V.V., Vershkov A.N. (2022) Geodetic precession of the Sun, Solar system planets, and their satellites. *Artificial Satellites.* Vol. 57. № 1. c. 77–109. (DOI: 10.2478/arsa-2022-0005).
- Park R.S., Folkner W.M., Williams J.G., Boggs D.H. The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441. *The Astronomical Journal*, 161:105. 2021. P. 1–15. (<https://doi.org/10.3847/1538-3881/abd414>) .
- William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. (1986) *Vetterling: Numerical recipes: The art of scientific computing.* Cambridge University Press. Cambridge. New York. New Rochelle. Melbourne. Sydney. 20+818 c.

The dependence of geodetic precession on the choice of coordinate system using the example of the Galilean moons of Jupiter

A.N. Vershkov¹, V.V. Pashkevich¹

¹ The Central Astronomical Observatory of the RAS at Pulkovo

Abstract

The relativistic effect of geodetic precession in the rotation of Jupiter and its Galilean moons (Io, Europa, Ganymede and Callisto) are investigated. For this purpose, the method developed in (Pashkevich, 2016) was modified, which is applicable for studying any bodies of the Solar System that have long-term ephemeris. As a result of its application, the most significant secular terms of geodetic precession were determined. In this study, the values of the angular velocity vectors of the geodetic rotation of the Galilean satellites of Jupiter relative to the barycenter of the Solar System and relative to the barycenter of the system of Jupiter satellites were calculated. Their differences are shown depending on the choice of coordinate reference system due to the asymmetry of the formula for the angular velocity vector of geodetic rotation for any solar system bodies used for these calculations. The obtained analytical values of the geodetic precession of the rotation parameters of the studied objects can be used for the numerical study of their rotation in the relativistic approximation.