



# Модернизация интегратора $R^0$ для вычисления эфемерид астероидов: учет релятивистских и негравитационных эффектов

И.А. Балаяев<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup> ГАО РАН

## Аннотация

В настоящее время существует немало инструментов для расчёта траекторий астероидов, комет и метеорных частиц в Солнечной системе. Однако не все из них находятся в открытом доступе, а доступные не всегда удовлетворяют требованиям в точности и быстродействии. Поскольку универсального решения тут нет, не теряет своей значимости разработка новых методов, которые бы сочетали быстродействие и точность в соответствии с конкретными задачами небесной механики. В настоящей статье делается попытка объединить преимущества двух методов расчёта траекторий. Первый разработан в СПбГУ для быстрого вычисления траекторий большого числа частиц и реализован в виде программы  $R^0$ , но жертвует точностью. Второй создан для вычисления траектории с эфемеридной точностью и реализован в виде программного комплекса ASSIST, но отличается меньшей производительностью, в том числе из-за сложной модели движения. Производится сравнение некоторых упрощённых моделей с данными, полученными с помощью сервисов NASA. Даётся оценка применимости модернизированной программы  $R^0$ .

## Введение

В 2019-2020 годах в СПбГУ был разработан быстрый метод вычисления траекторий большого числа виртуальных астероидов, реализованный в форме программы  $R^0$  (Balyaev, 2020). Метод отличался упрощённой моделью движения и большой погрешностью при попытке рассчитать номинальную траекторию, но оказался пригоден для вычисления вероятностей соударения астероидов. При этом высокое быстродействие позволило производить массовый расчёт вероятностей соударения на персональном компьютере.  $R^0$  использует эфемериды DE430 для вычисления положений планет и Луны, после чего траектория астероида рассчитывается как в ньютоновской задаче N тел. Сравнение с результатами NASA (Sokolov и др., 2021) показало, что результаты принципиально не отличаются и во многих случаях совпадают с точностью до первой значащей цифры. Согласно комментарию на сайте NASA, при вычислении вероятностей соударения даже разница на порядок не является экстраординарной. Таким образом, разногласий с результатами NASA практически нет. Заметным исключением являются астероиды с наиболее точно определёнными орбитами. Впрочем, лишь несколько таких астероидов имеют значимую (от  $10^{-10}$ ) вероятность соударения. По-видимому, разница в модели движения астероида не играет большой роли при значительной неопределённости начальных положения и скорости астероида. Кроме вероятностей соударения, с помощью программы  $R^0$  были получены некоторые результаты модельных исследований Солнечной системы. Примером является поиск сближений астероидов перед соударением (Холшевников и др., 2021), осуществленный путём вычисления траекторий случайных астероидов в будущее (обычный метод предполагает расчёт траекторий от соударения в прошлое и не требует большого объёма вычислений).

\*e-mail:balasteravan@yandex.ru

Очевидно, без улучшения точности применение подобных методов весьма ограничено. Практически полной противоположностью является программный комплекс ASSIST (Holman и др., 2023), реализующий эфемеридную точность интегрирования уравнений движения, но отличающийся заметно большим временем вычислений. Заявленная точность составляет не хуже 1 mas для астероида Главного пояса за 10 лет). ASSIST использует сложную модель движения, включающую учёт гравитационного притяжения Солнца, больших планет, Луны, Плутона и 16 наиболее массивных астероидов Главного пояса. Учитываются также негравитационные силы, примером которых является эффект Ярковского. Благодаря высокой точности этот программный комплекс пригоден для гораздо более широкого спектра задач, но его применение, в свою очередь, ограничено меньшей производительностью. Растущие объёмы астрономических данных требуют хорошей оптимизации программного обеспечения.

## 1 Детали разработки новой программы

Основной идеей является использование более точной модели движения для модификации программы  $R^0$ . В ней, в изначальном варианте, учитывается только ньютоновское притяжение Солнца, планет и Луны. Солнечная система не интегрируется целиком. Вместо этого используются положения и скорости массивных тел из эфемерид DE440 (Park и др., 2021). Для модернизации дополнительно взяты данные о движении Плутона и 16 астероидов. Это наиболее массивные астероиды главного пояса, список и значения гравитационного параметра которых приведены в таблице 1. Общий объём эфемеридных файлов составляет около гигабайта, но далеко не все эти данные нужны для работы. Поэтому был вырезан промежуток времени от 1750 до 2250 гг., а все эфемеридные данные помещены в один файл объёмом около 50 мегабайт. Для аппроксимации на интервале используются полиномы Чебышёва первого рода. Значения скоростей и ускорений рассчитываются как производные по времени. Новый файл состоит из блоков по 1200 значений типа double, которые задают полиномиальную аппроксимацию положений всех 27 учитываемых массивных тел на промежутке в 32 дня. При необходимости легко создать ещё более компактную версию файла эфемерид, охватывающую определённый промежуток времени. Это может быть полезно, например, при организации распределённых вычислений.

Метод интегрирования представляет собой вариант интегратора Эверхарта, изначально разработанный для быстрого вычисления траекторий большого числа виртуальных астероидов (Balyaev, 2020). Специальный алгоритм выбора шага позволяет объединять астероиды в группы и совершать ряд вычислений один раз для всей группы астероидов, а не для каждого по отдельности. В частности, это относится к вычислению положений и скоростей массивных тел Солнечной системы. Чтобы добиться этого, значения шага ограничены целыми степенями 2: 4 дня, 2 дня, 1 день, 0,5 дня и т. д. Базовый шаг взят для более удобной работы с эфемеридами, поэтому интегрирование производится на кратные 4 дням промежутки времени. При этом начальная дата может быть любой, а конечная может оказаться в середине последнего шага интегрирования. Для получения положения астероида внутри шага используется полиномиальная аппроксимация, лежащая в основе метода Эверхарта. Модернизированный метод обходит прямое вычисление коэффициентов полинома, однако получить их представляет тривиальную задачу.

Основные компоненты правых частей уравнений движения будут рассмотрены в следующем разделе. Правильный выбор действующих на астероид сил обеспечивает баланс точности и производительности. Для самого нетребовательного предсказания положения астероида вообще может хватить модели двух тел Солнце-астероид. Для предсказания соударений уже нужна точность не хуже радиуса Земли (или иного тела, с которым предполагается соударение). Ещё более высокая точность нужна для предсказания сближений астероидов со звёздами (на небесной сфере) и покрытий. Набор учитываемых сил для каждой отдельной задачи может быть разный. В связи с этим представляет интерес сравнение нескольких моделей движения вместо выбора одной конкретной.

Таблица 1: Список массивных астероидов, учитываемых в модели движения ASSIST и модернизированной программе  $R^0$  (приведены значения гравитационного параметра GM для использования в программе)

Name	Number	GM, $AU^3/day^2$
Ceres	1	1.3964518123081070e-13
Vesta	4	3.8548000225257904e-14
Pallas	2	3.0471146330043200e-14
Hygiea	10	1.2542530761640810e-14
Davida	511	8.6836253492286545e-15
Interamnia	704	6.3110343420878887e-15
Europa	52	5.9824315264869841e-15
Sylvia	87	4.8345606546105521e-15
Eunomia	15	4.5107799051436795e-15
Juno	3	4.2823439677995011e-15
Psyche	16	3.5445002842488978e-15
Camilla	107	3.2191392075878588e-15
Thisbe	88	2.6529436610356353e-15
Iris	7	2.5416014973471498e-15
Euphrosyne	31	2.4067012218937576e-15
Cybele	65	2.0917175955133682e-15

Источник: [ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/small\\_bodies/asteroids\\_de441/SB441\\_IOM392R-21-005\\_perturbers.pdf](ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/small_bodies/asteroids_de441/SB441_IOM392R-21-005_perturbers.pdf) (ссылку можно открыть, например, в приложении Okular для Linux)

## 2 Основные компоненты правой части уравнений движения

### 2.1 Ньютоновское тяготение

Основной компонент уравнений движения соответствует закону всемирного тяготения Ньютона и может быть записан в виде:

$$\vec{a} = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{r}_i|^3} \vec{r}_i \quad (1)$$

Здесь  $a$  — гравитационное ускорение виртуальной частицы,  $G$  — гравитационная постоянная,  $N$  — количество учитываемых массивных тел,  $m_i$  — масса тела,  $r_i$  — радиус-вектор астероида относительно массивного тела. На практике используются готовые значения гравитационного параметра  $Gm_i$ .

В настоящей работе учитываются Солнце, 8 больших планет, Луна, Плутон и 16 наиболее массивных астероидов Главного пояса, то есть все тела, учитываемые комплексом ASSIST. Стоит отметить, что при вычислении эфемерид DE440 использовались более 300 астероидов, а также 30 объектов пояса Койпера (Pitjeva и Pitjev, 2018). Однако файл эфемерид для всех этих тел ещё более объёмный, поэтому без явной необходимости их учёт не предполагается.

### 2.2 Релятивистская поправка

Уравнения теории относительности решаться тут не будут. Для слабых гравитационных полей обычно используется постニュтоновский формализм. В настоящей работе используется релятивистская поправка только от Солнца в форме (Damour и Deruelle, 1985):

$$\overrightarrow{a_{REL}} = \frac{Gm_0}{c^2 |\vec{r}_0|^3} \left( \left( \frac{4Gm_0}{|\vec{r}_0|} - |\vec{v}_0|^2 \right) \vec{r}_0 + 4(\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0) \vec{v}_0 \right) \quad (2)$$

Здесь  $m_0$  — масса Солнца,  $r_0$  — гелиоцентрический радиус-вектор виртуальной частицы,  $v_0$  — гелиоцентрический вектор скорости виртуальной частицы,  $c$  — скорость света.

Программный комплекс ASSIST реализует релятивистскую поправку в одной из трёх форм на выбор. Для модернизированной программы  $R^0$  использован второй по точности способ, не создающий громоздких вычислений в отличие от первого и, согласно комментарию авторов ASSIST, подходящий для решения большинства задач. Тем не менее, более точный способ планируется рассмотреть в будущем.

### 2.3 Негравитационные силы

Негравитационные силы нередко ассоциируют с эффектом Ярковского. На практике для учёта негравитационных сил оценивают три параметра ( $A_1, A_2, A_3$ ), определяющих величину дополнительного ускорения в особой системе координат. Коэффициент  $A_2$  обычно оказывает наиболее значительное влияние на траекторию за счёт изменения большой полуоси орбиты. Хотя для Апофиса на малых промежутках времени  $A_1$  несколько сильнее. Выражение для вычисления негравитационного ускорения имеет следующий вид:

$$\overrightarrow{a_{NG}} = \frac{1}{|\vec{r}_0|^2} \left( A_1 \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|} + A_2 \frac{(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) \times \vec{r}_0}{|(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) \times \vec{r}_0|} + A_3 \frac{\vec{r}_0 \times \vec{v}_0}{|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0|} \right) \quad (3)$$

Коэффициент перед скобкой предполагает, что параметры негравитационного ускорения нормированы на расстояние 1 а. е. от Солнца. Для комет этот коэффициент превращается в функцию более сложного вида с несколькими отдельными параметрами.

Таблица 2: Разность вычисленного положения Апофиса с эфемеридами Horizons (единицы измерения - км)

Date	A	B	C	D	E
2017-Sep-04	0	0	0	0	0
2017-Sep-08	16	0.0096	0.0096	0.00052	$4.2 \cdot 10^{-6}$
2017-Oct-06	1100	0.67	0.67	0.036	0.00028
2017-Dec-13	16000	9.3	9.3	0.49	0.0042
2019-Jan-17	53000	61	61	2.0	0.0086
2025-Nov-21	$1.3 \cdot 10^6$	280	280	55	0.024

Сравниваются 5 моделей движения, каждая последующая модель включает всё, что было в предыдущих: А — учитывается только Солнце; В — добавлено притяжение больших планет и Луны; С — добавлено притяжение Плутона и 16 астероидов Главного пояса; Д — добавлена релятивистская поправка; Е — добавлены негравитационные эффекты.

### 3 Сравнение с NASA

NASA предоставляет сервис [Horizons System](#), который можно использовать для получения эфемерид астероидов. Чтобы произвести сравнение, был выбран астероид Апофис, отличающийся высокой точностью определения орбиты и значительным влиянием негравитационных сил. Начальные данные взяты на JD 2458000.5; сравнение положения Апофиса производилось на моменты времени через 4 дня, 32 дня, 100 дней, 500 дней, 3000 дней.

Для сравнения используется 5 моделей движения. Первая, модель А, учитывает только тяготение Солнца. Модель В включает 8 больших планет и Луну. В модели С добавлены Плутон и 16 астероидов. Модель Д учитывает релятивистскую поправку в форме (2). Наконец, в модели Е включены негравитационные силы в форме (3). Результат сравнения с эфемеридами Horizons приведён в таблице 2

Как видно из таблицы, учёт лишь тяготения Солнца даёт очень приблизительное положение астероида. За 8 лет разница превысила миллион километров. Однако уже при добавлении больших планет расхождение уменьшается до 280 км. Модель В соответствует используемой в программе  $R^0$ . Такого приближения действительно может хватить для оценки вероятностей соударения. Учёт тяготения астероидов не даёт значимой поправки на этом этапе, но и принципиальной сложности в его добавлении нет, особенно при наличии общего файла эфемерид, включающего и планеты, и астероиды. Релятивистская поправка уменьшает расхождение ещё в несколько раз. Наконец, ввод негравитационных эффектов улучшил точность сразу на три порядка. За 3000 суток Апофис отклонился на порядок меньше своего размера.

### Заключение

Основной вывод: быстрый метод интегрирования, представленный в (Balyaev, 2020) вполне пригоден и для более точного расчёта траекторий. Повышение точности позволяет существенно расширить круг задач, решаемых этим методом. Использование сравнительно небольшого файла эфемерид (50 мегабайт) так же даёт некоторые преимущества.

Анализ внутренней точности программы подсказывает, что учёт дополнительных сил может ещё улучшить точность расчёта траектории. Предварительный анализ производительности демонстрирует слегка более быструю работу модернизированной программы  $R^0$  по сравнению с комплексом ASSIST при вычислении траектории одного астероида. Таким образом, хотя метод был изначально разработан для одновременного численного интегрирования большого числа виртуальных астероидов, он показывает неплохую скорость работы и для простой задачи. Одной из перспективных задач является дальнейшее развитие метода для быстрого и точного расчёта траекторий.

## Благодарности

Настоящее исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00306, <https://rscf.ru/project/23-22-00306/>.

Автор благодарит М.Ю. Ховричева за научное руководство и вдохновение.

## Список литературы

- Balyaev, I. A. (2020). Acceleration of Numerical Integration of the Equations of Motion of Asteroids. *Solar System Research* 54.6, c. 557–566.
- Sokolov, L. L., I. A. Balyaev, G. A. Kuteeva, N. A. Petrov и B. B. Eskin (2021). Approaches and collisions of asteroids with the Moon and planets. B: *Journal of Physics Conference Series*. Т. 1959. *Journal of Physics Conference Series*, c. 012047.
- Холшевников, К. С., И. А. Балыев, Л. Л. Соколов и Б. Б. Эскин (2021). Ретроспективный анализ орбит сталкивающихся с Землей астероидов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* 8.3, с. 523–532.
- Holman, Matthew J. и др. (2023). ASSIST: An Ephemeris-quality Test-particle Integrator. 4.4, c. 69.
- Park, Ryan S., William M. Folkner, James G. Williams и Dale H. Boggs (2021). The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441. AJ 161.3, c. 105.
- Pitjeva, E. V. и N. P. Pitjev (2018). Mass of the Kuiper belt. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 130.9, c. 57.
- Damour, T. и N. Deruelle (1985). General relativistic celestial mechanics of binary systems. I. The post-Newtonian motion. *Annales de L'Institut Henri Poincare Section (A) Physique Theorique* 43.1, c. 107–132.

# Modernization of the $R^0$ integrator for calculating asteroid ephemerides: accounting for relativistic and non-gravitational effects

I.A. Balyaev<sup>1</sup>

<sup>1</sup> The Central Astronomical Observatory of the RAS at Pulkovo

## Abstract

Currently, there are many tools for calculating the trajectories of asteroids, comets, and meteor particles in the Solar System. However, only a portion of them are available to the astronomical community. Many of them do not always meet the requirements for accuracy and calculation speed. Since there is no universal solution here, the development of new methods that combine speed and accuracy following specific problems of celestial mechanics does not lose its importance. There is an attempt to combine the advantages of two trajectory calculation methods in this work. The first of them was developed at Saint Petersburg State University to quickly calculate the trajectories of a large number of particles and was implemented as a program  $R^0$ . A significant disadvantage of this  $R^0$  realization is relatively low accuracy. The second one is designed to calculate the trajectory with maximum accuracy and is implemented in the form of the ASSIST software package. However, it provides lower performance. One of the reasons is the usage of complex motion equations. Some simplified models are compared with data obtained using NASA services. An assessment of the applicability of the upgraded  $R^0$  program is given. However, only part of them are available to the astronomical community. Many of them do not always meet the requirements for accuracy and calculation speed. Since there is no universal solution here, the development of new methods that combine speed and accuracy following specific problems of celestial mechanics does not lose its importance. There is an attempt to combine the advantages of two trajectory calculation methods in this work. The first of them was developed at Saint Petersburg State University to quickly calculate the trajectories of a large number of particles and was implemented as a program  $R^0$ . A significant disadvantage of this  $R^0$  realization is relatively low accuracy. The second one is designed to calculate the trajectory with maximum accuracy and is implemented in the form of the ASSIST software package. However, it provides lower performance. One of the reasons is the usage of complex motion equations. Some simplified models are compared with data obtained using NASA services. An assessment of the applicability of the upgraded  $R^0$  program is given.