О построении аналитической теории вращения Луны в тригонометрической форме

Т. В. Иванова

Институт прикладной астрономии РАН

e-mail: itv@ipa.nw.ru

Целью данной работы является практическая реализация построения тригонометрической теории вращения Луны без фиктивных вековых членов в рамках общей планетной теории. В качестве переменных, характеризующих вращение Луны, как правило, берутся параметры, непосредственно связанные с углами Эйлера. В настоящей работе используются малые отклонения этих параметров от их некоторых номинальных значений, что повышает практическую эффективность методики общей планетной теории.

Получены основные члены разложений параметров вращения в чисто аналитическом виде относительно малых параметров, характеризующих форму Луны, и в тригонометрическом виде относительно времени.

Уравнения вращения Луны

$$\dot{X} = \mathrm{i}\,\mathcal{N}[PX + R(X,t)]\,, \qquad (1)$$

где X и R являются 7-мерными векторами переменных и правых частей, соответственно:

$$X = (X_i) = (u, \overline{u}, v, \overline{v}, m', \overline{m'}, m_3), \qquad R = (R_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)\,. \qquad (2)$$

Первые четыре компоненты вектора X — параметры Эйлера, связанные между собой тождеством

$$u\overline{u} + v\overline{v} \equiv 1\,. \qquad (3)$$

Связь между параметрами Эйлера и углами Эйлера φ, ψ, θ :

$$u = -\sin\frac{\theta}{2}\exp\left(-\mathrm{i}\,\frac{\psi+\varphi}{2}\right), \qquad v = \mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\exp\left(\mathrm{i}\,\frac{\psi-\varphi}{2}\right). \qquad (4)$$

$$\omega_1 = \Omega m_1, \qquad \omega_2 = \Omega m_2, \qquad \omega_3 = \Omega(1 + m_3)\ . \tag{5}$$

Ω — средняя скорость вращения Луны.

$$\Omega = -2n, \qquad n = \mathrm{const}. \tag{6}$$

$$m_1 = 2\sqrt{k_2}\, m_1', \qquad m_2 = 2\sqrt{k_1}\, m_2'\ , \qquad m = m_1 + \mathrm{i}\, m_2, \qquad m' = m_1' + \mathrm{i}\, m_2'\ , \tag{7}$$

$$k_1 = \frac{I_3 - I_1}{2I_2}, \qquad k_2 = \frac{I_3 - I_2}{2I_1}\ . \tag{8}$$

I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции Луны.

Правые части

Правые части R_i являются малыми величинами.

$$R_1 = m_3 u - m\bar{v}, \qquad R_2 = -\bar{R}_1, \qquad R_3 = m_3 v + m\bar{u}, \qquad R_4 = -\bar{R}_3, \tag{9}$$

$$R_5 = -4\sqrt{k_1 k_2}\, m_3 m' - \frac{1}{4n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}}\frac{\mathcal{M}_2}{I_2} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k_2}}\frac{\mathcal{M}_1}{I_1}\right), \qquad R_6 = -\bar{R}_5\,, \tag{10}$$

$$R_7 = 2\sqrt{k_1 k_2}\,\frac{I_1 - I_2}{I_3}(m'^2 - \bar{m}'^2) + \frac{\mathrm{i}}{2n^2}\frac{\mathcal{M}_3}{I_3}\,. \tag{11}$$

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ — компоненты вектора момента.

$$\mathcal{M}_1 + \mathrm{i}\mathcal{M}_2 = \mathrm{i}\left(-v\frac{\partial}{\partial \overline{u}} + u\frac{\partial}{\partial \overline{v}}\right)U, \qquad \mathcal{M}_3 = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(-u\frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}\frac{\partial}{\partial \overline{u}} - v\frac{\partial}{\partial v} + \overline{v}\frac{\partial}{\partial \overline{v}}\right)U. \tag{12}$$

U — силовая функция для Луны. В квадрупольном приближении она имеет вид :

$$U = 2n^2 I_3\left\{K\left[\left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5\left(\frac{z_0'}{A_3}\right)^2 + \varepsilon_0\left(\frac{A_E}{r_E}\right)^5\left(\frac{z_E'}{A_E}\right)^2\right] + L\left[\left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5\frac{1}{A_3^2}\left(x_0'^2 - y_0'^2\right) + \varepsilon_0\left(\frac{A_E}{r_E}\right)^5\frac{1}{A_E^2}\left(x_E'^2 - y_E'^2\right)\right]\right\}. \tag{13}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{M_3 - M_9}{M_0}\left(\frac{A_3}{A_9}\right)^3, \qquad \sigma = \left(1 - \frac{M_9}{M_3}\right)\frac{A_9}{A_3}, \tag{14}$$

$$K = \frac{-3}{4}\left(1 - \frac{I_1 + I_2}{2I_3}\right)\frac{GM_0}{A_3^3 n^2}, \qquad L = \frac{-3}{8}\frac{I_1 - I_2}{I_3}\frac{GM_0}{A_3^3 n^2}. \tag{15}$$

G — гравитационная постоянная.

M_0, r_0, M_E, r_E — массы и селеноцентрические радиус-векторы Солнца и Земли, соответственно.

M_9, r_9 — масса и геоцентрический радиус-вектор Луны.

M_i, r_i — массы и гелиоцентрические радиус-векторы больших планет для $i = 1, 2, \ldots 8$. Индех $i = 3$ относится к барицентру Земля-Луна. Штрихованные координаты относятся к вращающейся системе координат, жестко связанной с телом Луны, нештрихованные связаны с инерциальной системой координат.

Формулы перехода от инерциальных координат к вращающимся координатам:

$$x' + \mathrm{i}\,y' = -v^2(x + \mathrm{i}\,y) + u^2(x - \mathrm{i}\,y) + 2uvz, \qquad z' = \overline{u}v(x + \mathrm{i}\,y) + u\overline{v}(x - \mathrm{i}\,y) + (-u\overline{u} + v\overline{v})z. \tag{16}$$

$$x_i + \mathrm{i}\, y_i = A_i(1-p_i)\zeta_i, \quad z_i = A_i w_i, \quad \zeta_i = \exp \mathrm{i}\,\lambda_i, \quad \lambda_i = n_i t + \varepsilon_i \tag{17}$$

с

$$n_i^2 A_i^3 = G(M_0 + M_i) \quad (i = 1,2,\ldots,8), \qquad n_9^2 A_9^3 = GM_3.$$

λ_i — средние долготы планет,

Селеноцентрические координаты Солнца :

$$x_0 + \mathrm{i}\, y_0 = -A_3\left[(1-p_3)\zeta_3 + \sigma(1-p_9)\zeta_9\right], \quad z_0 = -A_3(w_3 + \sigma w_9). \tag{18}$$

Селеноцентрические координаты Земли :

$$x_E = -x_9, \qquad y_E = -y_9, \qquad z_E = -z_9. \tag{19}$$

$$\begin{aligned} U = 2n^2 I_3\{K[k + u^2\bar{v}^2 f + \bar{u}^2 v^2 \bar{f} + 2u\bar{v}(u\bar{u} - v\bar{v})g + +2\bar{u}v(u\bar{u} - v\bar{v})\bar{g} + 2u\bar{u}v\bar{v}h] + \\ + L[\frac{1}{2}(u^4 + \bar{v}^4)f + \frac{1}{2}(\bar{u}^4 + v^4)\bar{f} + 2(-u^3 v + \bar{u}\bar{v}^3)g + +2(-\bar{u}^3\bar{v} + uv^3)\bar{g} - (u^2v^2 + \bar{u}^2\bar{v}^2)h]\} \end{aligned} \tag{20}$$

$$k = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 (w_3 + \sigma w_9)^2 + \varepsilon_0\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 w_9^2,$$

$$f = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 \left[(1-q_3)\zeta_3^{-1} + \sigma(1-q_9)\zeta_9^{-1}\right]^2 + \varepsilon_0\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 (1-q_9)^2\zeta_9^{-2},$$

$$g = -\left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 \left[(1-q_3)\zeta_3^{-1} + \sigma(1-q_9)\zeta_9^{-1}\right](w_3 + \sigma w_9) - \varepsilon_0\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 (1-q_9)w_9\zeta_9^{-1},$$

$$h = \left(\frac{A_3}{r_0}\right)^5 \{[(1-p_3)\zeta_3 + \sigma(1-p_9)\zeta_9][(1-q_3)\zeta_3^{-1} + \sigma(1-q_9)\zeta_9^{-1}]$$

$$-2(w_3 + \sigma w_9)^2\} + \varepsilon_0\left(\frac{A_9}{r_9}\right)^5 [(1-p_9)(1-q_9) - 2w_9^2].$$

$$\mathcal{M}_1 + \mathbf{i}\mathcal{M}_2 = \mathbf{i}4n^2 I_3 (KS - L\bar{S}), \qquad \mathcal{M}_3 = \mathbf{i}2n^2 I_3 L(T - \bar{T}) \tag{21}$$

$$S = u^3\bar{v}f - \bar{u}v^3\bar{f} + u^2(u\bar{u} - 3v\bar{v})g + v^2(v\bar{v} - 3u\bar{u})\bar{g} + uv(u\bar{u} - v\bar{v})h,$$
$$T = (-u^4 + \bar{v}^4)f + 4(u^3v + \bar{u}\bar{v}^3)g + 2u^2v^2h.$$

$$\dot{X} = \mathrm{i}\,\mathcal{N}[PX + R(X,t)]\,, \tag{1}$$

$\mathcal{N}$ и P — диагональные матрицы 7-го порядка.

$$\mathcal{N} = \mathrm{diag}(n, n, n, n, n, n, n), \qquad P = \mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \varepsilon, -\varepsilon, 0)\,, \qquad \varepsilon = -4\sqrt{k_1 k_2}\,. \tag{22}$$

Номинальные решения

$$\dot{\underset{0}{X}} = \mathrm{i}\,\mathcal{N} P \underset{0}{X} \tag{23}$$

В явном виде:

$$\dot{\underset{0}{u}} = \mathrm{i}\; n \underset{0}{u}, \qquad \dot{\underset{0}{\nu}} = \mathrm{i}\, n \underset{0}{\nu}\,, \qquad \dot{\underset{0}{m}}' = \mathrm{i}\,\varepsilon n \underset{0}{m}', \qquad \dot{\underset{0}{m}}_3 = 0\,. \tag{24}$$

Номинальное решение:

$$\underset{0}{u} = a \exp \mathrm{i}\, nt, \qquad \underset{0}{\nu} = b \exp \mathrm{i}\, nt, \qquad \underset{0}{m}' = c \exp \mathrm{i}\, \varepsilon nt, \qquad \underset{0}{m}_3 = 0 \tag{25}$$

a, b, c — постоянные. Нулевое значение для $\underset{0}{m}_3$ всегда может быть обеспечено соответствующим выбором значения для средней скорости вращения Луны Ω.

Номинальное решение в Эйлеровых углах:

$$\varphi = -2nt + \varphi_0, \qquad \psi = \psi_0, \qquad \theta = \theta_0 \tag{26}$$

с постоянными φ_0, ψ_0, θ_0.

$$a = -\sin\frac{\theta_0}{2}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\psi_0+\varphi_0}{2}\right), \qquad b = \mathrm{i}\cos\frac{\theta_0}{2}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\psi_0-\varphi_0}{2}\right), \quad c = -\frac{1}{4n}\left(\frac{\omega_{0,1}}{\sqrt{k_2}} + \mathrm{i}\frac{\omega_{0,2}}{\sqrt{k_1}}\right) \tag{27}$$

$$a\bar{a} + b\bar{b} \equiv 1. \tag{28}$$

$$\dot{X} = \mathrm{i}\,\mathcal{N}[PX + R(X,t)], \tag{1}$$

$$X = \underset{0}{X} + \delta X, \tag{29}$$

$$\delta\dot{X} = \mathrm{i}\,\mathcal{N}\left[P\delta X + R\left(\underset{0}{X} + \delta X, t\right)\right]. \tag{30}$$

Поправки к номинальному решению

$$\delta\dot{u} = \mathrm{i}\, n\left(\delta u - m_0 \bar{v}_0\right) = \mathrm{i}\, n\delta u - \mathrm{i}\, n\bar{b}\left[\left(\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}\right) c \exp \mathrm{i}\,(-1+\varepsilon) nt + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}\right)\bar{c} \exp \mathrm{i}\,(-1-\varepsilon)\, nt\right] \tag{31}$$

$$\delta\dot{v} = \mathrm{i}\, n\,(\delta v + m_0 \bar{u}_0) = \mathrm{i}\, n\delta v + \mathrm{i}\, n\bar{a}\left[\left(\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}\right) c \exp \mathrm{i}\,(-1+\varepsilon) nt + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}\right)\bar{c} \exp \mathrm{i}\,(-1-\varepsilon)\, nt\right]. \tag{32}$$

$$\delta u = \bar{b}\left[c\,\frac{\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}}{2-\varepsilon} \exp \mathrm{i}\,(-1+\varepsilon) nt + \bar{c}\,\frac{\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}}{2+\varepsilon} \exp \mathrm{i}(-1-\varepsilon) nt \right] \tag{33}$$

$$\delta v = -\bar{a}\left[c\,\frac{\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}}{2-\varepsilon} \exp \mathrm{i}\,(-1+\varepsilon) nt + \bar{c}\,\frac{\sqrt{k_2} - \sqrt{k_1}}{2+\varepsilon} \exp \mathrm{i}(-1-\varepsilon) nt \right]. \tag{34}$$

$$\delta\dot{m}' = in\varepsilon\delta m' - \frac{1}{4n}\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{\mathcal{M}_1}{I_1} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k_1}}\frac{\mathcal{M}_2}{I_2}\right) \qquad (35)$$

$$\delta\dot{m}_3 = -\frac{1}{2}\mathrm{i}\,n\varepsilon\frac{I_1 - I_2}{I_3}\left[c^2 \exp 2\mathrm{i}\,\varepsilon nt - \bar{c}^2 \exp(-2\mathrm{i}\,\varepsilon nt)\right] - \frac{1}{2n}\frac{\mathcal{M}_3}{I_3}\,, \qquad (36)$$

что приводит к решениям

$$\delta m' = -\frac{1}{4n}\left[\int\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}}\frac{\mathcal{M}_1}{I_1} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{k_1}}\frac{\mathcal{M}_2}{I_2}\right)\exp(-\mathrm{i}\,n\varepsilon t)\,dt\right]\exp \mathrm{i}\,n\varepsilon t \qquad (37)$$

$$\delta m_3 = -\frac{1}{4}\frac{I_1 - I_2}{I_3}\left[c^2 \exp 2\mathrm{i}\,\varepsilon nt + \bar{c}^2 \exp(-2\mathrm{i}\,\varepsilon nt)\right] - \frac{1}{2n}\int\frac{\mathcal{M}_3}{I_3}dt\,. \qquad (38)$$

Разложение для $\delta m'$

$$
\begin{aligned}
\delta m' \;=\; & (1+\varepsilon_0)(1-2a\bar{a})\left[ab\,\frac{KC_1+LC_2}{2-\varepsilon}e^{2int}+\bar{a}\bar{b}\,\frac{KC_2+LC_1}{2+\varepsilon}e^{-2int}\right] \\
& + \sum_{j=3,9}(\delta_{j3}+\varepsilon_0\delta_{j9})\times\left[a\bar{b}^3\,\frac{KC_2+LC_1}{2+2n_j'+\varepsilon}e^{-2i\left(nt+\lambda_j\right)}-\bar{a}^3 b\,\frac{KC_2+LC_1}{2-2n_j'+\varepsilon}e^{-2i\left(nt-\lambda_j\right)}\right. \\
& \qquad \left. -a^3\bar{b}\,\frac{KC_1+LC_2}{2-2n_j'-\varepsilon}e^{2i\left(nt-\lambda_j\right)}+\bar{a}b^3\,\frac{KC_1+LC_2}{2+2n_j'-\varepsilon}e^{2i\left(nt+\lambda_j\right)}\right] \\
& \qquad + \frac{1}{2}\sigma C_1\left\{a\bar{b}^3 L\left[9\,\frac{e^{-i\left(2nt+\lambda_3+\lambda_9\right)}}{2+n_3'+n_9'+\varepsilon}+5\,\frac{e^{-i\left(2nt+3\lambda_3-\lambda_9\right)}}{2+3n_3'-n_9'+\varepsilon}\right]\right. \\
& \qquad + \bar{a}b^3 K\left[9\,\frac{e^{i\left(2nt+\lambda_3+\lambda_9\right)}}{2+n_3'+n_9'-\varepsilon}+5\,\frac{e^{i\left(2nt+3\lambda_3-\lambda_9\right)}}{2+3n_3'-n_9'-\varepsilon}\right] \\
& \qquad - \bar{a}^3 b L\left[9\,\frac{e^{-i\left(2nt-\lambda_3-\lambda_9\right)}}{2-n_3'-n_9'+\varepsilon}+5\,\frac{e^{-i\left(2nt-3\lambda_3+\lambda_9\right)}}{2-3n_3'+n_9'+\varepsilon}\right] \\
& \qquad - a^3\bar{b} K\left[9\,\frac{e^{i\left(2nt-\lambda_3-\lambda_9\right)}}{2-n_3'-n_9'-\varepsilon}+5\,\frac{e^{i\left(2nt-3\lambda_3+\lambda_9\right)}}{2-3n_3'+n_9'-\varepsilon}\right] \\
& \qquad + 7(1-2a\bar{a})\bar{a}\bar{b} L\left[\frac{e^{-i\left(2nt+\lambda_3-\lambda_9\right)}}{2+n_3'-n_9'+\varepsilon}+\frac{e^{-i\left(2nt-\lambda_3+\lambda_9\right)}}{2-n_3'+n_9'+\varepsilon}\right] \\
& \qquad \left. + 7(1-2a\bar{a})ab K\left[\frac{e^{i\left(2nt+\lambda_3-\lambda_9\right)}}{2+n_3'-n_9'-\varepsilon}+\frac{e^{i\left(2nt-\lambda_3+\lambda_9\right)}}{2-n_3'+n_9'-\varepsilon}\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Разложение для δm_3

$$\delta m_3 = B + \overline{B}, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} B \;=\; & L\Bigg\{-\frac{1}{2}(1+\varepsilon_0)a^2b^2e^{4int} + \sum_{j=3,9}\frac{1}{2}(\delta_{j3}+\varepsilon_0\delta_{j9})\left[a^4\frac{e^{2i(2nt-\lambda_j)}}{2-n'_j} + b^4\frac{e^{2i(2nt+\lambda_j)}}{2+n'_j}\right] \\ & + \frac{1}{2}\sigma\Bigg\{a^4\left[9\frac{e^{i(4nt-\lambda_3-\lambda_9)}}{4-n'_3-n'_9} + 5\frac{e^{i(4nt-3\lambda_3+\lambda_9)}}{4-3n'_3+n'_9}\right] + b^4\left[9\frac{e^{i(4nt+\lambda_3+\lambda_9)}}{4+n'_3+n'_9} + 5\frac{e^{i(4nt+3\lambda_3-\lambda_9)}}{4+3n'_3-n'_9}\right] \\ & - 14a^2b^2\left[\frac{e^{i(4nt+\lambda_3-\lambda_9)}}{4+n'_3-n'_9} + \frac{e^{i(4nt-\lambda_3+\lambda_9)}}{4-n'_3+n'_9}\right]\Bigg\}\Bigg\} - \frac{1}{4}\frac{I_1-I_2}{I_3}c^2e^{2i\varepsilon nt}. \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{I_3\left(I_1\sqrt{k_2}+I_2\sqrt{k_1}\right)}{2I_1I_2\sqrt{k_1k_2}}, \qquad C_2 = \frac{I_3\left(I_2\sqrt{k_1}-I_1\sqrt{k_2}\right)}{2I_1I_2\sqrt{k_1k_2}},$$

$n'_j = \dfrac{n_j}{n}$ $(j = 3,9)$, δ_{ij} — символ Кронекера.

ИПА

Заключение

1. Замена стандартных переменных в виде параметров Эйлера в уравнениях вращения Луны их малыми отклонениями от некоторых номинальных величин.

2. Построение в первом приближении разложений для поправок к номинальным решениям в буквенном виде относительно двух малых параметров K и L, характеризующих форму Луны, и в тригонометрической форме относительно времени.

3. Все аналитические вычисления выполнены с помощью эшелонированного пуассоновского процессора.

4. Методика данной работы может быть применена для изучения вращательного движения любого трехосного твердого небесного тела.