

**Геодезическое вращение тел  
Солнечной системы,  
динамически согласованное с  
эфемеридой DE422/LE422**

**В.В.Пашкевич**

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория  
Российской Академии наук  
Санкт-Петербург  
Россия

**Всероссийская астрометрическая конференция  
"Пулково-2015 " (21.09.2015 - 25.09.2015)**

## Введение

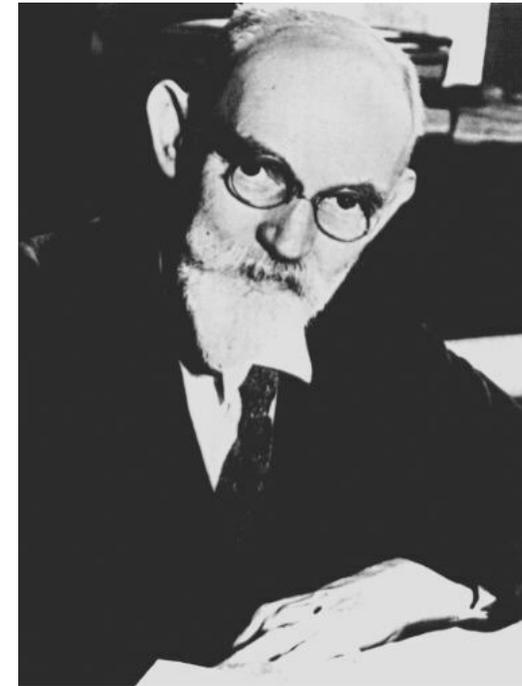
**В предыдущих исследованиях (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2007, 2009) задача геодезического (релятивистского) вращения больших планет, Плутона, Луны и Солнца производилось с использованием эфемериды DE404/LE404. Были найдены наиболее существенные вековые и периодические члены проекций вектора геодезического вращения на оси собственной системы координат исследуемого тела.**

## Введение

**В предыдущих исследованиях (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2007, 2009) задача геодезического (релятивистского) вращения больших планет, Плутона, Луны и Солнца производилось с использованием эфемериды DE404/LE404. Были найдены наиболее существенные вековые и периодические члены проекций вектора геодезического вращения на оси собственной системы координат исследуемого тела.**

## Введение

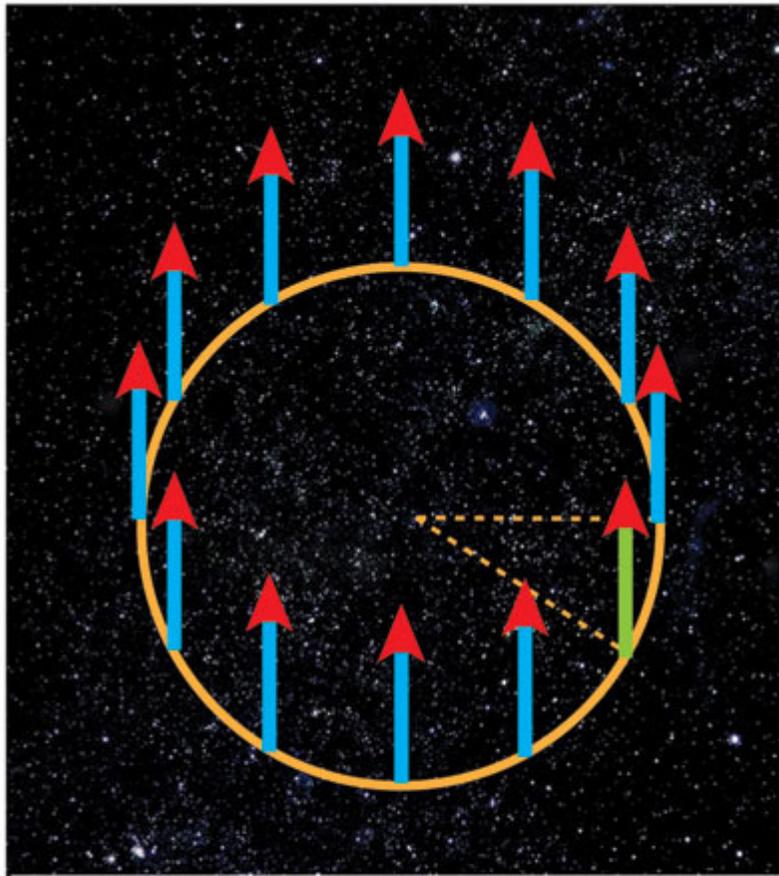
„Геодезическая прецессия (эффект де Ситтера, прецессия де Ситтера, геодезический эффект) — эффект изменения направления оси вращающегося тела, движущегося в искривлённом пространстве-времени, предсказанный общей теорией относительности (ОТО). Впервые эффект геодезической прецессии был предсказан Виллемом де Ситтером в 1916 году, который предоставил релятивистские поправки к движению системы Земля-Луна.



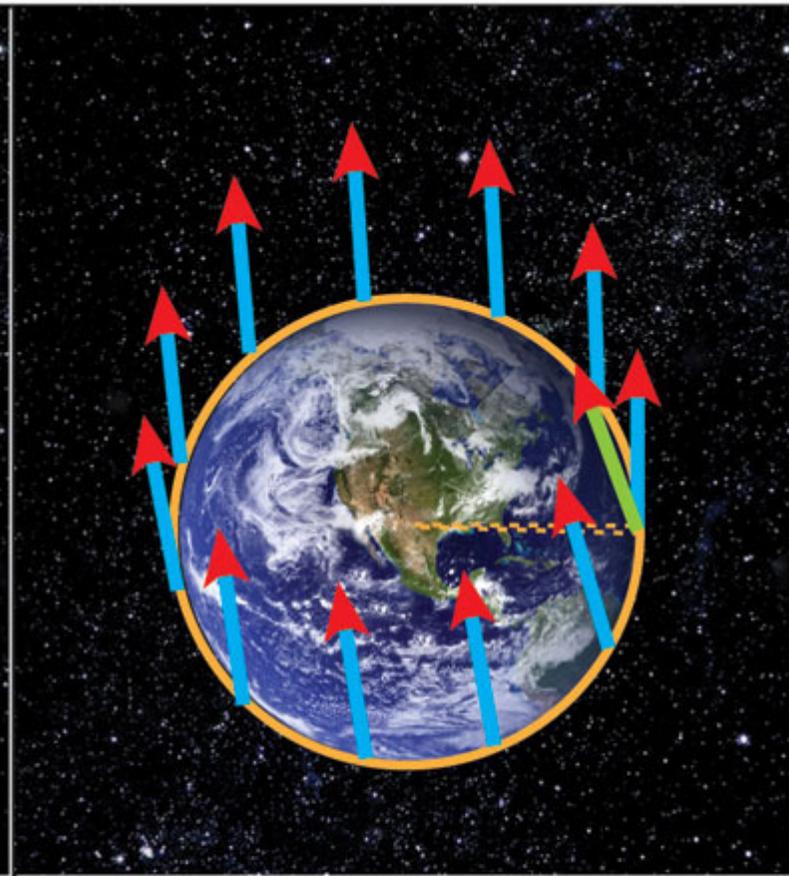
(6 мая 1872 г. - 20 ноября 1934 г.)

Эффект имеет сходство с известным в классической механике явлением прецессии, однако обусловлен не действием на тело каких-либо сил, а глобальной кривизной пространства. С точки зрения ОТО, мировая линия тела, не подвергающегося воздействию никаких сил, кроме гравитационных, является геодезической линией.

Геодезическая прецессия относится к гравимагнитным эффектам общей теории относительности. Эффект возникает при параллельном переносе вектора момента импульса (спинового или орбитального) в искривлённом пространстве-времени.”  
(*Wikipedia® is a registered trademark of the Wikimedia Foundation, Inc.* )



Круговая орбита гироскопа с диаметром ( $D \sim 12742$  км) экватора Земли имеет длину  $\pi D$  ( $\sim 40030$  км). Ось вращения гироскопа, следующего по этой орбите в пустом пространстве, будет всегда направлена в одном и том же направлении, как это показано стрелками на рисунке.



Масса Земли, находящаяся внутри окружности, искривляет пространство-время в конус. В результате формируется сдвинутый клин (штриховая линия), образующий на окружности длину дуги 2.794 см. В данном случае гироскоп будет изменять ориентацию своей оси вращения во время своего прохождения по конусообразному пути, как показано на рисунке.

**Геодезическая прецессия** — это медленное изменение направления оси вращения гироскопа, свободно падающего в гравитационном поле.

## Цели данной работы:

**1. Разработка нового метода** для вычисления значений величин геодезического вращения для любого тела Солнечной системы.

**2. Впервые в углах Эйлера<sup>1</sup> определение новых высокоточных значений величин геодезического вращения тел Солнечной системы, динамически согласованных с JPL эфемеридой DE422/LE422.**

<sup>1</sup> (За исключением Луны) Значения величин геодезического вращения Луны, динамически согласованных с JPL эфемеридой DE422/LE422 определяются для возмущающих членов физической либрации.

## Цели данной работы:

**1. Разработка нового метода** для вычисления значений величин геодезического вращения для любого тела Солнечной системы.

**2. Впервые в углах Эйлера<sup>1</sup> определение новых высокоточных значений величин геодезического вращения тел Солнечной системы, динамически согласованных с JPL эфемеридой DE422/LE422.**

<sup>1</sup> (За исключением Луны) Значения величин геодезического вращения Луны, динамически согласованных с JPL эфемеридой DE422/LE422 определяются для возмущающих членов физической либрации.

## Цели данной работы:

**1. Разработка нового метода** для вычисления значений величин геодезического вращения для любого тела Солнечной системы.

**2. Впервые в углах Эйлера<sup>1</sup> определение** новых высокоточных значений величин геодезического вращения тел Солнечной системы, **динамически согласованных с JPL эфемеридой DE422/LE422.**

**<sup>1</sup> (За исключением Луны)** Значения величин геодезического вращения Луны, **динамически согласованных с JPL эфемеридой DE422/LE422** определяются для возмущающих членов физической либрации.

## Математическая модель и Алгоритм задачи

1. Задача о геодезическом (релятивистским) вращении больших планет, Плутона, Луны и Солнца изучается с использованием эфемериды DE422/LE422, относительно собственной координатной системы исследуемых тел (Seidelmann P.K. et al., 2005).

2. Для каждого тела (за исключением Луны) в углах Эйлера (для Луны в возмущающих членах её физической либрации) с шагом в 1 сутки на 2000 летнем интервале времени (от AD1000 до AD3000) получены файлы скоростей их геодезического вращения.

3. Наиболее существенные члены геодезического вращения исследуемого тела находятся методами наименьших квадратов и спектрального анализа.

Средние долготы планет и Луны взяты из работы (Brumberg and Bretagnon, 2000).

Средняя долгота Плутона взята из предыдущего исследования (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2007).

# Математическая модель и Алгоритм задачи

**1. Задача о геодезическом (релятивистским) вращении больших планет, Плутона, Луны и Солнца изучается с использованием эфемериды DE422/LE422, относительно собственной координатной системы исследуемых тел (Seidelmann P.K. et al., 2005).**

**2. Для каждого тела (за исключением Луны) в углах Эйлера (для Луны в возмущающих членах её физической либрации) с шагом в 1 сутки на 2000 летнем интервале времени (от AD1000 до AD3000) получены файлы скоростей их геодезического вращения.**

**3. Наиболее существенные члены геодезического вращения исследуемого тела находятся методами наименьших квадратов и спектрального анализа.**

**Средние долготы планет и Луны взяты из работы (Brumberg and Bretagnon, 2000).**

**Средняя долгота Плутона взята из предыдущего исследования (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2007).**



Рис.1. Система координат определяющая ориентацию планеты

**Таблица 1. Величины определяющие направления на северные полюса вращения и нулевые меридианы больших планет, Плутона и Солнца (2000) (Seidelmann et al., 2005)**

Меркурий	$\alpha_0=281^\circ.01 - 0^\circ.033T$ $\delta_0= 61^\circ.45 - 0^\circ.005T$ $W=329^\circ.548 + 6^\circ.1385025d$	Сатурн	$\alpha_0=40^\circ.589 - 0^\circ.036T$ $\delta_0=83^\circ.537 - 0^\circ.004T$ $W=38^\circ.90 + 810^\circ.7939024d$
Венера	$\alpha_0=272^\circ.76$ $\delta_0= 67^\circ.16$ $W=160^\circ.20 - 1^\circ.4813688d$	Уран	$\alpha_0= 257^\circ.311$ $\delta_0= -15^\circ.175$ $W= 203^\circ.81 - 501^\circ.1600928d$
Земля	$\alpha_0= 0^\circ.00 - 0^\circ.641T$ $\delta_0= 90^\circ.00 - 0^\circ.557T$ $W=190^\circ.147 + 360^\circ.9856235d$	Нептун	$\alpha_0=299^\circ.36 + 0^\circ.70 \sin N$ $\delta_0= 43^\circ.46 - 0^\circ.51 \cos N$ $W=253^\circ.18+536^\circ.3128492d -0^\circ.48 \sin N$ $N=357^\circ.85 + 52^\circ.316T$
Марс	$\alpha_0=317^\circ.68143 - 0^\circ.1061T$ $\delta_0= 52^\circ.88650 - 0^\circ.0609T$ $W=176^\circ.630 +350^\circ.89198226d$	Плутон	$\alpha_0= 313^\circ.02$ $\delta_0= 9^\circ.09$ $W=236^\circ.77 - 56^\circ.3623195d$
Юпитер	$\alpha_0=268^\circ.05 - 0^\circ.009T$ $\delta_0= 64^\circ.49 + 0^\circ.003T$ $W=284^\circ.95 + 870^\circ.5366420d$	Солнце	$\alpha_0=286^\circ.13$ $\delta_0= 63^\circ.87$ $W= 84^\circ.10 + 14^\circ.1844000d$

$\alpha_0$  – прямое восхождение северного полюса вращения тела;  $\delta_0$  – склонение северного полюса вращения тела;  $W$  – угловое расстояние нулевого меридиана тела отсчитываемое по экватору тела от неподвижного экватора Земли эпохи J2000.

**Таблица 2. Величины определяющие направления на северный полюс вращения и нулевой меридиан Луны (2000) (Seidelmann et al., 2005)**

Луна	$\alpha_0 = 269^\circ.9949 + 0^\circ.0031T - 3^\circ.8787 \sin E1 - 0^\circ.1204 \sin E2$ $+ 0^\circ.0700 \sin E3 - 0^\circ.0172 \sin E4$ $+ 0^\circ.0072 \sin E6 - 0^\circ.0052 \sin E10$ $+ 0^\circ.0043 \sin E13$ $\delta_0 = 66^\circ.5392 + 0^\circ.0130T + 1^\circ.5419 \cos E1 + 0^\circ.0239 \cos E2$ $- 0^\circ.0278 \cos E3 + 0^\circ.0068 \cos E4$ $- 0^\circ.0029 \cos E6 + 0^\circ.0009 \cos E7$ $+ 0^\circ.0008 \cos E10 - 0^\circ.0009 \cos E13$ $W = 38^\circ.3213 + 13^\circ.17635815d - 1^\circ.4 \times 10^{-12}d^2 + 3^\circ.5610 \sin E1$ $+ 0^\circ.1208 \sin E2 - 0^\circ.0642 \sin E3 + 0^\circ.0158 \sin E4$ $+ 0^\circ.0252 \sin E5 - 0^\circ.0066 \sin E6 - 0^\circ.0047 \sin E7$ $- 0^\circ.0046 \sin E8 + 0^\circ.0028 \sin E9 + 0^\circ.0052 \sin E10$ $+ 0^\circ.0040 \sin E11 + 0^\circ.0019 \sin E12 - 0^\circ.0044 \sin E13$
	$E1 = 125^\circ.045 - 0^\circ.0529921d, E2 = 250^\circ.089 - 0^\circ.1059842d,$ $E3 = 260^\circ.008 + 13^\circ.0120009d, E4 = 176^\circ.625 + 13^\circ.3407154d,$ $E5 = 357^\circ.529 + 0^\circ.9856003d, E6 = 311^\circ.589 + 26^\circ.4057084d,$ $E7 = 134^\circ.963 + 13^\circ.0649930d, E8 = 276^\circ.617 + 0^\circ.3287146d,$ $E9 = 34^\circ.226 + 1^\circ.7484877d, E10 = 15^\circ.134 - 0^\circ.1589763d,$ $E11 = 119^\circ.743 + 0^\circ.0036096d,$ $E12 = 239^\circ.961 + 0^\circ.1643573d, E13 = 25^\circ.053 + 12^\circ.9590088d$

$d$  – интервал времени измеряемый в днях от эпохи J2000;

$T$  – интервал времени измеряемый в Юлианских столетиях (36525 дней) от эпохи J2000.

## Вектор угловой скорости геодезического вращения для любого тела Солнечной системы:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{Gm_j}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|^3} (\bar{R}_i - \bar{R}_j) \times \left( \frac{3}{2} \dot{\bar{R}}_i - 2\dot{\bar{R}}_j \right).$$

Здесь индексы  $i$  и  $j$  соответствуют Солнцу, Плутону, большим планетам и Луне;  $G$  – гравитационная постоянная;  $m_j$  – масса  $j$ -го тела;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\bar{R}_i, \dot{\bar{R}}_i, \bar{R}_j, \dot{\bar{R}}_j$  – векторы барицентрического положения и скорости  $i$ -го и  $j$ -го тела; символ  $\times$  означает векторное произведение.

## Релятивистский вектор угловой скорости для любого тела Солнечной системы:

$$\bar{\omega}_{Ri} = \bar{\omega}_i + \bar{\sigma}_i \Rightarrow \bar{\sigma}_i = \bar{\omega}_{Ri} - \bar{\omega}_i$$

где  $\bar{\omega}_i$  – Ньютоновский вектор угловой скорости  $i$ -го тела

Солнечной системы.

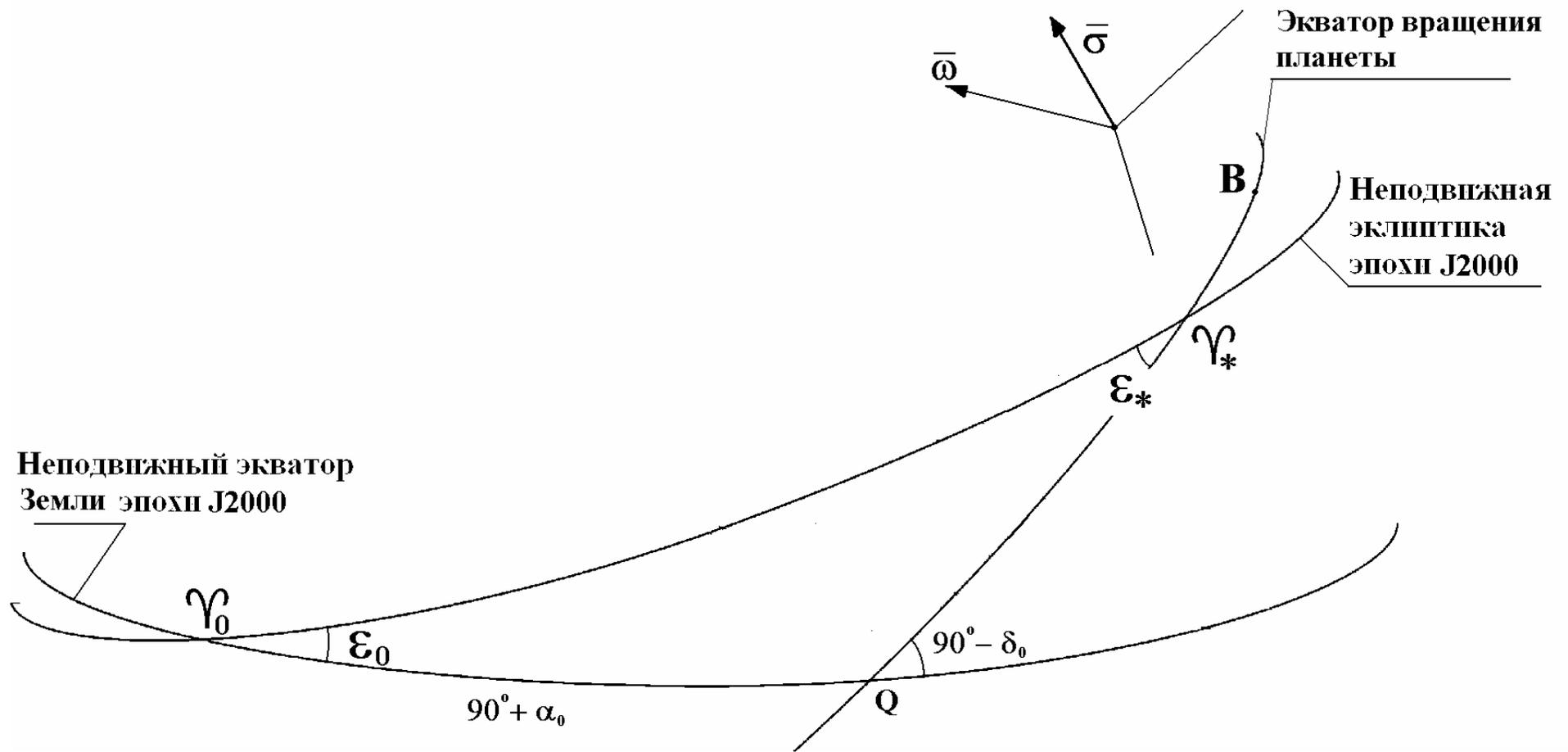


Рис.2. Треугольник определяющий ориентацию вектора угловой скорости геодезического вращения для любого тела Солнечной системы.

В предыдущем исследовании (*Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2009*)

Матричные преобразования компонент вектора угловой скорости геодезического вращения:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\psi} \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{z^*}^{Ecl} \\ \sigma_{x^*}^{Equ} \\ -\sigma_{z^*}^{Equ} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{x^*}^{Equ} \\ \sigma_{y^*}^{Equ} \\ \sigma_{z^*}^{Equ} \end{pmatrix} = p(-\varepsilon_*) \begin{pmatrix} \sigma_{x^*}^{Ecl} \\ \sigma_{y^*}^{Ecl} \\ \sigma_{z^*}^{Ecl} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{x^*}^{Ecl} \\ \sigma_{y^*}^{Ecl} \\ \sigma_{z^*}^{Ecl} \end{pmatrix} = r(\gamma_0\gamma_*)p(\varepsilon_0)r(\Delta) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}$$

где  $\Delta = -0''.05294$ ,

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.40928, \quad r(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

### Редукционные формулы

$$\cos \varepsilon_* = \sin \delta_0 \cos \varepsilon_0 - \cos \delta_0 \sin \varepsilon_0 \sin \alpha_0$$

$$\sin \gamma_0\gamma_* = \frac{\cos \delta_0 \cos \alpha_0}{\sin \varepsilon_*}$$

Матричные преобразования компонент вектора угловой скорости геодезического вращения **в предыдущем исследовании** (*Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2009*):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\psi} \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{z^*}^{Ecl} \\ \sigma_{x^*}^{Equ} \\ -\sigma_{z^*}^{Equ} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{x^*}^{Equ} \\ \sigma_{y^*}^{Equ} \\ \sigma_{z^*}^{Equ} \end{pmatrix} = p(-\varepsilon_*) \begin{pmatrix} \sigma_{x^*}^{Ecl} \\ \sigma_{y^*}^{Ecl} \\ \sigma_{z^*}^{Ecl} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{x^*}^{Ecl} \\ \sigma_{y^*}^{Ecl} \\ \sigma_{z^*}^{Ecl} \end{pmatrix} = r(\gamma_0 \gamma_*) p(\varepsilon_0) r(\Delta) \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}$$

где  $\sigma_{\psi}$  — геодезическое движение экватора исследуемого тела на неподвижной эклиптике J2000,  $\sigma_{\theta}$  — геодезическое изменение наклона экватора тела к неподвижной эклиптике J2000,  $\sigma_{\varphi}$  — проекция вектора угловой скорости геодезического вращения тела к оси его вектора угловой скорости вращения, X, Y, Z - компоненты вектора  $\bar{R}$ .

Для каждого тела с шагом в 1 сутки на 2000 летнем интервале времени (от AD1000 до AD3000) были вычислены файлы этих проекций. Наиболее существенные члены геодезического вращения исследуемого тела были найдены методами наименьших квадратов и спектрального анализа.

**На этом заканчивается предыдущее исследование!!!**

Матричные преобразования компонент вектора угловой скорости геодезического вращения **данного исследования** от геоцентрической системы координат к планетоцентрической координатной системе:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = r(\gamma_* \mathbf{B}) p(-\varepsilon_*) r(\gamma_0 \gamma_*) p(\varepsilon_0) r(\Delta) \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \text{ где } \Delta = -0''.05294,$$

$$\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21''.40928, \quad r(a) = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & \sin a \\ 0 & -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

### Редукционные формулы

$$\cos \varepsilon_* = \sin \delta_0 \cos \varepsilon_0 - \cos \delta_0 \sin \varepsilon_0 \sin \alpha_0$$

$$\sin \gamma_0 \gamma_* = \frac{\cos \delta_0 \cos \alpha_0}{\sin \varepsilon_*}, \quad \sin Q \gamma_* = \frac{\sin \varepsilon_0 \cos \alpha_0}{\sin \varepsilon_*}$$

$$\varphi = W - Q \gamma_* + 180^\circ, \quad \theta = -\varepsilon_*, \quad \gamma_* \mathbf{B} = W - Q \gamma_*$$

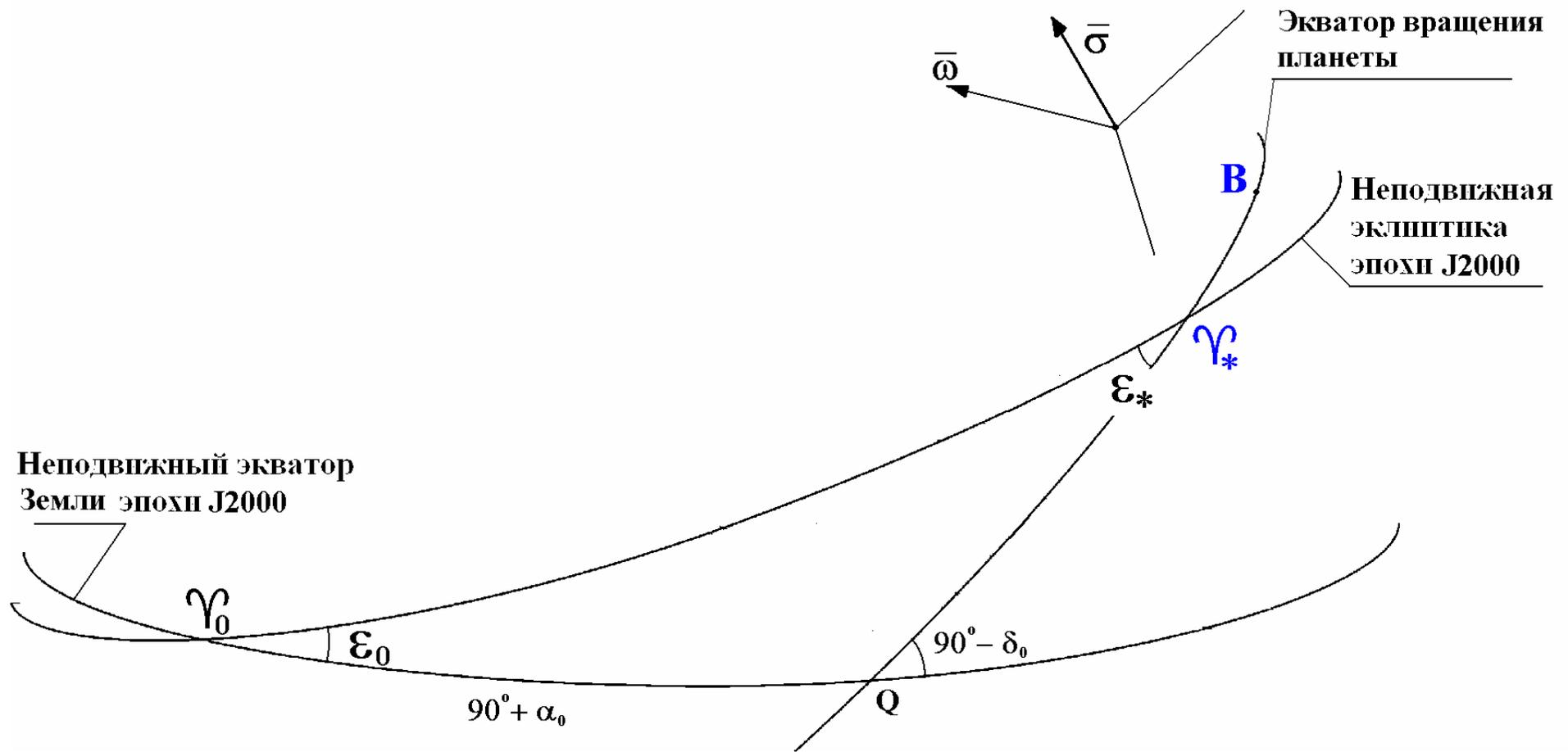


Рис.2. Треугольник определяющий ориентацию вектора угловой скорости геодезического вращения для любого тела Солнечной системы.

**Проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела Солнечной системы - Кинематические уравнения Эйлера:**

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{\psi} \sin \theta &= -\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi \\ \dot{\theta} &= -\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  – углы Эйлера, **точка означает дифференцирование по времени.**

**Из разности релятивистского и ньютоновского вектора угловой скорости тела Солнечной системы получаем:**

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\omega}_{Ri} - \bar{\omega}_i = \Delta \bar{\omega}_i \Rightarrow$$

**Проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела Солнечной системы - Кинематические уравнения Эйлера:**

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{\psi} \sin \theta &= -\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi \\ \dot{\theta} &= -\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера, **точка означает дифференцирование по времени.**

**Из разности релятивистского и ньютоновского вектора угловой скорости тела Солнечной системы получаем:**

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\omega}_{Ri} - \bar{\omega}_i = \Delta \bar{\omega}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta \dot{\psi} \sin \theta &= -\Delta \omega_1 \sin \varphi - \Delta \omega_2 \cos \varphi \\ \Delta \dot{\theta} &= -\Delta \omega_1 \cos \varphi + \Delta \omega_2 \sin \varphi \\ \Delta \dot{\varphi} &= \Delta \omega_3 - \Delta \dot{\psi} \cos \varphi \end{aligned} \right\},$$

где  $\Delta \dot{\psi} = \dot{\psi}_R - \dot{\psi}; \Delta \dot{\theta} = \dot{\theta}_R - \dot{\theta}; \Delta \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_R - \dot{\varphi}.$

**Проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела Солнечной системы - Кинематические уравнения Эйлера:**

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= -\dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \dot{\psi} \sin \theta &= -\omega_1 \sin \varphi - \omega_2 \cos \varphi \\ \dot{\theta} &= -\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} &= \omega_3 - \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\psi, \theta, \varphi$  – углы Эйлера, точка означает дифференцирование по времени.

**Выражения для скоростей геодезического вращения определяются в возмущающих членах физической либрации для Луны и в углах Эйлера для других тел Солнечной системы:**

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta \Delta \dot{\psi} &= -\sigma_1 \sin \varphi - \sigma_2 \cos \varphi = \Delta I \dot{\sigma} \\ \Delta \dot{\theta} &= -\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi = \Delta \dot{\rho} \\ \Delta \dot{\psi} + \Delta \dot{\varphi} &= \sigma_3 - (\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi) \tan \frac{\theta}{2} = \Delta \dot{\tau} \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \Delta \dot{\psi} &= -\frac{\sigma_1 \sin \varphi + \sigma_2 \cos \varphi}{\sin \theta} \\ \Delta \dot{\theta} &= -\sigma_1 \cos \varphi + \sigma_2 \sin \varphi \\ \Delta \dot{\varphi} &= \sigma_3 - \Delta \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\tau, \rho$  и  $\sigma$  – возмущающие члены физической либрации Луны, точка означает дифференцирование по времени.

**Выражения для возмущающих членов физической либрации для неподвижной эклиптики эпохи J2000 :**

а)  $\tau = \varphi + \psi - 180^\circ - L_{\zeta}$

б)  $\rho = \theta - I$

в)  $\sigma = \psi - \Omega$

где  $\psi$  – **долгота** нисходящего узла эпохи J2000 лунного экватора,  
 $\theta$  – **наклон** лунного экватора к неподвижной эклиптике J2000,  
 $I$  – **постоянный угол наклона лунного экватора к неподвижной эклиптике J2000** ( $I \sim 1^\circ 32'$ );

$\varphi$  – **угол собственного вращения** между нисходящим узлом эпохи J2000 и главной осью минимального момента инерции;

$L_{\zeta}$  – **средняя долгота Луны** и

$\Omega$  – **средняя долгота восходящего узла её орбиты**;

$\tau$ ,  $\rho$  и  $\sigma$  – **возмущающие члены физической либрации для неподвижной эклиптики эпохи J2000** в долготе, в наклоне и в долготе узла, соответственно.

# Математическая модель и Алгоритм задачи

1. Задача о геодезическом (релятивистским) вращении больших планет, Плутона, Луны и Солнца изучается с использованием эфемериды DE422/LE422, относительно собственной координатной системы исследуемых тел (Seidelmann P.K. et al., 2005).

2. Для каждого тела (за исключением Луны) в углах Эйлера (для Луны в возмущающих членах её физической либрации) с шагом в 1 сутки на 2000 летнем интервале времени (от AD1000 до AD3000) получены файлы скоростей их геодезического вращения.

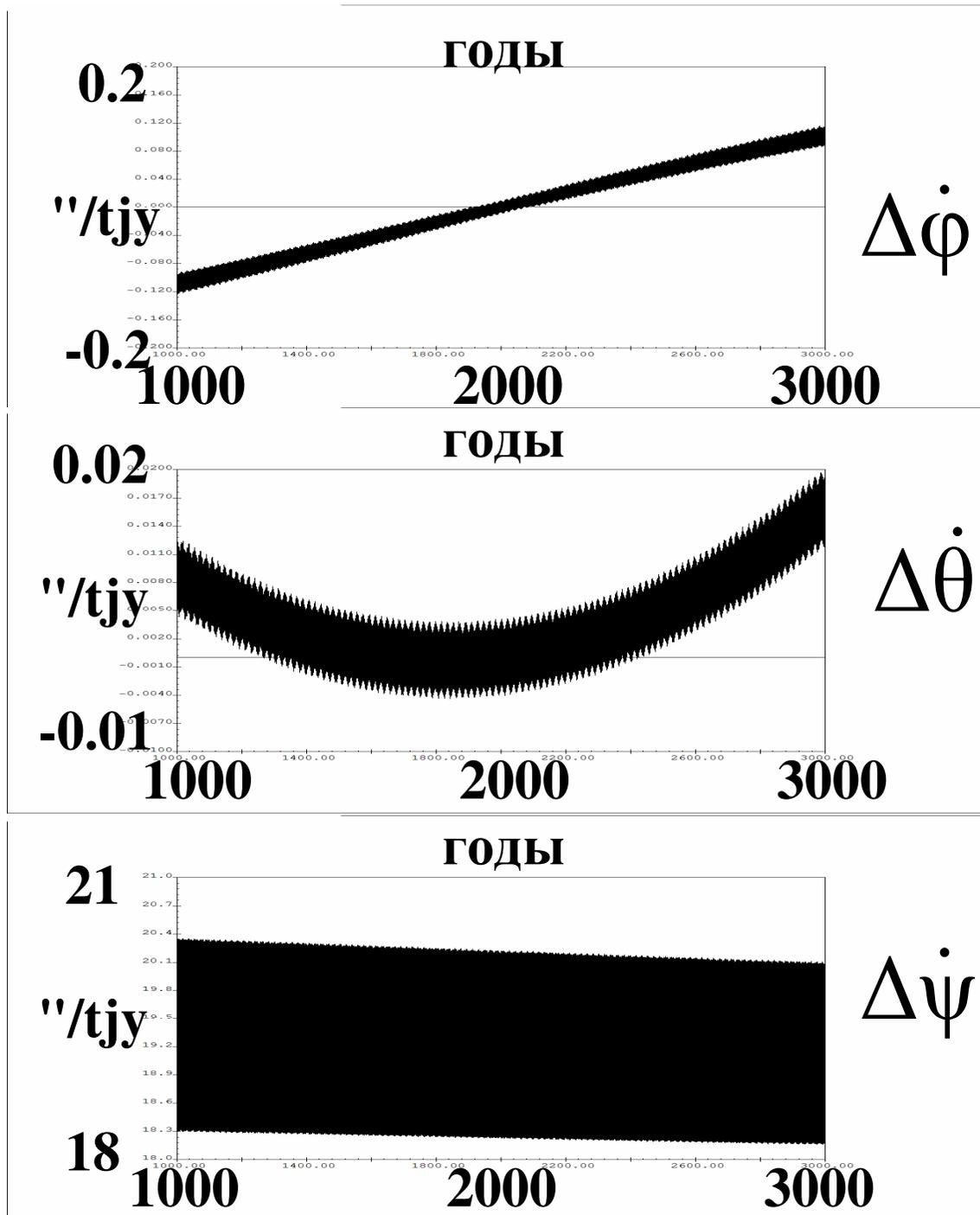
3. Наиболее существенные члены геодезического вращения исследуемого тела находятся методами наименьших квадратов и спектрального анализа.

Средние долготы планет и Луны взяты из работы (Brumberg and Bretagnon, 2000).

Средняя долгота Плутона взята из предыдущего исследования (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2007).

# Земля

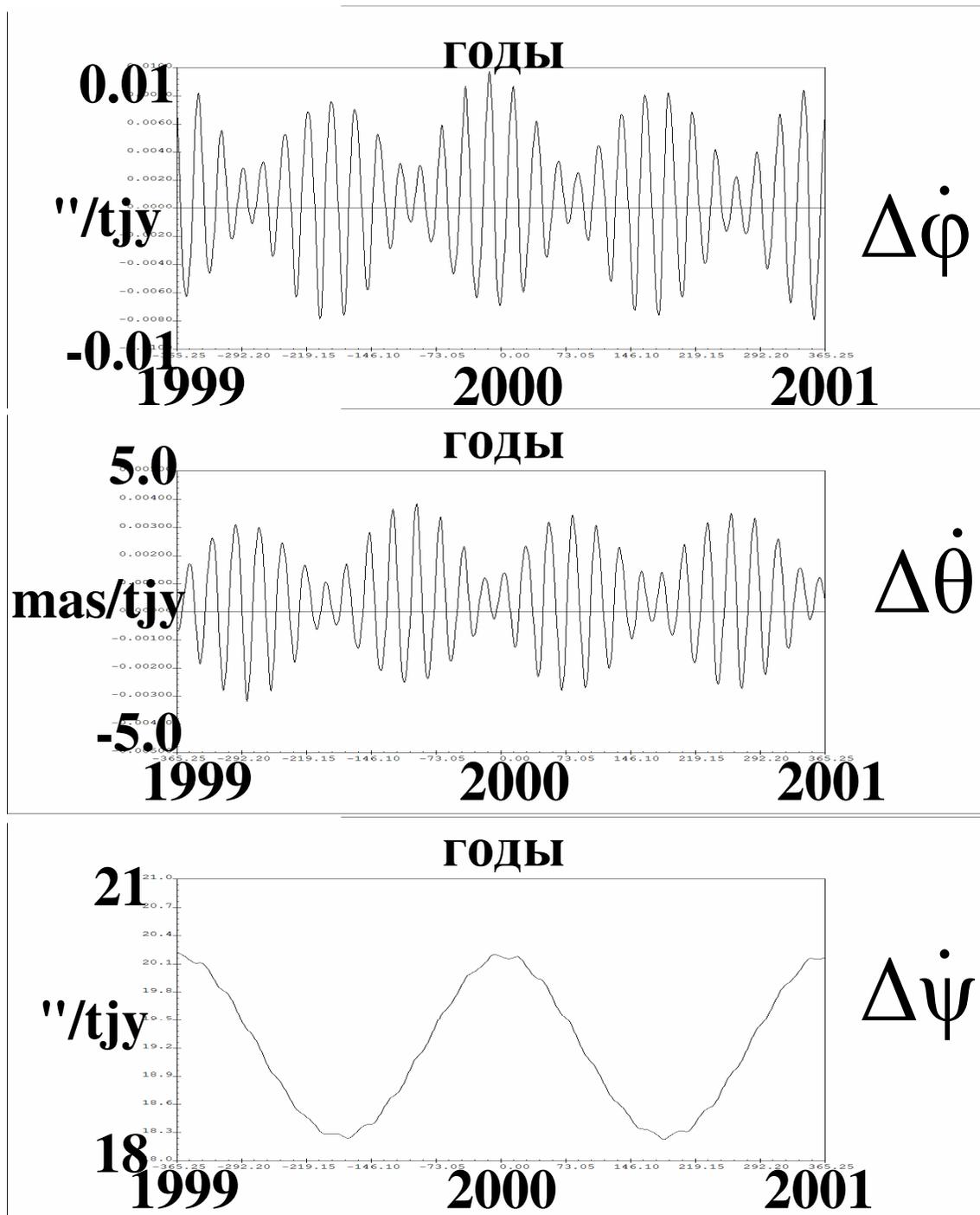
эксцентриситет  
орбиты  
0.017



Земля

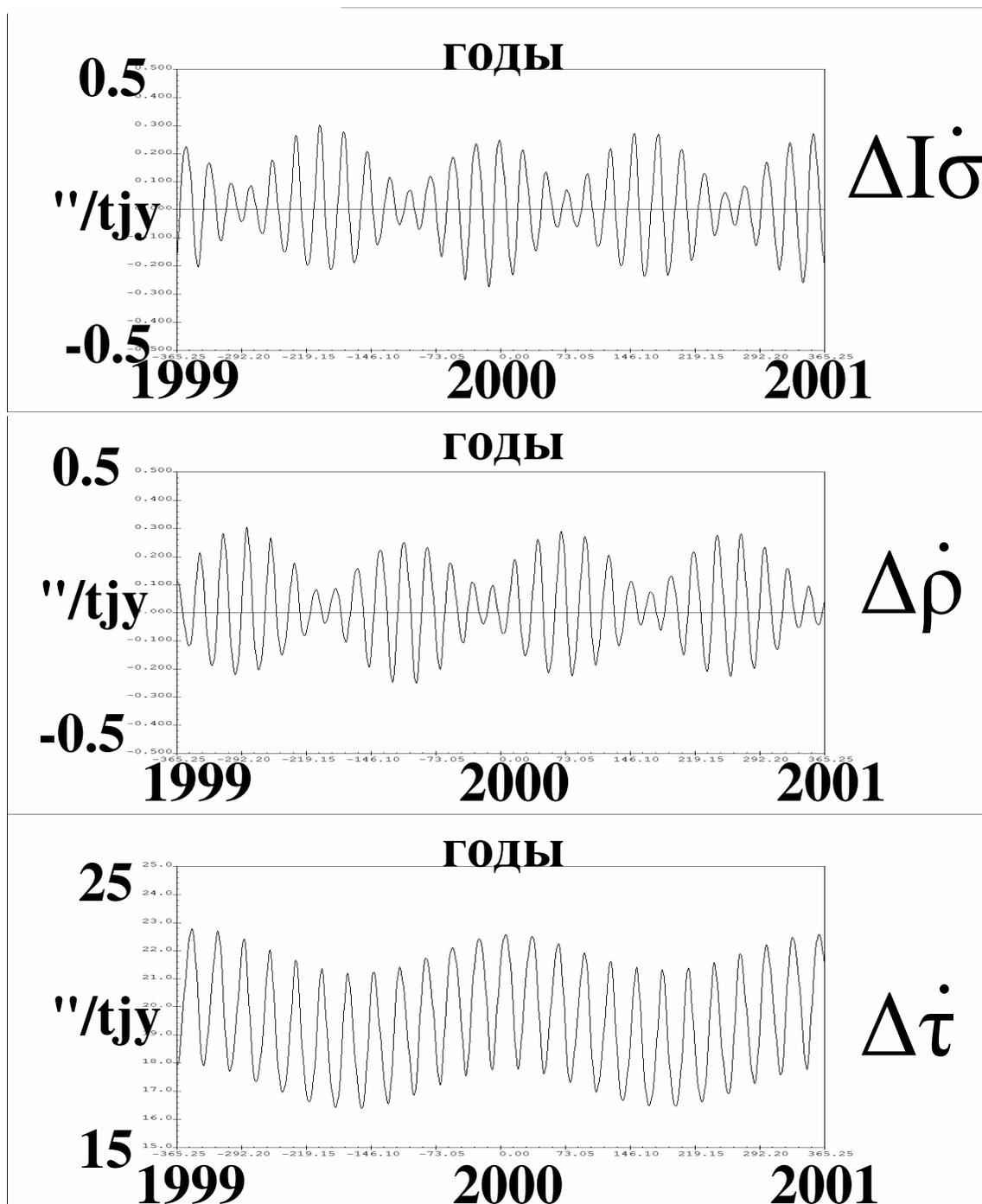
Детали

эксцентриситет  
орбиты  
0.017



# Луна Детали

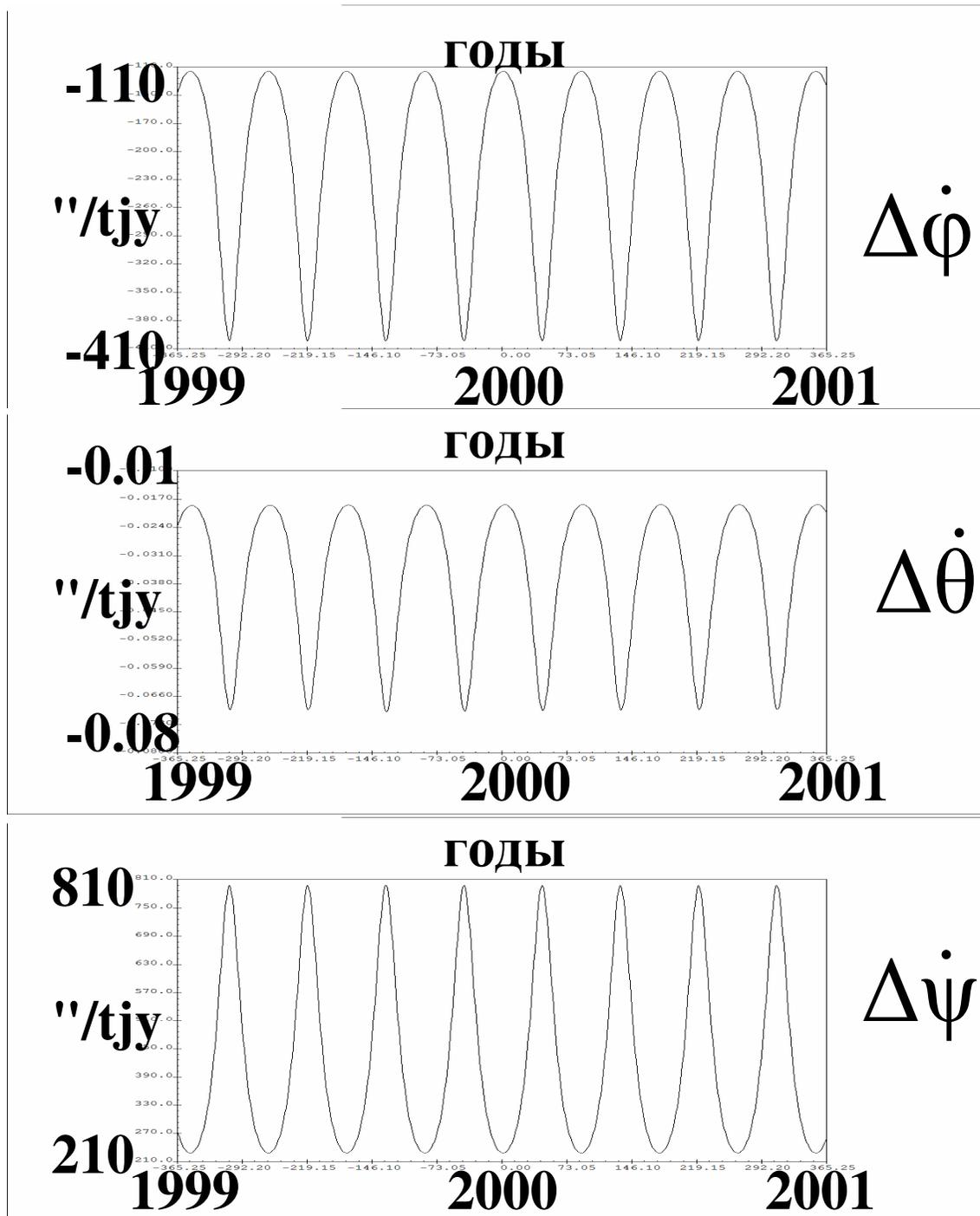
Средний  
эксцентриситет  
орбиты  
**0.055**



# Меркурий

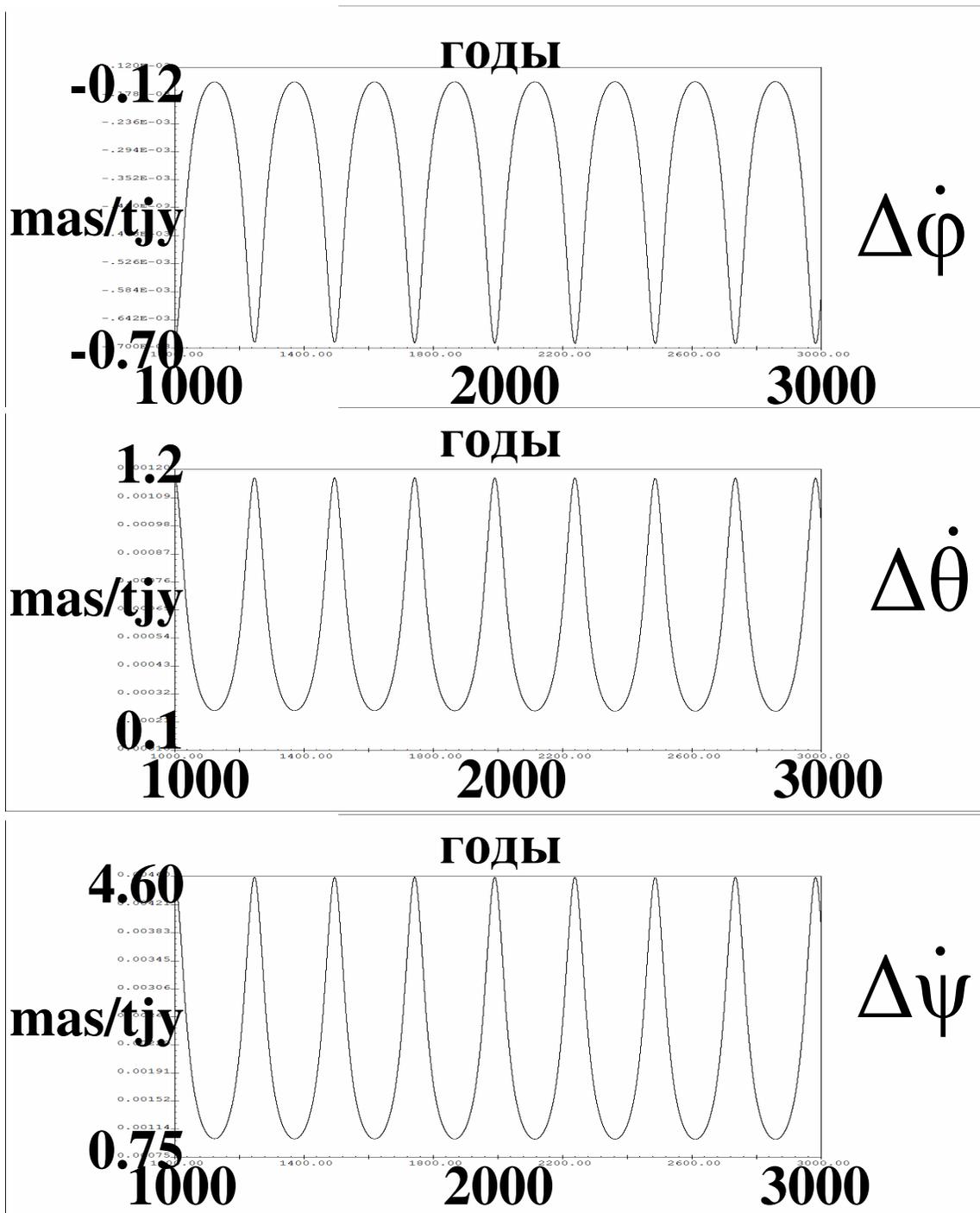
## Детали

эксцентриситет  
орбиты  
0.206



# ПЛУТОН

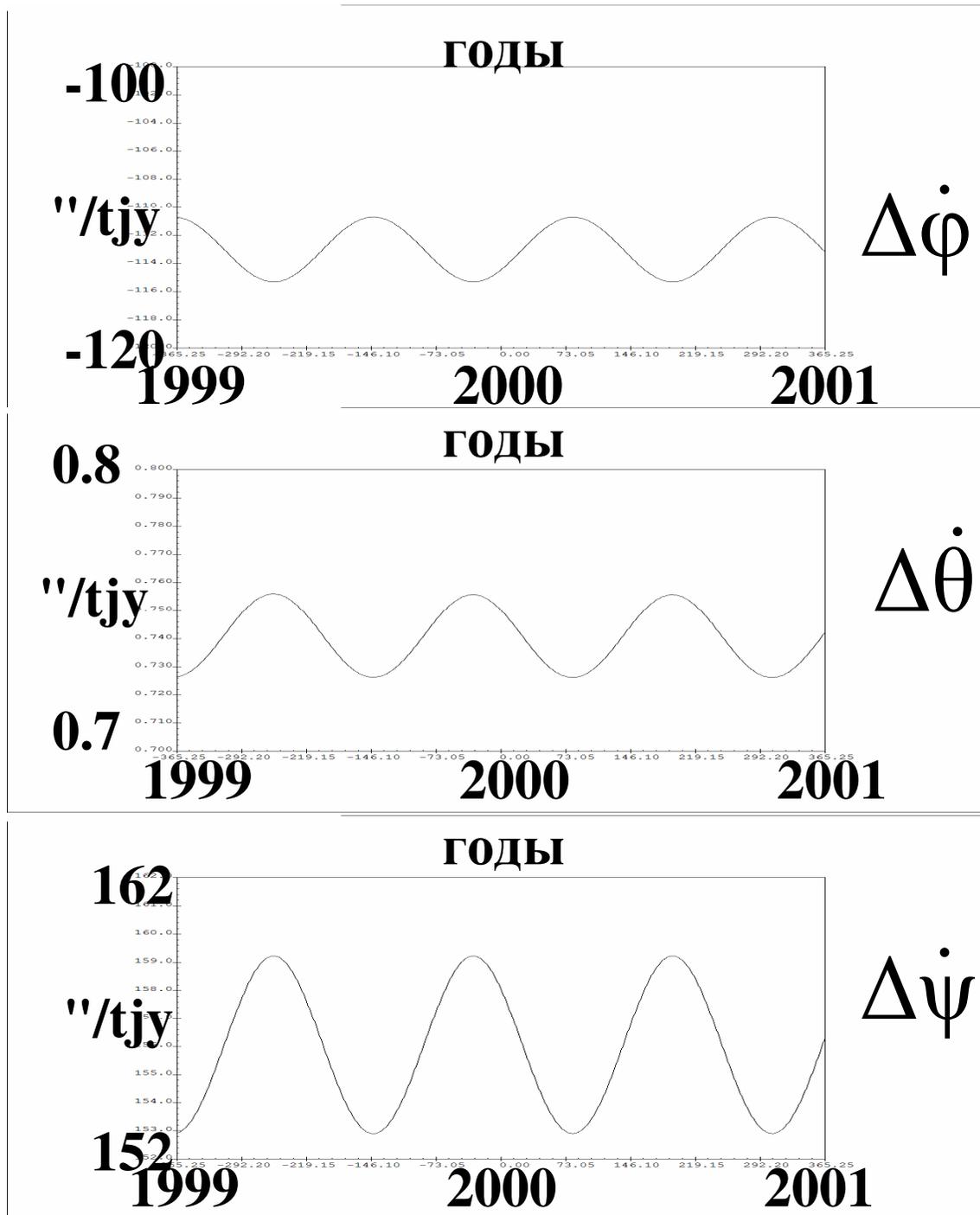
эксцентриситет  
орбиты  
0.249



# Венера

## Детали

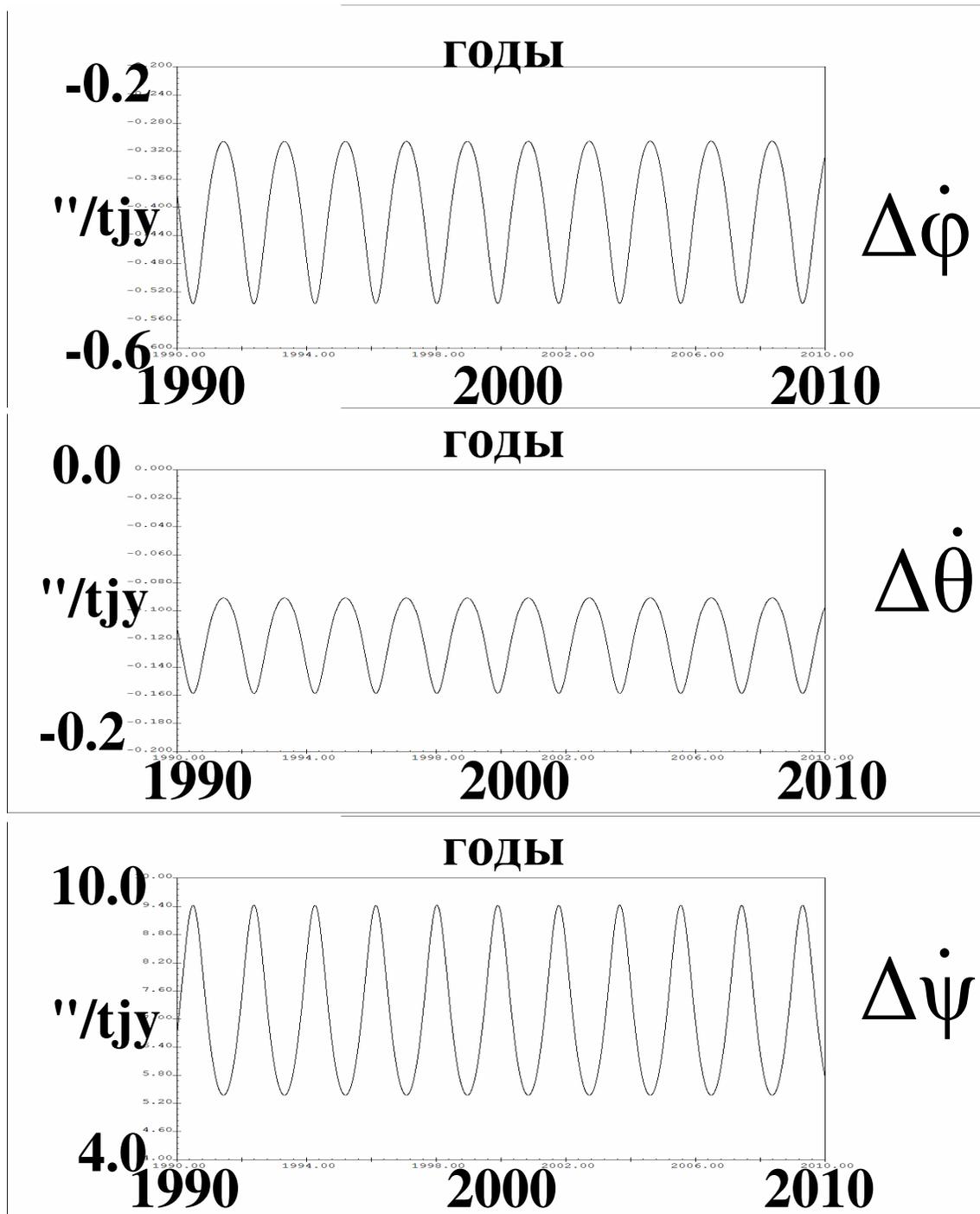
эксцентриситет  
орбиты  
**0.007**



# Марс

## Детали

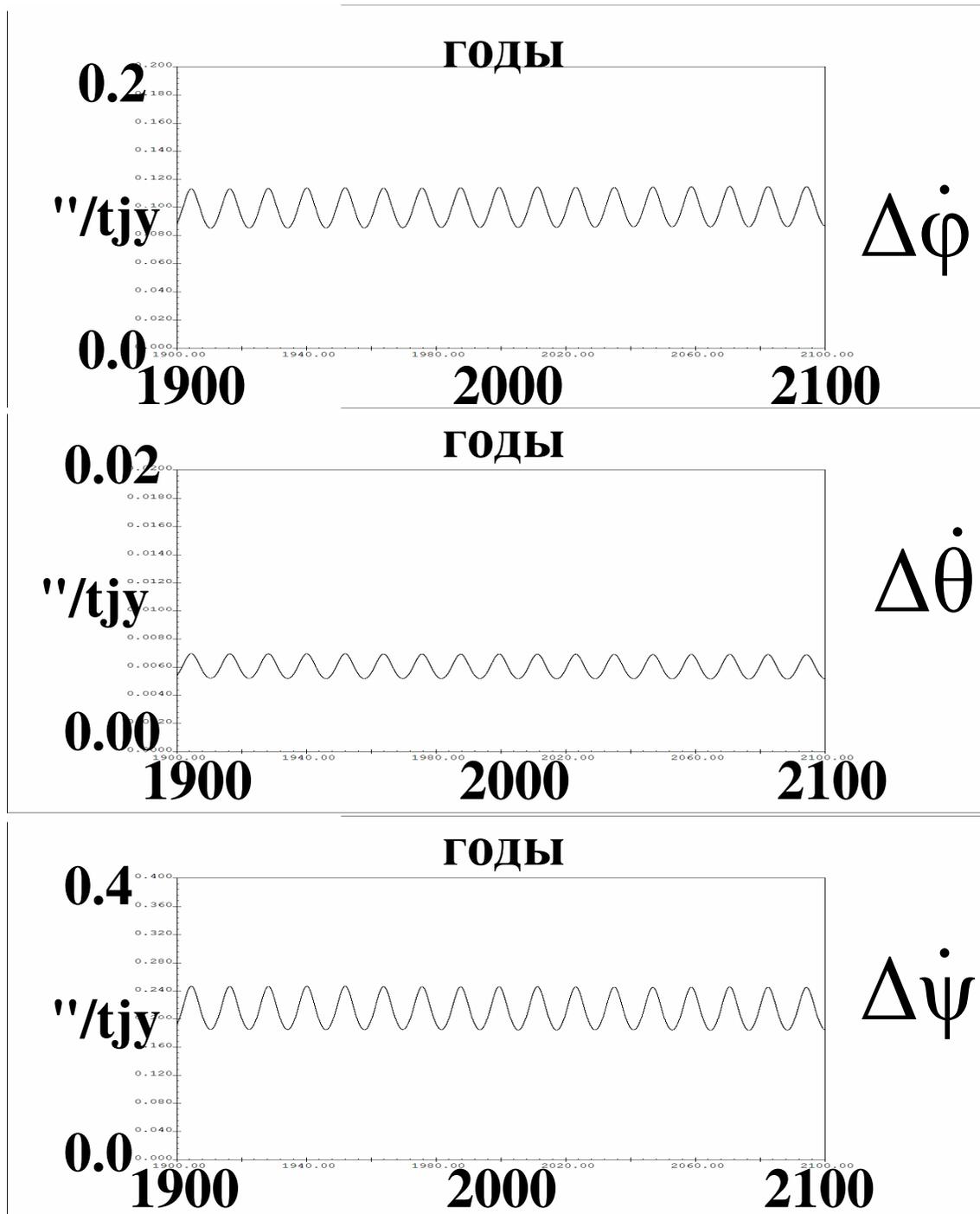
эксцентриситет  
орбиты  
0.093



# Юпитер

## Детали

эксцентриситет  
орбиты  
0.048

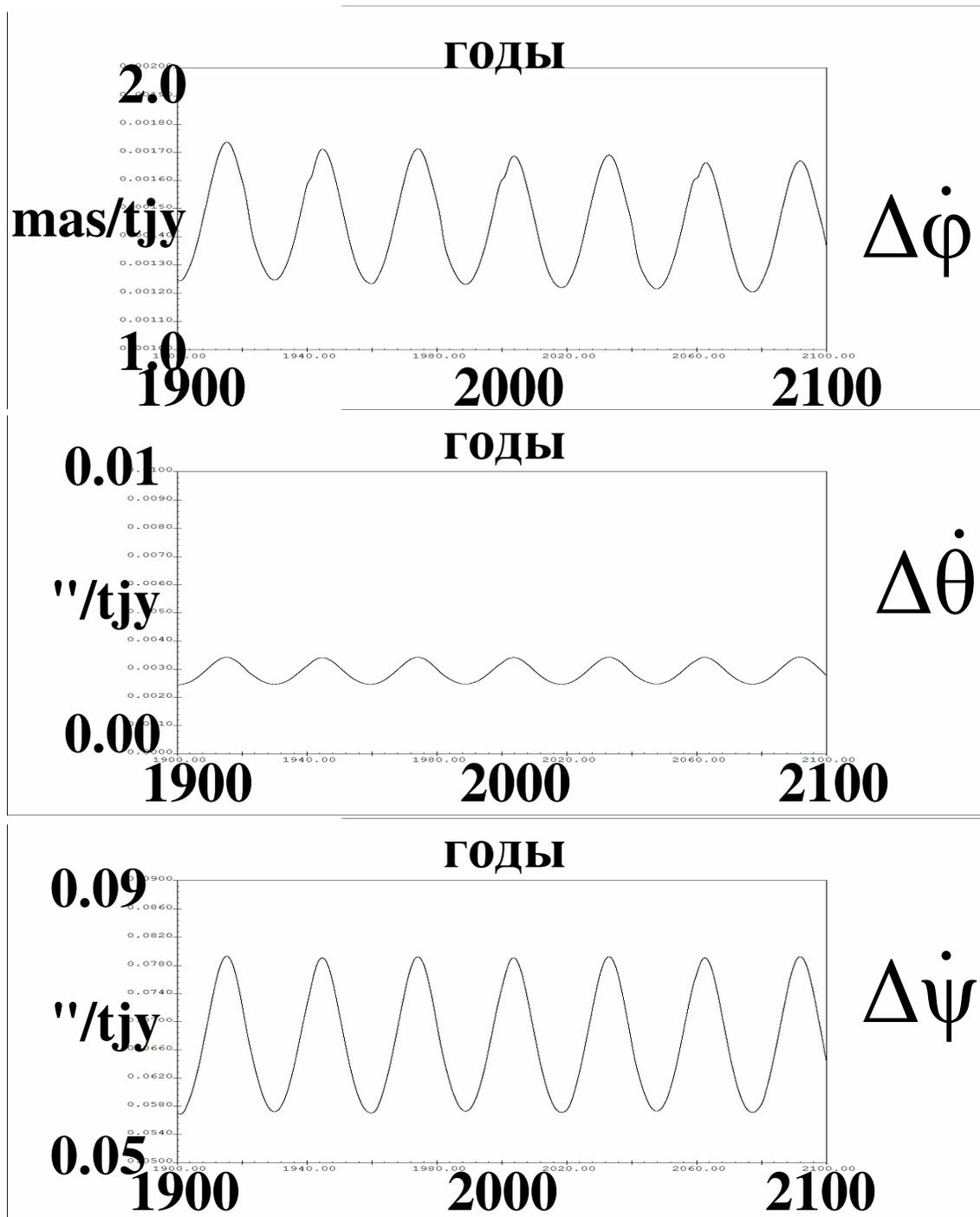


# Сатурн

## Детали

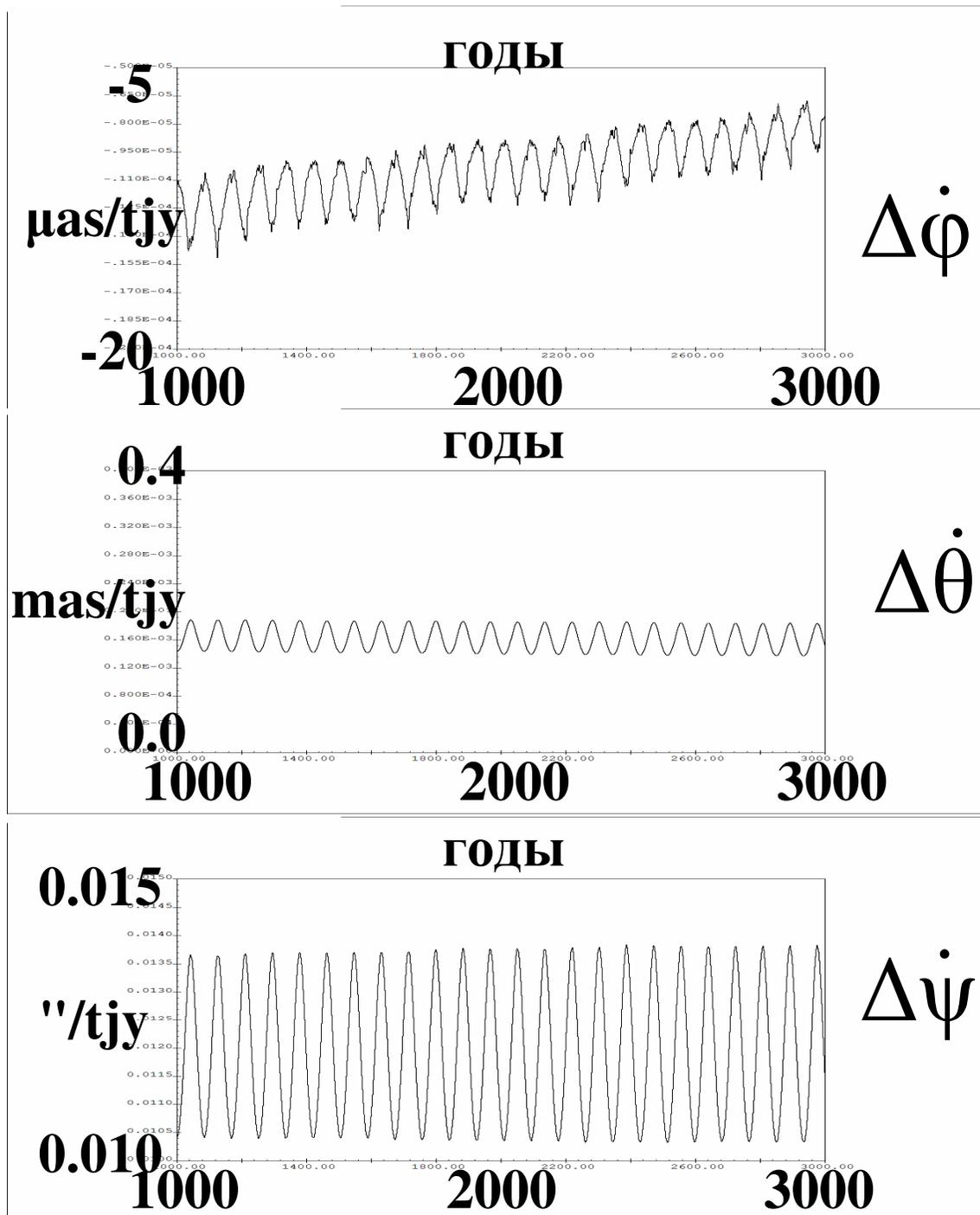
эксцентриситет  
орбиты

0.056



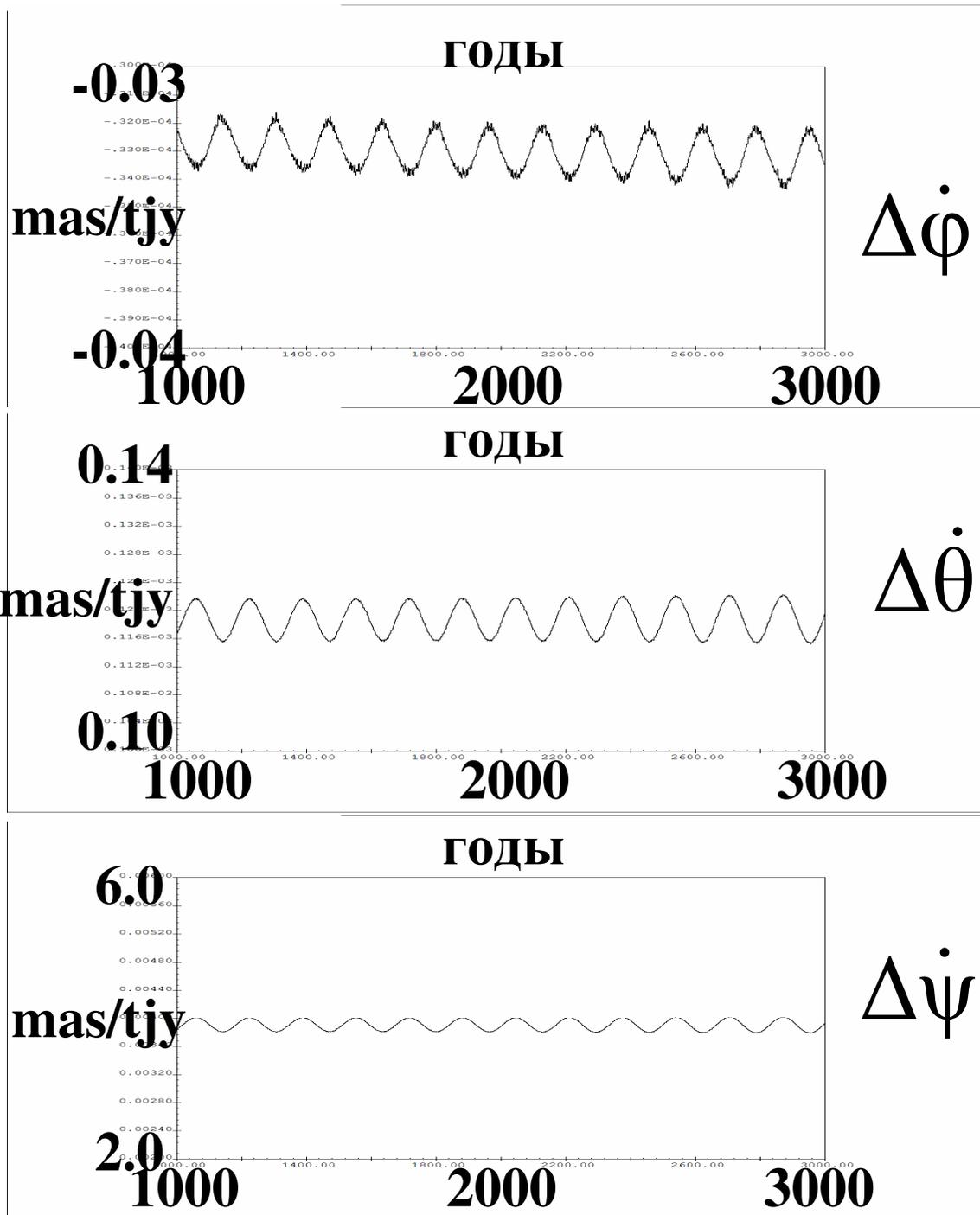
# Уран

эксцентриситет  
орбиты  
0.046



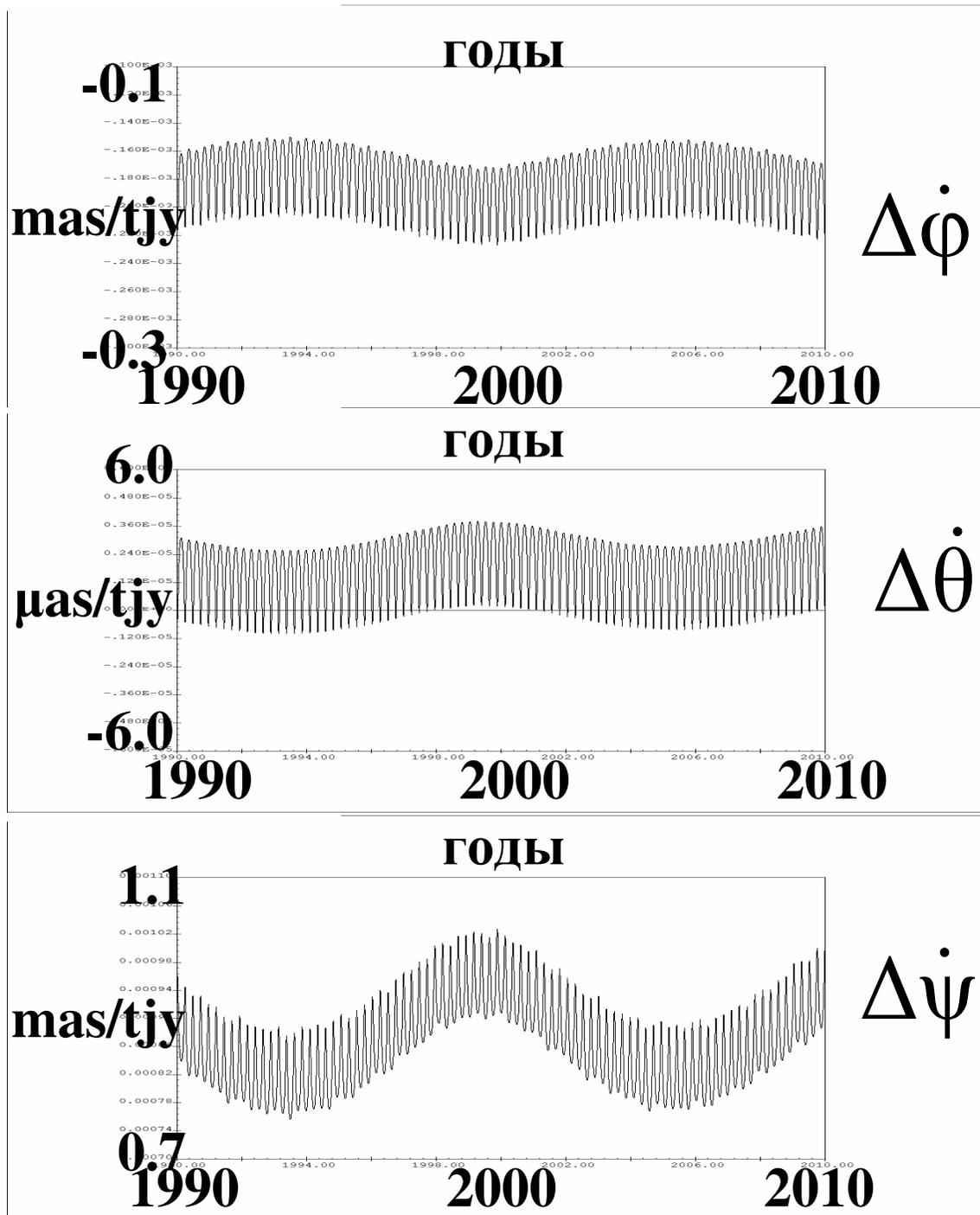
# Нептун

эксцентриситет  
орбиты  
0.009



# Солнце

## Детали



## Математическая модель и Алгоритм задачи

1. Задача о геодезическом (релятивистским) вращении больших планет, Плутона, Луны и Солнца изучается с использованием эфемериды DE422/LE422, относительно собственной координатной системы исследуемых тел (Seidelmann P.K. et al., 2005).

2. Для каждого тела (за исключением Луны) в углах Эйлера (для Луны в возмущающих членах её физической либрации) с шагом в 1 сутки на 2000 летнем интервале времени (от AD1000 до AD3000) получены файлы скоростей их геодезического вращения.

3. Наиболее существенные члены геодезического вращения исследуемого тела **находятся методами наименьших квадратов и спектрального анализа.**

Средние долготы планет и Луны взяты из работы (Brumberg and Bretagnon, 2000).

Средняя долгота Плутона взята из предыдущего исследования (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 2007).

**Систематические и периодические члены скорости  
геодезического вращения:**

$$\Delta \dot{x} = \sum_{n=1}^3 \Delta \dot{x}_n t^{n-1} + \sum_i \sum_{k=0}^4 (\Delta \dot{x}_{Cik} \cos Arg_i + \Delta \dot{x}_{Sik} \sin Arg_i) t^k,$$

где  $\dot{x} = \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, I\dot{\sigma}, \dot{\rho}, \dot{\tau}$ ;  $Arg_i = v_{i0} + v_{i1}t$ .

**Систематические и периодические члены геодезического  
вращения:**

$$\Delta x = \int \Delta \dot{x} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x = \sum_{n=1}^3 \frac{\Delta \dot{x}_n}{n} t^n + \sum_i \sum_{k=0}^4 (\Delta x_{Cik} \cos Arg_i + \Delta x_{Sik} \sin Arg_i) t^k,$$

где  $x = \psi, \theta, \varphi, I\sigma, \rho, \tau$ .

## Каскад метод:

$$\begin{aligned}\Delta x_{Sim} &= \frac{\Delta \dot{x}_{Cim}}{V_{i1}}; & \Delta x_{Cim} &= \frac{-\Delta \dot{x}_{Sim}}{V_{i1}}; \\ \Delta x_{Sim-1} &= \frac{\Delta \dot{x}_{Cim-1} - m\Delta x_{Cim}}{V_{i1}}; & \Delta x_{Cim-1} &= \frac{m\Delta x_{Sim} - \Delta \dot{x}_{Sim-1}}{V_{i1}}; \\ & \dots & & \\ \Delta x_{Si1} &= \frac{\Delta \dot{x}_{Ci1} - 2\Delta x_{Ci2}}{V_{i1}}; & \Delta x_{Ci1} &= \frac{2\Delta x_{Si2} - \Delta \dot{x}_{Si1}}{V_{i1}}; \\ \Delta x_{Si0} &= \frac{\Delta \dot{x}_{Ci0} - \Delta x_{Ci1}}{V_{i1}}; & \Delta x_{Ci0} &= \frac{\Delta x_{Si1} - \Delta \dot{x}_{Si0}}{V_{i1}},\end{aligned}$$

где  $\dot{x} = \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, I\dot{\sigma}, \dot{\rho}, \dot{\tau}$ ;  $x = \psi, \theta, \varphi, I\sigma, \rho, \tau$ ;  $m = 4$ .

**Таблица 3. Систематические члены геодезического вращения**

	Меркурий	Венера	Земля	Земля <i>(V.A.Brumberg, P.Bretagnon, 2000)</i>
	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )			
T	426451871.1763	156031996.8457	19198873.9203	191988273.44
T <sup>2</sup>	42516.8587	686532.2861	-50431.9734	-50386.32
T <sup>3</sup>	-31016.9539	-78618.0389	656.9733	-754.09
	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )			
T	-36012.9217	740859.4714	12.7208	9.55
T <sup>2</sup>	2955.7609	-60227.9511	1951.1507	1954.11
T <sup>3</sup>	185.2315	-628.8788	4125.3775	-4721.80
	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )			
T	-214756714.5660	-113010584.0490	8.7591	2.99
T <sup>2</sup>	-3822.7979	-687071.9738	54775.0582	54771.03
T <sup>3</sup>	21374.8691	78797.6763	-1244.9150	802.06

**Таблица 3. Систематические члены геодезического вращения**

	Меркурий	Венера	Земля	Луна
	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\tau$ ( $\mu\text{as}$ )
T	426451871.1763	156031996.8457	19198873.9203	19494124.5437
T <sup>2</sup>	42516.8587	686532.2861	-50431.9734	12.3515
T <sup>3</sup>	-31016.9539	-78618.0389	656.9733	-565.0947
	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\rho$ ( $\mu\text{as}$ )
T	-36012.9217	740859.4714	12.7208	300.5067
T <sup>2</sup>	2955.7609	-60227.9511	1951.1507	1780.4437
T <sup>3</sup>	185.2315	-628.8788	4125.3775	3126.0421
	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta I\sigma$ ( $\mu\text{as}$ )
T	-214756714.5660	-113010584.0490	8.7591	-6544.4452
T <sup>2</sup>	-3822.7979	-687071.9738	54775.0582	36212.8892
T <sup>3</sup>	21374.8691	78797.6763	-1244.9150	-27286.6251

**Таблица 3. Систематические члены геодезического вращения**  
(продолжение)

	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран
	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )			
T	7114256.1713	213015.3078	67188.6365	11924.5614
T <sup>2</sup>	-10336.0320	-3541.1286	54.6002	21.3021
T <sup>3</sup>	-9163.2412	-15.0136	-17.0358	24.8305
	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )			
T	-119872.4123	5967.0475	2897.7159	160.6285
T <sup>2</sup>	1073.5488	-144.1639	27.8318	-1.4159
T <sup>3</sup>	186.5419	5.7500	-4.7791	0.4365
	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )			
T	-405155.9058	98655.1845	1444.1122	-10.3257
T <sup>2</sup>	11510.0074	3561.4952	-137.5508	1.0611
T <sup>3</sup>	728.0654	189.2404	-3.7812	-0.0074

**Таблица 3. Систематические члены геодезического вращения**  
(о к о н ч а н и е)

	Нептун	Плутон	Солнце	
	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\psi$ ( $\mu\text{as}$ )	
T	3903.9461	2091.7329	870.0239	
T <sup>2</sup>	-4.9188	28.5113	-1.3770	
T <sup>3</sup>	-0.9936	63.8836	0.2568	
	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\theta$ ( $\mu\text{as}$ )	
T	118.7263	532.3802	1.8890	
T <sup>2</sup>	-0.0724	6.9555	-0.0809	
T <sup>3</sup>	-0.0356	16.2397	0.0080	
	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )	$\Delta\phi$ ( $\mu\text{as}$ )	
T	-33.0498	-314.2461	-179.5716	
T <sup>2</sup>	-0.1043	-4.7359	1.3915	
T <sup>3</sup>	0.0312	-9.6817	-0.0433	

**Таблица 4. Периодические члены геодезического вращения**

Меркурий	$\begin{aligned} & (( 2155''.599 - 266''.735T + \dots)\sin\lambda_1 + (- 9688''.162 - 70''.814T + \dots)\cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & (( -0''.182 + 0''.053T + \dots)\sin\lambda_1 + ( 0''.819 - 0''.128T + \dots)\cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((-1085''.536 + 134''.503T + \dots)\sin\lambda_1 + ( 4878''.862 + 34''.862T + \dots)\cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$
Венера	$\begin{aligned} & ((-205''.908 + 12''.505T + \dots)\sin\lambda_2 + (-232''.214 + 14''.500T + \dots)\cos\lambda_2 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & (( -0''.978 + 0''.227T + \dots)\sin\lambda_2 + ( -1''.103 + 0''.258T + \dots)\cos\lambda_2 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & (( 149''.135 - 8''.556T + \dots)\sin\lambda_2 + ( 168''.187 - 9''.937T + \dots)\cos\lambda_2 + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$
Земля	$\begin{aligned} & ((-34''.284 - 7''.360T + \dots)\sin\lambda_3 + (-149''.222 + 6''.464T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (3''.020 - 0''.015T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (0''.015 - 0''.747T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & (( 3'' \cdot 10^{-5} - 0''.007T + \dots)\sin\lambda_3 + ( -2'' \cdot 10^{-5} - 0''.030 T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (5'' \cdot 10^{-4} - 0''.317T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (- 1''.301 - 7'' \cdot 10^{-4}T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & (( 1'' \cdot 10^{-4} - 0''.196T + \dots)\sin\lambda_3 + ( -1'' \cdot 10^{-4} - 0''.851T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (-3''.273 - 0''.004T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (0''.001 + 0''.808T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$
Земля (V.A. Brumberg, P.Bretagnon, 2000)	$\begin{aligned} & ((-34''.28 - 7''.36T + \dots)\sin\lambda_3 + (- 149''.22 + 6''.47T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (3''.01 + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (0''.73T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & (( -0''.03 T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (0''.32T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (- 1''.30 + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((- 0''.20T + \dots)\sin\lambda_3 + (- 0''.85T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (- 3''.28 + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (- 0''.8T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$

**Таблица 4. Периодические члены геодезического вращения**

Меркурий	$\begin{aligned} & ((2155''.599 - 266''.735T + \dots)\sin\lambda_1 + (-9688''.162 - 70''.814T + \dots)\cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((-0''.182 + 0''.053T + \dots)\sin\lambda_1 + (0''.819 - 0''.128T + \dots)\cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((-1085''.536 + 134''.503T + \dots)\sin\lambda_1 + (4878''.862 + 34''.862T + \dots)\cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$
Венера	$\begin{aligned} & ((-205''.908 + 12''.505T + \dots)\sin\lambda_2 + (-232''.214 + 14''.500T + \dots)\cos\lambda_2 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((-0''.978 + 0''.227T + \dots)\sin\lambda_2 + (-1''.103 + 0''.258T + \dots)\cos\lambda_2 + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((149''.135 - 8''.556T + \dots)\sin\lambda_2 + (168''.187 - 9''.937T + \dots)\cos\lambda_2 + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$
Земля	$\begin{aligned} & ((-34''.284 - 7''.360T + \dots)\sin\lambda_3 + (-149''.222 + 6''.464T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (3''.020 - 0''.015T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (0''.015 - 0''.747T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((3'' \cdot 10^{-5} - 0''.007T + \dots)\sin\lambda_3 + (-2'' \cdot 10^{-5} - 0''.030T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (5'' \cdot 10^{-4} - 0''.317T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (-1''.301 - 7'' \cdot 10^{-4}T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((1'' \cdot 10^{-4} - 0''.196T + \dots)\sin\lambda_3 + (-1'' \cdot 10^{-4} - 0''.851T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (-3''.273 - 0''.004T + \dots)\sin(\lambda_3 + D - F) + (0''.001 + 0''.808T + \dots)\cos(\lambda_3 + D - F) + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\psi$ $\Delta\theta$ $\Delta\varphi$
Луна	$\begin{aligned} & ((-34''.279 - 7''.559T + \dots)\sin\lambda_3 + (-149''.201 + 5''.683T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (30''.212 - 0''.001T + \dots)\sin D + (0''.001 + 0''.001T + \dots)\cos D + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((-9'' \cdot 10^{-4} - 0''.008T + \dots)\sin\lambda_3 + (-3'' \cdot 10^{-4} - 0''.025T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (-0''.004 + 0''.010T + \dots)\sin D + (0''.005 + 0''.007T + \dots)\cos D + \dots) \cdot 10^{-6} \\ & ((0''.013 - 0''.111T + \dots)\sin\lambda_3 + (0''.052 - 0''.496T + \dots)\cos\lambda_3 + \\ & (-0''.016 + 0''.093T + \dots)\sin D + (-0''.006 + 0''.004T + \dots)\cos D + \dots) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$	$\Delta\tau$ $\Delta\rho$ $\Delta\sigma$

**Таблица 4. Периодические члены геодезического вращения**  
(продолжение)

Марс	$((543''.435 + 22''.457T + \dots) \sin\lambda_4 + (241''.415 - 40''.426T + \dots) \cos\lambda_4 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((-9''.157 - 0''.241T + \dots) \sin\lambda_4 + (-4''.068 + 0''.742T + \dots) \cos\lambda_4 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((-30''.949 + 0''.392T + \dots) \sin\lambda_4 + (-13''.748 + 3''.044T + \dots) \cos\lambda_4 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$
Юпитер	$((56''.618 - 0''.526T + \dots) \sin\lambda_5 + (-14''.560 - 2''.255T + \dots) \cos\lambda_5 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((1''.587 - 0''.039T + \dots) \sin\lambda_5 + (-0''.408 - 0''.057T + \dots) \cos\lambda_5 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((26''.227 + 2''.506T + \dots) \sin\lambda_5 + (-6''.739 - 1''.722T + \dots) \cos\lambda_5 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$
Сатурн	$((-2''.688 - 5''.015T + \dots) \sin\lambda_6 + (-52''.010 + 3''.313T + \dots) \cos\lambda_6 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((-0''.115 - 0''.219T + \dots) \sin\lambda_6 + (-2''.242 + 0''.102T + \dots) \cos\lambda_6 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((-0''.061 - 0''.097T + \dots) \sin\lambda_6 + (-1''.119 + 0''.291T + \dots) \cos\lambda_6 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$
Уран	$((-22''.392 - 1''.432T + \dots) \sin\lambda_7 + (-3''.418 + 0''.773T + \dots) \cos\lambda_7 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((-0''.302 - 0''.012T + \dots) \sin\lambda_7 + (-0''.046 + 0''.012T + \dots) \cos\lambda_7 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((0''.019 - 0''.002T + \dots) \sin\lambda_7 + (0''.003 - 0''.002T + \dots) \cos\lambda_7 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$
Нептун	$((1''.879 + 0''.301T + \dots) \sin\lambda_8 + (-1''.829 - 0''.066T + \dots) \cos\lambda_8 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((0''.057 + 0''.010T + \dots) \sin\lambda_8 + (-0''.056 - 0''.002T + \dots) \cos\lambda_8 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((-0''.017 - 0''.002T + \dots) \cos\lambda_8 + (0''.015 + 0''.001T + \dots) \cos\lambda_8 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$
Плутон	$((62''.592 - 1''.868T + \dots) \sin\lambda_9 + (0''.307 + 15''.195T + \dots) \cos\lambda_9 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((15''.930 - 0''.489T + \dots) \sin\lambda_9 + (0''.080 + 3''.864T + \dots) \cos\lambda_9 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((-9''.404 + 0''.256T + \dots) \sin\lambda_9 + (-0''.047 - 2''.286T + \dots) \cos\lambda_9 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$

**Таблица 4. Периодические члены геодезического вращения**  
(о к о н ч а н и е)

Солнце	$((0''.123 + 0''.003T + \dots) \sin\lambda_5 + (-0''.032 - 0''.006T + \dots) \cos\lambda_5 +$ $(4'' \cdot 10^{-4} - 1'' \cdot 10^{-4} T + \dots) \sin\lambda_1 + (-0''.002 + 4'' \cdot 10^{-6} T + \dots) \cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\psi$
	$((0''.001 + 1'' \cdot 10^{-4} T + \dots) \sin\lambda_5 + (-3'' \cdot 10^{-4} - 1'' \cdot 10^{-4} T + \dots) \cos\lambda_5 +$ $(-1'' \cdot 10^{-5} + 1'' \cdot 10^{-6} T + \dots) \sin\lambda_1 + (1'' \cdot 10^{-4} + 2'' \cdot 10^{-6} T + \dots) \cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\theta$
	$((-0''.017 + 1'' \cdot 10^{-4} T + \dots) \sin\lambda_5 + (0''.004 + 0''.001T + \dots) \cos\lambda_5 +$ $(-2'' \cdot 10^{-4} + 3'' \cdot 10^{-5} T + \dots) \sin\lambda_1 + (0''.001 - 1'' \cdot 10^{-5} T + \dots) \cos\lambda_1 + \dots) \cdot 10^{-6}$	$\Delta\varphi$

$$\lambda_1 = 4.40260867435 + 26087.9031415742 T. \quad \lambda_6 = 0.87401658845 + 213.2990954380 T$$

$$\lambda_2 = 3.17614652884 + 10213.2855462110 T \quad \lambda_7 = 5.48129370354 + 74.7815985673 T$$

$$\lambda_3 = 1.75347029148 + 6283.0758511455 T. \quad \lambda_8 = 5.31188611871 + 38.1330356378 T$$

$$\lambda_4 = 6.20347594486 + 3340.6124266998 T. \quad \lambda_9 = 0.2480488137 + 25.2270056856 T$$

$$\lambda_5 = 0.59954632934 + 529.6909650946 T \quad D = 5.19846640063 + 77713.7714481804 T.$$

$$D = \lambda_{10} - \lambda_3 + 180^\circ,$$

$\lambda_j$  ( $j=1, \dots, 9$ ) – средние долготы планет и Плутона;  $\lambda_{10}$  – средняя геоцентрическая долгота Луны;

T – Динамическое Барицентрическое Время (Dynamical Barycentric Time) (TDB) измеряется в Юлианских тысячелетиях (tjy) (365250 дней) от эпохи J2000.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Разработан новый метод** для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. **Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение** для геодезического вращения Земли.
- Впервые в углах Эйлера получены новые высокоточные значения геодезического вращения **больших планет, Плутона и Солнца**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Впервые для возмущающих членов физической либрации получены новые высокоточные значения геодезического вращения **Луны**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона геодезическое вращение является несущественным.
- Для планет земной группы и Луны геодезическое вращение является существенным и должно учитываться при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Разработан новый метод** для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. **Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение** для геодезического вращения Земли.
- **Впервые в углах Эйлера** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **больших планет, Плутона и Солнца**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Впервые для возмущающих членов физической либрации получены новые высокоточные значения геодезического вращения **Луны**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона геодезическое вращение является несущественным.
- Для планет земной группы и Луны геодезическое вращение является существенным и должно учитываться при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Разработан новый метод** для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. **Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение** для геодезического вращения Земли.
- **Впервые в углах Эйлера** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **больших планет, Плутона и Солнца**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- **Впервые для возмущающих членов физической либрации** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **Луны**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона геодезическое вращение является несущественным.
- Для планет земной группы и Луны геодезическое вращение является существенным и должно учитываться при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Разработан новый метод** для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. **Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение** для геодезического вращения Земли.
- **Впервые в углах Эйлера** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **больших планет, Плутона и Солнца**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- **Впервые для возмущающих членов физической либрации** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **Луны**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны **будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.**
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона геодезическое вращение является несущественным.
- Для планет земной группы и Луны геодезическое вращение является существенным и должно учитываться при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Разработан новый метод для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение для геодезического вращения Земли.
- Впервые в углах Эйлера получены новые высокоточные значения геодезического вращения больших планет, Плутона и Солнца, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Впервые для возмущающих членов физической либрации получены новые высокоточные значения геодезического вращения Луны, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона геодезическое вращение является несущественным.
- Для планет земной группы и Луны геодезическое вращение является существенным и должно учитываться при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Разработан новый метод** для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. **Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение** для геодезического вращения Земли.
- **Впервые в углах Эйлера** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **больших планет, Плутона и Солнца**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- **Впервые для возмущающих членов физической либрации** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **Луны**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны **будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.**
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона **геодезическое вращение является несущественным.**
- Для планет земной группы и Луны **геодезическое вращение является существенным и должно учитываться** при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Разработан новый метод для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение для геодезического вращения Земли.
- Впервые в углах Эйлера получены новые высокоточные значения геодезического вращения больших планет, Плутона и Солнца, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Впервые для возмущающих членов физической либрации получены новые высокоточные значения геодезического вращения Луны, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона геодезическое вращение является несущественным.
- Для планет земной группы и Луны геодезическое вращение является существенным и должно учитываться при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- Геодезическое вращение должно учитываться, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в пост-ньютоновом приближении.
- При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- **Разработан новый метод** для вычисления величин геодезического вращения любых тел Солнечной системы. **Результаты полученные с помощью этого метода имеют хорошее подтверждение** для геодезического вращения Земли.
- **Впервые в углах Эйлера** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **больших планет, Плутона и Солнца**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- **Впервые для возмущающих членов физической либрации** получены новые высокоточные значения геодезического вращения **Луны**, динамически согласованные с эфемеридой DE422/LE422.
- Полученные аналитические значения для геодезического вращения Луны **будут использованы для численного исследования вращения Луны в релятивистском приближении.**
- Для Солнца, планет гигантов и Плутона **геодезическое вращение является несущественным.**
- Для планет земной группы и Луны **геодезическое вращение является существенным и должно учитываться** при построении высокоточных теорий вращательного движения этих тел Солнечной системы.
- **Геодезическое вращение должно учитываться**, если влияние динамической фигуры тел на их орбитально-вращательное движение исследуется в **пост-ньютоновом приближении.**
- **При обработке результатов лазерной локации Луны должна использоваться** релятивистская теория вращения Луны, так же как релятивистская теория вращения Земли.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *V.A..Brumberg, P.Bretagnon* Kinematical Relativistic Corrections for Earth's Rotation Parameters // in Proc. of IAU Colloquium 180, eds. K.Johnston, D. McCarthy, B. Luzum and G. Kaplan, U.S. Naval Observatory, 2000, pp. 293–302.
2. *Seidelmann P.K., Archinal B.A., A'Hearn M.F., Cruikshank D.P., Hilton J.L., Keller H.U., Oberst J., Simon J.L., Stooke P., Tholen D.J., and Thomas P.C.* (2005): Report of the IAU/IAG Working Group on Carto-graphic Coordinates and Rotational Elements: 2003, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91, pp. 203–215.
3. *Eroshkin G.I., Pashkevich V.V.* (2007): Geodetic rotation of the Solar system bodies, *Artificial Satellites*, Vol. 42, No. 1, pp. 59–70.
4. *Eroshkin G.I., Pashkevich V.V.* (2009): On the geodetic rotation of the major planets, the Moon and the Sun, *Artificial Satellites*, Vol. 44, No. 2, pp. 43–52.

# БЛАГОДАРНОСТЬ

Исследования проводились в  
Главной (Пулковской)  
астрономической обсерватории  
Российской академии наук (РАН)  
и в

Центре космических  
исследований Польской  
академии наук (ПАН).

При финансовой поддержке в  
рамках сотрудничества между  
Польской и Российской  
академиями наук: Тема № 34 и  
персональный грант Александра  
Бжезиньского.

