

# Построение осредненных уравнений движения планетной задачи методом Хори-Депри

А.С.Перминов, Э.Д.Кузнецов

Кафедра астрономии и геодезии  
Уральский федеральный университет

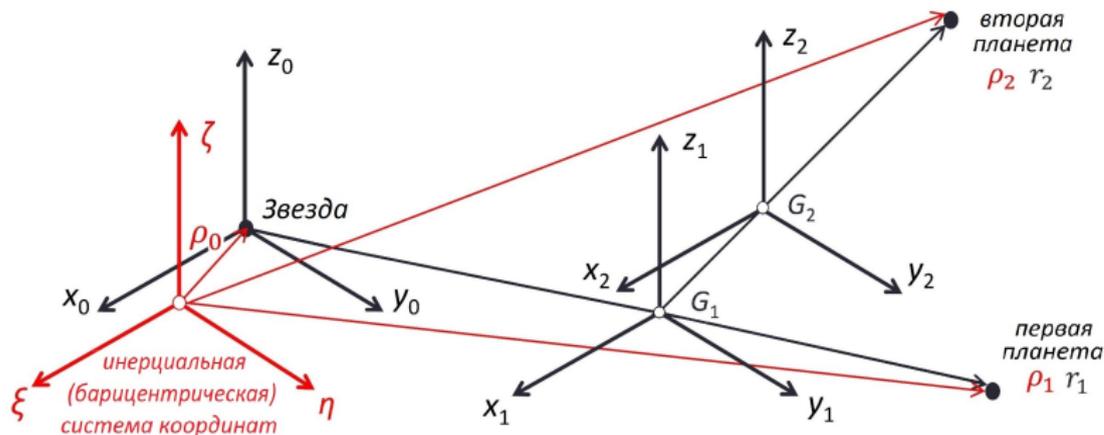
Пулково  
21–25 сентября 2015

# Исследование орбитальной эволюции планетных систем

выполняемое в рамках данной работы можно разделить на три основных этапа:

- ▶ разложение гамильтониана 4-х планетной задачи в ряд Пуассона по всем элементам орбиты;
- ▶ построение осредненных уравнений движения планетной задачи с использованием метода Хори-Депри;
- ▶ численное интегрирование уравнений движения методами Рунге-Кутты и Эверхарта (следующий этап).

# Система координат Якоби



Инерциальная СК → СК Якоби

СК Якоби → Инерциальная СК

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{\bar{m}_N} \boldsymbol{\rho}_0 + \mu \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\bar{m}_N} \boldsymbol{\rho}_k$$

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{r}_0 - \mu \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\bar{m}_N} \mathbf{r}_k$$

$$\mathbf{r}_i = \boldsymbol{\rho}_i - \frac{1}{\bar{m}_{i-1}} \boldsymbol{\rho}_0 - \frac{\mu}{\bar{m}_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} m_k \boldsymbol{\rho}_k$$

$$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_0 + \frac{\bar{m}_{i-1}}{\bar{m}_i} \mathbf{r}_i - \frac{\mu}{\bar{m}_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} m_k \mathbf{r}_k$$

где  $m_0$  – масса звезды,  $\mu m_0 m_i$  – массы планет,  $\mu$  – малый параметр.  
 $G_i$  – барицентр  $i$ -той подсистемы тел,  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор в СК Якоби,  
 $\boldsymbol{\rho}_i$  – радиус-вектор в инерциальной (барицентрической) СК.

# Гамильтониан планетной задачи

Рассмотрим 4-х планетную систему ( $N = 4$ ). Гамильтониан может быть записан в координатах Якоби следующим образом

$$h = - \sum_{i=1}^N \frac{M_i \kappa_i^2}{2a_i} + \mu \times Gm_0 \left\{ \sum_{i=2}^N \frac{m_i (2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu R_i^2)}{r_i \tilde{R}_i (r_i + \tilde{R}_i)} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_i m_j}{|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j|} \right\}.$$

Разность радиус-векторов в барицентрической системе координат

$$|\boldsymbol{\rho}_i - \boldsymbol{\rho}_j| = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j + \mu \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k.$$

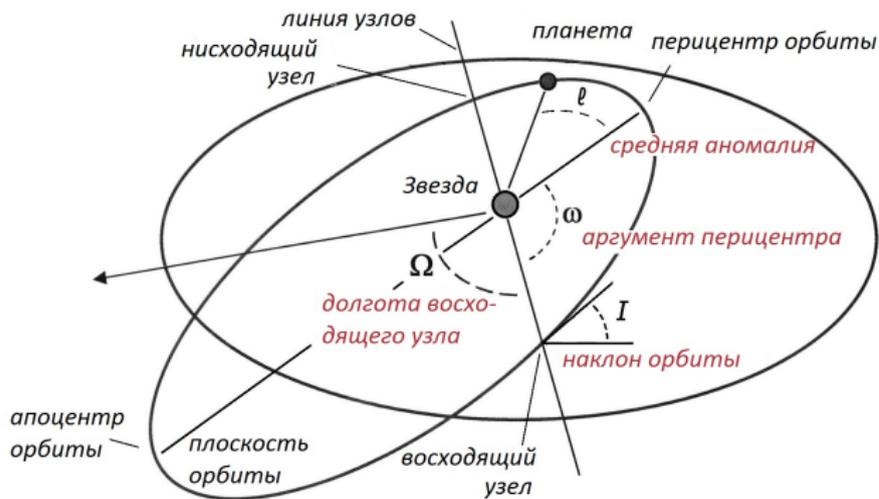
Величины  $\mathbf{R}_i$  и  $\tilde{R}_i$  определяются как

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^i \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad \tilde{R}_i = \sqrt{r_i^2 + 2\mu \mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu^2 R_i^2}.$$

Здесь  $1 \leq j < i \leq N$ ;  $\boldsymbol{\rho}_k$  и  $\mathbf{r}_k$  – радиус-вектора  $k$ -той планеты в барицентрических и координатах Якоби соответственно;  $\mu m_k$  – масса  $k$ -той планеты в массах звезды ( $m_0$ ),  $\bar{m}_k = 1 + \mu m_1 + \dots + \mu m_k$ ,  $M_i$  – приведенная масса,  $\kappa_i^2$  – гравитационный параметр,  $a_i$  – большая полуось орбиты.

Для Солнечной системы можно выбрать  $\mu = 0.001$ .

## Вторая система элементов Пуанкаре



Вторая система элементов Пуанкаре позволяет существенно упростить угловую часть разложения.

Элементы Пуанкаре определяются через классические кеплеровы элементы орбиты:

$$L = M\sqrt{\kappa^2 a}$$

$$\lambda = \omega + \Omega + l$$

$$\xi_1 = \sqrt{2L(1 - \sqrt{1 - e^2})} \cos(\omega + \Omega)$$

$$\eta_1 = -\sqrt{2L(1 - \sqrt{1 - e^2})} \sin(\omega + \Omega)$$

$$\xi_2 = \sqrt{2L\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos I)} \cos \Omega$$

$$\eta_2 = -\sqrt{2L\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos I)} \sin \Omega$$

**Кеплеровы элементы:**  $a$  – большая полуось,  $e$  – эксцентриситет,  $I$  – наклон,  $\omega$  – аргумент перигелия,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $l$  – средняя аномалия.

# Разложение гамильтониана в ряд Пуассона

Запишем разложение гамильтониана планетной задачи следующим образом

$$h = h_0 + \mu h_1 = h_0 + \mu \sum_{k,n} A_{pn} x^k \cos n\lambda,$$

где  $h_0$  – невозмущенный гамильтониан,  $h_1$  – возмущающая функция системы,  $A_{kn}$  – коэффициенты ряда,  $x^k$  – произведение элементов Пуанкаре в соответствующих степенях,  $n\lambda$  – линейная комбинация средних долгот планет.

$$x^k = L_1^{k_1} \xi_{1,1}^{k_2} \eta_{1,2}^{k_3} \xi_{2,1}^{k_4} \eta_{2,2}^{k_5} \cdots L_4^{k_{16}} \xi_{1,4}^{k_{17}} \eta_{1,4}^{k_{18}} \xi_{2,4}^{k_{19}} \eta_{2,4}^{k_{20}}$$

$$n\lambda = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + n_3\lambda_3 + n_4\lambda_4$$

Для аналитических преобразований используется система компьютерной алгебры [Piranha](#)<sup>1</sup>, представляющая собой эшелонированный пуассоновский процессор. Автор программы Франческо Бискани (Институт астрономии им. Макса Планка, Гейдельберг, Германия).

Piranha позволяет проводить аналитические вычисления с различными типами рядов (полиномы, ряды Фурье, ряды Пуассона) и различными типами коэффициентов и степеней переменных (целые, вещественные, рациональные).

---

<sup>1</sup>Biscani F. The Piranha computer algebra system.  
[www.github.com/bluescarni/piranha](http://www.github.com/bluescarni/piranha). 2015

## Алгоритм. Базовые ряды

Рассмотрим классические разложения небесной механики  $\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}, \frac{r}{a}, \frac{a}{r}$ .

Запишем их выражения через функции Бесселя. Например, величины  $\frac{r}{a}, \frac{a}{r}$  можно записать как

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{e}{k} \sum_{k=1}^{\infty} (J_{k+1}(ke) - J_{k-1}(ke)) \cos kl, \quad J_k(ke) - \text{функция Бесселя,}$$
$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kl$$

$e$  – эксцентриситет,  
 $l$  – средняя аномалия

Далее выразим  $e$  и  $l$  через элементы Пуанкаре. Необходимые манипуляции проводятся с помощью системы Piranha. После этого можно получить:

- ▶ отношения расстояний  $\frac{r_i}{r_j}$ , используя ряды для  $\frac{a_j}{r_j}$  и  $\frac{r_i}{a_i}$  ( $1 \leq i < j \leq N$ ),
- ▶ выражения для косинусов углов между радиус-векторами  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$ , используя ряды для величин  $\frac{x_k}{a_k}, \frac{y_k}{a_k}, \frac{z_k}{a_k}$  ( $1 \leq k \leq N$ ).

## Алгоритм. Главная часть возмущающей функции

Слагаемые главной части возмущающей функции

$$\frac{1}{|\rho_i - \rho_j|} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \left( 1 - \frac{2\mu A_{ij} + \mu^2 B_{ij}}{\Delta_{ij}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \mu \frac{A_{ij}}{\Delta_{ij}^3} + \mu^2 \left( \frac{3}{2} \frac{A_{ij}^2}{\Delta_{ij}^5} - \frac{1}{2} \frac{B_{ij}}{\Delta_{ij}^3} \right) + \dots$$

Величины  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  определяются как

$$A_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad B_{ij} = \left( \sum_{k=j}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k \right)^2, \quad 1 \leq i < j \leq N.$$

Обратные расстояния  $\frac{1}{\Delta_{ij}}$  выразим через полиномы Лежандра

$$\frac{1}{\Delta_{ij}} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^{-1} = \frac{1}{r_j} \left( 1 + \left( \frac{r_i}{r_j} \right)^2 - 2 \left( \frac{r_i}{r_j} \right) \cos \theta_{ij} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r_j} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r_i}{r_j} \right)^n P_n(\cos \theta_{ij}),$$

$P_n$  – полином Лежандра порядка  $n$ ,  $\theta_{ij}$  – угол между радиус-векторами  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}_j$ .

Затем необходимо выразить полиномы Лежандра через косинусы углов между радиус-векторами. В нашем случае косинусы не имеют внутренней структуры и сохраняются в рядах как [символьные переменные](#).

## Алгоритм. Вторая часть возмущающей функции

Слагаемые второй части возмущающей функции

$$\frac{2\mathbf{r}_i \mathbf{R}_i + \mu \mathbf{R}_i^2}{r_i \tilde{R}_i (r_i + \tilde{R}_i)} = \frac{C_i}{r_i^3} + \mu \left( -\frac{3}{2} \frac{C_i^2}{r_i^5} + \frac{1}{2} \frac{D_i}{r_i^3} \right) + \mu^2 \left( \frac{5}{2} \frac{C_i^3}{r_i^7} - \frac{3}{2} \frac{C_i D_i}{r_i^5} \right) + \dots$$

Величины  $C_i$ ,  $D_i$  определяются как

$$C_i = \mathbf{r}_i \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k, \quad D_i = B_{i1} = \left( \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k}{\bar{m}_k} \mathbf{r}_k \right)^2, \quad 2 \leq i \leq N.$$

После этого мы можем получить разложение гамильтониана в виде ряда Пуассона (по степеням элементов Пуанкаре; аргументами угловой части являются линейные комбинации средних долгот).

Таким образом, мы имеем 6 слагаемых для главной части и 3 слагаемых для второй части разложения гамильтониана 4-х планетной задачи.

## Результаты. Свойства базовых разложений

- ▶ Вычисления проводились на 4-х ядерном процессоре Core-i5 с частотой 3400 МГц и оперативной памятью 32 Гб.
- ▶ В таблице представлены **время** вычислений, **число слагаемых** и **оценка точности** построения базовых рядов (определяется относительной разностью между оценкой ряда и значением соответствующей величины).

$n$	ряд	$x/a, y/a$	$z/a$	$r/a$	$a/r$	$r_i/r_j$	$\cos \theta_{ij}$	$1/\Delta_{ij}$
5	размер	96	116	46	41	400	2438	10979
	точность	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-6}-10^{-11}$
	время	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.5^s$	$5^s$
6	размер	154	516	66	61	847	6342	41978
	точность	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	$10^{-8}-10^{-10}$
	время	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.1^s$	$0.1^s$	$2^s$	$28^s$
8	размер	333	616	132	127	3004	32035	147893
	точность	$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-10}-10^{-13}$
	время	$0.2^s$	$0.2^s$	$0.2^s$	$0.2^s$	$0.1^s$	$11^s$	$3^m 10^s$
9	размер	460	966	178	173	5158	64691	253683
	точность	$10^{-10}$	$10^{-10}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-11}$	$10^{-11}-10^{-14}$
	время	$0.3^s$	$0.3^s$	$0.3^s$	$0.3^s$	$0.1^s$	$32^s$	$5^m 40^s$

# Результаты. Разложение гамильтониана

- ▶ Построено два варианта разложения функции Гамильтона в ряд Пуассона:
  1. с точностью до  $\mu^1$  и 5 степени по элементам орбиты;
  2. с точностью до  $\mu^2$  и 8 степени по элементам орбиты.
- ▶ Свойства **первого разложения** приведены в таблице ниже

Индексы слагаемых	Слагаемые с $\mu^0$		Слагаемые с $\mu^1$		Размер ряда	Объем файла
	$n_0, p_0$	$N_0$	$n_1, p_1$	$N_1$		
$i, j$	Главная часть возмущающей функции					
1, 2	5, 25	79688	3, 10	20347	100035	14.3 Мб
2, 3	5, 25	79688	3, 10	20347	100035	14.3 Мб
3, 4	5, 25	79688	3, 10	20347	100035	14.3 Мб
1, 3	5, 20	52787	2, 10	30112	82899	13.6 Мб
2, 4	5, 20	52787	2, 10	30112	82899	13.6 Мб
1, 4	5, 15	31178	2, 5	14782	45960	7.7 Мб
$k$	Вторая часть возмущающей функции					
2, 3, 4	5, -	2646	3, -	2436	5082	1.1 Мб
$\Sigma$	Возмущающая функция					
	5, 25	375816	3, 10	141129	516945	79 Мб

## Результаты. Второе разложение (более точное)

- ▶ Построено два варианта разложения функции Гамильтона в ряд Пуассона:
  1. с точностью до  $\mu^1$  и 5 степени по элементам орбиты;
  2. с точностью до  $\mu^2$  и 8 степени по элементам орбиты.
- ▶ Свойства **второго разложения** приведены в таблице ниже

Индексы слагаем.	Слагаемые с $\mu^0$		Слагаемые с $\mu^1$		Слагаемые с $\mu^2$		Размер ряда	Объем файла
	$n_0, p_0$	$N_0$	$n_1, p_1$	$N_1$	$n_2, p_2$	$N_2$		
$i, j$	Главная часть возмущающей функции							
1, 2	8, 40	1448596	5, 15	262662	3, 15	115629	1826887	288 Мб
2, 3	8, 40	1448596	5, 15	262662	3, 15	115629	1826887	288 Мб
3, 4	8, 40	1448596	5, 15	262662	3, 15	115629	1826887	288 Мб
1, 3	8, 20	394516	3, 5	33561	2, 5	51320	479397	73 Мб
2, 4	8, 20	394516	3, 5	33561	2, 5	51320	479397	73 Мб
1, 4	8, 10	114526	3, 5	61046	2, 5	156888	332460	73 Мб
$k$	Вторая часть возмущающей функции							
2, 3, 4	8, -	33426	4, -	8076	2, -	1652	43154	7 Мб
$\Sigma$	Возмущающая функция							
	8, 40	5282772	5, 15	924230	3, 15	608067	6815069	1.1 Гб

## Элементы орбит (Солнечная система, 47UMa, HD69830)

- ▶ Элементы орбит планет-гигантов Солнечной системы даны в СК Якоби и соответствуют эпохе J2000.0.

	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
$m/\mu$	0.9547919	0.2858857	0.0436624	0.0515138
$a$ , а.е.	5.2028870	9.5366759	19.1891646	30.0699228
$e$	0.0483862	0.0538619	0.0472574	0.0085905
$I$	0.0227660	0.0433887	0.0134851	0.0308931
$\Omega$	1.7536005	1.9837835	1.2918390	2.3000686
$\omega$	4.7866452	5.9155571	1.6918760	4.7678998
$l$	варьируем с шагом $36^\circ$			

- ▶ Элементы орбит внесолнечных планет взяты с <http://exoplanet.eu>.

Звезда	Пл.	$m/\mu$	$a$ , а.е.	$e$	$I$	$\omega$	$\Omega$	$l$
47UMa ( $1.03M_\odot$ )	b	2.2720	2.1	0.032	0.05	5.83	варьируем с шагом $60^\circ$ и $36^\circ$ соответств.	
	c	0.4850	3.6	0.098	0.05	5.15		
	d	1.4730	11.6	0.160	0.05	1.92		
HD69830 ( $0.86M_\odot$ )	b	0.0366	0.0785	0.10	0.05	5.93		
	c	0.0422	0.1860	0.13	0.05	3.86		
	d	0.0644	0.6300	0.07	0.05	3.91		

## Оценка точности разложения. Солнечная система

Индексы	разложение до $\mu^1$	$\Delta$	разложение до $\mu^2$	$\Delta$
$i, j$	Главная часть возмущающей функции			
1, 2	$-7.02438 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$-7.02437972 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-10}$
2, 3	$-9.984115 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-8}$	$-9.98411485 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-12}$
3, 4	$-1.87617 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$-1.87616954 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-9}$
1, 3	$-2.80466690 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-10}$	$-2.80466690 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-11}$
2, 4	$-6.16733874 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$-6.16733874 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-11}$
1, 4	$-1.84486941 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-11}$	$-1.84486941 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-10}$
$k$	Вторая часть возмущающей функции			
2, 3, 4	$1.835411 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1.83541075 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-12}$
$\Sigma$	Возмущающая функция			
	$-7.66777 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$-7.66777418 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-10}$

Соответственно для оценки точности разложения гамильтониана получим:

- ▶ в первом случае величину  $\propto 10^{-10}$ ,
- ▶ во втором случае  $\propto 10^{-12}$ .

## Оценка точности разложения. 47UMa, HD69830

Индексы	47UMa	$\Delta$	HD69830	$\Delta$
$i, j$	Главная часть возмущающей функции			
1, 2	-0.283533	$7 \cdot 10^{-7}$	$-1.3349 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$
2, 3	-0.076334	$3 \cdot 10^{-6}$	$-4.68597 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-7}$
1, 3	-0.344733	$7 \cdot 10^{-6}$	$-4.409101 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-8}$
$k$	Вторая часть возмущающей функции			
2, 3	0.00013023	$2 \cdot 10^{-5}$	$-1.3412 \cdot 10^{-6}$	$7 \cdot 10^{-5}$
	Возмущающая функция			
$\Sigma$	-0.704469	$4 \cdot 10^{-6}$	$-2.24430 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-6}$

Здесь точность разложения гамильтониана составляет  $\propto 10^{-9}$ .

## Метод Хори-Депри

Рассмотрим алгоритм построения осредненных уравнений движения. Для выполнения операции осреднения применяется метод Хори-Депри (**метод преобразований Ли**). Пусть  $X$  – вектор медленных переменных задачи, а  $\Lambda$  – вектор быстрых переменных (средние долготы планет), по которым и проводится осреднение.

**Осредненный гамильтониан** задачи может быть записан в виде ряда по степеням малого параметра

$$H(X) = H_0(X) + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m H_m(X).$$

Необходимо определить величины  $H_m$ . Используем главное уравнение метода осреднения

$$H_m = h_m + \sum \frac{1}{r!} \{T_{j_r}, \{\dots, \{T_{j_1}, h_{j_0}\}\}\},$$

где  $0 \leq j_0 \leq m - 1$ ;  $j_1, j_2, \dots, j_r \geq 1$ ;  $\sum_{s=0}^k j_s = m$ ;  $1 \leq r \leq m$ .

**Производящая функция** преобразования также представляется рядом по степеням малого параметра

$$T(X, \Lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m T_m(X, \Lambda).$$

# Скобки Пуассона

Метод основан на применении **скобок Пуассона**. Они определяются следующим образом

$$\{f, g\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right),$$

где  $f, g$  – некоторые функции элементов Пуанкаре,  $p$  – вектор моментов,  $q$  – вектор координат.

$$p = \{L_1, L_2, L_3, L_4, \xi_{1,1}, \xi_{1,2} \cdots \xi_{2,4}\}, \quad q = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \eta_{1,1}, \eta_{2,2} \cdots \eta_{2,4}\}$$

Необходимые вычисления проводятся средствами системы Piranha, позволяющей вычислять необходимые частные производные по элементам орбит и конструировать скобки Пуассона.

## Метод Хори-Депри (продолжение)

На каждом шаге работы алгоритма главное уравнение можно записать в виде

$$H_m = \{T_m, h_0\} + \Phi_m,$$

где  $\Phi_m$  определена на предыдущем шаге. Уравнение равносильно следующему

$$\Phi_m = H_m + \sum_{k=1}^N \nu_k \frac{\partial T_m}{\partial \Lambda_k}.$$

Функции  $\Phi_m$  являются эшелонированными рядами Пуассона вида

$$\Phi_m(X, \Lambda) = \sum_{p,n} B_{pn} X^p \cos n\Lambda,$$

где  $B_{pn}$  – коэффициенты эшелонированного ряда Пуассона (со знаменателями в виде произведений линейных комбинаций частот  $\nu$  быстрых переменных).

Положим

Тогда для  $T_m$  существует решение

$$H_m(X) = \sum_{n \in I_0} B_{pn} X^p,$$

$$T_m(X, \Lambda) = \sum_{n \in I_1} \frac{B_{pn}}{n\nu} X^p \sin n\Lambda,$$

$$I_0 = \{n : n_1 = \dots = n_N = 0\}.$$

$$I_1 = \{n : n_1^2 + \dots + n_N^2 \neq 0\}.$$

# Уравнения движения и функции замены переменных

Слагаемые осредненного гамильтониана (до  $\mu^3$ ):

$$H_0 = h_0, \quad H_1 = \{T_1, h_0\} + h_1,$$

$$H_2 = \{T_2, h_0\} + \{T_1, h_1\} + \frac{1}{2}\{T_1, \{T_1, h_0\}\},$$

$$H_3 = \{T_3, h_0\} + \{T_2, h_1\} + \frac{1}{2}(\{T_2, \{T_1, h_0\}\} + \{T_1, \{T_1, h_1\}\}) + \frac{1}{6}\{T_1, \{T_1, \{T_1, h_0\}\}\}.$$

Уравнения движения в средних элементах имеют вид

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = \{H, X\}, \quad \frac{d\Lambda}{dt} = \{H, \Lambda\}.}$$

Преобразование между средними и оскулирующими элементами дается

функциями замены переменных

$$x = X + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m u_m(X, \Lambda),$$

$$u_{im} = \sum_{r!} \frac{1}{r!} \{T_{j_r}, \{\dots, \{T_{j_1}, X\}\}\}, \quad i = \overline{1, 5N}$$

$$\lambda = \Lambda + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m v_m(X, \Lambda).$$

$$v_{im} = \sum_{r!} \frac{1}{r!} \{T_{j_r}, \{\dots, \{T_{j_1}, \Lambda\}\}\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Область суммирования

$$j_1, j_2, \dots, j_r \geq 1; \sum_{s=0}^k j_s = m; 1 \leq r \leq m.$$

## Свойства рядов

- ▶ Число слагаемых в осредненном гамильтониане и производящей функции (для первого разложения гамильтониана)

$H_0$	$H_1$	$T_1$
4	29747	487198

- ▶ Число слагаемых в уравнениях движения и функциях замены переменных

$\varepsilon$	Уравнения движения	$\varepsilon$	Уравнения движения	$\varepsilon$	Функции замены	$\varepsilon$	Функции замены
$L_1$	0	$\xi_{11}, \eta_{11}$	13830	$L_1$	470706	$\xi_{11}, \eta_{11}$	433005
$L_2$	0	$\xi_{12}, \eta_{12}$	14380	$L_2$	509704	$\xi_{12}, \eta_{12}$	460868
$L_3$	0	$\xi_{13}, \eta_{13}$	14380	$L_3$	509762	$\xi_{13}, \eta_{13}$	460901
$L_4$	0	$\xi_{14}, \eta_{14}$	13830	$L_4$	470880	$\xi_{14}, \eta_{14}$	433104
$\lambda_1$	17562	$\xi_{21}, \eta_{21}$	11955	$\lambda_1$	497400	$\xi_{21}, \eta_{21}$	338478
$\lambda_2$	19219	$\xi_{22}, \eta_{22}$	11955	$\lambda_2$	544402	$\xi_{22}, \eta_{22}$	338478
$\lambda_3$	19226	$\xi_{23}, \eta_{23}$	11955	$\lambda_3$	544544	$\xi_{23}, \eta_{23}$	338478
$\lambda_4$	17583	$\xi_{24}, \eta_{24}$	11955	$\lambda_4$	497826	$\xi_{24}, \eta_{24}$	338478

## Свойства рядов

- ▶ Число слагаемых в осредненном гамильтониане и производящей функции (для второго разложения гамильтониана)

$H_0$	$H_1$	$T_1$
4	207258	6607811

- ▶ Число слагаемых в уравнениях движения и функциях замены переменных

$\varepsilon$	Уравнения движения	$\varepsilon$	Уравнения движения	$\varepsilon$	Функции замены	$\varepsilon$	Функции замены
$L_1$	0	$\xi_{11}, \eta_{11}$	126588	$L_1$	6629954	$\xi_{11}, \eta_{11}$	6254429
$L_2$	0	$\xi_{12}, \eta_{12}$	140799	$L_2$	7801278	$\xi_{12}, \eta_{12}$	7171783
$L_3$	0	$\xi_{13}, \eta_{13}$	140835	$L_3$	7801342	$\xi_{13}, \eta_{13}$	7171812
$L_4$	0	$\xi_{14}, \eta_{14}$	126696	$L_4$	6630146	$\xi_{14}, \eta_{14}$	6254516
$\lambda_1$	147362	$\xi_{21}, \eta_{21}$	105814	$\lambda_1$	6824308	$\xi_{21}, \eta_{21}$	4896428
$\lambda_2$	175749	$\xi_{22}, \eta_{22}$	105814	$\lambda_2$	8131632	$\xi_{22}, \eta_{22}$	4896428
$\lambda_3$	175786	$\xi_{23}, \eta_{23}$	105814	$\lambda_3$	8133236	$\xi_{23}, \eta_{23}$	4896428
$\lambda_4$	147473	$\xi_{24}, \eta_{24}$	105814	$\lambda_4$	6829120	$\xi_{24}, \eta_{24}$	4896428

# Заключение

- ▶ Разложение гамильтониана 4-х планетной задачи в ряд Пуассона получено для двух случаев – до 2 и 3 степеней малого параметра.
- ▶ Проведена оценка точности построенного разложения для Солнечной системы и двух экзопланетных систем – 47UMa и HD69830.
- ▶ Оценка точности разложения гамильтониана в первом случае дает значение около  $10^{-10}$  для Солнечной системы и  $10^{-9}$  для рассмотренных внесолнечных систем. Второе разложение построено с точностью около  $10^{-12}$  (только для Солнечной системы).
- ▶ Получены **осредненный гамильтониан** задачи и **производящая функция** преобразования (до 2 степени малого параметра).
- ▶ **Уравнения движения** и **уравнения замены переменных** получены в первом приближении.
- ▶ Следующий шаг – получение уравнений движения во втором приближении метода Хори-Депри и интегрирование этих уравнений.

Спасибо за внимание!