

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ МЕТОДОМ ЛАПЛАСА В РАМКАХ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ



ВЛАДИМИР КУЗНЕЦОВ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ АСТРОНОМИИ РАН
V.B.KUZNETSOV@IAARAS.RU



Всероссийская астрометрическая конференция "Пулково-2018" 1-5 октября 2018 года

1. Введение

Метод Лапласа [1] для определения предварительной орбиты неизвестных космических объектов широко известен уже более двухсот лет. Большую часть этого времени он рассматривался исключительно в рамках задачи двух тел, пока в начале 80-х годов 20-го века Н. И. Перов не предложил взглянуть на него исходя из обобщённой задачи двух неподвижных центров [2, 3]. В своих работах он обобщил классические уравнения Лапласа путём введения параметров, зависящих от радиуса Земли и значений второй и третьей зональных гармоник её геопотенциала. Причём векторное уравнение движения спутника взято в форме, указанной Аксёновым [4]. Для решения полученной системы уравнений Перов предлагает использовать итеративную схему Ньютона-Рафсона.

В настоящей работе предпринята попытка продолжить изучение данного метода. Во-первых, сделана оценка степени скалярного полинома от одной переменной. Для его получения были использованы уравнения движения спутника в форме, предложенной Емельяновым [5]. Это позволяет оценить максимальное число возможных решений. Во-вторых, для решения алгебраического уравнения был применён метод продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией [6], что позволяет найти все возможные решения в каждом конкретном случае.

2. Обобщённая задача двух неподвижных центров

Рассмотрим обобщённую задачу двух неподвижных центров, в том виде, как она изложена у Н. В. Емельянова [5]. Здесь, притягивающее тело (например Земля) представлено в виде двух точечных масс E_1 и E_2 на оси Z с комплексными значениями

$$\frac{M_{\oplus}}{2}(1+i\sigma), \frac{M_{\oplus}}{2}(1-i\sigma)$$

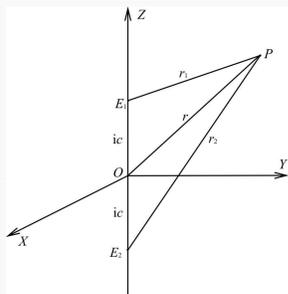


Рис. 1

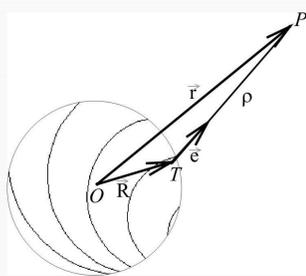


Рис. 2

и с мнимым расстоянием между ними $2ci$ (рис. 1). Здесь, M_{\oplus} – масса Земли,

$$c = R_{\oplus} \sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{2J_2}\right)^2} = 209.729 \text{ км}, \quad \sigma = \frac{J_3}{\sqrt{4J_2^3 - J_3^2}} = -0.035647,$$

где J_2 и J_3 – вторая и третья зональные гармоники геопотенциала.

Силовая функция будет выражаться формулой:

$$W = \frac{GM_{\oplus}}{2} \left[\frac{1+i\sigma}{r_1} - \frac{1-i\sigma}{r_2} \right], \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2 \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

здесь GM_{\oplus} – гравитационная постоянная Земли, а x , y и z – прямоугольные координаты точки. Из силовой функции (1) после дифференцирования по \mathbf{r} можно легко получить векторное уравнение для ускорения объекта:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_{\oplus}}{Ag^3 r^3 \sqrt{2}} \left[(A^2 - \sigma B)\mathbf{r} + c(1 + \sigma^2)\mathbf{BK} \right], \quad (3)$$

где \mathbf{r} – вектор положения объекта относительно центра координат (Земли), \mathbf{K} – единичный вектор, направленный по оси Z .

$$A = \sqrt{a^2 - 3ab^2 + g^3}, \quad B = b^3 - 3a^2b, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$g = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = 1 + \left(\frac{c}{r}\right)^2 (\sigma^2 - 1) - 2\sigma \frac{cz}{r^2}, \quad b = 2\sigma \left(\frac{c}{r}\right)^2 - \frac{2cz}{r^2}. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) не содержат мнимых величин.

3. Метод Лапласа

Обратимся теперь к методу Лапласа [6].

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}\rho + \mathbf{R}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{e}}\rho + \mathbf{e}\dot{\rho} + \dot{\mathbf{R}}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{e}}\rho + 2\dot{\mathbf{e}}\dot{\rho} + \mathbf{e}\ddot{\rho} + \ddot{\mathbf{R}}, \quad (5)$$

здесь \mathbf{r} – радиус-вектор спутника относительно центра Земли, \mathbf{R} – определяет положение наблюдателя на поверхности Земли, ρ – топоцентрическое расстояние до наблюдаемого спутника и \mathbf{e} – единичный вектор топоцентрического направления на него (Рис. 2). Точками обозначены их производные по времени.

Левые части уравнений (3) и третьего из (5) совпадают и мы соответственно можем приравнять правые. Получаем векторное уравнение:

$$\ddot{\mathbf{e}}\rho + 2\dot{\mathbf{e}}\dot{\rho} + \mathbf{e}\ddot{\rho} + \ddot{\mathbf{R}} + \frac{GM_{\oplus}}{Ag^3 r^3 \sqrt{2}} \cdot \left[(A^2 - \sigma B)\mathbf{r} + c(1 + \sigma^2)\mathbf{BK} \right] = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) необходимо разрешить относительно трёх неизвестных: ρ , $\dot{\rho}$ и $\ddot{\rho}$.

Для того, чтобы получить скалярное уравнение относительно ρ умножим (6) векторно на $\dot{\mathbf{e}}$, а затем скалярно на \mathbf{e} :

$$f(\rho) = D_0\rho + D_1 + D_2 \frac{A^2 - \sigma B}{Ag^3 r^3} + D_3 \frac{B}{Ag^3 r^3} = 0, \quad (7)$$

где

$$D_0 = \mathbf{e}(\dot{\mathbf{e}} \times \ddot{\mathbf{e}}), \quad D_1 = \mathbf{e}(\dot{\mathbf{e}} \times \ddot{\mathbf{R}}), \quad D_2 = \frac{GM_{\oplus}}{\sqrt{2}} \mathbf{e}(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{R}),$$

$$D_3 = \frac{GM_{\oplus}}{\sqrt{2}} c(1 + \sigma^2) \mathbf{e}(\dot{\mathbf{e}} \times \mathbf{K}).$$

После подстановки (4), приведения к общему знаменателю и избавления от радикалов мы получим выражение числителя для ρ :

$$f^*(\rho) = \sum_{i=0}^{38} a_i \rho^i = 0. \quad (8)$$

$f^*(\rho)$ представляет собой полином 38-ой степени. Этим же

числом и ограничено максимальное количество решений.

Если мы рассмотрим случай, когда $\sigma=0$, т. е. будем учитывать только сжатие. То степень полинома (8) не изменится. Упростятся лишь его коэффициенты.

4. Поиск решений

4.1 Метод продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией

В качестве метода решения уравнения (7) рассмотрим продолжение решения по параметру [7].

Идея метода заключается в следующем: пусть $H(x, \mu) = 0$ уравнение, которое мы хотим решить, а μ – некий параметр. Тогда для некоторого значения $x = x_0$ решение известно, т. е. $H(x_0, \mu) = 0$ и в этой точке выполняется теорема о неявной функции. Тогда, рассмотрим глобальную гомотопию:

$$G(x, \mu) = H(x) - \mu H(x_0) = 0, \quad (9)$$

где $\mu \in [0, 1]$ и x_0 – начальное приближение ($x_0 = 0$).

Если $\mu = 0$, тогда $G(x, 0) = H(x) = 0$ – исходное уравнение.

Если $\mu = 1$, тогда $G(x, 1) = H(x) - H(x_0) = 0$ и $x = x_0$, т. е. получаем известное решение.

Введём новый параметр $s \in [0, L]$, $L = \text{const}$:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (d\mu)^2, \quad (10)$$

где s – длина дуги интегральной кривой. Параметр s – наилучший параметр для поиска решения [8, 9].

Тогда уравнение (9) можно записать как:

$$G(x(s), \mu(s)) = H(x(s)) - \mu(s) H(x_0) = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим задачу Коши в начальной точке x_0 :

$$\frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{ds} - H(x_0) \frac{d\mu}{ds} = 0. \quad (12)$$

Она приводит к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) из двух уравнений:

$$\frac{dx}{ds} = H(x_0) \left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]^{-1} \frac{d\mu}{ds}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \sqrt{1 - \frac{(dx)^2}{(ds)^2}}. \quad (13)$$

Следует интегрировать систему (13) в направлении роста параметра « s », пока не будет достигнуто $\mu = 0$. Это будет первое решение. Интегрируя дальше, до заданного L , мы найдём остальные решения (если они существуют).

4.2 Метод продолжения для уравнения (7)

Запишем числитель (7) в виде:

$$f(\rho) = Ag^3 r^3 (D_0\rho + D_1) + D_2 A^2 + D_4 B = 0, \quad (14)$$

где $D_4 = D_3 - \sigma D_2$.

Тогда система ОДУ (13) будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho(s)}{ds} &= D_1 R^3 \Theta \sqrt{\Theta + (c^2(\sigma^2 - 1) - 2\sigma c(\mathbf{RK}) + R^2)\Xi}, \\ \frac{d\mu(s)}{ds} &= \sum_{i=0}^3 A_i \rho^i \sqrt{\sum_{j=0}^4 B_j \rho^j + \sum_{i=0}^5 C_i \rho^i + \sqrt{\rho^2 + 2(\mathbf{eR})\rho + R^2}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{12} E_i \rho^i \sqrt{\sum_{j=0}^4 B_j \rho^j + \sum_{i=0}^{14} G_i \rho^i} \right) \left(\sum_{i=0}^6 H_i \rho^i + \left(\sum_{j=0}^4 B_j \rho^j \right)^{3/2} \right)^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$\Theta = \left[(\sigma^2 + 1)c^4 - 4\sigma(\sigma^2 + 1)(\mathbf{RK})c^3 - 4R^2(\mathbf{RK})\sigma c + 2\left((R^2 + 2(\mathbf{RK}))\sigma^2 - R^2 + 2(\mathbf{RK})^2 \right) c^2 + R^4 \right]^{3/2},$$

$$\Xi = (\sigma^4 - 14\sigma^2 + 1)c^4 - 4\sigma(\sigma^2 - 7)(\mathbf{RK})c^3 + R^4 + 2\left[(R^2 + 2(\mathbf{RK}))\sigma^2 - R^2 + 6(\mathbf{RK})^2 \right] c^2 - R^2(\mathbf{RK})\sigma c,$$

$$A_i, B_i, C_i, E_i, G_i, H_i \text{ – коэффициенты зависящие}$$

$$\text{только от известных величин.}$$

Здесь, как и в случае с полиномом, при $\sigma=0$ вид системы (15) не изменится. Изменяются лишь входящие в неё коэффициенты.

5. Выводы

- 1) Система уравнений метода Лапласа для обобщённой задачи двух неподвижных центров может быть сведена к уравнению 38-ой степени.
- 2) Для поиска возможных решений методом продолжения решения по параметру с наилучшей параметризацией получена система из двух дифференциальных уравнений, коэффициенты в правых частях которых зависят только от известных величин.
- 3) Учёт только сжатия ($\sigma=0$) не влияет на порядок полученных уравнений и сказывается только на выражении входящих в них коэффициентов.

6. Литература

1. *Laplace P. S.* Mémoire sur la détermination des orbites des comètes. Mém. Acad. Paris, 1780-1784.
2. *Перов Н. И.* Нетрадиционный метод определения возмущённых орбит неизвестных космических объектов по малому числу оптических наблюдений // *Астрономический Журнал*, т. 60, №6, с.1224-1227, 1983.
3. *Перов Н. И.* К методу определения возмущённых орбит неизвестных космических объектов по оптическим наблюдениям // *Астрономический Журнал*, т. 64, №1, с.187-195, 1987.
4. *Аксёнов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 360 стр., 1977.
5. *Емельянов Н. В.* Практическая небесная механика. Физ. фак. МГУ, Москва, 270 с., 2018.
6. *Мультион Ф. Р.* Введение в небесную механику. М., Л.: ОНТИ НКТП СССР, 480 стр., 1935.
7. *Давиденко Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения нелинейных уравнений // *ДАН СССР*. Т. 88, No 4, с. 601-602, 1953.
8. *Шалашилин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. Эдиториал УРСС. Москва, 1999.
9. *Кузнецов В. Б.* Определение орбиты по двум векторам положения методом продолжения по параметру с наилучшей параметризацией. *Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове*. № 223, с. 207-212, 2016.