Вращение абсолютно твёрдого тела в пост-ньютоновом приближении

В.В.Пашкевич

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория
Российской Академии наук
Санкт-Петербург
Россия

Всероссийская астрометрическая конференция
«Пулково 2018»
(02.10.2018)

Цели данного исследования:

1. **Вывод функции Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела, порождаемого метрическими свойствами псевдориманова пространства общей теории относительности.**

Цели данного исследования:

1. **Вывод функции Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела[1], порождаемого метрическими свойствами псевдориманова пространства общей теории относительности.**

[1]Как известно, в Общей Теории Относительности не существует понятия «абсолютно твердое тело» ввиду конечности скорости распространения гравитационного взаимодействия. Однако погрешность, следующая из нашего предположения, пренебрежимо мало исказит моделируемое динамическое явление (Xu C., Tao J.-H., Wu X., 2018**) .**

Цели данного исследования:

1. **Вывод функции Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела, порождаемого метрическими свойствами псевдориманова пространства общей теории относительности.**
2. **Вывод в релятивистском приближении возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом.**

Цели данного исследования:

1. **Вывод функции Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела, порождаемого метрическими свойствами псевдориманова пространства общей теории относительности.**
2. **Вывод в релятивистском приближении возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом.**

Постановка и Математическая модель задачи

Функция Лагранжа системы невращающихся точечных масс в пост-ньютоновом приближении (Ландау, Лифшиц, 1967) имеет вид:

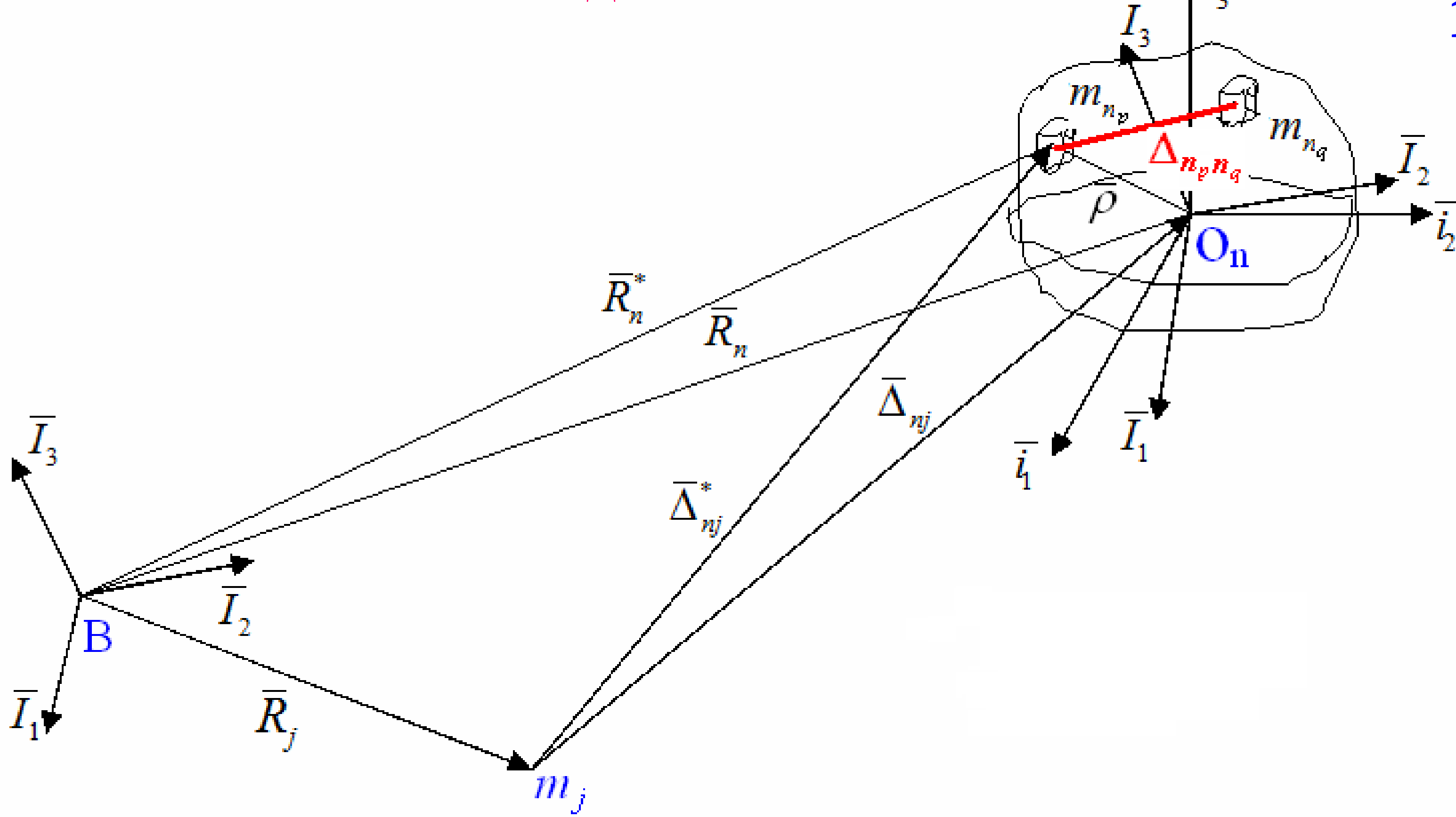
$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{R}}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{k\neq i} \frac{G m_i m_k}{\Delta_{ik}} + \frac{1}{c^2}\left\{ \frac{3}{2}\sum_i \sum_{k\neq i} \frac{G m_i m_k}{\Delta_{ik}} \dot{\bar{R}}_i^2 + \frac{1}{8}\sum_i m_i \dot{\bar{R}}_i^4 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\sum_i \sum_{k\neq i} \frac{G m_i m_k}{\Delta_{ik}} \left[7\dot{\bar{R}}_i \cdot \dot{\bar{R}}_k + \dot{\bar{R}}_i \cdot \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_k}{\Delta_{ik}} \dot{\bar{R}}_k \cdot \frac{\bar{R}_i - \bar{R}_k}{\Delta_{ik}} + 2\sum_{s\neq i} \frac{G m_s}{\Delta_{is}} \right] \right\}.$$

Здесь G обозначает квадрат гауссовой гравитационной постоянной; m_i, m_k, m_s – массы i-го, k-го и s-го точечного тела, соответственно; с – скорость света в вакууме; $\bar{R}_i, \dot{\bar{R}}_i, \bar{R}_k, \dot{\bar{R}}_k$ – барицентрические векторы положения и скорости i-ой и k-ой точечных масс, соответственно;

$$\Delta_{ij} = \sqrt{\left(X_i - X_j\right)^2 + \left(Y_i - Y_j\right)^2 + \left(Z_i - Z_j\right)^2} = \left|\bar{R}_i - \bar{R}_j\right|, \text{ где } j = k \text{ или } s.$$

Постановка задачи



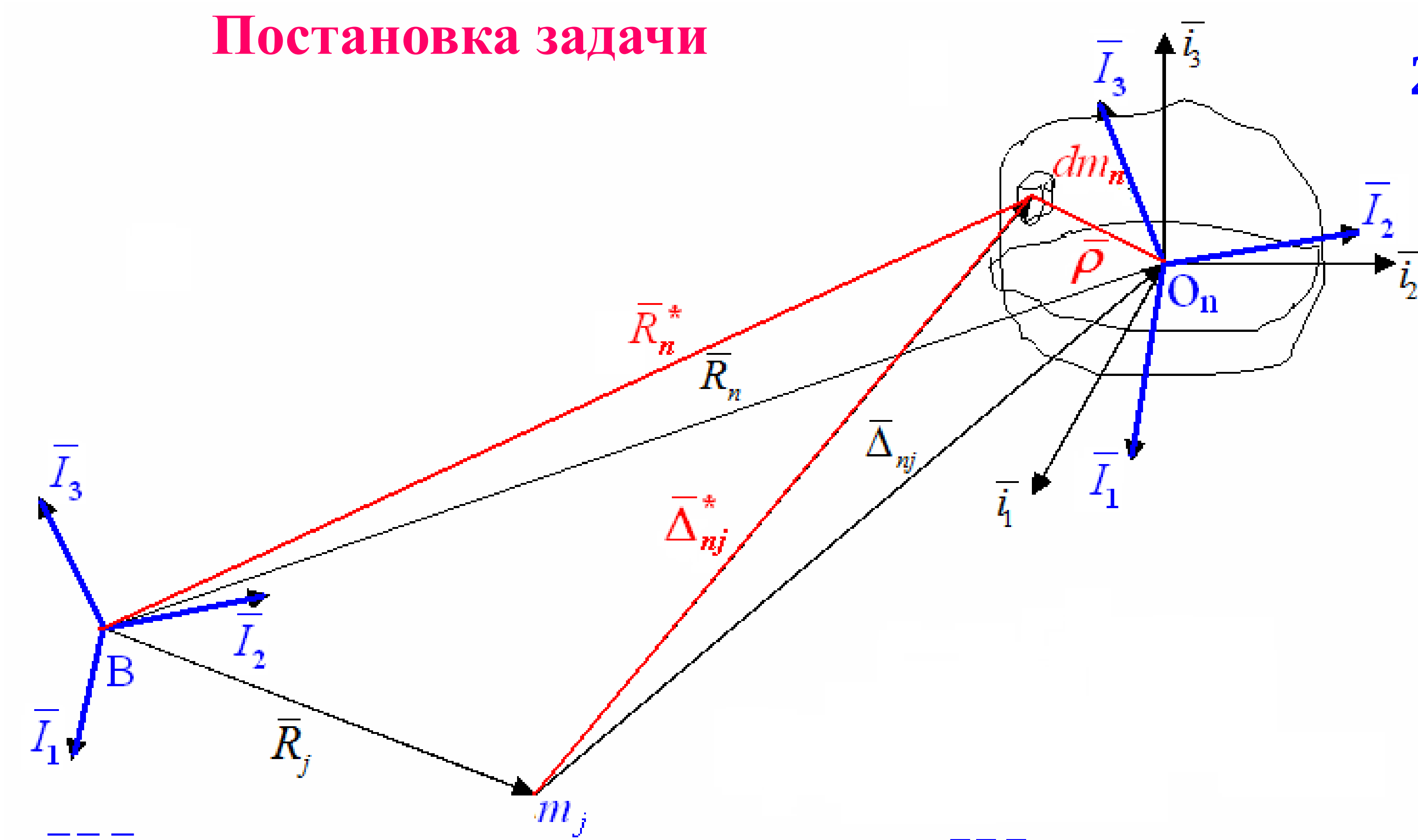
Производится построение функции Лагранжа для случая, когда некоторая совокупность точечных масс $m_{n_\alpha} = dm_n$ из всей системы точечных масс m_i образует «абсолютно твёрдое тело» m_n так, что для любых точечных масс m_{n_p} и m_{n_q} из совокупности m_{n_α} выполняется условие $\Delta_{n_p n_q} \equiv const$.

При этом тело m_n может вращаться вокруг собственного центра масс O_n с угловой скоростью $|\bar{\omega}| \geq 0$, остальные точечные тела m_j из совокупности m_i не вращаются;

m_j является массой j-го тела;

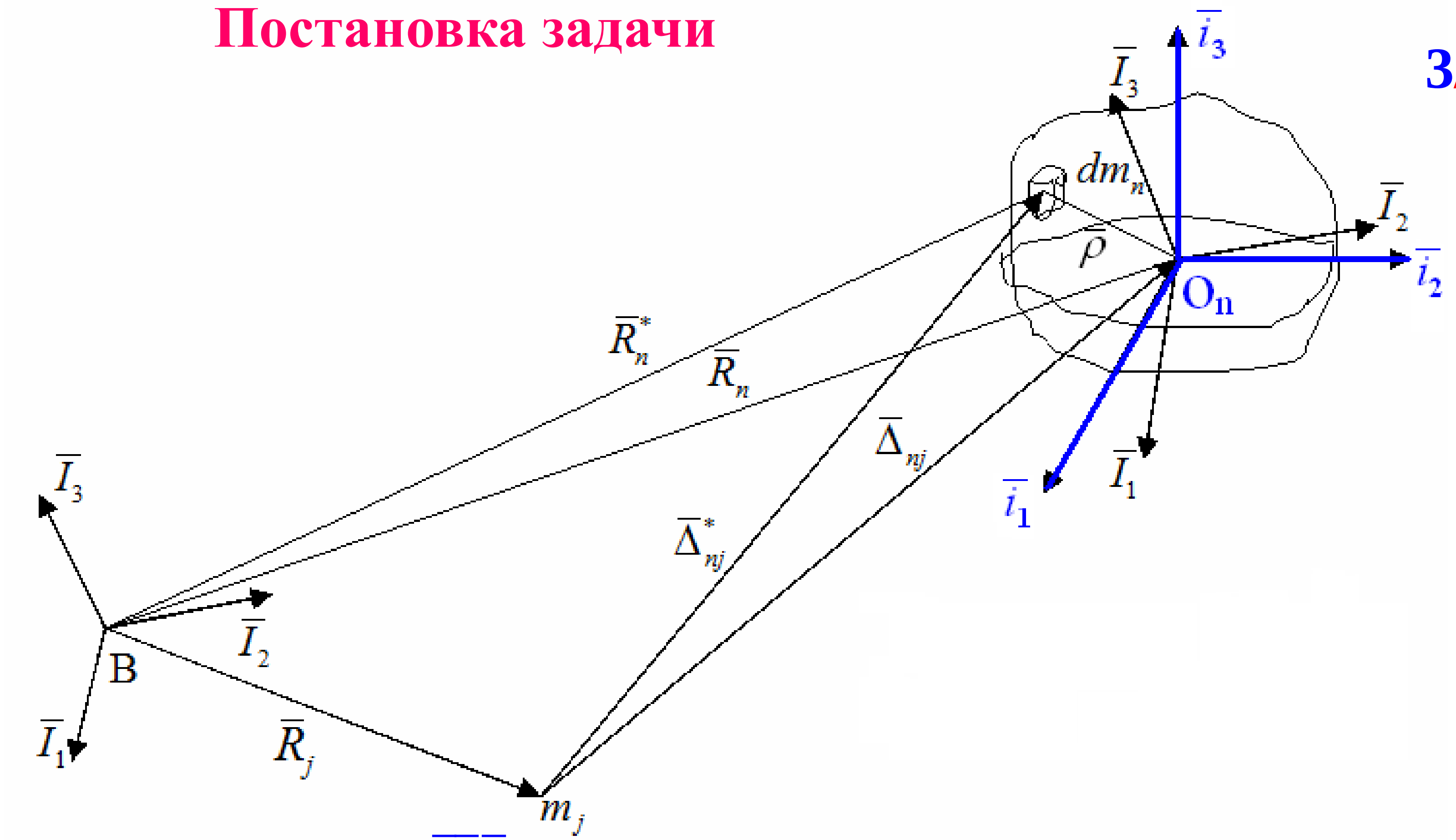
B является барицентром системы точечных масс.

Постановка задачи



Здесь $B\bar{I}_1\bar{I}_2\bar{I}_3$ – барицентрическая система координат; $O_n\bar{I}_1\bar{I}_2\bar{I}_3$ – вспомогательная система координат абсолютно твёрдого тела m_n, оси которой параллельны осям барицентрической системы координат; $O_n\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$ – система координат абсолютно твёрдого тела m_n, оси которой являются его главными осями инерции; dm_n – элемент совокупности точечных масс абсолютно твёрдого тела m_n; $\bar{\rho}$ – радиус-вектор элемента масс dm_n; $\bar{R}_n^*$, $\bar{\Delta}_{nj}^*$ – барицентрический и m_j-центрический радиус-векторы элемента масс dm_n, соответственно; $\bar{R}_n$, $\bar{\Delta}_{nj}$ – барицентрический и m_j-центрический радиус-векторы центра масс абсолютно твёрдого тела m_n, соответственно; $\bar{R}_j$ – барицентрический радиус-вектор точечного тела m_j.

Постановка задачи



Координатная система $O_n\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$ абсолютно твёрдого тела m_n вращается относительно барицентрической системы координат с угловой скоростью $\bar{\omega}$.

Радиус-вектор центра масс O_n абсолютно твёрдого тела m_n в системе координат $B\bar{I}_1\bar{I}_2\bar{I}_3$ обозначается $\bar{R}_n = X_n\bar{I}_1 + Y_n\bar{I}_2 + Z_n\bar{I}_3$.

Радиус-вектор элемента масс dm_n в системе координат $B\bar{I}_1\bar{I}_2\bar{I}_3$ обозначается

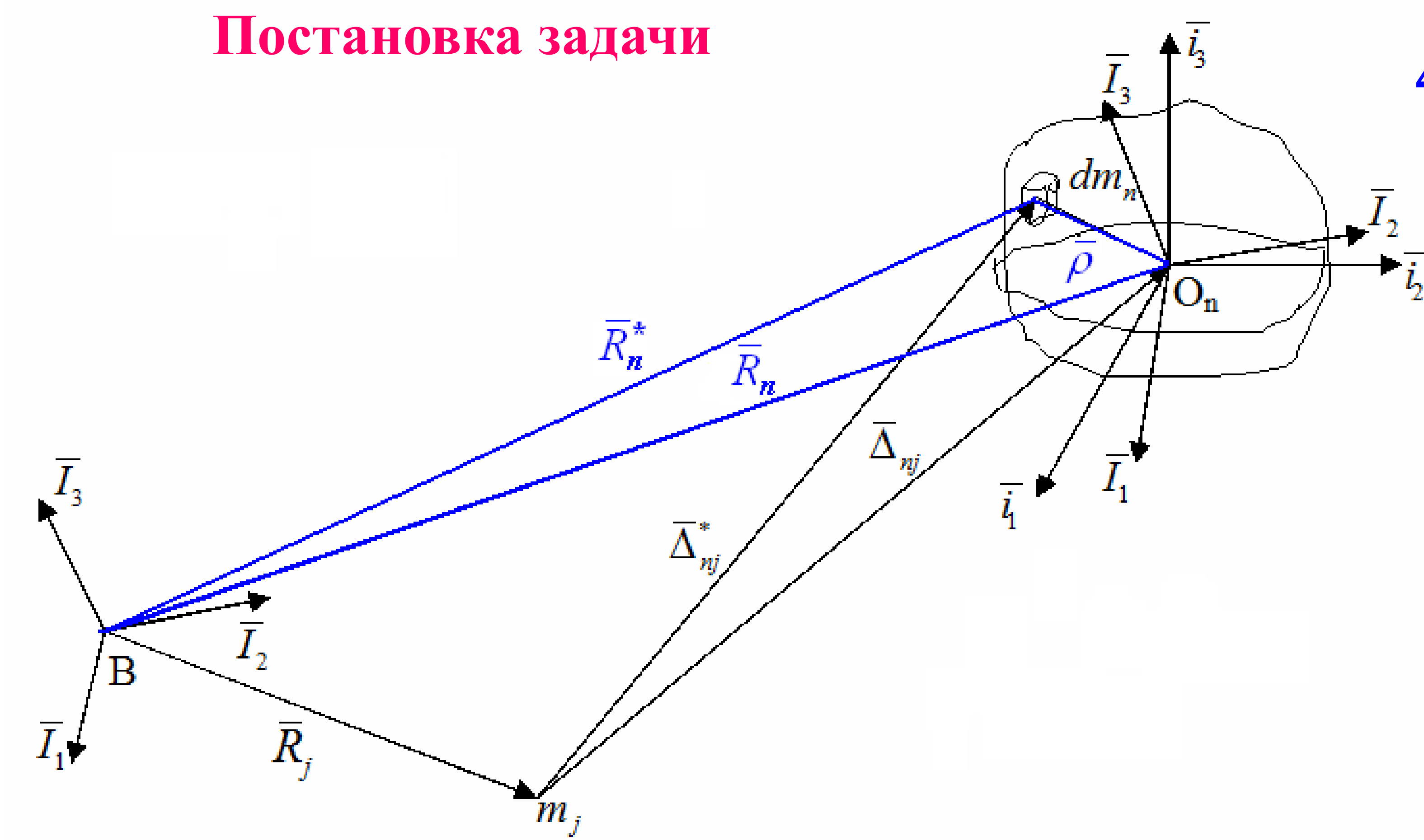
$$\bar{R}_n^* = X_n^*\bar{I}_1 + Y_n^*\bar{I}_2 + Z_n^*\bar{I}_3.$$

Радиус-вектор элемента масс dm_n в системе координат $O_n\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$ обозначается

$$\bar{\rho} = \xi\bar{i}_1 + \eta\bar{i}_2 + \zeta\bar{i}_3,$$

где ξ, η, ζ постоянные величины.

Постановка задачи



Эти три радиус-вектора связаны соотношением $\overline{R}_n^* = \overline{R}_n + \overline{\rho}$. В результате дифференцирования по времени получается соотношение для векторов скорости:

$$\dot{\overline{R}}_n^* = \dot{\overline{R}}_n + \dot{\overline{\rho}}.$$

Вектор скорости элемента масс dm_n абсолютно твёрдого тела m_n в системе координат $O_n\overline{I}_1\overline{I}_2\overline{I}_3$ может быть выражен по формуле Эйлера: $\dot{\overline{\rho}} = \overline{\omega} \times \overline{\rho} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dot{\overline{R}}_n^* = \dot{\overline{R}}_n + \overline{\omega} \times \overline{\rho}.$$

Здесь и далее символ $\times$ означает векторное произведение.

1. Функция Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела может быть получена из функции Лагранжа системы невращающихся точечных масс в пост-ньютоновом приближении (Ландау, Лифшиц, 1967):

$$L = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar{R}}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_i\sum_{k\neq i}\frac{Gm_i m_k}{\Delta_{ik}} + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\sum_i\sum_{k\neq i}\frac{Gm_i m_k}{\Delta_{ik}}\dot{\bar{R}}_i^2 + \frac{1}{8}\sum_i m_i \dot{\bar{R}}_i^4 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}\sum_i\sum_{k\neq i}\frac{Gm_i m_k}{\Delta_{ik}}\left[7\dot{\bar{R}}_i\cdot\dot{\bar{R}}_k + \dot{\bar{R}}_i\cdot\frac{\bar{R}_i-\bar{R}_k}{\Delta_{ik}}\dot{\bar{R}}_k\cdot\frac{\bar{R}_i-\bar{R}_k}{\Delta_{ik}} + 2\sum_{s\neq i}\frac{Gm_s}{\Delta_{is}}\right]\right\}.$$

Оставляем в следующих разложениях сумм, только члены соответствующие абсолютно твёрдому телу m_n для одинарных сумм и возмущающие члены между массами абсолютно твёрдого тела m_n и других точечных тел для двойных сумм:

$$\sum_i f_i = \sum_n f_n + \cancel{\sum_j f_j};\qquad \sum_i\sum_{l\neq i} f_{ij} = \sum_n\sum_j f_{nj} + \cancel{\sum_j\sum_{k\neq j} f_{jk}} + \sum_j\sum_n f_{jn};$$

в теле m_n члены

вне тела m_n члены

возмущающие члены

вне тела m_n члены

возмущающие члены

$$\Rightarrow \sum_i\sum_{l\neq i} f_{il}\sum_{s\neq i} g_{is} = \sum_n\sum_j f_{nj}\sum_j g_{nj} + \sum_j\sum_n f_{jn}\sum_n g_{jn}$$

Итак, из суммы по индексу *i* выделяются члены, соответствующие телу m_n, обозначив их индексом *n*. При этом индекс *j* во второй сумме, если она есть, принимает все значения кроме значений, соответствующих индексу *n*:

$$L=\frac{1}{2}\sum_n dm_n\dot{\bar{R}}_n^{*2}+\frac{1}{2}\sum_j m_j\dot{\bar{R}}_j^{2}+\frac{1}{2}\sum_n\sum_j\frac{Gdm_nm_j}{\Delta_{nj}^{*}}+\frac{1}{2}\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{Gm_jm_k}{\Delta_{jk}}+\frac{1}{2}\sum_j\sum_n\frac{Gm_jdm_n}{\Delta_{nj}^{*}}+$$

$$+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\sum_n\sum_j\frac{Gdm_nm_j}{\Delta_{nj}^{*}}\dot{\bar{R}}_n^{*2}+\frac{3}{2}\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{Gm_jm_k}{\Delta_{jk}}\dot{\bar{R}}_j^{2}+\frac{3}{2}\sum_j\sum_n\frac{Gm_jdm_n}{\Delta_{nj}^{*}}\dot{\bar{R}}_j^{2}+\right.$$

$$+\frac{1}{8}\sum_n dm_n\dot{\bar{R}}_n^{*4}+\frac{1}{8}\sum_j m_j\dot{\bar{R}}_j^{4}-$$

$$-\frac{1}{4}\sum_n\sum_j\frac{Gdm_nm_j}{\Delta_{nj}^{*}}\left[7\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\dot{\bar{R}}_j+\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\frac{\bar{R}_n^{*}-\bar{R}_j}{\Delta_{nj}^{*}}\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\bar{R}_n^{*}-\bar{R}_j}{\Delta_{nj}^{*}}+2\sum_j\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^{*}}\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sum_j\sum_n\frac{Gm_jdm_n}{\Delta_{nj}^{*}}\left[7\dot{\bar{R}}_j\cdot\dot{\bar{R}}_n^{*}+\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\bar{R}_j-\bar{R}_n^{*}}{\Delta_{nj}^{*}}\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\frac{\bar{R}_j-\bar{R}_n^{*}}{\Delta_{nj}^{*}}+2\sum_n\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^{*}}\right]\right\}$$

Итак, из суммы по индексу *i* выделяются члены, соответствующие телу m_n, обозначив их индексом *n*. При этом индекс *j* во второй сумме, если она есть, принимает все значения кроме значений, соответствующих индексу *n*:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_n dm_n \dot{\bar{R}}_n^{*2} + \cancel{\frac{1}{2}\sum_j m_j \dot{\bar{R}}_j^{\,2}} + \frac{1}{2}\sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*} + \cancel{\frac{1}{2}\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{Gm_j m_k}{\Delta_{jk}}} + \frac{1}{2}\sum_j\sum_n \frac{Gm_j dm_n}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_n^{*2} + \cancel{\frac{3}{2}\sum_j\sum_{k\neq j}\frac{Gm_j m_k}{\Delta_{jk}}\dot{\bar{R}}_j^{\,2}} + \frac{3}{2}\sum_j\sum_n \frac{Gm_j dm_n}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j^{\,2} + \right.$$

$$+\frac{1}{8}\sum_n dm_n \dot{\bar{R}}_n^{*4} + \cancel{\frac{1}{8}\sum_j m_j \dot{\bar{R}}_j^{\,4}} -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\left[7\,\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\dot{\bar{R}}_j + \dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\frac{\bar{R}_n^{*}-\bar{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\,\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\bar{R}_n^{*}-\bar{R}_j}{\Delta_{nj}^*} + 2\sum_j \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right] -$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sum_j\sum_n \frac{Gm_j dm_n}{\Delta_{nj}^*}\left[7\,\dot{\bar{R}}_j\cdot\dot{\bar{R}}_n^{*} + \dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\bar{R}_j-\bar{R}_n^{*}}{\Delta_{nj}^*}\,\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\frac{\bar{R}_j-\bar{R}_n^{*}}{\Delta_{nj}^*} + 2\sum_n \frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right]\right\}$$

После приведения подобных членов функция Лагранжа для случая релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела m_n имеет вид:

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_n dm_n \dot{\bar{R}}_n^{*2} + \sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_n^{*2} + \frac{3}{2}\sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j^{\,2} + \frac{1}{8}\sum_n dm_n \dot{\bar{R}}_n^{*4} -\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_n\sum_j \frac{Gdm_n m_j}{\Delta_{nj}^*}\left[7\dot{\bar{R}}_n^* \cdot \dot{\bar{R}}_j + \dot{\bar{R}}_n^* \cdot \frac{\bar{R}_n - \bar{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j \cdot \frac{\bar{R}_n^* - \bar{R}_j}{\Delta_{nj}^*}\right] -$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_n dm_n\left(\sum_j \frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_j m_j\left(\sum_n \frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2\right\}$$

После естественной замены знаков суммирования по индексу *n* на знаки интегрирования по области m_n, эти члены принимают вид:

$$L_n = \frac{1}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{8c^2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*4} dm_n + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_j^{\,2}\int\limits_{m_n}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{7}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^*\cdot\dot{\bar{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^*\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\int\limits_{m_n}\left(\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n} m_j\left(\int\limits_{m_n}\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2.$$

Здесь и далее $\Delta_{nj}^* = \left|\bar{R}_n - \bar{R}_j + \bar{\rho}\right|$.

После естественной замены знаков суммирования по индексу n на знаки интегрирования по области m_n, эти члены принимают вид:

$$L_n = \frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{8c^2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*4} dm_n + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\int_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_j^{\,2}\int_{m_n}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{7}{2}\int_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\dot{\bar{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^{*}\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^{*}-\bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^{*}-\bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\int_{m_n}\left(\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n} m_j\left(\int_{m_n}\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2.$$

Здесь и далее $\Delta_{nj}^* = \left|\bar{R}_n - \bar{R}_j + \bar{\rho}\right|$.

Обычно в небесной механике $\bar{\rho} << \bar{\Delta}_{nj}$. Подынтегральные выражения разлагаются в ряд по степеням параметра $\frac{|\bar{\rho}|}{\Delta_{nj}}$, который является малой величиной, например, ввиду того, что размеры больших тел Солнечной системы малы по сравнению с расстояниями между ними. В силу определения координатной системы $O_n\bar{i}_1\bar{i}_2\bar{i}_3$, все интегралы видов $\int_{m_n}\xi dm_n, \int_{m_n}\eta dm_n, \int_{m_n}\zeta dm_n, \int_{m_n}\xi\eta dm_n, \int_{m_n}\eta\zeta dm_n, \int_{m_n}\zeta\xi dm_n$ тождественно равны нулю (*).

Вычисление функции Лагранжа для релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела

$$L_n = \frac{1}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{8c^2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*4} dm_n + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_j^{\,2}\int\limits_{m_n}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{7}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^* \cdot \dot{\bar{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^* \cdot \frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j \cdot \frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\int\limits_{m_n}\left(\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n} m_j\left(\int\limits_{m_n}\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2.$$

Здесь и далее $\Delta_{nj}^* = \left|\bar{R}_n - \bar{R}_j + \bar{\rho}\right|$

Во всех разложениях подынтегральных выражений сохраняются только главные члены разложения и члены, зависящие от угловой скорости $\bar{\omega}$ или содержащие $\bar{\rho}$ в степени не выше и не меньше в силу (*) второй.

Первые два слагаемых относятся к ньютоновой части функции Лагранжа для релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела.

$$L_n = \frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{8c^2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*4} dm_n + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_j^{\,2}\int_{m_n}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{7}{2}\int_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^*\cdot\dot{\bar{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^*\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\int_{m_n}\left(\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n} m_j\left(\int_{m_n}\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2.$$

Здесь и далее $\Delta_{nj}^* = \left|\bar{R}_n - \bar{R}_j + \bar{\rho}\right|$

Во всех разложениях подынтегральных выражений сохраняются только главные члены разложения и члены, зависящие от угловой скорости $\bar{\omega}$ или содержащие $\bar{\rho}$ в степени не выше и не меньше в силу (*) второй.

Вычисление определённого интеграла зависящего от $\dot{\bar{R}}_n^*$

$$L_n = \frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \ldots$$

1/2

$$\frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n = \frac{1}{2}\dot{\bar{R}}_n^2 m_n + \frac{1}{2}\int_{m_n}\left(\bar{\omega}\times\bar{\rho}\right)^2 dm_n = \frac{1}{2}\dot{\bar{R}}_n^2 m_n + \frac{1}{2}\bar{H}_n\cdot\bar{\omega}.$$

Данное выражение представляет собой кинетическую энергию абсолютно твёр - дого тела m_n (являющуюся суммой кинетических энергий поступательного и враща- тельного движения тела m_n).**Здесь и далее** $\bar{\omega} = \omega_1\bar{i}_1 + \omega_2\bar{i}_2 + \omega_3\bar{i}_3$; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ − **проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции абсолютно твёрдого тела** m_n;

$\bar{H}_n = A_n\omega_1\bar{i}_1 + B_n\omega_2\bar{i}_2 + C_n\omega_3\bar{i}_3$ **является вектором кинетического момента вращатель - ного движения абсолютно твёрдого тела** m_n; A_n, B_n, C_n − **главные моменты инерции второго порядка тела** m_n; $A_n = \int_{m_n}\left(\eta^2+\zeta^2\right)dm_n$; $B_n = \int_{m_n}\left(\zeta^2+\xi^2\right)dm_n$; $C_n = \int_{m_n}\left(\xi^2+\eta^2\right)dm_n$;

$dm_n = p(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta$; $p(\xi,\eta,\zeta)$ − **функция распределения масс тела** m_n.

В частном случае, если тело m_n **является однородным трехосным эллипсоидом с полуосями** a, b, c, **то его моменты инерции определяются следующими выраже- ниями** $A_n = 0.2m_n\left(b^2+c^2\right)$, $B_n = 0.2m_n\left(c^2+a^2\right)$, $C_n = 0.2m_n\left(a^2+b^2\right)$.

Легко видеть, что если $a, b, c \;\to\; 0$, **то и** $A_n, B_n, C_n \;\to\; 0$.

Вычисление определённого интеграла независящего от $\dot{\bar{R}}_n^*$

$$L_n = \frac{1}{2}\int_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \ldots$$

2/2

$$\sum_{j\neq n} Gm_j \int_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} = \sum_{j\neq n} Gm_j \left\langle \frac{m_n}{\Delta_{nj}} - \frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\int_{m_n} \bar{\rho}^2 dm_n + \frac{3}{2\Delta_{nj}^5}\int_{m_n} \left[\bar{\rho}\cdot\left(\bar{R}_n - \bar{R}_j\right)\right]^2 dm_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{j\neq n} Gm_j \left\langle \frac{m_n}{\Delta_{nj}} + \frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n - x_j\right)^2 + B_n\left(y_n - y_j\right)^2 + C_n\left(z_n - z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle;$$

Полученное выражение является возмущающей функцией гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела m_n с другими телами.

Вычисление пост-ньютоновой части функции Лагранжа для релятивистского вращения абсолютно твёрдого тела.

$$L_n = \frac{1}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2} dm_n + \sum_{j\neq n} Gm_j \int\limits_{m_n} \frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} +$$

$$+\frac{1}{8c^2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*4} dm_n + \sum_{j\neq n} \frac{Gm_j}{c^2}\left\{\frac{3}{2}\int\limits_{m_n} \dot{\bar{R}}_n^{*2}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} + \frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_j^{\,2}\int\limits_{m_n}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} - \frac{7}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^*\cdot\dot{\bar{R}}_j\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int\limits_{m_n}\dot{\bar{R}}_n^*\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\dot{\bar{R}}_j\cdot\frac{\left(\bar{R}_n^* - \bar{R}_j\right)}{\Delta_{nj}^*}\frac{dm_n}{\Delta_{nj}^*}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\int\limits_{m_n}\left(\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}^*}\right)^2 dm_n - \frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n} m_j\left(\int\limits_{m_n}\frac{Gdm_n}{\Delta_{nj}^*}\right)^2.$$

Здесь и далее $\Delta_{nj}^* = \left|\bar{R}_n - \bar{R}_j + \bar{\rho}\right|$

Таким образом, пост-ньютоновая часть функции Лагранжа абсолютно твёрдого тела m_n может представлена в следующем виде

$$\Delta L_n = \Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right) + \Delta L_n^{(1)}\left(\omega_k^1\right) + \Delta L_n^{(2)}\left(\omega_k^2\right), \qquad \mathbf{1/5}$$

где $\omega_k,\ k = 1,2,3$ являются компонентами угловой скорости вращения абсолютно твёрдого тела m_n.

Таким образом, пост-ньютоновая часть функции Лагранжа абсолютно твёрдого тела m_n может представлена в следующем виде

$$\Delta L_n = \Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right) + \Delta L_n^{(1)}\left(\omega_k^1\right) + \Delta L_n^{(2)}\left(\omega_k^2\right),$$

где $\omega_k,\ k=1,2,3$ являются компонентами угловой скорости вращения абсолютно твёрдого тела m_n.

Если тело m_n является сферически симметричным, то есть $A_n = B_n = C_n = I_n$, тогда:

$$\Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right) = \frac{1}{8c^2}\dot{\bar{R}}_n^4 m_n + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left\langle\left(\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n^{\,2}}{\Delta_{nj}} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_j^{\,2}}{\Delta_{nj}} - \frac{7}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{\Delta_{nj}} - \frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^3}\right)m_n - \right.$$

$$\left. +\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\frac{3}{4\Delta_{nj}^5}I_n - \frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}I_n\right\rangle;$$

$$\Delta L_n^{(1)}\left(\omega_k^1\right) = -\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\bar{H}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\times\left(\frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_n - 2\dot{\bar{R}}_j\right);$$

$$\Delta L_n^{(2)}\left(\omega_k^2\right) = \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}\bar{H}_n\cdot\bar{\omega}\left(\frac{\dot{\bar{R}}_n^2}{2} + 3\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\right) + \frac{I_n}{4}\left(\dot{\bar{R}}_n\times\bar{\omega}\right)^2\sum_{j\neq n}Gm_j\right].$$

Если тело m_n не является сферически симметричным, тогда пост-ньютоновая часть функции Лагранжа, независящая от компонент угловой скорости ω_k, имеет вид:

3/5

$$\Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right)=$$

$$=\frac{1}{8c^2}\dot{\bar{R}}_n^4 m_n+\frac{1}{c^2}\sum_{j\neq n}Gm_j\left\langle\left(\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n^2}{\Delta_{nj}}+\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_j^2}{\Delta_{nj}}-\frac{7}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{\Delta_{nj}}\right)\left\langle m_n+\frac{1}{2\Delta_{nj}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle-\right.$$

$$-\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^3}\left\{m_n-\frac{15}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{3\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot{x}_j\left(x_n-x_j\right)A_n+\dot{y}_j\left(y_n-y_j\right)B_n+\dot{z}_j\left(z_n-z_j\right)C_n\right]-\frac{3\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot{x}_n\left(x_n-x_j\right)A_n+\dot{y}_n\left(y_n-y_j\right)B_n+\dot{z}_n\left(z_n-z_j\right)C_n\right]-$$

$$\left.-\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}\left(A_n+B_n+C_n\right)+\frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left[\dot{x}_n\dot{x}_jA_n+\dot{y}_n\dot{y}_jB_n+\dot{z}_n\dot{z}_jC_n\right]\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n}\sum_{k\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\frac{Gm_k}{\Delta_{nk}}\left\{m_n+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_k\right)}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta_{nj}^2}+\frac{1}{\Delta_{nk}^2}\right)\right]\left(A_n+B_n+C_n\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)\left(x_n-x_k\right)+B_n\left(y_n-y_j\right)\left(y_n-y_k\right)+C_n\left(z_n-z_j\right)\left(z_n-z_k\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{3}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]-\frac{3}{2\Delta_{nk}^4}\left[A_n\left(x_n-x_k\right)^2+B_n\left(y_n-y_k\right)^2+C_n\left(z_n-z_k\right)^2\right]\right\}$$

$$-\frac{Gm_n}{2c^2}\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\left\langle\frac{m_n}{\Delta_{nj}}+\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle$$

Если тело m_n не является сферически симметричным, тогда пост-ньютоновая часть функции Лагранжа, линейно зависящая от компонент угловой скорости ω_k, имеет вид:

$$\Delta L_n^{(1)}\left(\omega_k^1\right) = -\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left\{\bar{H}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\times\left(\frac{3}{2}\dot{\bar{R}}_n-2\dot{\bar{R}}_j\right)+\right. \qquad \mathbf{4/5}$$

$$+\frac{3}{2}\left(C_n-B_n\right)\omega_1\left[\left(y_n-y_j\right)\left(\dot{z}_n-\dot{z}_j\right)+\left(z_n-z_j\right)\left(\dot{y}_n-\dot{y}_j\right)\right]+$$

$$+\frac{3}{2}\left(A_n-C_n\right)\omega_2\left[\left(z_n-z_j\right)\left(\dot{x}_n-\dot{x}_j\right)+\left(x_n-x_j\right)\left(\dot{z}_n-\dot{z}_j\right)\right]+$$

$$+\frac{3}{2}\left(B_n-A_n\right)\omega_3\left[\left(x_n-x_j\right)\left(\dot{y}_n-\dot{y}_j\right)+\left(y_n-y_j\right)\left(\dot{x}_n-\dot{x}_j\right)\right]-$$

$$-\frac{3\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^2}\left[\left(x_n-x_j\right)\left(y_n-y_j\right)\omega_3\left(B_n-A_n\right)+\left(z_n-z_j\right)\left(x_n-x_j\right)\omega_2\left(A_n-C_n\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\left(y_n-y_j\right)\left(z_n-z_j\right)\omega_1\left(C_n-B_n\right)\right]\right\};$$

Эта дополнительная часть функции Лагранжа для случая геодезического вращения абсолютно твёрдого тела была получена в наших предыдущих исследованиях (Eroshkin G.I., Pashkevich V.V., 1997), (Pashkevich V.V.,2000).

Если тело m_n не является сферически симметричным, тогда пост-ньютоновая часть функции Лагранжа, квадратично зависящая от компонент угловой скорости ω_k^2, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\Delta L_n^{(2)}\left(\omega_k^2\right) = {} & \frac{1}{4c^2}\dot{\bar{R}}_n^2\left(A_n\omega_1^2 + B_n\omega_2^2 + C_n\omega_3^2\right) + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left[\frac{3}{2\Delta_{nj}}\left(A_n\omega_1^2 + B_n\omega_2^2 + C_n\omega_3^2\right) + \right. \\
& + \left(\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1\right)^2\frac{A_n + B_n - C_n}{4} + \left(\dot{x}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_1\right)^2\frac{C_n + A_n - B_n}{4} + \\
& \left. + \left(\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2\right)^2\frac{B_n + C_n - A_n}{4}\right] = \frac{1}{2}\bar{H}_n \cdot \bar{\omega}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{\bar{R}}_n^2}{2} + 3\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\right) + \\
& + \sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{c^2}\left[\left(\dot{x}_n\omega_2 - \dot{y}_n\omega_1\right)^2\frac{A_n + B_n - C_n}{4} + \left(\dot{x}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_1\right)^2\frac{C_n + A_n - B_n}{4} + \right. \\
& \left. + \left(\dot{y}_n\omega_3 - \dot{z}_n\omega_2\right)^2\frac{B_n + C_n - A_n}{4}\right];
\end{aligned}
$$

2. Вывод в релятивистском приближении возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом будет производиться из пост-ньютоновой части функции Лагранжа, независящей от компонент угловой скорости ω_k , для случая когда тело m_n не является сферически симметричным:

1/7

$$\Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right)=$$

$$=\frac{1}{8c^2}\dot{\bar{R}}_n^4 m_n+\frac{1}{c^2}\sum_{j\neq n} Gm_j\left\langle\left(\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n^2}{\Delta_{nj}}+\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_j^2}{\Delta_{nj}}-\frac{7}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{\Delta_{nj}}\right)\left\langle m_n+\frac{1}{2\Delta_{nj}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle-\right.$$

$$-\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^3}\left\{m_n-\frac{15}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{3\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot{x}_j\left(x_n-x_j\right)A_n+\dot{y}_j\left(y_n-y_j\right)B_n+\dot{z}_j\left(z_n-z_j\right)C_n\right]-\frac{3\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot{x}_n\left(x_n-x_j\right)A_n+\dot{y}_n\left(y_n-y_j\right)B_n+\dot{z}_n\left(z_n-z_j\right)C_n\right]-$$

$$\left.-\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}\left(A_n+B_n+C_n\right)+\frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left[\dot{x}_n\dot{x}_jA_n+\dot{y}_n\dot{y}_jB_n+\dot{z}_n\dot{z}_jC_n\right]\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n}\sum_{k\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\frac{Gm_k}{\Delta_{nk}}\left\{m_n+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\bar{R}_n-\bar{R}_j\right)\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_k\right)}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta_{nj}^2}+\frac{1}{\Delta_{nk}^2}\right)\right]\left(A_n+B_n+C_n\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)\left(x_n-x_k\right)+B_n\left(y_n-y_j\right)\left(y_n-y_k\right)+C_n\left(z_n-z_j\right)\left(z_n-z_k\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{3}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]-\frac{3}{2\Delta_{nk}^4}\left[A_n\left(x_n-x_k\right)^2+B_n\left(y_n-y_k\right)^2+C_n\left(z_n-z_k\right)^2\right]\right\}$$

$$-\frac{Gm_n}{2c^2}\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\left\langle\frac{m_n}{\Delta_{nj}}+\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle$$

Оставим в **пост-ньютоновой части функции Лагранжа** $\Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right)$, абсолютно твёрдого тела m_n, **независящей от компонент угловой скорости** ω_k, **слагаемые относящиеся к возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела** m_n с другими телами:

2/7

$$
\begin{aligned}
&\Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right) = \\
&= \cancel{\frac{1}{8c^2}\dot{\bar R}_n^4 m_n} + \frac{1}{c^2}\sum_{j\neq n} Gm_j \left\langle \left(\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar R}_n^2}{\Delta_{nj}} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar R}_j^2}{\Delta_{nj}} - \frac{7}{2}\frac{\dot{\bar R}_n\cdot\dot{\bar R}_j}{\Delta_{nj}}\right)\left\langle m_n + \frac{1}{2\Delta_{nj}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle - \right.\\
&-\frac{\dot{\bar R}_n\cdot\left(\bar R_n-\bar R_j\right)\dot{\bar R}_j\cdot\left(\bar R_n-\bar R_j\right)}{2\Delta_{nj}^3}\left\{m_n-\frac{15}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\} - \\
&-\frac{3\dot{\bar R}_n\cdot\left(\bar R_n-\bar R_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot x_j\left(x_n-x_j\right)A_n+\dot y_j\left(y_n-y_j\right)B_n+\dot z_j\left(z_n-z_j\right)C_n\right]-\frac{3\dot{\bar R}_j\cdot\left(\bar R_n-\bar R_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot x_n\left(x_n-x_j\right)A_n+\dot y_n\left(y_n-y_j\right)B_n+\dot z_n\left(z_n-z_j\right)C_n\right] - \\
&\left.-\frac{\dot{\bar R}_n\cdot\dot{\bar R}_j}{4\Delta_{nj}^3}\left(A_n+B_n+C_n\right)+\frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left[\dot x_n\dot x_j A_n+\dot y_n\dot y_j B_n+\dot z_n\dot z_j C_n\right]\right\rangle - \\
&-\frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n}\sum_{k\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\frac{Gm_k}{\Delta_{nk}}\left\{m_n+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\bar R_n-\bar R_j\right)\cdot\left(\bar R_n-\bar R_k\right)}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta_{nj}^2}+\frac{1}{\Delta_{nk}^2}\right)\right]\left(A_n+B_n+C_n\right) - \right.\\
&-\frac{1}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)\left(x_n-x_k\right)+B_n\left(y_n-y_j\right)\left(y_n-y_k\right)+C_n\left(z_n-z_j\right)\left(z_n-z_k\right)\right] - \\
&\left.-\frac{3}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]-\frac{3}{2\Delta_{nk}^4}\left[A_n\left(x_n-x_k\right)^2+B_n\left(y_n-y_k\right)^2+C_n\left(z_n-z_k\right)^2\right]\right\} - \\
&-\frac{Gm_n}{2c^2}\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\left\langle\frac{m_n}{\Delta_{nj}}+\frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n-x_j\right)^2+B_n\left(y_n-y_j\right)^2+C_n\left(z_n-z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Оставим в **пост-ньютоновой части функции Лагранжа** $\Delta L_n^{(0)}\left(\omega_k^0\right)$, абсолютно твёрдого тела m_n, **независящей от компонент угловой скорости** ω_k, **слагаемые относящиеся к возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела** m_n с другими телами:

$$\Delta U_n = \frac{1}{c^2}\sum_{j\neq n} Gm_j \left\langle \left(\frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n^{\,2}}{\Delta_{nj}} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_j^{\,2}}{\Delta_{nj}} - \frac{7}{2}\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{\Delta_{nj}}\right)\left\langle m_n + \frac{1}{2\Delta_{nj}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n - x_j\right)^2 + B_n\left(y_n - y_j\right)^2 + C_n\left(z_n - z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle -\right.$$

$$- \frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n - \bar{R}_j\right)\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n - \bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^3}\left\{m_n - \frac{15}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n - x_j\right)^2 + B_n\left(y_n - y_j\right)^2 + C_n\left(z_n - z_j\right)^2\right]\right\} -$$

$$- \frac{3\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n - \bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot{x}_j\left(x_n - x_j\right)A_n + \dot{y}_j\left(y_n - y_j\right)B_n + \dot{z}_j\left(z_n - z_j\right)C_n\right] - \frac{3\dot{\bar{R}}_j\cdot\left(\bar{R}_n - \bar{R}_j\right)}{2\Delta_{nj}^5}\left[\dot{x}_n\left(x_n - x_j\right)A_n + \dot{y}_n\left(y_n - y_j\right)B_n + \dot{z}_n\left(z_n - z_j\right)C_n\right] -$$

$$\left. - \frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_j}{4\Delta_{nj}^3}\left(A_n + B_n + C_n\right) + \frac{1}{2\Delta_{nj}^3}\left[\dot{x}_n\dot{x}_j A_n + \dot{y}_n\dot{y}_j B_n + \dot{z}_n\dot{z}_j C_n\right]\right\rangle -$$

$$- \frac{1}{2c^2}\sum_{j\neq n}\sum_{k\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\frac{Gm_k}{\Delta_{nk}}\left\{m_n + \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\bar{R}_n - \bar{R}_j\right)\cdot\left(\bar{R}_n - \bar{R}_k\right)}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta_{nj}^2} + \frac{1}{\Delta_{nk}^2}\right)\right]\left(A_n + B_n + C_n\right) -\right.$$

$$- \frac{1}{\Delta_{nj}^2\Delta_{nk}^2}\left[A_n\left(x_n - x_j\right)\left(x_n - x_k\right) + B_n\left(y_n - y_j\right)\left(y_n - y_k\right) + C_n\left(z_n - z_j\right)\left(z_n - z_k\right)\right] -$$

$$\left. - \frac{3}{2\Delta_{nj}^4}\left[A_n\left(x_n - x_j\right)^2 + B_n\left(y_n - y_j\right)^2 + C_n\left(z_n - z_j\right)^2\right] - \frac{3}{2\Delta_{nk}^4}\left[A_n\left(x_n - x_k\right)^2 + B_n\left(y_n - y_k\right)^2 + C_n\left(z_n - z_k\right)^2\right]\right\} -$$

$$- \frac{Gm_n}{2c^2}\sum_{j\neq n}\frac{Gm_j}{\Delta_{nj}}\left\langle \frac{m_n}{\Delta_{nj}} + \frac{1}{\Delta_{nj}^3}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{nj}^2}\left[A_n\left(x_n - x_j\right)^2 + B_n\left(y_n - y_j\right)^2 + C_n\left(z_n - z_j\right)^2\right]\right\}\right\rangle$$

Вид в ньютоновом приближении возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом.

$$U_n^{Newton}=\frac{Gm_s}{\Delta_{ns}}\left\langle m_n+\frac{1}{2\Delta_{ns}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n\left(x_n-x_s\right)^2+B_n\left(y_n-y_s\right)^2+C_n\left(z_n-z_s\right)^2\right]\right\}\right\rangle$$

Вид релятивистской части возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом.

$$\Delta U_n=\frac{Gm_s}{2c^2\Delta_{ns}}\left\langle\left(3\left[\dot{\bar{R}}_n^{\,2}+\dot{\bar{R}}_s^{\,2}\right]-7\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_s\right)\left\langle m_n+\frac{1}{2\Delta_{ns}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n\left(x_n-x_s\right)^2+B_n\left(y_n-y_s\right)^2+C_n\left(z_n-z_s\right)^2\right]\right\}\right\rangle-\right.$$

$$-\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_s\right)\dot{\bar{R}}_s\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_s\right)}{\Delta_{ns}^2}\left\{m_n-\frac{15}{2\Delta_{ns}^4}\left[A_n\left(x_n-x_s\right)^2+B_n\left(y_n-y_s\right)^2+C_n\left(z_n-z_s\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{3\dot{\bar{R}}_n\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_s\right)}{\Delta_{ns}^4}\left[\dot{x}_s\left(x_n-x_s\right)A_n+\dot{y}_s\left(y_n-y_s\right)B_n+\dot{z}_s\left(z_n-z_s\right)C_n\right]-\frac{3\dot{\bar{R}}_s\cdot\left(\bar{R}_n-\bar{R}_s\right)}{\Delta_{ns}^4}\left[\dot{x}_n\left(x_n-x_s\right)A_n+\dot{y}_n\left(y_n-y_s\right)B_n+\dot{z}_n\left(z_n-z_s\right)C_n\right]-$$

$$\left.-\frac{\dot{\bar{R}}_n\cdot\dot{\bar{R}}_s}{2\Delta_{ns}^2}\left(A_n+B_n+C_n\right)+\frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left[\dot{x}_n\dot{x}_sA_n+\dot{y}_n\dot{y}_sB_n+\dot{z}_n\dot{z}_sC_n\right]\right\rangle-$$

$$-\frac{1}{2c^2}\frac{G^2m_s^2}{\Delta_{ns}^2}\left\{m_n+\frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left(A_n+B_n+C_n\right)-\frac{4}{\Delta_{ns}^4}\left[A_n\left(x_n-x_s\right)^2+B_n\left(y_n-y_s\right)^2+C_n\left(z_n-z_s\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\frac{G^2m_nm_s}{2c^2\Delta_{ns}^2}\left\langle m_n+\frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left\{A_n+B_n+C_n-\frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n\left(x_n-x_s\right)^2+B_n\left(y_n-y_s\right)^2+C_n\left(z_n-z_s\right)^2\right]\right\}\right\rangle$$

Здесь G обозначает квадрат гауссовой гравитационной постоянной; m_n, m_s – массы абсолютно твёрдого тела и точечного тела, соответственно; с – скорость света в вакууме; $\bar{R}_n, \dot{\bar{R}}_n, \bar{R}_s, \dot{\bar{R}}_s$ – барицентрические векторы положения и скорости этих масс соответственно;

$$\Delta_{ns}=\sqrt{\left(X_n-X_s\right)^2+\left(Y_n-Y_s\right)^2+\left(Z_n-Z_s\right)^2}=\left|\bar{R}_n-\bar{R}_s\right|.$$

Вид в релятивистском приближении возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом

(в барицентрической системе координат):

5/7

$$U_n = U_n^{Newton} + \Delta U_n = \frac{Gm_s}{\Delta_{ns}}\left(1 + \frac{1}{2c^2}\left\{3\left[\dot{\bar{R}}_n^{\,2} + \dot{\bar{R}}_s^{\,2}\right] - 7\dot{\bar{R}}_n \cdot \dot{\bar{R}}_s\right\}\right)\times$$

$$\times\left\langle m_n + \frac{1}{2\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n(x_n - x_s)^2 + B_n(y_n - y_s)^2 + C_n(z_n - z_s)^2\right]\right\}\right\rangle -$$

$$-\frac{Gm_s}{2c^2\Delta_{ns}}\left\langle \frac{\dot{\bar{R}}_n \cdot (\bar{R}_n - \bar{R}_s)\dot{\bar{R}}_s \cdot (\bar{R}_n - \bar{R}_s)}{\Delta_{ns}^2}\left\{m_n - \frac{15}{2\Delta_{ns}^4}\left[A_n(x_n - x_s)^2 + B_n(y_n - y_s)^2 + C_n(z_n - z_s)^2\right]\right\} +\right.$$

$$+\frac{3\dot{\bar{R}}_n \cdot (\bar{R}_n - \bar{R}_s)}{\Delta_{ns}^4}\left[\dot{x}_s(x_n - x_s)A_n + \dot{y}_s(y_n - y_s)B_n + \dot{z}_s(z_n - z_s)C_n\right] +$$

$$+\frac{3\dot{\bar{R}}_s \cdot (\bar{R}_n - \bar{R}_s)}{\Delta_{ns}^4}\left[\dot{x}_n(x_n - x_s)A_n + \dot{y}_n(y_n - y_s)B_n + \dot{z}_n(z_n - z_s)C_n\right] +$$

$$\left.+\frac{\dot{\bar{R}}_n \cdot \dot{\bar{R}}_s}{2\Delta_{ns}^2}(A_n + B_n + C_n) + \frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left[\dot{x}_n\dot{x}_s A_n + \dot{y}_n\dot{y}_s B_n + \dot{z}_n\dot{z}_s C_n\right]\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2c^2}\frac{G^2 m_s^2}{\Delta_{ns}^2}\left\{m_n + \frac{1}{\Delta_{ns}^2}(A_n + B_n + C_n) - \frac{4}{\Delta_{ns}^4}\left[A_n(x_n - x_s)^2 + B_n(y_n - y_s)^2 + C_n(z_n - z_s)^2\right]\right\} -$$

$$-\frac{G^2 m_n m_s}{2c^2\Delta_{ns}^2}\left\langle m_n + \frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n(x_n - x_s)^2 + B_n(y_n - y_s)^2 + C_n(z_n - z_s)^2\right]\right\}\right\rangle$$

Вид **в релятивистском приближении** **возмущающей функции гравитационного взаимодействия** **абсолютно твёрдого тела** **с точечным телом**
(в системе координат **совпадающей с центром масс тела, оси которой параллельны осям барицентрической системы координат):**

Здесь $\bar{R}_n = 0 \Rightarrow \bar{R}_s = \bar{\Delta}_{ns}$,

$$U_n = \left[1 + \frac{3\dot{\bar{\Delta}}_{ns}^2}{2c^2}\right]\frac{Gm_s}{\Delta_{ns}}\left\langle m_n + \frac{1}{2\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n x_s^{\,2} + B_n y_s^{\,2} + C_n z_s^{\,2}\right]\right\}\right\rangle -$$

$$-\frac{G^2 m_s^2}{2c^2\Delta_{ns}^2}\left\langle m_n + \frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{4}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n x_s^{\,2} + B_n y_s^{\,2} + C_n z_s^{\,2}\right]\right\}\right\rangle -$$

$$-\frac{G^2 m_n m_s}{2c^2\Delta_{ns}^2}\left\langle m_n + \frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n x_s^{\,2} + B_n y_s^{\,2} + C_n z_s^{\,2}\right]\right\}\right\rangle$$

Исключая малые члены, получаем соотношение между возмущающими функциями гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом в релятивистском и Ньютоновом приближениях (в системе координат совпадающей с центром масс тела, оси которой параллельны осям барицентрической системы координат):

7/7

Здесь $\bar{R}_n = 0 \Rightarrow \bar{R}_s = \bar{\Delta}_{ns}$,

$$U_n = U_n^{Newton} + \Delta U_n =$$

$$= \left[1 + \frac{3\dot{\bar{\Delta}}_{ns}^2}{2c^2}\right] \frac{Gm_s}{\Delta_{ns}} \left\langle m_n + \frac{1}{2\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n x_s^2 + B_n y_s^2 + C_n z_s^2\right]\right\}\right\rangle -$$

$$- \frac{G^2 m_s}{2c^2 \Delta_{ns}^2}\left[m_n + m_s\right]\left\langle m_n + \frac{1}{\Delta_{ns}^2}\left\{A_n + B_n + C_n - \frac{3}{\Delta_{ns}^2}\left[A_n x_s^2 + B_n y_s^2 + C_n z_s^2\right]\right\}\right\rangle -$$

$$- \frac{G^2 m_s^2}{2c^2 \Delta_{ns}^6}\left\langle A_n x_s^2 + B_n y_s^2 + C_n z_s^2\right\rangle \approx \left[1 + \frac{3\dot{\bar{\Delta}}_{ns}^2}{2c^2}\right] U_n^{Newton}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. **В результате данного исследования впервые в явном виде выведена функция Лагранжа вращения абсолютно твёрдого тела в пост-ньютоновом приближении:**

$$L_n = L_n^{Newton} + \Delta L_n.$$

2. **В релятивистском приближении выведена формула для возмущающей функции гравитационного взаимодействия абсолютно твёрдого тела с точечным телом:**

$$U_n = \left[1 + \frac{3\dot{\bar{\Delta}}_{ns}^2}{2c^2}\right] U_n^{Newton}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Суслов Г.К. Теоретическая механика. ОГИЗ, Москва, 1946.
2. Klioner S.A. Angular velocity of rotation of extended bodies in generalrelativity // Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System, (S.Ferraz-Mello et al., eds), 1996, pp. 309–320.
3. Xu C., Tao J.-H., and Wu X. Post Newtonian Rigid Body, http://arxiv.org/abs/gr-qc/0306015 (2003)
4. Мак-Миллан В.Д. Динамика твёрдого тела, Москва, 1951.
5. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля: 1967. "Наука". Москва. 460 с.
6. Eroshkin G.I., Pashkevich V.V. (1997): Numerical simulation of the rotation motion of the Earth and Moon , // Dynamics and Astrometry of Natural and Artifical Celestial Bodies , IAU Colloquium 165 (I.M.Wytrzyszczak, J.H.Lieske, R.A.Feldman, eds), Kluwer, Dordrecht, 1997. pp. 275– 281 .
7. Pashkevich V.V. (2000): Construction of the High-Precision Numerical Theory of the Rigid Earth Rotation , Artificial Satellites, Journal of Planetary Geodesy, Vol.35, No 2, pp. 59–71.
8. Eroshkin G.I., Pashkevich V.V. (2007): Geodetic rotation of the Solar system bodies, Artificial Satellites, Vol. 42, No. 1, pp. 59–70.
9. Eroshkin G.I., Pashkevich V.V. (2009): On the geodetic rotation of the major planets, the Moon and the Sun, Artificial Satellites, Vol. 44, No. 2, pp. 43–52.

Б Л А Г О Д А Р Н О С Т Ь

Исследования проводились в Главной (Пулковской) астрономической обсерватории Российской академии наук (ГАО РАН) и в Центре космических исследований Польской академии наук (ЦКИ ПАН). При финансовой поддержке в рамках сотрудничества между и ЦКИ ПАН и ГАО РАН персональных грантов Александра Бжезиньского и Иоланты Настулы.