

ПРОБЛЕМА РЕДУКЦИИ УГЛОВ ВРАЩЕНИЯ ЛУНЫ, ПОЛУЧЕННЫХ В РАЗНЫХ ТЕОРИЯХ ЛУННОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛИБРАЦИИ

Казанский (Поволжский) Федеральный университет

Загидуллин А. А.

Усанин В. С.

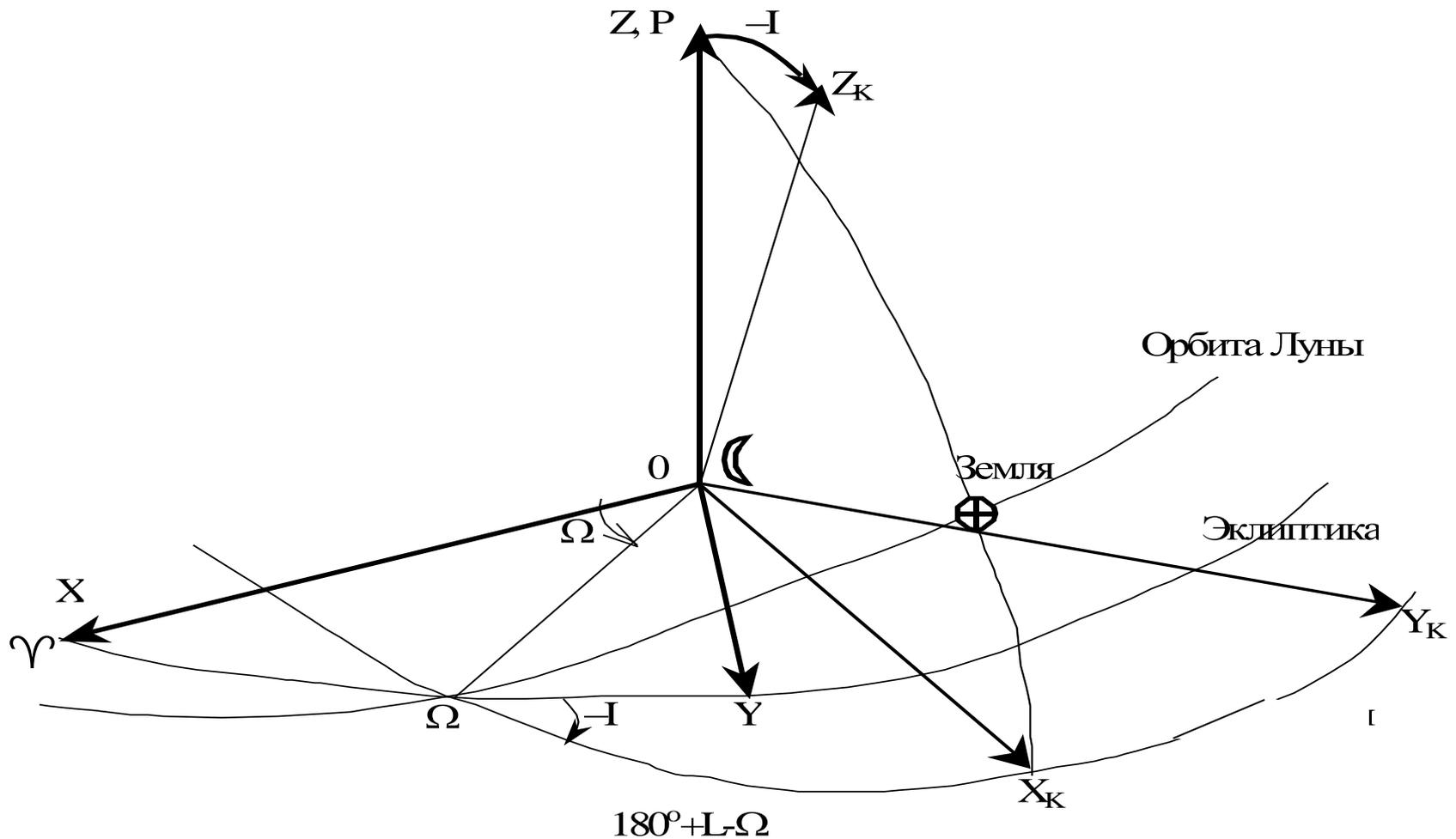
Петрова Н. К.

Нефедьев Ю. А.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДОКЛАДА

- ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ: перейти к динамической эфемериде De421
- В КФУ построена численная теория ФЛЛ, на данном этапе мы проводим проверку ее точности путем сравнения с данными DE421.
- В докладе изложены этапы получения начальных данных для интегрирования уравнений Гамильтона
- Представлены остаточные разности и проведён их анализ
- Намечены пути совершенствования теории

Системы координат для построения теории ФЛЛ: эклиптическая и динамическая



XYZ - эклиптическая СК, $X_K Y_K Z_L$ - динамическая СК,
основанная на триэдре осей инерции Луны

Самолётные углы μ, ν, π определяющие положение ДСК относительно эклиптической СК, при построении уравнений выбираем в качестве УГЛОВЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

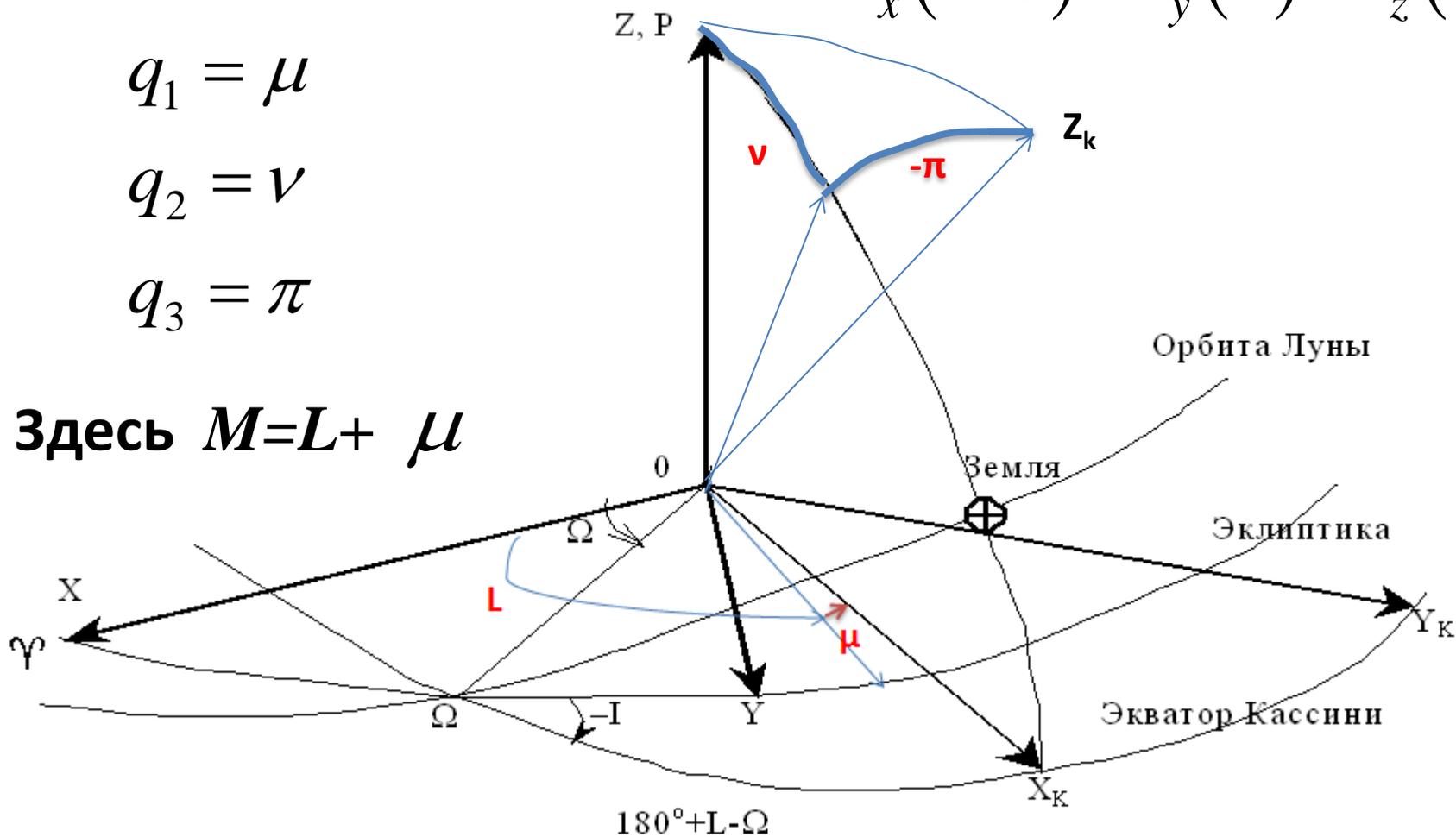
$$R_x(-\pi) \cdot R_y(\nu) \cdot R_z(M)$$

$$q_1 = \mu$$

$$q_2 = \nu$$

$$q_3 = \pi$$

Здесь $M=L+\mu$



Модель, определяющая ФЛЛ, включает следующие возмущающие факторы:

$$U = U_{2 \text{ earth}} + U_{2 \text{ sun}} + U_{3, \text{earth}} + U_{4, \text{earth}} + U_{2, \text{venus}} + U_{2, \text{jupiter}}$$

Для построения гамильтониана и соответствующих уравнений необходимо получить выражение кинетической энергии вращения через канонические переменные

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Для самолётных углов построены кинематические уравнения (аналог Эйлеровых кинематических уравнений)

$$\Omega_x = -\dot{M} \times \sin \nu - \dot{\pi}$$

$$\Omega_y = -\dot{M} \times \cos \nu \times \sin \pi + \dot{\nu} \times \cos \pi$$

$$\Omega_z = \dot{M} \times \cos \nu \times \cos \pi + \dot{\nu} \times \sin \pi$$

Вывод выражений для канонических импульсов

На основе выведенных кинематических уравнений вращения Луны и выражений для самолётных углов и их производных получаем компоненты вектора углового вращения Ω .

В итоге получаем возможность записать КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ ВРАЩЕНИЯ ЛУНЫ:

$$T = \frac{1}{2} \left(A\Omega_x^2 + B\Omega_y^2 + C\Omega_z^2 \right); \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i};$$

Это выражение позволяет нам построить, наконец, выражения для СОПРЯЖЕННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ:

$$p_3 = A \cdot \Omega_x$$

$$p_2 = B \cdot \Omega_y \cdot \text{Cos}(q_3) + \Omega_z \cdot \text{Sin}(q_3)$$

$$p_1 = \Omega_z \cdot \text{Cos}(q_2) \cdot \text{Cos}(q_3) - A \cdot \Omega_x \text{Sin}(q_2) - B \cdot \Omega_y \cdot \text{Cos}(q_2) \cdot \text{Sin}(q_3)$$

Уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = F_i(\vec{q}, \vec{p}, n, k_1, k_2) \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} = \Phi_i(\vec{q}, \vec{p}, n, k_1, k_2) \end{cases}$$

Здесь: F_i , Φ_i – **нелинейные** функции канонических Переменных, $i = 1, 2, 3$.

$$k_1 = \frac{C-A}{C}; k_2 = \frac{C-B}{C} \quad - \text{ безразмерные моменты инерции}$$

n – среднее движение

Извлечение данных из DE421

1. Получить орбитальные координаты DE для центра масс луны, чтобы вычислить потенциал в гамильтониане задачи
2. Получить параметры физической либрации Луны из DE для начальных данных интегрирования: самолетные углы и канонические импульсы

Алгоритм получения начальных данных

1) Соотношение между Эйлеровыми и самолётными углами, позволяющие реализовать переход от ЭклСК к ДСК

$$R_z(\psi) \cdot R_x(-\theta) \cdot R_z(\phi) = R_x(-\pi) \cdot R_y(\nu) \cdot R_z(M)$$

Откуда получаем зависимость искомых самолётных углов от заданных в DE Эйлеровых углов:

$$\nu = \text{ASIN}(\text{Sin}(\psi) \text{Sin}(\theta))$$

$$\text{Cos}(\nu) = \sqrt{1 - \text{Sin}^2(\nu)}$$

$$\pi = \text{ASIN}\left(\frac{\text{Cos}(\psi) \text{Sin}[\theta]}{\text{Cos}(\nu)}\right)$$

$$\text{Sin}(M) \text{Cos}(\nu) = \cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \cos(\theta) \cos(\phi)$$

$$\text{Cos}(M) \text{Cos}(\nu) = \cos(\psi) \cos(\phi) - \sin(\psi) \cos(\theta) \sin(\phi)$$

Алгоритм получения начальных данных

2. Получаем канонические импульсы

Совокупность всех выведенных нами соотношений и уравнений позволяет записать взаимосвязь и между производными самолётных и Эйлеровых углов

$$\mu = M - (F + \Omega + 180^0)$$

$$\dot{\nu} = \frac{\dot{\psi} \cdot \text{Cos}(\psi) \sin(\theta) + \dot{\theta} \cdot \text{Sin}(\psi) \text{Cos}(\theta)}{\text{Cos}(\nu)}$$

$$\dot{\pi} = \frac{\dot{\nu} \cdot \text{Sin}(\pi) \text{Sin}(\nu) - \dot{\psi} \cdot \text{Sin}(\psi) \text{Sin}(\theta) + \dot{\theta} \cdot \text{Cos}(\psi) \text{Cos}(\theta)}{\text{Cos}(\pi) \text{Cos}(\nu)}$$

$$\dot{M} = \frac{\dot{\nu} \cdot \text{Sin}(M) \text{Sin}(\nu) - \dot{\psi} \cdot \text{Sin}(\psi) \text{Sin}(\phi) + \dot{\phi} \cdot \text{Cos}(M) \text{Cos}(\phi) + \dot{\psi} \cdot \text{Cos}(\psi) \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\phi)}{\text{Cos}(M) \text{Cos}(\nu)}$$

$$\frac{\dot{\theta} \cdot \text{Sin}(\psi) \text{Sin}(\theta) \text{Cos}(\phi) + \dot{\phi} \cdot \text{Sin}(\psi) \text{Cos}(\theta) \text{Sin}(\phi)}{\text{Cos}(M) \text{Cos}(\nu)}$$

Учет эффекта приливных возмущений методом усреднения по времени

Для твёрдой Луны имеют место следующие соотношения

$$A_{Rigid} = \frac{1 - \gamma\beta}{1 + \beta}; \quad B_{Rigid} = \frac{1 + \gamma}{1 + \beta}; \quad \frac{C}{mR^2}_{Rigid} = \frac{-2 \cdot c_{20}(1 + \beta)}{2\beta - \gamma + \beta\gamma}$$

Согласно алгоритму, изложенному в статье (Williams 2001), **В СРЕДНЕМ** влияние на моменты инерции вязкоупругих свойств лунного тела может быть учтено через коэффициенты Лява k и сферического члена S :

$$\frac{A}{mR^2} = A_{Rigid} \cdot \frac{C}{mR^2}_{Rigid} + \left(-4.935 \cdot 10^{-6} - 7 \cdot 10^{-9} - 0.843 \cdot 10^{-6}\right) \cdot k + 2.529 \cdot s \cdot 10^{-6}$$

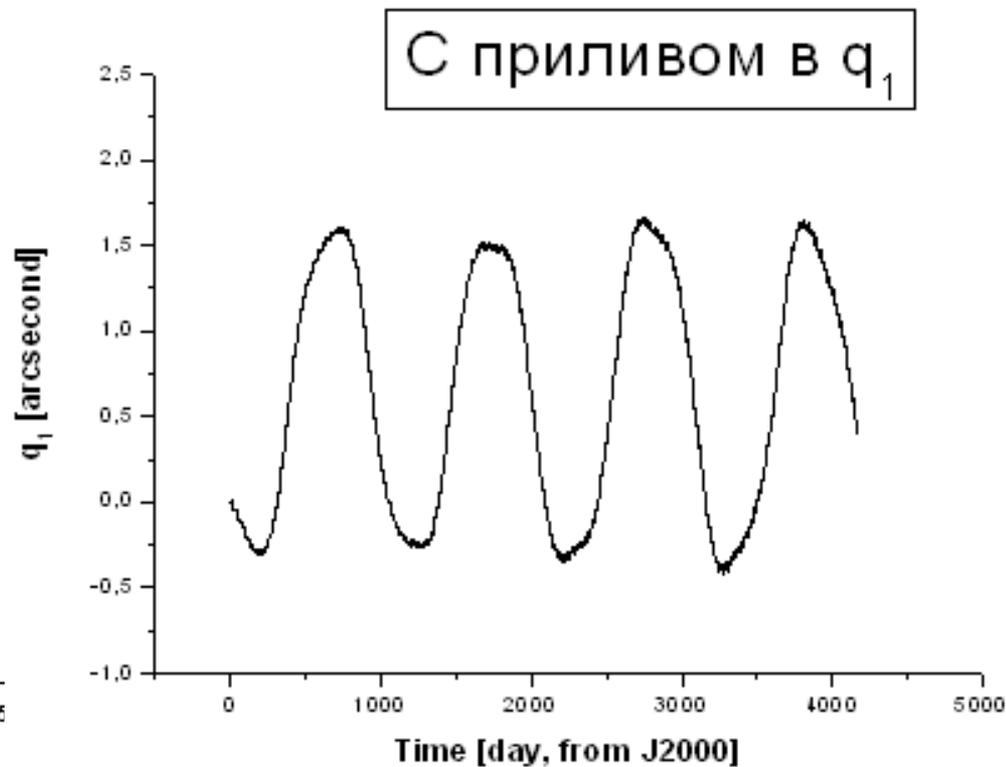
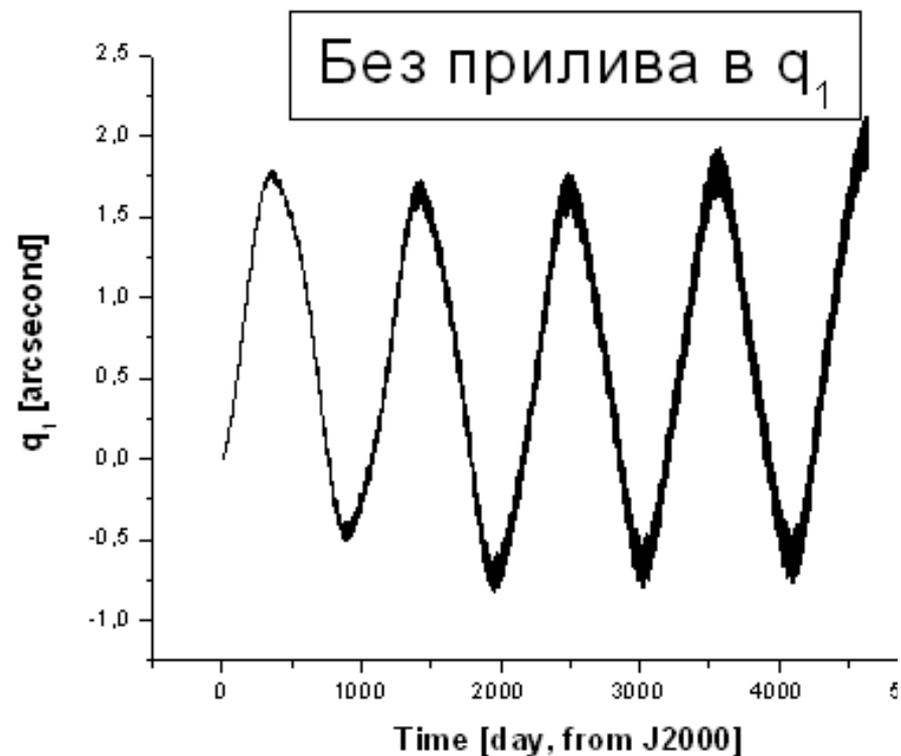
$$\frac{B}{mR^2} = B_{Rigid} \cdot \frac{C}{mR^2}_{Rigid} + \left(2.469 \cdot 10^{-6} - 7 \cdot 10^{-9} - 0.843 \cdot 10^{-6}\right) \cdot k + 2.529 \cdot s \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{C}{mR^2} = C_{Rigid} \cdot \frac{C}{mR^2}_{Rigid} + \left(2.466 \cdot 10^{-6} + 1.4 \cdot 10^{-8} + 1.686 \cdot 10^{-6}\right) \cdot k + 2.529 \cdot s \cdot 10^{-6}$$

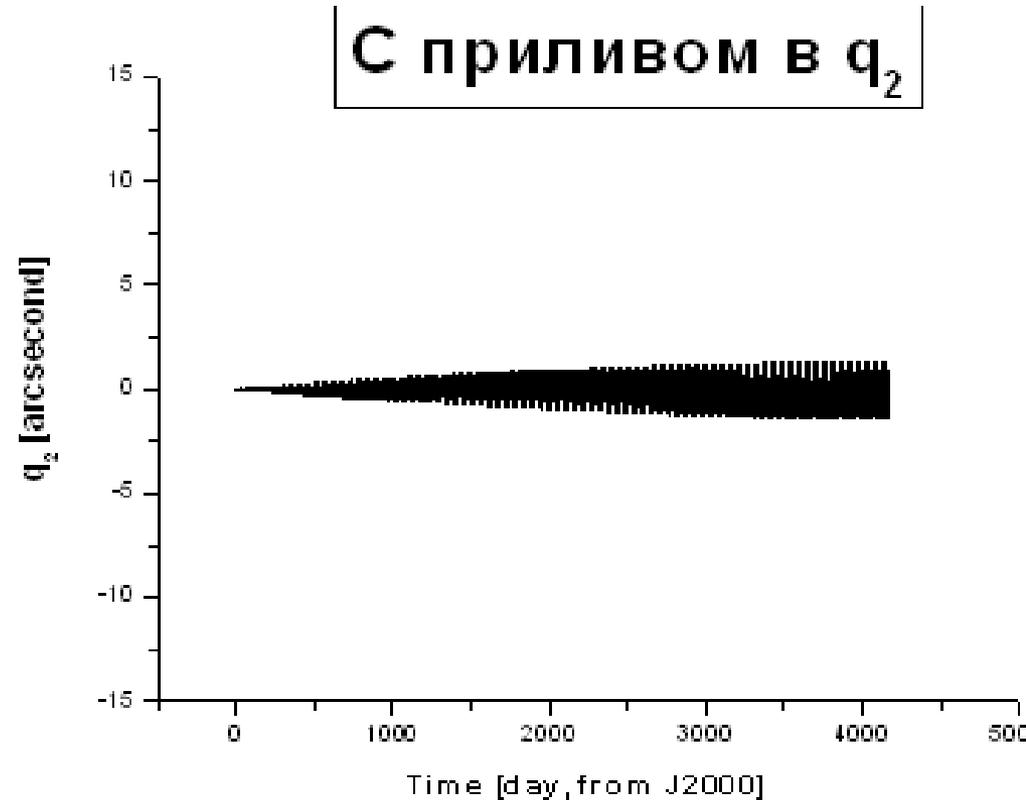
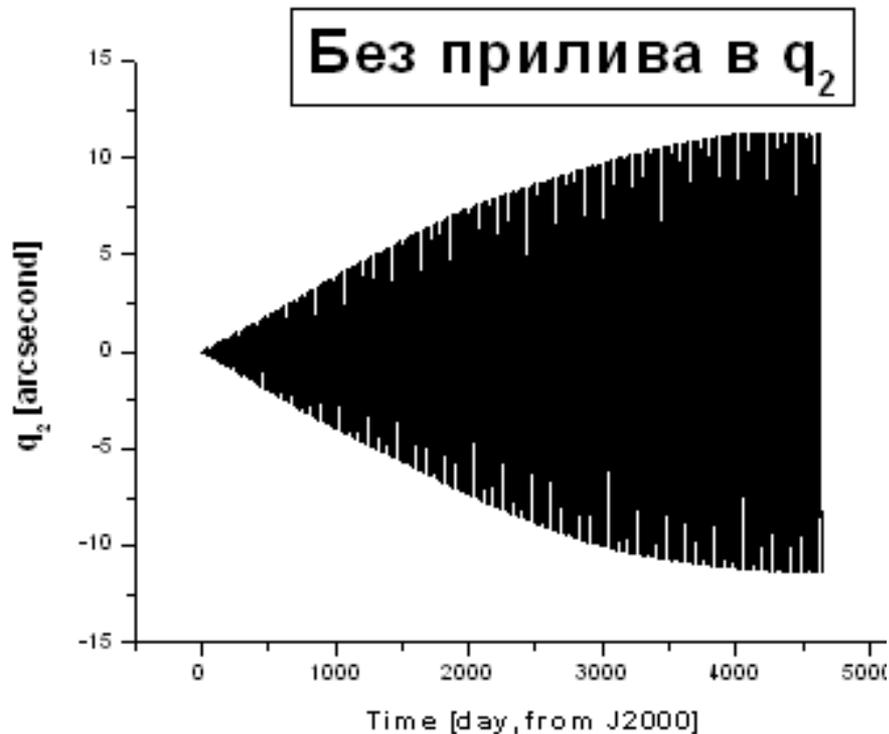
$$C_{20} = C_{20Rigid} - \left(3.698 \cdot 10^{-6} + 2.1 \cdot 10^{-8} + 2.529 \cdot 10^{-6}\right) \cdot k$$

$$C_{22} = C_{22Rigid} + 1.851 \cdot k \cdot 10^{-6}$$

Остаточные разности **собственного** численного интегрирования с данными ФЛЛ из DE.



Остаточные разности численного интегрирования с данными ФЛЛ из DE.



Вклад средних приливов в либрацию в широте **НА ПОРЯДОК** улучшил данные

Выводы

- Построена численная теория ФЛЛ в рамках гамильтонова подхода
- Учтены 3я и 4я гармоника селенопотенциала
- В качестве орбиты Луны взята орбита из DE421
- Описан алгоритм получения начальных данных
- Учтены средние приливы
- **ОДНАКО** остаточная амплитуда по-прежнему велика.

Каковы могут быть причины таких расхождений?

- Близость периода в остаточных разностях в долготе к резонансному (свободному) говорит о наличие неучтенной некоторой силы:

- переменная часть прилива
- сжатие Земли
- Возможно вклад от среднего прилива в А,В осуществляется иначе