

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ГЛАВНАЯ (ПУЛКОВСКАЯ) АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

МЕЛЬНИКОВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

**РЕЗОНАНСНЫЕ И ХАОТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В ДИНАМИКЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

Специальность 01.03.01 — астрометрия и небесная механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физ.-мат. наук
ШЕВЧЕНКО И. И.

Санкт-Петербург — 2016

Оглавление

Введение	5
Глава 1 Резонансы и хаос в динамике небесных тел и численно-экспериментальные методы их анализа	20
§ 1.1 Нелинейные резонансы в движении небесных тел	20
1.1.1 Модель резонанса	20
1.1.2 Фазовые портреты и сечения Пуанкаре	21
§ 1.2 Динамический хаос в движении небесных тел	23
§ 1.3 Методы исследования устойчивости движения	25
1.3.1 Мультипликаторы линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений	26
1.3.2 Характеристические показатели Ляпунова	27
§ 1.4 Выводы к первой главе	35
Глава 2 Вращательная динамика спутников планет	36
§ 2.1 Спутники планет	36
2.1.1 Основные сведения о спутниках планет	36
2.1.2 Фигуры малых спутников планет	39
2.1.3 Вращательные состояния спутников планет	44
2.1.4 Синхронный спин-орбитальный резонанс	46
§ 2.2 Уравнение Белецкого и резонансные режимы плоского вращения	47
2.2.1 Система координат и уравнения движения	47
2.2.2 Плоское вращательное движение спутника	49
2.2.3 Амплитуда бифуркационных колебаний спутника	56
2.2.4 Возможные режимы синхронного вращения у малых спутников планет	63

§ 2.3 Устойчивость вращательного движения несферических спутников планет относительно наклона оси вращения	66
2.3.1 Устойчивость синхронного вращения	68
2.3.2 Устойчивость любого типа вращения	76
§ 2.4 Вращательные состояния, преобладающие у спутников планет	83
2.4.1 Положения спутников на диаграмме « $\omega_0 - e$ »	83
2.4.2 Времена приливного замедления вращения	86
§ 2.5 Выводы ко второй главе	89

Глава 3 Моделирование кривых блеска малых спутников

планет	93
§ 3.1 Алгоритм для моделирования кривых блеска спутников планет	94
3.1.1 Система координат и уравнения движения	94
3.1.2 Метод расчета освещенной площади поверхности спутника	96
3.1.3 Интегральная звездная величина спутника	98
§ 3.2 Кривая блеска и вращательная динамика Гипериона	101
3.2.1 Фигура и вращательная динамика Гипериона	101
3.2.2 Модельная кривая блеска Гипериона	102
§ 3.3 Кривая блеска и вращательная динамика Фебы	106
3.3.1 Вращательная динамика и фигура Фебы	106
3.3.2 Модельная кривая блеска Фебы	108
§ 3.4 Выводы к третьей главе	112

Глава 4 Динамический хаос во вращательной динамике

спутников	115
§ 4.1 Динамический хаос во вращении Гипериона	115
4.1.1 Угловая скорость вращения Гипериона	115
4.1.2 Ляпуновское время вращательной динамики	118
§ 4.2 Режимы вращения Прометея и Пандоры	120
4.2.1 Возможные режимы синхронного вращения	122
4.2.2 Устойчивость синхронного вращения	123
4.2.3 Устойчивость любого типа вращения	128
4.2.4 Ориентация фигур при хаотическом вращении	130

§ 4.3 Странные аттракторы во вращательной динамике	
спутников планет	134
4.3.1 Уравнение движения с учетом приливного	
взаимодействия	136
4.3.2 Сечения фазового пространства	137
4.3.3 Характеристические показатели Ляпунова	140
4.3.4 Возможность существования странных аттракторов	
в динамике спутников планет	143
§ 4.4 Выводы к четвертой главе	150
Глава 5 Показатели Ляпунова в задачах орбитальной	
динамики	153
§ 5.1 Хаотическая динамика спутниковых систем	153
5.1.1 Система Миранда – Умбриэль	155
5.1.2 Система Мимас – Тефия	159
5.1.3 Ляпуновские времена спутниковых систем	163
§ 5.2 Показатели Ляпунова в динамике тройных звездных систем .	169
5.2.1 Уравнения движения	171
5.2.2 Ляпуновские спектры и времена распада	173
5.2.3 Зависимости «ляпуновское время – время распада» . .	179
§ 5.3 Устойчивость кратной звездной системы ι UMa	183
5.3.1 Параметры системы ι UMa	184
5.3.2 Устойчивость системы ι UMa	186
5.3.3 Ляпуновское время системы ι UMa	191
§ 5.4 Вековая динамика планеты в системе 16 Cyg	193
5.4.1 Планетная система 16 Cyg	194
5.4.2 Ляпуновское время планетной системы 16 Cyg	197
5.4.3 Модели планетной системы 16 Cyg	200
5.4.4 Сечения фазового пространства	204
§ 5.5 Выводы к пятой главе	209
Заключение	212
Список литературы	219

Введение

Актуальность

Резонансные явления наблюдаются в движениях многих небесных тел — от пылевых частиц в Солнечной системе до звезд в Галактике. Резонанс имеет место, если есть целочисленная соизмеримость периодов (частот) движений. Наиболее ярким примером резонанса в небесной механике является синхронное вращение Луны — период ее вращения относительно собственной оси и период движения по орбите вокруг Земли равны (находятся в соотношении 1:1). В результате Луна все время обращена к Земле одной и той же стороной. Такое состояние называют синхронным резонансом или спин-орбитальным резонансом 1:1, он наблюдается у большей части спутников планет, вращательное состояние которых установлено. Резонансы часто наблюдаются в орбитальном движении небесных тел [51, 52]. Еще в XVIII веке П. Лаплас установил, что близость орбитальных периодов Юпитера и Сатурна к отношению $2/5$ вызывает существенные возмущения в их движении.

Во многих случаях задачу о резонансах во вращательном или орбитальном движении небесных тел можно рассматривать в рамках модели возмущенного математического маятника. При наличии возмущения возможно [29] существование динамического хаоса, проявлением которого является экспоненциальная расходимость близких траекторий фазового пространства системы. Среднюю скорость экспоненциальной расходимости можно измерить посредством вычисления характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) [29, 81]. Ненулевая величина максимального ХПЛ (МХПЛ) указывает на хаотический, а нулевая — на регулярный характер движения. Хаотическое движение можно характеризовать при помощи так называемого «ля-

пуновского времени», эта величина представляет собой характерное время предсказуемой динамики. Ляпуновское время представляет собой величину, обратную МХПЛ.

Динамический хаос в движении небесных тел имеет важное значение [51, 52, 198] во вращательной динамике спутников планет (взаимодействие спин-орбитальных резонансов), орбитальной динамике спутниковых систем (взаимодействие резонансов средних движений и субрезонансов в мультиплетах, соответствующих какому-либо резонансу средних движений), орбитальной динамике астероидов и комет (резонансы средних движений, вековые резонансы и трехтельные резонансы средних движений) и, наконец, в динамике кратных звездных систем и экзопланетных систем. Изучение резонансных движений и проявлений динамического хаоса в динамике небесных тел несомненно является актуальной задачей.

Все планеты Солнечной системы, кроме Меркурия и Венеры, обладают спутниками. В настоящее время, согласно данным [58, 122], общее число известных спутников планет приближается к двум сотням. Спутники, по их физическим размерам, можно разделить на две группы — крупные (чей диаметр превышает 600 км, например, Луна, галилеевы спутники Юпитера) и малые (например, спутники Марса — Фобос (M1) и Деймос (M2)). Планеты-гиганты имеют множество (по современным данным, как у Юпитера, так и у Сатурна число открытых спутников превышает шесть десятков) малых спутников. Наблюдаемая доля малых спутников составляет более 90%.

В ходе долговременной динамической эволюции вращательного движения спутник проходит через различные спин-орбитальные резонансные состояния, пока не будет захвачен в одно из них [106, 107, 156]. Кроме того, из теории следует, что наиболее вероятной конечной стадией долговременной приливной эволюции спутника является плоское (в плоскости орбиты) вращение в синхронном резонансе. При этом ось вращения спутника ортогональна плоскости орбиты. Чтобы спутник в ходе вращательной эволюции мог быть захвачен в плоское резонансное вращение, это вращение должно быть устойчивым. Следовательно, актуальной задачей является исследование устойчивости плоских резонансных вращений спутника и в первую оче-

редь синхронного вращения.

Фигуры значительной части известных малых спутников планет существенно отличаются от сферически симметричной формы [58, 122]. Теоретическое исследование Уиздома и др. [199] показало, что спутник сильно несферической формы на эллиптической орбите может вращаться хаотическим, непредсказуемым образом. Наиболее вероятным кандидатом [199] на хаотическое вращение из-за своей несферической формы и значительного эксцентриситета орбиты является седьмой спутник Сатурна — Гиперион. Исследование возможности хаотического вращения у малых спутников представляет значительный интерес.

Наблюдательные данные указывают на то, что все крупные спутники находятся в синхронном резонансе. Вращательная динамика малых спутников, напротив, весьма разнообразна [58, 122]: у них наблюдаются синхронное с орбитальным вращение, быстрое несинхронное вращение и хаотическое вращение. Спутники с быстрым или хаотическим вращением составляют малую часть среди спутников с установленным режимом вращения. Вращательные состояния большинства из известных спутников еще не установлены. Поэтому задача о типичных современных вращательных режимах как известных, так и еще не открытых спутников планет несомненно является актуальной.

Информацию о реальных режимах вращения спутников планет получают с космических аппаратов (КА), а также из сопоставления наблюдаемых кривых блеска спутников с модельными, то есть рассчитываемыми теоретически при заданных предположениях. Такое сопоставление позволяет определить из наблюдений как характер вращательной динамики спутника и уточнить его инерционные параметры, так и получить информацию об отражательных свойствах его поверхности. Следовательно, важное значение имеет разработка методов моделирования наблюдаемых кривых блеска спутников. Например, моделирование кривых блеска Гипериона (C7), выполненное Клаветтером [126], указывает на то, что вращение Гипериона является, возможно, хаотическим. Задача об определении вращательного состояния Гипериона путем моделирования его современных наблюдаемых кривых

блеска, таким образом является актуальной.

Моделирование вращательной динамики Гипериона, проведенное Блэком и др. [73] и Харбисон и др. [113] на основе данных наблюдений с КА «Вояджер-2» и «Кассини», также указывает на его возможное хаотическое вращение. Теоретические [65] и численные [113, 199] оценки ляпуновского времени вращательной динамики Гипериона составляют 1–2 месяца. На возможный хаос во вращательном движении у двух других спутников Сатурна — Прометея (С16) и Пандоры (С17) с ляпуновским временем менее суток указали В. В. Куприянов и И. И. Шевченко [129]. Таким образом, вращательная динамика этих трех спутников Сатурна нуждается в тщательном изучении.

Исследование плоского вращательного движения спутника при наличии диссипации, проведенное В. В. Белецким [5] и Кханом и др. [125], показало, что, в фазовом пространстве вращательного движения может существовать странный аттрактор. На странном аттракторе близкие траектории фазового пространства расходятся экспоненциально [29], то есть движение является хаотическим. Учет приливного взаимодействия расширяет список возможных режимов вращательного движения спутника в окрестности синхронного резонанса, поскольку в диссипативной системе возможно хаотическое движение на странном аттракторе. Поэтому изучение возможности возникновения странных аттракторов в ходе приливной эволюции вращательного движения малых спутников планет актуален.

Проявления динамического хаоса могут наблюдаться или могли присутствовать ранее в истории орбитальной динамики различных спутниковых систем. Захваты спутниковых систем в орбитальные резонансы, соответствующие соизмеримостям средних движений спутников, являются закономерными этапами [51, 184] приливной эволюции этих небесномеханических систем. При захвате в орбитальный резонанс или при выходе из него система пересекает границы хаотического слоя в окрестности сепаратрис резонанса. Внутри слоя система движется хаотическим образом.

Численные [87, 101, 108] и аналитические [174] оценки ляпуновского времени орбитального движения в окрестности орбитального резонанса

121/118 средних движений в системе Прометей (C16) – Пандора (C17) показали, что ляпуновское время в этой системе составляет 3–4 года. Недавно Купер и др. [88] получили оценки ляпуновского времени в окрестности орбитального резонанса 54/53 для системы Атлас (C15) – Прометей (C16), его величина составляет ~ 10 лет. Знание ляпуновских времен для спутниковых систем весьма важно — оно позволяет оценить масштаб времени, на котором имеет смысл строить теории долговременного орбитального движения спутников планет.

Кратные звездные системы с числом компонент $N \geq 3$ составляют [98] около 10% числа звезд Галактики. Среди кратных систем можно выделить системы со слабой иерархией, вопрос об устойчивости которых представляет собой все еще не решенную проблему. Неустойчивости кратной системы по Лагранжу практически равнозначна ее хаотичность: хаотичность движения обычно приводит к распаду системы.

Около 15% из кратных звездных систем представляют собой тройные звезды [98]. Их динамика описывается в рамках общей задачи трех тел. Миккола и Таникава [149] для задачи трех тел построили зависимости «ляпуновское время T_L – время распада T_d » системы и установили, что данная статистическая зависимость в долговременной динамике близка к линейной. Если взглянуть на зависимости, построенные в работе [149], то можно заметить, что в области больших T_d в них присутствуют две компоненты. Анализ этих компонент важен в рамках фундаментальной задачи определения времен распада тройных систем.

Ранее В. В. Орлов и Р. Я. Жучков [53] среди кратных звезд со слабой иерархией выявили вероятных кандидатов в неустойчивые системы, среди них оказалась система Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114). Р. Я. Жучков и др. [19] при помощи моделирования динамики и использования приближенных теоретических и эмпирических критериев устойчивости сделали вывод о неустойчивости системы ι UMa. Вычисление ХПЛ позволяет строго установить [29, 81] неустойчивость системы. Задача по выявлению неустойчивых кратных звездных систем, посредством использования строгих критериев, несомненно является актуальной.

Хаос в орбитальной динамике может наблюдаться в экзопланетных системах. Существенным отличием большинства экзопланетных систем от Солнечной системы являются значительные эксцентриситеты и, возможно, наклонения (обычно их величина неизвестна) орбит у входящих в них планет. На орбитальную динамику планет в кратных звездных системах влияние может оказывать эффект Лидова–Козаи [28, 130], играющий существенную роль при большой величине угла между плоскостями орбит планетной и звездной систем.

Эффект Лидова–Козаи может быть особенно заметным в вековой динамике планет в двойных звездных системах. Например, Хольман и др. [117] указали на возможность наличия хаоса в орбитальной динамике планеты в широкой визуально-двойной звездной системе 16 Cyg. Единственная известная в данной системе планета имеет существенный эксцентриситет орбиты, а динамический хаос в ее движении, согласно [117], возможен из-за близости планетной системы 16 Cyg к сепаратрисе резонанса Лидова–Козаи. Поскольку в настоящее время в кратных звездных системах обнаружено уже несколько десятков экзопланет с большими (> 0.2) эксцентриситетами орбит, актуальной задачей является детальное изучение возможности существования хаоса в их вековой орбитальной динамике.

Цели и задачи работы

1. Исследовать возможные режимы вращательной динамики малых спутников планет. Подробно рассмотреть устойчивость синхронного с движением по орбите режима вращения спутника. Выявить типичные вращательные состояния малых спутников планет.
2. Разработать методику моделирования кривых блеска малых спутников планет. На основе имеющихся наблюдательных данных провести моделирование вращательной динамики спутников Сатурна — Гипериона (С7) и Фебы (С9), как прототипов хаотической и регулярной вращательной динамики.
3. Подробно рассмотреть вращательную динамику малых спутников планет для выявления возможности нахождения спутников в хаотических

режимах вращения. Изучить основные особенности режимов хаотического вращения спутников.

4. Рассмотреть возможность существования странного аттрактора в окрестности сепаратрисы синхронного резонанса плоского вращения малых спутников планет при наличии приливной диссипации.
5. Получить оценки ляпуновского времени в спутниковых системах, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, на примере систем Миранда (У2) – Умбриэль (У5) и Мимас (С1) – Тетис (С3).
6. Изучить характер зависимостей «ляпуновское время – время распада», обобщенных для всех элементов ляпуновского спектра, в динамике тройных звездных систем со слабой иерархией.
7. Рассмотреть устойчивость кратных звездных систем со слабой иерархией, на примере системы Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114). Получить оценки времени распада и ляпуновского времени системы ι UMa.
8. Рассмотреть возможность наличия хаоса в вековой орбитальной динамике планет в двойных звездных системах из-за эффекта Лидова–Козаи на примере динамики планеты в звездной системе 16 Cyg.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Установлено впервые, что для ряда малых спутников планет возможно существование до трех режимов плоского (в плоскости орбиты) вращения синхронного с движением по орбите, в один из которых спутник может быть захвачен (если вращение в нем устойчиво) в ходе приливной эволюции вращательного движения.
2. Впервые показано, что спутники с еще не определенными состояниями вращения, как и еще не открытые малые спутники, в подавляющем большинстве не могут вращаться синхронно с орбитальным движением. Они вращаются либо намного быстрее, чем синхронно, либо, что гораздо менее вероятно, хаотично.

3. Посредством моделирования кривых блеска спутников Сатурна — Гипериона (С7) и Фебы (С9), как прототипов хаотического и регулярного вращения, определены значения их инерционных и физических параметров. Впервые строго установлен хаотический характер вращения Гипериона, подтверждено быстрое (по сравнению с синхронным) регулярное вращение Фебы.
4. В хаотическом вращении малых спутников планет впервые выявлен эффект преимущественной ориентации наибольшей оси фигуры спутника по направлению на планету.
5. Впервые показано, что странный аттрактор в окрестности сепаратрисы синхронного резонанса может существовать в ходе приливной эволюции вращательного движения спутника Сатурна — Гипериона (С7), вращение которого в настоящее время является хаотическим.
6. В задаче о хаотической динамике системы Миранда (У2) – Умбриэль (У5) и системы Мимас (С1) – Тетия (С3) впервые получены оценки ляпуновского времени. Показано, что возможный диапазон значений ляпуновских времен в спутниковых системах, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, весьма широк: по порядку величины он составляет от года до тысячи лет.
7. Для слабо-иерархических тройных звезд равных масс построены зависимости «ляпуновское время – время распада» системы для всех элементов ляпуновского спектра. Для всех элементов ляпуновского спектра впервые установлено существование степенных зависимостей «ляпуновское время – время распада» с показателями степени, стремящимися к единице при увеличении порядка элемента в спектре.
8. Впервые установлено существование неустойчивой кратной звездной системы — Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114). Характерные значения для времени распада системы составляют менее 10 000 лет, для ляпуновского времени — менее 1 000 лет.

9. На примере вековой динамики планеты в системе 16 Суг рассмотрена возможность существования хаоса в динамике планет в кратных звездных системах из-за эффекта Лидова–Козаи. Установлено, что хаотическое поведение в планетной системе 16 Суг маловероятно: планетная система 16 Суг в фазовом пространстве находится вдали от сепаратрисы резонанса Лидова–Козаи, причем хаотический слой в окрестности сепаратрисы весьма узок.

Теоретическая и практическая значимость работы

- Результаты исследования характера устойчивости плоского синхронного и других резонансных состояний относительно наклона оси вращения позволяют наложить ограничения на возможные значения инерционных параметров реальных спутников планет, а также определить резонансные вращательные состояния, в которых спутники могут находиться в ходе долговременной динамической эволюции.
- Разработанные алгоритмическое и программное обеспечение для построения теоретических кривых блеска спутников планет позволяют посредством моделирования кривых блеска изучать вращательную динамику этих объектов, определять их параметры вращения, динамические параметры (моменты инерции) и отражательные свойства поверхности. Разработанный алгоритм может использоваться для моделирования кривых блеска АСЗ (астероидов сближающихся с Землей) на отрезке траектории их тесного сближения с Землей.
- Обнаруженное сходство хаотического режима вращения малых спутников с обычным синхронным вращением (наличие преимущественной ориентации наибольшей оси фигуры спутника по направлению на планету) указывает на необходимость привлечения дополнительных методов для установления реального режима вращения малых спутников планет, для которых имеются указания на возможное хаотическое вращение.
- Полученные оценки ляпуновских времен для спутниковых систем, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, позволя-

ют судить о том, на каких интервалах времени справедливы численные и аналитические теории их орбитального движения.

- Установленный для слабо-иерархических тройных звезд равных масс характер зависимости «ляпуновское время – время распада» соответствует современным теоретическим представлениям. Обнаруженные для всех элементов ляпуновского спектра в данной задаче степенные зависимости «ляпуновское время – время распада» с показателями степени, стремящимися к единице при увеличении порядка элемента в спектре, указывают на необходимость разработки теорий для обоснования наблюдаемых зависимостей.
- Выявленная неустойчивость кратной звездной системы Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114) подтверждает возможность существования неустойчивых кратных звездных систем и указывает на необходимость дальнейшего изучения движений в слабо-иерархических звездных системах с целью исследования их устойчивости и определения величин ляпуновских времен.
- Проведенное исследование вековой орбитальной динамики планеты в системе 16 Суг показало, что для установления возможности хаотического движения в окрестности резонанса Лидова–Козаи для экзопланетных систем эффективным методом является вычисление ХПЛ на множестве допустимых значений параметров планетной орбиты, а также анализ представительных сечений фазового пространства задачи.

Апробация результатов

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 28 работах. Из них 18 работ опубликованы в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, составленный ВАК. Основные результаты работы докладывались на семинарах ГАО РАН и СПбГУ, а также были представлены в виде докладов на Всероссийских и международных конференциях. Среди них:

- Всероссийская конференция с международным участием «Проблемы небесной механики», 3–6 июня 1997 г., Санкт-Петербург, ИТА РАН.
- Всероссийская конференция с международным участием «Компьютерные методы небесной механики – 97», 18–20 ноября 1997 г., Санкт-Петербург, ИТА РАН.
- Всероссийская астрономическая конференция (ВАК-2001), 6–12 августа 2001 г., Санкт-Петербург, СПбГУ.
- Международная конференция «Небесная механика – 2002: результаты и перспективы», 10–14 сентября 2002 г., Санкт-Петербург, ИПА РАН.
- Международная конференция “Order and chaos in stellar and planetary systems”, 17–24 августа 2003 г., Санкт-Петербург, СПбГУ.
- Всероссийская астрономическая конференция «Горизонты Вселенной» (ВАК-2004), 3–10 июня 2004 г., Москва, МГУ.
- Международный симпозиум «Астрономия – 2005: состояние и перспективы развития», 1–6 июня 2005 г., Москва, ГАИШ МГУ.
- Всероссийская конференция «Астрономия – 2006: традиции, настоящее и будущее», 26–29 июня 2006 г., Санкт-Петербург, СПбГУ.
- Международная конференция “Analytical methods of celestial mechanics”, 8–12 июля 2007 г., Санкт-Петербург, ПОМИ РАН.
- I-я Молодежная научная конференция ГАО РАН, 16 июня 2008 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН.
- XXVII Генеральная ассамблея IAU, симпозиум № 263, 3–14 августа 2009 г., Рио-де-Жанейро, Бразилия.
- Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково–2009», 15–19 июня 2009 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН.
- Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково–2012», 1–5 октября 2012 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН.
- Всероссийская астрономическая конференция «Многоликая Вселенная», 23–27 сентября 2013 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН.
- Международная конференция “Journées 2014 Systèmes de référence spa-

tio-temporels”, 22–24 сентября 2014 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН.

- Всероссийская астрометрическая конференция «Пулково–2015», 21–25 сентября 2015 г., Санкт-Петербург, ГАО РАН.

Работа велась по плановым научным темам ГАО РАН, в рамках Программ Президиума РАН «Фундаментальные проблемы нелинейной динамики» и «Фундаментальные проблемы исследований и освоения Солнечной системы», а также поддерживалась грантами Российского фонда фундаментальных исследований: №99-02-16814-а (рук. А. В. Девяткин), №01-02-17170-а (рук. И. И. Шевченко), №02-02-06766-мас (рук. А. В. Мельников), №03-02-06851-мас (рук. А. В. Мельников), №03-02-17356-а (рук. И. И. Шевченко), №05-02-17555-а (рук. И. И. Шевченко), №09-02-00267-а (рук. В. В. Орлов), №10-02-00383-а (рук. И. И. Шевченко), №12-02-00185-а (рук. В. В. Орлов), №14-02-00464-а (рук. И. И. Шевченко).

Результаты исследования вращательной динамики спутников Юпитера и Сатурна вошли в «Отчет о деятельности Российской академии наук в 2002 г.». Результаты проведенного моделирования кривых блеска и вращательной динамики спутников Сатурна — Гипериона (С7) и Фебы (С9) вошли в список важнейших достижений астрономических исследований в 2008 г. Научного совета по астрономии РАН (НСА РАН). Результаты исследования возможных типичных вращательных состояний малых спутников планет вошли в Отчетный доклад Президиума РАН за 2009 г. Вывод о неустойчивости кратной звездной системы Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114) вошел в список важнейших достижений астрономических исследований в 2013 г. НСА РАН.

Список публикаций по теме диссертации

1. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Об устойчивости вращательного движения несферических естественных спутников относительно наклона оси вращения // Астрономический вестник. — 1998. — Т. 32. — № 6. — С. 548–559.
2. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Об устойчивости вращения несферических естественных спутников в синхронном резонансе // Астроно-

- мический вестник. — 2000. — Т. 34. — № 5. — С. 478–486.
3. Мельников, А. В. Бифуркационный режим синхронного резонанса в поступательно-вращательном движении несферических естественных спутников планет // Космические исследования. — 2001. — Т. 39. — № 1. — С. 74–84.
 4. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Грицук, А. Н., Мельников, А. В., Сидоров, М. Ю., Шевченко, И. И. Наблюдения и теоретический анализ кривых блеска естественных спутников планет // Астрономический вестник. — 2002. — Т. 36. — № 3. — С. 269–281.
 5. Шевченко, И. И., Мельников, А. В. Показатели Ляпунова в задаче Хенона–Хейлеса // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2003. — Т. 77. — Вып. 12. — С. 772–777.
 6. Шевченко, И. И., Куприянов, В. В., Мельников, А. В. Хаотическая динамика астероидов и максимальные показатели Ляпунова // Астрономический вестник. — 2003. — Т. 37. — № 1. — С. 80–89.
 7. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. The maximum Lyapunov exponent of the chaotic motion in the Hénon–Heiles problem // “Order and chaos in stellar and planetary systems” / ASP Conference Series. Eds. Byrd G., Kholshevnikov K., Myllari A., Nikiforov I., and Orlov V. — 2004. — V. 316. — P. 34–36.
 8. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. О хаотической динамике спутниковых систем // Астрономический вестник. — 2005. — Т. 39. — № 4. — С. 364–374.
 9. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Необычные режимы вращения малых спутников планет // Астрономический вестник. — 2007. — Т. 41. — № 6. — С. 521–530.
 10. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. On the rotational dynamics of Prometheus and Pandora // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2008. — V. 101. — № 1–2. — P. 31–47.
 11. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. How do the small planetary satellites rotate? // Proceedings IAU Symp. №263 “Icy Bodies of the Solar System” /

- Ed. by Montmerle T. — 2010. — V. 5. — P. 167–170.
12. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. The rotation states predominant among the planetary satellites // *Icarus*. — 2010. — V. 209. — № 2. — P. 786–794.
 13. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Наумов, К. Н., Петрова, С. Н., Мартюшева, А. А., Львов, В. Н., Цекмейстер, С. Д., Мельников, А. В. Астрометрия и фотометрия астероида (367943) 2012 DA14 на телескопах ГАО РАН // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. — 2013. — № 4. — Вып. 2. — С. 37–43.
 14. Мельников, А. В., Орлов, В. В., Шевченко, И. И. Показатели Ляпунова в динамике тройных звездных систем // *Астрономический журнал*. — 2013. — Т. 90. — № 6. — С. 472–482.
 15. Мельников, А. В., Орлов, В. В., Шевченко, И. И. Об устойчивости кратной звездной системы ι UMa (ADS 7114) // *Астрономический журнал*. — 2014. — Т. 91. — № 9. — С. 735–744.
 16. Мельников, А. В. Условия возникновения странных аттракторов во вращательной динамике малых спутников планет // *Космические исследования*. — 2014. — Т. 52. — № 6. — С. 500–511.
 17. Мельников, А. В. О хаотической орбитальной динамике планеты в системе 16 Cyg // *Письма в Астрономический журнал*. — 2016. — Т. 42. — № 2. — С. 136–147.
 18. Devyatkin, A. V., Gorshanov, D. L., Yershov, V. N., Melnikov, A. V., Martysheva, A. A., Petrova, S. N., L'vov, V. N., Tsekmeister, S. D., Naumov, K. N. A study of the asteroid (367943) Duende at Pulkovo Observatory // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — V. 459. — № 4. — P. 3986–3997.
 19. Мельников, А. В. О последовательности бифуркаций удвоения периода относительного движения несферического спутника в синхронном резонансе // *Известия ГАО*. — 2000. — № 214. — С. 161–168.
 20. Melnikov, A. V. Modelling of lightcurves of minor planetary satellites // *IAA Transactions*. — 2002. — № 8. — P. 131–132.

21. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Максимальный показатель Ляпунова движения звезды в потенциале Хенона–Хейлеса // Известия ГАО. — 2002. — № 216. — С. 223–227.
22. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Куприянов, В. В., Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Наблюдения и анализ кривых блеска трех спутников Сатурна // Известия ГАО. — 2004. — № 217. — С. 229–235.
23. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. О хаотической динамике спутниковых систем // Труды ГАИШ. — 2004. — Т. 75. — С. 232–233.
24. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. О вращательной динамике двух спутников Сатурна — Прометея и Пандоры // Известия ГАО. — 2006. — № 218. — С. 117–121.
25. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Резонансная и хаотическая динамика спутников и спутниковых систем // Астрономические исследования в Пулковке сегодня / Под ред. А. В. Степанова. — СПб: ВВМ, 2009. — С. 334–346.
26. Мельников, А. В., Орлов, В. В., Шевченко, И. И. Динамика тройных звездных систем в окрестности резонанса 2:1 // Известия ГАО. — 2013. — № 220. — С. 417–421.
27. Мельников, А. В. О возможности существования странных аттракторов во вращательной динамике малых спутников планет // Известия ГАО. — 2013. — № 220. — С. 265–268.
28. Мельников, А. В. Вековая динамика планеты в системе 16 Cyg // Известия ГАО. — 2016. — № 223. — С. 225–228.

В совместных статьях [1,2,5–12,14,15,21,23,24–26] участие соавторов равное. В статьях [4,22], содержащих помимо теоретической наблюдательную часть, автору принадлежит равное участие в теоретической работе. В статьях [13,18] автору принадлежит часть, посвященная моделированию кривых блеска и вращательной динамики астероида (367943) Дуэнде.

Глава 1

Резонансы и хаос

в динамике небесных тел и

численно-экспериментальные

методы их анализа

§ 1.1 Нелинейные резонансы в движении небесных тел

1.1.1 Модель резонанса

Резонанс в движении небесных тел имеет место, когда между частотами (периодами) невозмущенной системы, описывающей движение тел, имеет место соизмеримость — их отношение близко к отношению целых чисел. В небесной механике вводится понятие резонансной фазы (резонансного угла), представляющей собой линейную комбинацию угловых переменных системы с целочисленными коэффициентами. Когда резонансная фаза либрирует (изменяется в ограниченных пределах), система находится в резонансе. Моделью резонанса во многих случаях может являться жесткий математический маятник [29], угол отклонения маятника от положения равновесия представляет собой резонансную фазу.

Обычно резонансные движения небесных тел можно описать в рамках модели нелинейного резонанса [61, 62, 81], когда частота колебаний на резонансе зависит от амплитуды колебаний. В модели нелинейного резонанса при наличии возмущения возможно [29, 81] существование хаотического движения. А именно, в окрестности возмущенной сепаратрисы (области,

разделяющей колебательное и вращательное движения маятника) в фазовом пространстве системы появляется хаотический слой, внутри слоя движение системы является хаотическим (непредсказуемым). Проявлением хаотического движения является экспоненциальная расходимость близких траекторий в ограниченном фазовом пространстве.

1.1.2 Фазовые портреты и сечения Пуанкаре

Важным инструментом для изучения свойств динамических систем является метод сечений Пуанкаре (сечений фазового пространства). Суть его заключается в выборе определенной плоскости в фазовом пространстве системы и фиксации координат фазовой траектории в момент пересечения ею данной плоскости в одном и том же направлении. Отображение Пуанкаре [29] образует дискретную динамическую систему, свойства которой тесно связаны с исходной динамической системой с непрерывным временем. Построение сечений Пуанкаре позволяет отобразить поведение системы графически и из анализа полученного сечения сделать выводы о характере динамики системы.

Рассмотрим основные детали сечения фазового пространства возмущенного математического маятника. Запишем гамильтониан математического маятника с периодическим возмущением

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2} - w_0^2 \cos q + 2\varepsilon w_0^2 \cos q \cos \Omega t, \quad (1.1)$$

где q, p — сопряженные координата (угол отклонения маятника от положения равновесия) и импульс, t — время, w_0 — частота малых колебаний, ε и Ω — амплитуда и частота возмущения, соответственно.

Сечение фазового пространства $t = 0 \pmod{\pi}$ математического маятника с гамильтонианом (1.1), где принято: $w_0 = 1$, $\Omega = 1$, представлено на Рис. 1.1. Сечение строилось следующим образом, при численном интегрировании гамильтоновых уравнений движения маятника, в моменты $t = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$ фиксировались значения q и p , затем на плоскости (q, p) , отмечались точки с соответствующими координатами.

В случае, когда возмущение отсутствует ($\varepsilon = 0$), на сечении имеются две точки равновесия положения маятника — эллиптическая (устойчивая), с

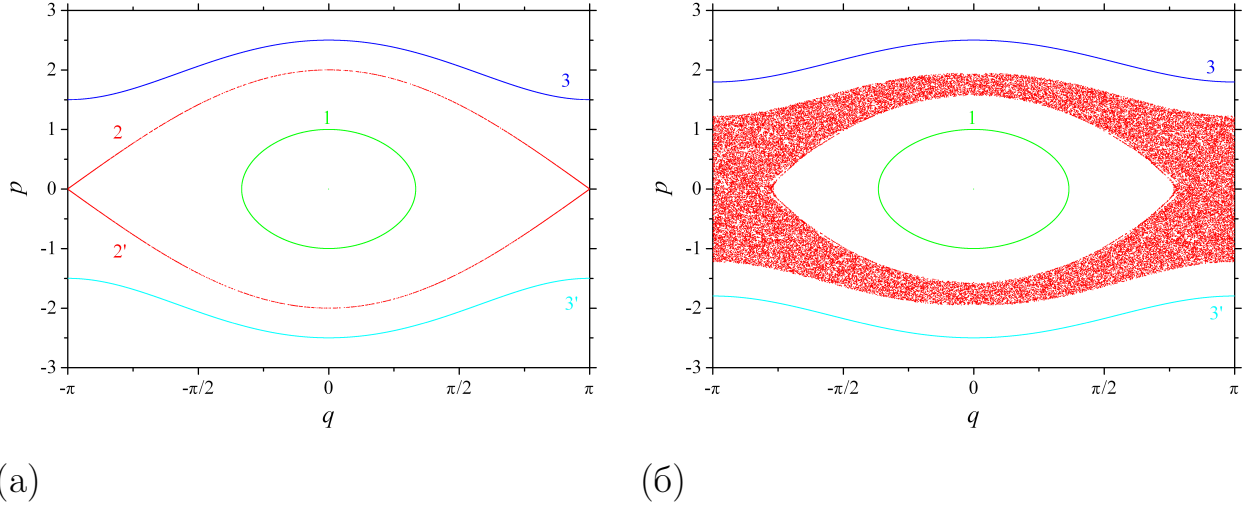


Рис. 1.1. Сечение фазового пространства для математического маятника. (а) Невозмущенный маятник $\varepsilon = 0$; (б) возмущенный маятник $\varepsilon = 0.1$. Траектории на сечении соответствуют: (1) либрационному движению, (2 и 2') сепаратрисам, (3 и 3') вращательному движению маятника. Для случая возмущенного маятника на месте сепаратрис существует хаотический слой.

координатами $q = p = 0$, и гиперболическая (неустойчивая), с координатами $q = \pm\pi, p = 0$.

На сечении присутствуют три типа траекторий: 1) траектории, соответствующие либрационному (колебательному) движению маятника вокруг эллиптической точки равновесия, для них при $p = 0$ имеем $-\pi < q < \pi$, 2) траектории, соответствующие вращательному движению маятника, для них при $q = \pm\pi$ имеем $p \neq 0$ ($p > 0$ и $p < 0$ отвечают разным направлениям вращения — прямому и обратному) и 3) сепаратрисы, разделяющие либрационное и вращательное движение маятника, для них при $q = \pm\pi$ имеем $p = 0$.

При наличии возмущения ($\varepsilon \neq 0$) сепаратрисы разрушаются и на их месте возникает хаотический слой (см. Рис. 1.1б). Движение маятника для начальных условий, соответствующих на сечении хаотическому слою, является хаотическим.

В диссертационной работе сечения фазового пространства строятся для различных задач, например, в Главе 2 сечения строятся для вращательного движения спутника планеты. Плоскость сечения определена в перигентре

орбиты спутника, угловые координаты и скорости вращения спутника относительно собственного центра масс фиксируются при прохождении спутником перицентра орбиты.

§ 1.2 Динамический хаос в движении небесных тел

Динамический хаос — явление, при котором поведение нелинейной динамической системы выглядит случайным, хотя оно задано детерминистическими законами. Рассмотрим ряд задач в небесной механике, где существенную роль в динамике играет наличие динамического хаоса.

Спутники планет

Динамический хаос во вращательной динамике спутников планет обусловлен взаимодействием спин-орбитальных резонансов. В данном случае резонансная фаза представляет собой линейную комбинацию из угловой скорости вращения спутника относительно своего центра масс и угловой скорости обращения спутника по орбите. Случай, когда между ними имеет место соотношение 1:1, называют синхронным спин-орбитальным резонансом. Синхронный резонанс подробно рассматривается в Главе 2.

В ходе эволюции вращательного движения спутник проходит через различные спин-орбитальные резонансы, при пересечении сепаратрисы резонанса вращательное движение спутника является хаотическим [198]. Кроме того, как показали Уиздом и др. [199], если фигура спутника существенно отличается от сферически симметричной и эксцентриситет орбиты велик (оба эти факта имеют место в случае седьмого спутника Сатурна — Гипериона), то возможно [29, 81] «перекрытие» резонансов — в фазовом пространстве вращательного движения сепаратрисные области соседних резонансов сближаются, при этом образуется широкий хаотический слой. Динамический хаос во вращательном движении спутников рассматривается в Главе 4.

Спутниковые системы

Помимо хаоса во вращательном движении спутников в их орбитальном движении также может наблюдаться [88, 103, 108] динамический хаос, он воз-

никает в спутниковых системах из-за взаимодействия резонансов средних движений и, что встречается чаще, из-за взаимодействия субрезонансов в мультиплетах, соответствующих какому-либо резонансу средних движений. Резонанс средних движений имеет место, когда отношение средних движений спутников близко к целочисленному отношению. Из-за вековых прецессий спутниковых орбит возникает (см. подробнее [51, 52]) расщепление резонансов на субрезонансы. В процессе приливной эволюции спутниковые системы проходят [183, 184] через различные резонансные состояния, при прохождении областей сепаратрис резонансов (субрезонансов) в спутниковой системе может иметь место хаотическое движение. Таким образом, хаос в орбитальной динамике спутниковых систем либо может присутствовать в настоящее время, либо имел место в прошлом. Проявления динамического хаоса в орбитальной динамике спутниковых систем рассматриваются в Главе 5.

Астероиды и кометы

В орбитальной динамике астероидов и комет динамический хаос вызван взаимодействием резонансов (субрезонансов) средних движений, вековых резонансов средних движений и трехтельных резонансов средних движений. В данном случае резонанс средних движений имеет место при соизмеримости средних движений малого тела (астероида) и планеты (как правило, Юпитера или Сатурна). Вековые резонансы средних движений вызваны соизмеримостями между скоростями прецессии орбит малого тела и планеты. В случае трехтельных резонансов резонансная фаза записывается в виде комбинации угловых координат малого тела и двух возмущающих тел (двух планет).

Роль хаоса в орбитальной динамике астероидов и комет весьма велика. Например, Уиздом [197] показал, что именно благодаря хаотическому движению в окрестности орбитального резонанса средних движений $3/1$ с Юпитером, образовался «люк» в распределении астероидов по большим полуосям орбит. При хаотическом движении в окрестности резонанса $3/1$ эксцентриситет орбиты астероида испытывает резкие скачки, из-за последующего тесного сближения с Марсом астероид покидает окрестность резонанса. Проявления динамического хаоса в динамике астероидов вблизи резонанса средних движений $3/1$ с Юпитером рассматривались в работе [67], при этом

использовались методы исследования, описанные в настоящей диссертационной работе.

Кратные звездные системы и экзопланетные системы

Хаотическая динамика в кратных звездных системах и экзопланетных системах обусловлена взаимодействием резонансов средних движений и вековых резонансов. Устойчивость по Лагранжу кратных звездных систем практически равнозначна их хаотичности, так как хаотичность обычно приводит к распаду системы. Орбиты экзопланет часто имеют значительные эксцентриситеты и наклонения, а сами планеты находятся в кратных звездных системах, либо в мультипланетных системах, поэтому существенное влияние на орбитальную динамику может оказывать эффект Лидова–Козаи [28, 130]. Эффект Лидова–Козаи можно рассматривать [51] как резонанс (резонанс Лидова–Козаи), при котором частота прецессии долготы перицентра и частота прецессии долготы узла возмущаемого тела (планеты) находятся в соотношении 1:1. Динамика кратных звездных систем и возможный хаос в орбитальной динамике планет в кратных звездных системах рассматриваются в Главе 5.

§ 1.3 Методы исследования устойчивости движения

Рассмотрим два основных метода, используемые в диссертационной работе, для исследования устойчивости движения и выявления хаотического поведения в динамике небесных тел. А именно, метод, основанный на вычислении мультипликаторов линеаризованной системы гамильтоновых уравнений движения (мультипликаторов Флоке), и вычисление характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ). Вычисление мультипликаторов позволяет исследовать устойчивость резонансного (периодического) движения небесных тел. Вычисление ХПЛ позволяет исследовать устойчивость любого типа движения (периодического, квазипериодического и хаотического).

1.3.1 Мультипликаторы линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений

Если систему дифференциальных уравнений, описывающую движение небесных тел, можно записать в гамильтоновой форме, то посредством вычисления и анализа значений мультипликаторов линеаризованной гамильтоновой системы можно определить характер устойчивости резонансного (периодического) движения. Рассмотрим определение мультипликаторов.

Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{A}(t)$ есть непрерывная, 2π – периодическая по времени t , вещественная матрица. Справедлива следующая теорема Ляпунова–Флоке [31]:

Теорема. Фундаментальную матрицу решений $\mathbf{X}(t)$ системы дифференциальных уравнений (1.2), при условии нормировки $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$, можно представить в виде $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t) \exp(\mathbf{B}t)$, где $\mathbf{Y}(t)$ — непрерывно дифференцируемая, 2π – периодическая по t матрица, $\mathbf{B}$ — постоянная матрица, $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Собственные числа λ_j ($j = 1, \dots, N$) постоянной матрицы $\mathbf{B}$ называются характеристическими показателями системы дифференциальных уравнений (1.2), а $\rho_j = \exp(2\pi\lambda_j)$ — мультипликаторами системы (1.2).

Пусть линейная система (1.2) — гамильтонова, тогда из теоремы Ляпунова–Пуанкаре [31] о характеристическом уравнении линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами следует, что тривиальное решение системы (1.2) устойчиво тогда и только тогда, когда все мультипликаторы системы ρ_i ($i = 1, \dots, 2N$, где N — число степеней свободы) расположены на комплексной плоскости на единичной окружности, то есть $|\rho_i| = 1 \ \forall i$, и матрица $\mathbf{X}(2\pi)$ (матрица монодромии) приводима к диагональной форме, то есть отсутствуют кратные мультипликаторы. Мультипликаторы образуют пары, для которых справед-

ливо следующее соотношение:

$$\rho_i = \frac{1}{\rho_{i+N}}, \quad i = 1, \dots, N,$$

то есть эти пары расположены симметрично относительно единичной окружности, если не лежат на ней (см. Рис. 1.2 для случая $N = 2$).

Таким образом, вычислив мультипликаторы линеаризованной гамильтоновой системы, описывающей резонансное движение небесных тел, и определив их положение относительно единичной окружности и кратность, можно установить характер движения — устойчивый/неустойчивый.

1.3.2 Характеристические показатели Ляпунова

Характеристические показатели Ляпунова являются важным инструментом исследования хаотического движения. Приведем необходимые основные определения и результаты, касающиеся ХПЛ. Подробный обзор сведений о ХПЛ дан, например, в работе Б. В. Чирикова [81] и монографии Лихтенберга и Либермана [29].

Рассмотрим две близкие по начальным условиям траектории фазового

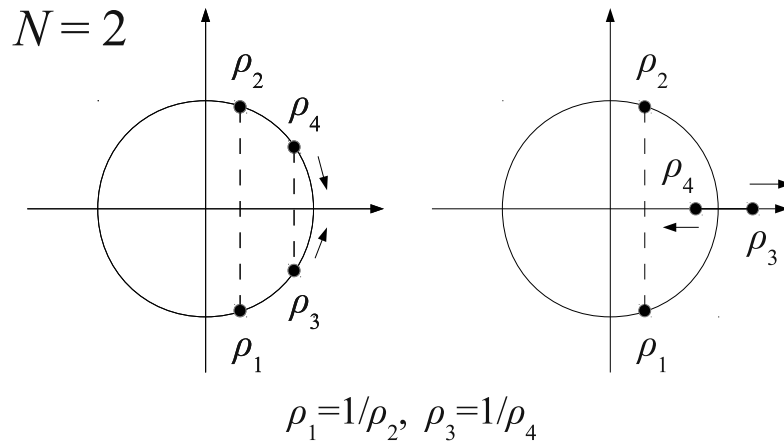


Рис. 1.2. Пример схемы расположения мультипликаторов ρ_i , $i = 1, \dots, 4$ на комплексной плоскости для случая гамильтоновой системы с $N = 2$: устойчивое решение (слева) и неустойчивое решение (справа). Окружность имеет единичный радиус. Точками указаны положения мультипликаторов.

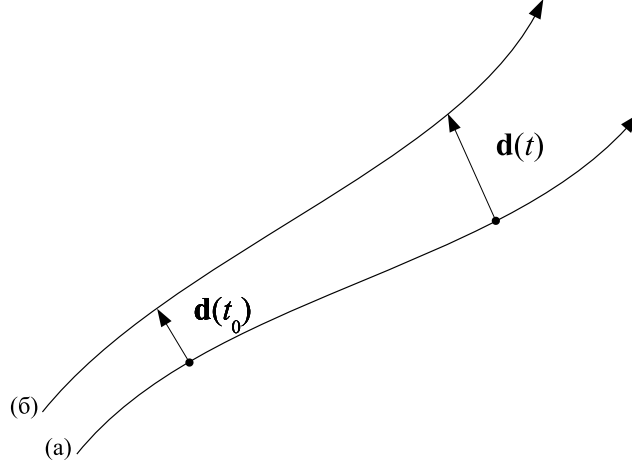


Рис. 1.3. Две близкие по начальным условиям траектории фазового пространства — «опорная» (а) и «тенивая» (б); $\mathbf{d}$ — вектор смещения.

пространства динамической системы (см. Рис. 1.3). Одну из траекторий будем называть «опорной», другую — «тенивой». Пусть $d(t_0)$ — длина вектора смещения $\mathbf{d}$, направленного от опорной траектории к тенивой, в начальный момент времени t_0 , $d(t)$ — длина этого вектора в произвольный момент времени t . Тогда ХПЛ определяется формулой [29]:

$$L = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(t_0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{d(t)}{d(t_0)} \quad (1.3)$$

и представляет собой среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких по начальным условиям траекторий фазового пространства.

Системе с N степенями свободы может быть поставлен в соответствие набор из $2N$ постоянных — характеристических показателей Ляпунова: $L_i \geq L_{i+1}$, где $i = 1, \dots, 2N - 1$. В случае автономной (не зависящей от времени) гамильтоновой системы по крайней мере два из $2N$ показателей равны нулю. Ненулевые разбиваются на пары равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку показателей $L_i = -L_{i+N}$, где $i = 1, \dots, N$.

Если в формуле (1.3) взяты начальные условия близких траекторий общего положения, то, как показано, например, в [29], для почти всех $\mathbf{d}$ имеем максимальный показатель в спектре $L = L_1$. Ненулевая величина максимального ХПЛ (МХПЛ) указывает на хаотический (неустойчивый), а нулевая — на регулярный (устойчивый) характер движения. Величина, обратная МХПЛ, — ляпуновское время — представляет собой характерное время пред-

сказуемой динамики системы.

Отметим, что никаких ограничений на характер движения не налагается (в отличие от метода вычисления мультипликаторов, описанного в разделе 1.3.1), посредством вычисления ХПЛ можно исследовать устойчивость периодического, квазипериодического и хаотического движений. Рассмотрим один из часто используемых методов вычисления МХПЛ и методы, позволяющие аналитически оценивать величину МХПЛ.

Численная оценка максимального ХПЛ

Распространенным методом вычисления МХПЛ является так называемый метод «теневого траектории», следующий из определения (1.3). Согласно этому методу, при практическом интегрировании на конечном промежутке времени в M шагов приближение МХПЛ вычисляется по формуле [29]

$$L_M = \frac{1}{M\Delta t} \sum_{i=1}^M \ln \frac{d_i}{d_{i-1}}, \quad (1.4)$$

где d_i — расстояние между опорной и теневой фазовыми точками на i -м шаге интегрирования, Δt — величина шага. При вычислениях по формуле (1.4) должна производиться периодическая перенормировка положения теневой фазовой точки относительно опорной по расстоянию d_i между ними, с тем, чтобы это расстояние было всегда относительно малым (см. [29]). Истинное значение МХПЛ есть предел L_M при $M \rightarrow \infty$. На практике (ввиду естественных ограничений на время счета) в качестве значения МХПЛ принимают L_M , полученное при больших значениях M . Однако следует особо подчеркнуть, что формально это разные величины.

При вычислениях по формуле (1.4) всегда получается приближение именно максимального ХПЛ, поскольку множество начальных условий для теневой траектории, которые дали бы другой элемент спектра ХПЛ, имеет [29] нулевую меру. Поэтому первоначальное малое смещение теневой траектории по направлению можно выбирать произвольным образом.

На Рис. 1.4 представлен пример зависимости текущей величины максимального ХПЛ, вычисленного методом теневой траектории, от времени его вычисления для начальных условий, соответствующих регулярному и

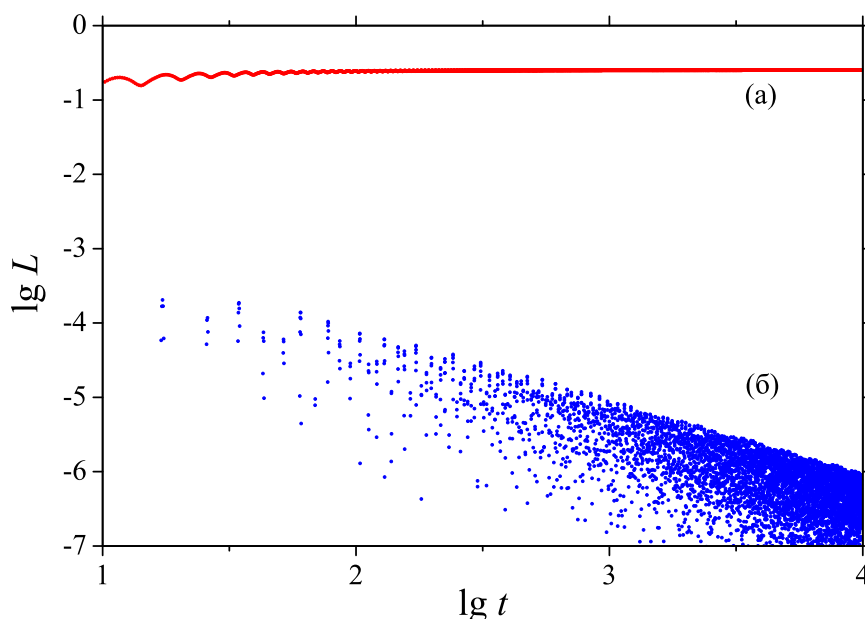


Рис. 1.4. Пример зависимости текущей величины МХПЛ от времени его вычисления для начальных условий, соответствующих хаотической (а) и регулярной (б) траекториям.

хаотическому движению. Из рисунка видно, что с увеличением промежутка времени, на котором вычисляется МХПЛ, его величина в случае регулярной траектории стремится к нулю, а в случае хаотической траектории — остается примерно постоянной.

Для вычисления МХПЛ в диссертационной работе использовался метод теневой траектории, реализованный в виде оригинального алгоритма на языке ФОРТРАН. Кроме метода теневой траектории для вычисления МХПЛ использовался и HQRВ-метод (Householder QR-Based). Данный метод основан на QR-разложении матрицы касательного отображения с использованием преобразования Хаусхолдера. HQRВ-метод разработан фон Бремом и др. [76] и реализован в виде программного комплекса на языке ФОРТРАН в работах В. В. Куприянова и И. И. Шевченко [128, 129, 177]. Данный метод позволяет вычислять полный спектр ХПЛ, анализ всего спектра ХПЛ необходим в ряде рассмотренных в диссертационной работе задач.

Аналитические оценки максимального ХПЛ

Аналитическое оценивание МХПЛ дает возможность получать значения этой важнейшей характеристики хаотического движения, не прибегая к сложным численным расчетам, связанным с интегрированием уравнений движения. Кроме того, аналитические оценки МХПЛ можно использовать для контроля вычислений на ЭВМ.

В настоящее время имеются по крайней мере два теоретических подхода для аналитического оценивания МХПЛ движения в окрестности сепаратрис нелинейных резонансов в гамильтоновой динамике. Первый из них, разработанный Хольманом и Мюрреем [116, 150], базируется на методе Б. В. Чирикова [62, 81] аналитического вычисления МХПЛ стандартного отображения (отображения Чирикова). К стандартному отображению можно свести модели различных физических систем.

Второй метод оценки МХПЛ, разработанный И. И. Шевченко [64, 65, 66, 173, 176], основывается на теории сепаратрисных отображений. Сепаратрисное отображение описывает движение в окрестности сепаратрис нелинейного резонанса [29, 61, 81]. Рассмотрим этот способ оценки МХПЛ подробно.

Нелинейный резонанс моделируется следующим гамильтонианом

$$H = \frac{\mathcal{G}p^2}{2} - \mathcal{F} \cos \varphi + a \cos(k\varphi - \tau) + b \cos(k\varphi + \tau), \quad (1.5)$$

где $\tau = \Omega t + \tau_0$. Переменная φ есть резонансная фаза, p — сопряженный ей импульс; τ есть фазовый угол возмущения, τ_0 — его начальное значение. Величина Ω есть частота возмущения; $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, a , b , k — константы. Первые два члена в (1.5) представляют собой гамильтониан нелинейного маятника (см. уравнение (1.1)), тогда как два — остальных периодические возмущения.

В случае симметричного возмущения ($a = b$) сепаратрисное отображение имеет два параметра: параметр $\lambda = \Omega/\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{\mathcal{F}\mathcal{G}}$ — частота малых колебаний маятника, и параметр W , пропорциональный амплитуде возмущения:

$$W = \frac{a}{\mathcal{F}} \lambda (A_{2k}(\lambda) + A_{2k}(-\lambda)), \quad (1.6)$$

где $A_{2k}(\lambda)$ есть интеграл Мельникова–Арнольда [29, 61, 81, 170]; при $k = 1/2$,

1 и $3/2$ (данные значения параметров имеют место в § 5.1) выражения для него имеют следующий вид:

$$A_1(\lambda) = 2\pi \frac{\exp \frac{\pi\lambda}{2}}{\sinh(\pi\lambda)}, \quad A_2(\lambda) = 2\lambda A_1(\lambda), \quad A_3(\lambda) = (2\lambda^2 - 1)A_1(\lambda). \quad (1.7)$$

В случае асимметричного возмущения ($a \neq b$) вместо одного параметра возмущения W имеем два: величины W^+ , W^- есть значения W для прямого (+) и обратного (−) движений модельного маятника соответственно. Они находятся по формулам [172]:

$$\begin{aligned} W^+(\lambda, \eta) &= \varepsilon\lambda (A_{2k}(\lambda) + \eta A_{2k}(-\lambda)), \\ W^-(\lambda, \eta) &= \varepsilon\lambda (\eta A_{2k}(\lambda) + A_{2k}(-\lambda)), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\varepsilon = a/\mathcal{F}$, $\eta = b/a$.

Зависимость наиболее вероятного значения МХПЛ симметричного сепаратрисного отображения от λ принимаем, согласно [64, 65, 66], в виде

$$L_{\text{sx}}(\lambda) \approx C_h \frac{2\lambda}{1 + 2\lambda}, \quad (1.9)$$

где $C_h \approx 0.8$ есть константа.

Средний период хаотического вращения модельного маятника в случае $a \neq b$ различен для прямого и обратного движений:

$$T^\pm = \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{32e}{\lambda|W^\pm|}. \quad (1.10)$$

МХПЛ для прямого и обратного движений за единицу времени исходной гамильтоновой системы есть

$$L^\pm = \frac{L_{\text{sx}}}{T^\pm}. \quad (1.11)$$

Расчет теоретического среднего значения МХПЛ $\langle L \rangle$ (среднего по всему слою) представляет собой сложную задачу (см. подробнее [64, 65, 66]). Далее положим просто

$$\langle L \rangle = \frac{1}{2}(L^+ + L^-). \quad (1.12)$$

Это относительно грубая оценка. Вывод более точных формул для $\langle L \rangle$ требует отдельного теоретического анализа, сопряженного к тому же с трудоемкими численными экспериментами.

Данный метод оценки МХПЛ можно использовать как при высоких, так и при низких ($\lambda < 1$) частотах возмущения, однако должно соблюдаться условие относительной малости возмущения в модели нелинейного резонанса. Возможность использования сепаратрисных отображений для описания движения при любых частотах возмущения установлена в работе И. И. Шевченко [173].

Подчеркнем, что определение МХПЛ (1.3) подразумевает усреднение скорости экспоненциальной расходимости траекторий по всей связной хаотической компоненте фазового пространства, содержащей начальные условия. Локальная скорость расходимости зависит от текущего положения фазовой точки; например, она, как правило, резко падает при приближении к границе хаотической области [66, 170]. Поэтому численные расчеты МХПЛ требуют достаточно большого (к тому же заранее неизвестного) времени счета, если ставится цель получения глобальных, а не локальных, оценок МХПЛ. Описанный аналитический метод оценки МХПЛ свободен от этой неопределенности: он дает глобальные оценки; разумеется, в условиях принятой модели возмущенного нелинейного резонанса.

Метод аналитического оценивания МХПЛ используется в Главе 5 при исследовании динамического хаоса в орбитальной динамике спутниковых систем. Описанный метод также использовался [67] для получения оценок МХПЛ в задаче о динамике астероидов вблизи резонанса средних движений $3/1$ с Юпитером.

Аналоги ХПЛ

Основной недостаток ХПЛ — для получения их точных численных оценок необходимо длительное интегрирование уравнений движения. Однако часто наблюдается медленная сходимость величин ХПЛ к теоретическому пределу. Развитие численных методов для выявления хаоса, представляющих собой вариации на темы ХПЛ, направлено на решение этой проблемы — получение выводов о характере движения за максимально короткое время интегрирования. Описание ряда наиболее известных методов, которые позволяют получить аналоги ХПЛ, приведено, например, в монографии Морбиделли [51] и работе Маффиони и др. [137]. Рассмотрим два наиболее

широко распространенных метода:

- FLI (Fast Lyapunov Indicator, быстрый индикатор Ляпунова) — предложен в работах Фрешле и др. [104, 105],
- MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits, средний фактор экспоненциальной расходимости близких орбит) — предложен в работе Чинкотта и Симо [82].

Для определения FLI используются простые алгоритмы, обладающие высокой скоростью вычисления. Достоинством MEGNO также является то, что определение MEGNO не требует большого времени интегрирования — на существенно меньших (по сравнению с вычислением МХПЛ) временах счета он позволяет сделать вывод о возможном характере (регулярное/хаотическое) движения.

Необходимо отметить, что вероятность ошибиться с определением типа траектории в фазовом пространстве (регулярная/хаотическая), при использовании аналогов ХПЛ выше, чем при вычислении ХПЛ, так как в алгоритмах определения аналогов ХПЛ используются дополнительные предположения. Кроме того, такая важная величина как ляпуновское время представляет собой величину обратную максимальному ХПЛ — при вычислении МХПЛ ляпуновское время легко вычислить. По этим причинам, в задачах, рассмотренных в диссертационной работе, вычислялся полный спектр ХПЛ (или только МХПЛ) и не использовались их аналоги.

Интегратор

Для интегрирования уравнений движения в диссертационной работе использовался интегратор Дормана–Принса DOPRI8 [55, 94], реализующий метод Рунге–Кутты 8-го порядка, с автоматически изменяемой величиной шага интегрирования. Как следует из названия, этот метод был разработан Дорманом и Принсом [94]. Достоинством интегратора DOPRI8, помимо его высокой точности и быстродействия, является тот факт, что в нем реализован алгоритм по адаптации величины шага интегрирования к решаемой задаче. В качестве параметров интегрирования задается максимальный размер шага интегрирования и величина локальной точности интегрирования. При

возникновении особенностей в ходе численного интегрирования уравнений движения, например при тесном сближении исследуемых небесных тел, шаг интегрирования автоматически уменьшается. Это позволяет в ряде случаев (см. Главу 5) обойтись без регуляризации уравнений движения, если, конечно, сближения не слишком тесные.

§ 1.4 Выводы к первой главе

В настоящей главе рассмотрены основные понятия и методы, используемые в диссертационной работе.

В § 1.1 рассмотрена модель возмущенного математического маятника, как модель, описывающая резонансные движения небесных тел. На примере возмущенного математического маятника рассмотрено понятие сечения фазового пространства динамической системы.

В § 1.2 кратко рассмотрены проявления динамического хаоса в движении небесных тел. Обсуждены рассматриваемые в диссертации небесномеханические системы и причины хаотического поведения в этих системах.

В § 1.3 дано краткое описание теории мультипликаторов линейных гамильтоновых систем дифференциальных уравнений и теории характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ). Эти методы использовались в диссертационной работе при анализе устойчивости движений небесных тел. Приведены сведения о методах вычисления максимального ХПЛ (МХПЛ), получения аналитических оценок МХПЛ, а также об аналогах ХПЛ. Дана характеристика интегратора, использовавшегося для численного интегрирования уравнений движения.

Глава 2

Вращательная динамика спутников планет

Спутники планет представляют собой следующую после астероидов, объектов пояса Койпера и комет по численности группу относительно крупных тел, составляющих Солнечную систему. В настоящей главе подробно рассмотрим вращательную динамику (относительно собственной оси) естественных спутников планет. Сначала приведем основные сведения о числе спутников, их размерах и наблюдаемых режимах вращения. Особое внимание уделим зависимости фигуры малого спутника от его размера. Далее рассмотрим уравнения, описывающие вращательное движение спутника в гравитационном поле планеты. Подробно рассмотрим синхронное с движением по орбите вращение. Для ряда спутников исследуем устойчивость относительно наклона оси вращения плоского (в плоскости орбиты) вращательного движения в точном синхронном резонансе и для различных вращательных режимов из его окрестности в фазовом пространстве вращательного движения. В конце главы рассмотрим вопрос о типичных режимах вращения спутников планет.

§ 2.1 Спутники планет

2.1.1 Основные сведения о спутниках планет

Из восьми планет Солнечной системы все планеты, кроме Меркурия и Венеры, имеют спутники. В Табл. 2.1 указано количество (согласно данным [58, 122]) известных в настоящее время спутников у каждой из планет. Отметим, что число спутников у планет-гигантов составляет несколько десятков.

Таблица 2.1. Количество спутников у планет Солнечной системы.

Земля	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Итого
1	2	67	62	27	14	173

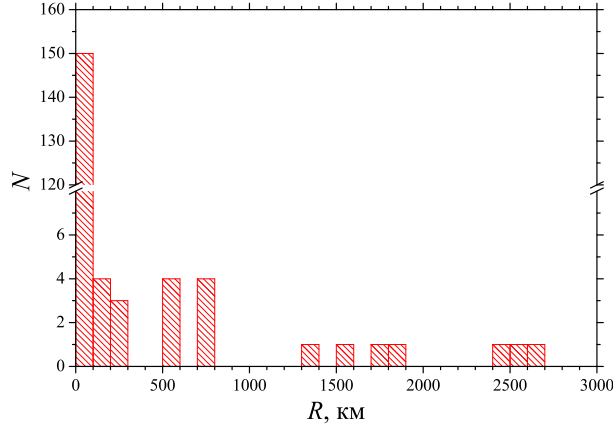


Рис. 2.1. Дифференциальное распределение значений среднего радиуса фигуры для известных спутников планет.

У Плутона, который до недавнего времени считался планетой, в настоящее время известно 5 спутников.

Размер спутника является одной из наиболее важных его физических характеристик. Анализ распределения средних радиусов R фигур спутников (размеры и орбитальные параметры спутников взяты из [58, 122]), представленного на Рис. 2.1, показывает, что у 90% известных спутников планет $R < 300$ км. Далее будем называть их *малыми спутниками*, а спутники с $R > 500$ км — крупными. Спутников с $R \in (300, 500)$ км в настоящее время у планет Солнечной системы не выявлено. Подробный статистический анализ данных о размерах известных спутников проведен В. В. Куприяновым и И. И. Шевченко [27].

Орбитальное движение спутника вокруг планеты происходит внутри сферы Хилла, радиус которой можно приближенно определить как [156, 165]:

$$r_H = a_p \left(\frac{m_p}{3M_\odot} \right)^{1/3},$$

где a_p — большая полуось орбиты планеты, m_p — масса планеты, $M_\odot$ — масса

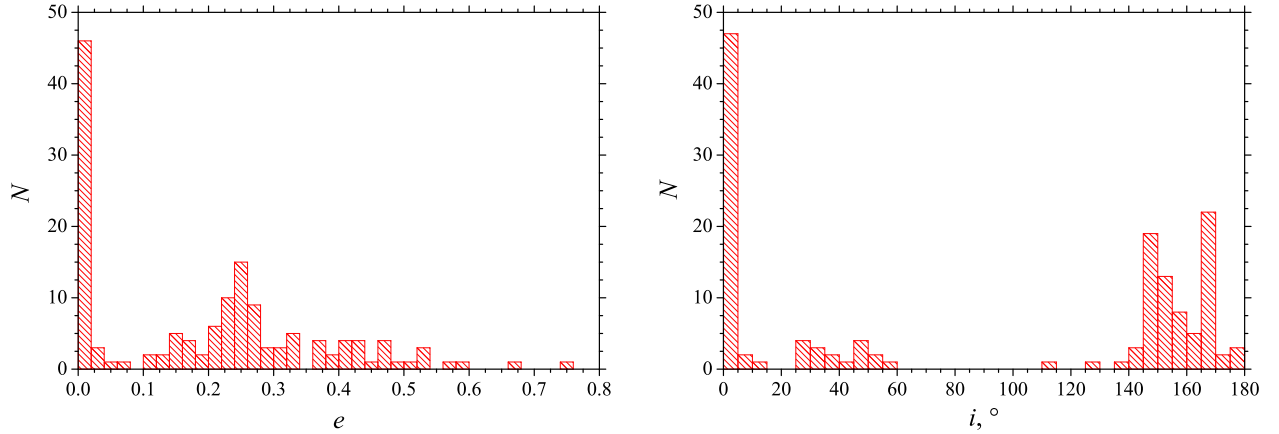


Рис. 2.2. Дифференциальные распределения эксцентриситетов и наклонений орбит у известных спутников планет.

Солнца.

Спутники планет разделяют на две большие группы (см. подробнее [156, 165]): *регулярные* и *иррегулярные*. Регулярные спутники находятся глубоко внутри сферы Хилла планеты (большая полуось орбиты $a \leq 0.05r_H$), имеют прямые орбиты (направление движения спутника по орбите совпадает с направлением вращения планеты), малые эксцентриситеты $e \approx 0$ и наклонения орбит $i \approx 0$. Под наклонением орбиты спутника здесь и далее подразумеваем угол между плоскостью орбиты спутника и плоскостью экватора планеты.

Орбиты иррегулярных спутников расположены дальше от планеты — $0.05r_H < a \leq 0.65r_H$ и могут быть как прямыми, так и обратными (ретроградными); значения e и i у таких спутников велики. Согласно Шеппарду [165] (см. Рис. 1 и 2 в его работе), для большинства иррегулярных спутников: $e \in [0.1, 0.5]$, $i \in [20^\circ, 70^\circ]$ или $i \in [125^\circ, 180^\circ]$.

Отметим, что ряд спутников, например, Луна, спутники Марса — Фобос (M1) и Деймос (M2) нельзя однозначно отнести к одной из двух указанных групп (см. подробнее [165]).

Из представленных на Рис. 2.2 дифференциальных распределений значений e и i для известных спутников планет следует, что большая часть спутников ($\approx 70\%$) относится к иррегулярным спутникам. Таким образом, большую часть популяции всех известных спутников представляют собой малые иррегулярные спутники.

2.1.2 Фигуры малых спутников планет

Форма спутника определяет главные центральные моменты инерции $A < B < C$ относительно главных осей инерции a', b', c' соответственно. Динамика вращательного движения спутника в пространственной задаче определяется начальными условиями (первоначальной ориентацией фигуры спутника в пространстве и начальным значением вектора угловой скорости вращения) и тремя параметрами: A/C , B/C и e , а в плоской задаче (при вращении/колебании спутника в плоскости орбиты) — начальными условиями и двумя параметрами:

$$\omega_0 = \sqrt{3 \left(\frac{B}{C} - \frac{A}{C} \right)}, \quad (2.1)$$

характеризующим динамическую асимметрию формы спутника, и e .

Чтобы определить возможность нахождения спутника в каком-либо режиме вращения, в общем случае необходимы данные о его инерционных параметрах — A/C , B/C , в частном случае, в предположении плоского вращения, — о величине параметра ω_0 . Для одних спутников эти данные известны (таких спутников менее 40), для остальных построим аппроксимацию наблюдаемой зависимости ω_0 от размера спутника. Оценки последнего имеются для подавляющего большинства известных спутников.

В работе В. В. Куприянова и И. И. Шевченко [27] были получены эмпирические экспоненциальная и степенная аппроксимации зависимостей от отношений инерционных параметров спутника A/C и B/C от радиуса спутника R . Радиус спутника определялся как среднее геометрическое полуосей $a > b > c$ трехосного эллипсоида, аппроксимирующего форму спутника: $R = (abc)^{1/3}$. Построим на основе данных о известных размерах 34 спутников, приведенных в [129], зависимость параметра ω_0 от R . Аппроксимацию, следуя [27], зададим в виде экспоненты:

$$\omega_0(R) = A_0 \exp(-R/R_0), \quad (2.2)$$

и найдем, что $A_0 = 0.88 \pm 0.07$, $R_0 = 270 \pm 65$ км, квадрат коэффициента корреляции между наблюдаемой эмпирической зависимостью и аппроксимацией (2.2) $\mathcal{R}^2 = 0.77$. На Рис. 2.3 представлена полученная статистическая

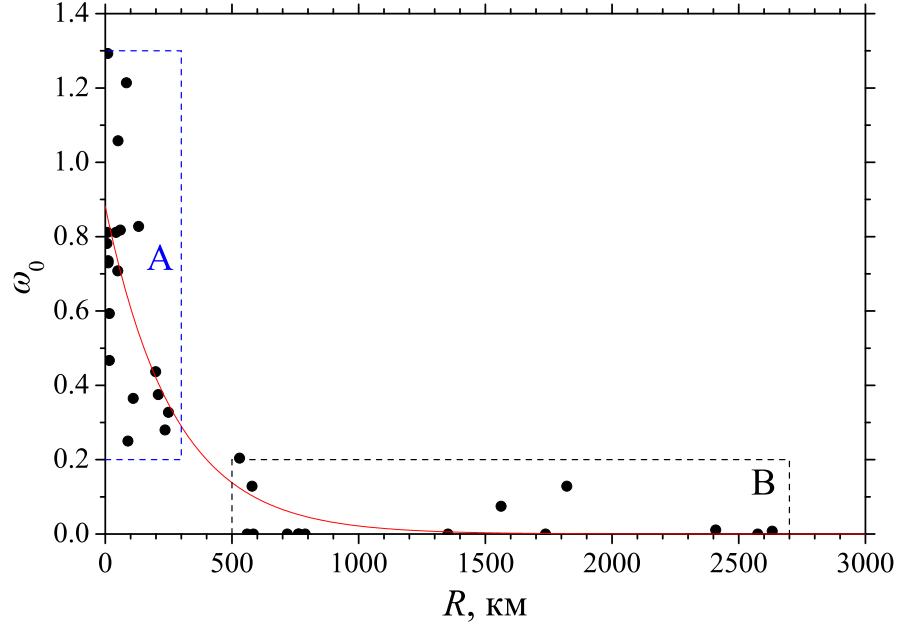


Рис. 2.3. Зависимость параметра ω_0 от радиуса спутника R . Сплошной линией нанесена экспоненциальная аппроксимация (2.2) с $A_0 = 0.88$, $R_0 = 270$ км. Штриховыми линиями указаны границы двух выделенных групп спутников — А и В (см. подробности в тексте). Точками отмечено положение ряда известных спутников, согласно данным [129].

зависимость параметра ω_0 от R . Аппроксимация (2.2) показана на рисунке сплошной кривой. Положения спутников нанесены в соответствии с данными [129].

На Рис. 2.3 штриховыми линиями выделены две прямоугольные области так, что спутники можно грубо разделить на две группы: малые спутники неправильной формы (спутники с $R < 300$ км и $\omega_0 > 0.2$; прямоугольник А) и крупные и круглые спутники (спутники с $R > 500$ км и $\omega_0 < 0.2$; прямоугольник В). Это разделение очевидно, так как отсутствуют спутники с величиной R от 300 до 500 км. Более того, две эти группы можно разделить и по величине ω_0 : нет известных малых спутников с $\omega_0 < 0.24$ и крупных спутников с $\omega_0 > 0.21$. Отметим, что, если рассмотреть первоначальные отношения инерционных параметров A/C и B/C (через которые выражается ω_0) вместо ω_0 , то спутники не будут разделяться так четко: выделенные группы малых и крупных спутников пересекаются друг с другом на множестве значений отношений инерционных параметров (см. Рис. 3 в [27]). Все спут-

ники на Рис. 2.3 (как в прямоугольнике А, так и в В), за исключением Фебы (С9) в прямоугольнике А и Тритона (Н1) в прямоугольнике В, являются регулярными.

Полученному разделению спутников на две группы на плоскости (R, ω_0) не придавался физический или космогонический смысл, поскольку любое разделение на группы А и В по физическим свойствам не играет существенной роли при дальнейшем исследовании вращательной динамики спутников, так как эта динамика определяется лишь моментами инерции и величиной эксцентриситета — параметрами, входящими в уравнения движения. Тем не менее, возможность разделения данных на две группы и построенная статистическая зависимость (2.2) определенно полезны для статистических предсказаний. Они обосновываются высоким значением коэффициента корреляции и качественным согласием с данными наблюдений, включая физически корректное поведение в пределах $R \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. Вопрос о физическом смысле экспоненциальной аппроксимации не рассматривался, эта аппроксимация использовалась как дополнительный инструмент в дальнейших исследованиях.

Полученная статистическая зависимость (2.2) построена на весьма ограниченной выборке, поэтому вопрос об универсальном характере данной зависимости остается открытым. Попробуем обосновать полученную зависимость посредством анализа подобной зависимости для астероидов, поскольку многие внешние спутники планет, возможно, представляют собой результат орбитального захвата астероидов [120, 121, 156, 165]. Статистика для астероидов намного больше, чем для спутников, хотя она и худшего качества.

Построим статистическую зависимость ω_0 от R для астероидов аналогичным способом, как для спутников. Перепишем формулу (2.1) в виде

$$\omega_0 = \sqrt{3 \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}}, \quad (2.3)$$

где $\gamma = b/a$. Представление (2.3) справедливо для однородного эллипсоида (см. [129]). Для отношений моментов инерции однородного спутника имеем [27, 129]:

$$\frac{A}{C} = \frac{b^2 + c^2}{a^2 + b^2}, \quad \frac{B}{C} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}. \quad (2.4)$$

Из (2.3) следует: ω_0 зависит только от отношения b/a и не зависит от c ; верхний предел для ω_0 равен $\sqrt{3} \approx 1.732$.

Амплитуда вариации звездной величины блеска астероида определяется формулой [132, 133, 142]

$$\Delta m = -\frac{5}{4} \lg (\cos^2 \varphi + \gamma^{-2} \sin^2 \varphi), \quad (2.5)$$

где φ — угол между осью вращения астероида и лучом зрения. Предполагается, что астероид вращается относительно оси наибольшего момента инерции (вокруг оси, совпадающей с наименьшей осью трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру астероида). Обращая формулу (2.5), получим выражение для γ через Δm :

$$\gamma = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{10^{-\frac{4}{5}\Delta m} - \cos^2 \varphi}}. \quad (2.6)$$

Используя (2.6) и (2.3), можно приближенно оценить ω_0 , если величина Δm известна.

На основе данных о величинах Δm , приведенных в таблицах в работе Уорнера и др. [195], были получены оценки ω_0 для 681 астероида. В качестве угла φ в (2.6) было принято его среднее значение $\bar{\varphi}$ (равное 1) на полусфере. Данные для транснептуновых объектов (ТНО) были исключены из выборки, поскольку эти данные в основном принадлежат большим объектам. (Более того, ТНО могут существенно отличаться по своим физическим свойствам от большинства спутников [165].) На Рис. 2.4 представлена полученная статистическая зависимость величины параметра ω_0 от радиуса астероида R . Аппроксимация этой зависимости при помощи функции (2.2) дает: $A_0 = 0.99 \pm 0.02$, $R_0 = 163 \pm 15$ км; квадрат коэффициента корреляции $\mathcal{R}^2 = 0.18$. Аппроксимирующая функция с этими параметрами также нанесена на Рис. 2.4.

Сопоставляя Рис. 2.3 и Рис. 2.4 отметим, что все астероиды на последнем рисунке, исключая Цереру ($R \approx 424$ км), располагаются на Рис. 2.3 внутри прямоугольника А, ни один из астероидов не попадает в прямоугольник В. Тем не менее результаты экспоненциальной аппроксимаций для астероидов и спутников весьма схожи. Таким образом, хотя коэффициент корреляции

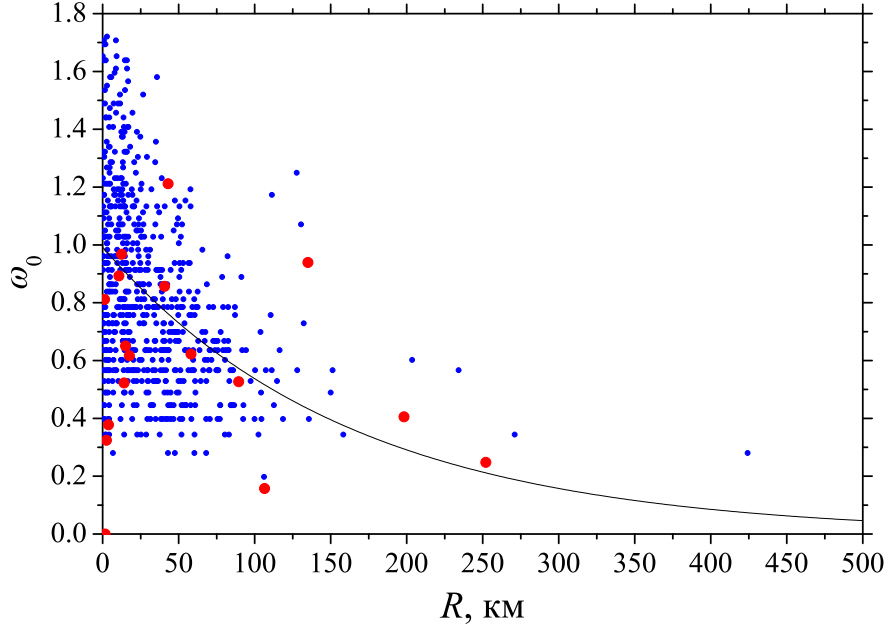


Рис. 2.4. Зависимость параметра ω_0 от радиуса астероида R . Астероиды отмечены синими точками. Сплошной линией нанесена экспоненциальная аппроксимация (2.2) с $A_0 = 0.99$, $R_0 = 163$ км. Красными точками отмечено положение ряда спутников Сатурна, согласно данным [186].

для астероидов много меньше, однако значения параметров аппроксимации весьма схожи, особенно в случае A_0 . Отметим, что $A_0 = 1$ представляет собой физически обоснованный предел $\omega_0 = 1$ для объектов малого размера: этот предел соответствует ожидаемым отношениям осей фигуры для монолитного каменного фрагмента, см. подробное обсуждение в [27]. Важно то, что результаты, полученные для астероидов, являются дополнительным свидетельством справедливости выбранной модели (2.2) для оценки возможной величины ω_0 в том случае, когда доступны данные лишь о размерах объекта.

Вернемся к спутникам. При построении статистической зависимости ω_0 от R , использовалась неоднородная выборка объектов. Спутники можно разделить на различные однородные группы, например по планетам, что также накладывает ограничения на статистические выводы. Рассмотрим, как может повлиять такое разделение на выводы, на примере спутников Сатурна, данные для которого наиболее представительны. На Рис. 2.4 на данные для астероидов были наложены данные о параметрах 17 спутников Сатурна, согласно Томасу [186]. Видно, что спутники Сатурна соответствуют экспонен-

циальной кривой, построенной для астероидов, даже лучше, чем большинство астероидов.

Полученная для спутников экспоненциальная аппроксимация (2.2) статистической зависимости величины параметра ω_0 от R используется в § 2.4 при анализе возможной вращательной динамики малых спутников планет и в § 4.3 при исследовании возможности существования странного аттрактора во вращательной динамике спутников планет при наличии приливной диссипации.

2.1.3 Вращательные состояния спутников планет

Важной характеристикой спутника является его вращательное состояние — угловая скорость вращения спутника и ориентация оси вращения в пространстве. В настоящее время вращательные состояния установлены [58, 122] у 33 спутников планет. Большинство из них (25 спутников) находятся в синхронном спин-орбитальном резонансе 1:1 (см. раздел 2.1.4). Для спутников, завершивших приливную эволюцию вращательного движения, этот наблюдательный факт теоретически ожидаем, так как синхронный 1:1 резонанс с движением по орбите является наиболее вероятным [106, 107, 154, 155, 156] финальным режимом долговременной приливной вращательной эволюции спутника планеты.

Другой качественный тип вращения, известный из наблюдений, — быстрое регулярное вращение. В настоящее время известно семь спутников с таким вращением [58, 72, 111, 122, 140, 141], список этих спутников приведен в Табл. 2.2. В таблице для каждого спутника указаны: P_{rot} — период вращения спутника относительно своего центра масс и величина отношения $P_{\text{orb}}/P_{\text{rot}}$, где P_{orb} — орбитальный период спутника. После названия спутника в скобках указаны планета и номер спутника. Например: Гималия (Ю6) — шестой спутник Юпитера. Все перечисленные в Табл. 2.2 спутники являются регулярными спутниками (возможно за исключением Нереиды (Н2), см. [168]). Все эти спутники, вероятно, завершили приливную вращательную эволюцию. Моделирование наблюдаемых кривых блеска и вращательной динамики Фебы (С9) проведено в § 3.3. Недавно Веавер и др. [196] установили, что

Таблица 2.2. Спутники с быстрым регулярным вращением.

Спутник	P_{rot} , сутки	$P_{\text{orb}}/P_{\text{rot}}$
Гималия (Ю6)	0.4	630
Элара (Ю7)	0.5	520
Феба (С9)	0.4	1 400
Калибан (У16)	0.11	5 200
Сикоракса (У17)	0.15	8 600
Просперо (У18)	0.19	10 300
Нереида (Н2)	0.48	750

четыре малых спутника карликовой планеты Плутон обладают быстрым (в 6–88 раз быстрее синхронного) вращением.

Третьим качественным типом вращения спутника, установленным из наблюдений, является хаотическое вращение («кувыркание»). В работах Уиздома и др. [199] и Уиздома [198] было теоретически показано, что спутник несферической формы на эллиптической орбите может вращаться хаотическим (непредсказуемым) образом. Эти авторы указали, что возможным кандидатом на хаотическое вращение, из-за сильной асимметрии фигуры и значительного эксцентриситета орбиты, является Гиперион (С7). Проведенное позднее моделирование наблюдаемых кривых блеска и вращательной динамики [14, 73, 113, 127] подтвердило хаотический характер вращения Гипериона. Вращательная динамика Гипериона подробно рассмотрена в § 3.2 и § 4.1.

В работе В. В. Куприянова и И. И. Шевченко [129] было указано на то, что два других спутника Сатурна — Прометей (С16) и Пандора (С17) также могут вращаться хаотически. Вращательная динамика этих спутников подробно рассмотрена в § 4.2.

Спутники с быстрым или хаотическим вращением составляют малую часть среди спутников с установленным режимом вращения. Однако, преобладание у спутников синхронного режима вращения может быть вызвано эффектом селекции, так как данный режим типичен для крупных спутников планет (синхронное вращение установлено у всех крупных спутников).

В § 2.4 с точки зрения динамической устойчивости рассматриваются типичные режимы вращения малых спутников планет.

2.1.4 Синхронный спин-орбитальный резонанс

Важнейшим, с точки зрения теории, спин-орбитальным состоянием является *синхронный резонанс*, в котором находятся все крупные спутники планет и большая часть спутников, вращательное состояние которых установлено. В синхронном резонансе угловая скорость вращения спутника относительно своего центра масс совпадает с угловой скоростью движения спутника по орбите, при этом фигура спутника в среднем все время ориентирована одной и той же стороной по направлению на планету. Отметим, что при движении спутника на эллиптической орбите, имеют место колебания ориентации фигуры спутника относительно направления на планету (подробнее см., например, монографию В. В. Белецкого [4]).

Рассмотрим кратко основные детали теории приливного взаимодействия спутника и планеты [6, 106, 107, 155, 156]. Из-за приливного взаимодействия тело спутника деформируется. Образуются так называемые приливные «горбы». Ось симметрии приливных горбов отклоняется от направления «планета — спутник» на угол, зависящий главным образом от разности угловой скорости вращения спутника относительно своего центра масс и угловой скорости обращения спутника по орбите. Приливное взаимодействие спутника с планетой приводит к изменению угловой скорости вращения планеты, например, приливное взаимодействие Луны и Земли приводит к замедлению вращения Земли. Притяжение приливных горбов спутника планетой приводит либо к уменьшению скорости вращения спутника, если она больше орбитальной, либо к ее увеличению, если она меньше орбитальной скорости. При этом угол между осью собственного вращения спутника и нормалью к плоскости спутниковой орбиты уменьшается. В результате конечной стадией приливной вращательной эволюции спутника, при условии, что орбита спутника фиксирована, является его синхронное вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Если учесть прецессию узлов орбиты, то на типичной конечной стадии эволюции ось вращения спутника

будет находиться в одном из состояний (положений) Кассини с малой величиной облического угла — угла между нормалью к плоскости орбиты и осью вращения [84, 86, 154, 155]. Исследование плоского вращательного движения спутника в синхронном резонансе с его орбитальным движением представляет не только теоретический интерес, но и имеет важное прикладное значение. Рассмотрим плоское синхронное вращение спутника подробно.

§ 2.2 Уравнение Белецкого и резонансные режимы плоского вращения

2.2.1 Система координат и уравнения движения

Вращательное движение спутника относительно его центра масс будем рассматривать при следующих предположениях: спутник представляет собой несферическое твердое тело, движущееся по фиксированной эллиптической орбите вокруг планеты. Положение спутника на орбите определяется истинной аномалией f . Планета считается неподвижной гравитирующей точкой. Размеры спутника много меньше радиуса орбитального движения, а масса спутника много меньше массы планеты.

Система координат определена исходно в перицентре орбиты спутника следующим образом: ось x направлена по вектору «перицентр орбиты спутника — планета», ось y параллельна вектору орбитальной скорости в перицентре, ось z ортогональна орбитальной плоскости и дополняет систему до «правой». Ориентация спутника относительно осей системы координат $Oxyz$ задается путем его воображаемых поворотов на углы Эйлера θ , ϕ , ψ из положения совпадения главных осей инерции a' , b' , c' с осями системы координат до их реального положения в следующей последовательности: сначала делаем поворот на угол θ вокруг оси c' , затем на угол ϕ вокруг оси a' и, наконец, на угол ψ вокруг оси b' . Система углов Эйлера определяется указанной выше последовательностью поворотов, она применялась ранее в [127, 199].

Выпишем динамические уравнения Эйлера [4, 31, 73, 199], описывающие эволюцию вектора угловой скорости вращения спутника ω в гравитаци-

онном поле планеты:

$$\begin{cases} A \frac{d\omega_a}{dt} - \omega_b \omega_c (B - C) = -3 \frac{GM}{r^3} \beta \gamma (B - C) , \\ B \frac{d\omega_b}{dt} - \omega_c \omega_a (C - A) = -3 \frac{GM}{r^3} \gamma \alpha (C - A) , \\ C \frac{d\omega_c}{dt} - \omega_a \omega_b (A - B) = -3 \frac{GM}{r^3} \alpha \beta (A - B) . \end{cases} \quad (2.7)$$

Здесь G — гравитационная постоянная; M — масса планеты; $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ — проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси a', b', c' ; $r = a_s(1 - e^2)/(1 + e \cos f)$ — расстояние «спутник — планета», a_s — большая полуось орбиты спутника; α, β, γ — направляющие косинусы главных осей инерции относительно направления на планету. Далее полагаем $a_s \equiv 1$ и $GM \equiv 1$. Таким образом угловые скорости выражены в единицах среднего движения, расстояния — в единицах большой полуоси эллипса орбиты. Один орбитальный период соответствует 2π единицам времени.

Правые части динамических уравнений Эйлера (2.7), представляющие собой проекции гравитационного момента, записаны здесь в приближенном виде: в них отброшены величины порядка $(R/r)^2$ и выше, где R — средние размеры (радиус) спутника. В этом приближении можно считать (см. [31]), что центр масс спутника движется по кеплеровской орбите. Таким образом, весьма малые возмущения орбиты, обусловленные вращательно-колебательным движением спутника относительно его центра масс, не учитываются.

В выбранной системе углов Эйлера направляющие косинусы и кинематические уравнения Эйлера имеют вид [127, 199]

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos \psi \cos(\theta - f) - \sin \psi \sin \phi \sin(\theta - f) , \\ \beta &= -\cos \phi \sin(\theta - f) , \\ \gamma &= \sin \psi \cos(\theta - f) + \cos \psi \sin \phi \sin(\theta - f) , \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{(\omega_c \cos \psi - \omega_a \sin \psi)}{\cos \phi}, \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega_a \cos \psi + \omega_c \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_b - \frac{d\theta}{dt} \sin \phi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Для уравнений движения, записанных в гамильтоновой форме, соотношения для импульсов, сопряженных углам Эйлера в выбранной системе, имеют вид [199]

$$\begin{cases} p_\theta = -A\omega_a \cos \phi \sin \psi + B\omega_b \sin \phi + C\omega_c \cos \phi \cos \psi, \\ p_\phi = A\omega_a \cos \psi + C\omega_c \sin \psi, \\ p_\psi = B\omega_b. \end{cases} \quad (2.10)$$

Искомая зависимость углов θ , ϕ , ψ , определяющих ориентацию фигуры спутника в пространстве, от времени дается совместным интегрированием динамических (2.7) и кинематических (2.9) уравнений Эйлера при заданных начальных условиях.

2.2.2 Плоское вращательное движение спутника

Уравнение Белецкого

Рассмотрим плоское вращательное движение спутника в гравитационном поле планеты. Для этого положим в начальный момент времени (в перигентре орбиты): $\phi = \psi = d\phi/dt = d\psi/dt = 0$, то есть вращение спутника относительно своего центра масс происходит в плоскости орбиты, при этом ось вращения ортогональна плоскости орбиты и совпадает с наименьшей осью эллипсоида, аппроксимирующего фигуру спутника. При плоском вращении система из динамических (2.7) и кинематических (2.9) уравнений Эйлера (шесть дифференциальных уравнений первого порядка) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

В 1959 г. В. В. Белецкий [3] вывел уравнение плоских колебаний спутника на эллиптической орбите [3, 4, 6, 31]

$$(1 + e \cos f) \frac{d^2\theta}{df^2} - 2e \sin f \frac{d\theta}{df} + \omega_0^2 \sin \theta \cos \theta = 2e \sin f, \quad (2.11)$$

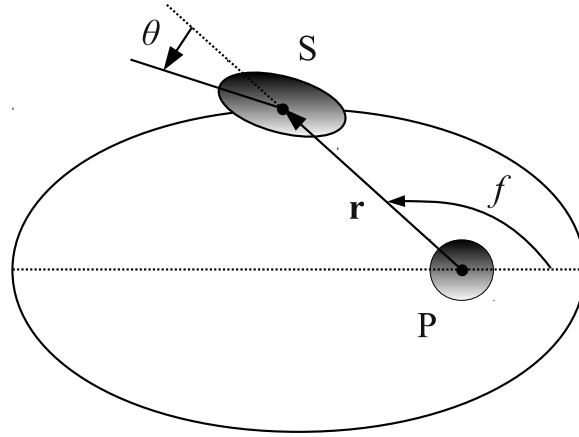


Рис. 2.5. Плоское вращательное движение спутника. S — спутник, P — планета, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор «планета — центр масс спутника», f — истинная аномалия, θ — угол, определяющий ориентацию спутника.

где θ — угол между осью наименьшего главного центрального момента инерции спутника (наибольшей осью трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру спутника) и мгновенным радиусом-вектором «планета — центр масс спутника» (см. Рис. 2.5). Уравнение (2.11) называется уравнением Белецкого. Уравнение Белецкого справедливо в предположении малости размеров спутника по сравнению с радиусом орбитального движения (поскольку при его выводе использованы уравнения (2.7)).

Синхронный α -резонанс и синхронный β -резонанс

Синхронный спин-орбитальный резонанс плоского вращательного движения спутника соответствует нечетному 2π -периодическому решению уравнения Белецкого (2.11). А. П. Торжевский [60] показал, что уравнение Белецкого в области $e \in [0, 1]$, $\omega_0 \in [0, \sqrt{3}]$ имеет либо одно, либо три нечетных 2π -периодических решения, и получил уравнение для кривой разветвления $\omega_0(e)$, выходящей из точки $e = 0$, $\omega_0 = 1$ и монотонно возрастающей до точки с координатами $e \approx 0.446$, $\omega_0 = \sqrt{3}$. На плоскости (e, ω_0) , ниже кривой разветвления по оси ω_0 существует одно нечетное 2π -периодическое решение, выше — три.

Границы областей устойчивости нечетных 2π -периодических решений

уравнения (2.11) на плоскости (e, ω_0) были найдены В. А. Златоустовым и др. [23] (см. Рис. 4 в их работе). Одно из трех решений всегда неустойчиво. Рассмотрим подробно два остальных решения уравнения Белецкого.

Каждому устойчивому нечетному 2π -периодическому решению уравнения Белецкого (2.11) соответствует свой синхронный резонанс плоского вращательного движения. Таким образом, при определенных значениях параметров e и ω_0 в фазовом пространстве могут одновременно существовать два различных режима вращения, синхронного 1:1 с орбитальным. В приложении к естественным спутникам планет это явление отметили Уиздом и др. [199], анализируя результаты численно-экспериментального исследования вращательного движения Гипериона (С7).

Синхронный резонанс, соответствующий устойчивому нечетному 2π -периодическому решению уравнения Белецкого, существующему как при $\omega_0 \leq 1$, так и при $\omega_0 > 1$ (то есть выше и ниже кривой разветвления на плоскости (e, ω_0)), обозначим как *синхронный α -резонанс*, а синхронный резонанс, соответствующий устойчивому решению, существующему только при $\omega_0 > 1$, как *синхронный β -резонанс*. В работе Уиздома и др. [199] синхронные α -резонанс и β -резонанс называются соответственно «нижним» и «верхним» резонансами, исходя из их взаимного расположения на плоскости сечения фазового пространства. В обозначениях, принятых в книге Б. В. Раушенбаха и М. Ю. Овчинникова [54], α -резонансу соответствует либо решение α_0^- , если $\mu \equiv \omega_0^2 \leq 1$, либо решение $\alpha_{1/1}^{(1)}$, если $\mu > 1$; β -резонансу соответствует решение α_0^+ .

Бифуркационная мода синхронного резонанса

В случае $e > 0$ имеют место вынужденные плоские колебания ориентации спутника (подробнее см., например, монографию В. В. Белецкого [4]), называемые «эксцентриситетными». Амплитуда этих колебаний в нерезонансном случае мала. Если значение ω_0 принадлежит области параметрического резонанса (при $e \approx 0$ параметрический резонанс имеет место в окрестности $\omega_0 = 1/2$ и $3/2$), то вращательное движение спутника в синхронном резонансе испытывает бифуркацию удвоения периода: нечетное 2π -периодическое решение уравнения (2.11) теряет устойчивость и вместо него появляется

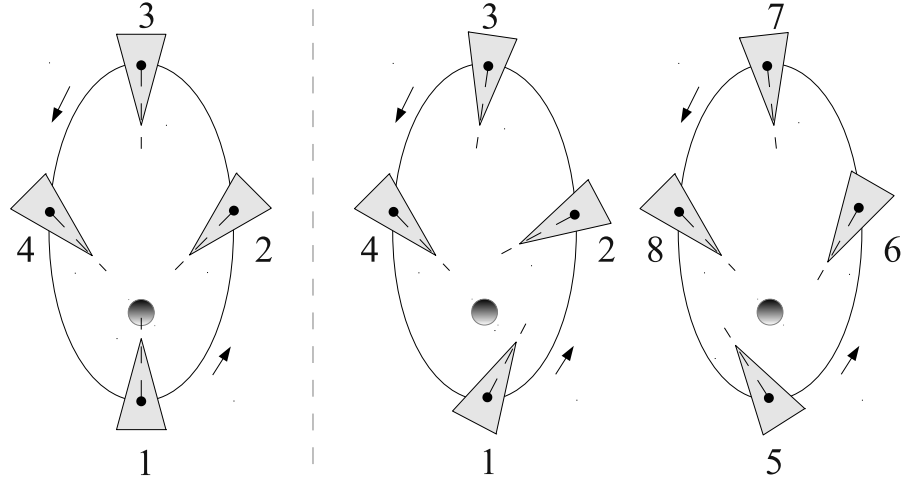


Рис. 2.6. Схема вращения спутника в синхронном резонансе. Слева от вертикальной штриховой линии — обычный режим синхронного вращения (последовательность $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ соответствует одному периоду обращения спутника по орбите), справа — бифуркационный режим синхронного вращения (последовательность $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 7 \rightarrow 8$ соответствует двум периодам обращения спутника по орбите).

нечетное 4π -периодическое решение. Возникают «бифуркационные» колебания ориентации спутника относительно его центра масс с периодом в два раза большим периода орбитального вращения.

Практический интерес представляет параметрический резонанс $\omega_0 = 1/2$, поскольку спутников планет с $\omega_0 \geq 3/2$ вероятно не существует. Вращение спутника в режиме синхронного резонанса, соответствующем нечетному 4π -периодическому решению уравнения Белецкого, устойчивому в области параметрического резонанса $\omega_0 = 1/2$, будем называть далее *бифуркационной модой α -резонанса* (модой α_{bif}), так как она возникает при бифуркации удвоения периода нечетного 2π -периодического решения уравнения (2.11), соответствующего синхронному α -резонансу.

Практически наличие бифуркации удвоения периода означает, что на кривую, описывающую изменение ориентации спутника со временем, накладывается длинное колебание с периодом, равным двум периодам обращения спутника на орбите. Наиболее эффект отклонения от обычного режима синхронного вращения проявляется в перицентре орбиты: ось минимального

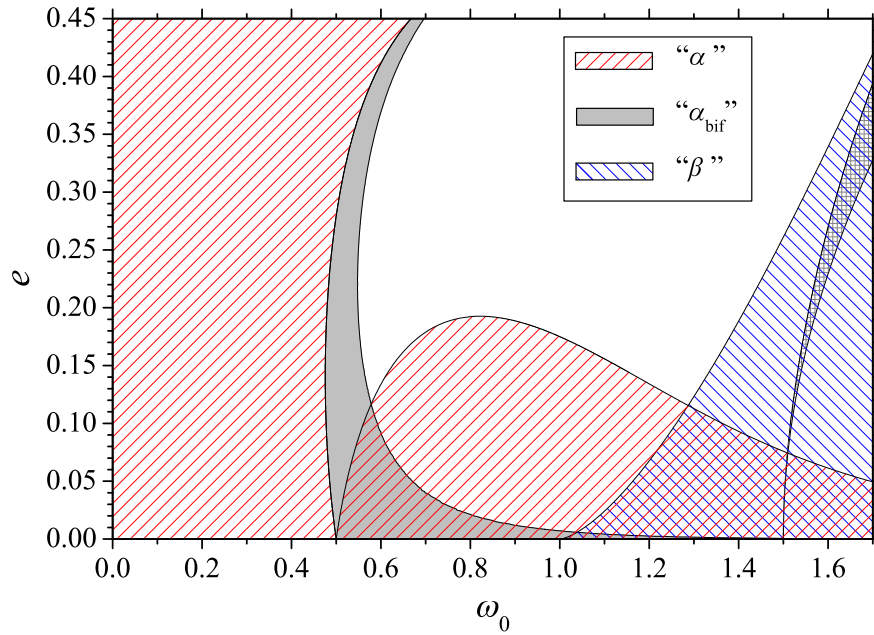


Рис. 2.7. Диаграмма « $\omega_0 - e$ ». Указаны области существования синхронного α -резонанса, синхронного β -резонанса и моды α_{bif} . В белой области синхронный резонанс не существует. Область, обозначенная серой клетчатой штриховкой, соответствует параметрическому резонансу в окрестности $\omega_0 = 3/2$.

момента инерции спутника (наибольшая ось фигуры спутника), вместо того, чтобы быть направленной в момент прохождения перицентра на планету, как это имеет место в обычном режиме синхронного вращения, испытывает последовательные отклонения при каждом прохождении перицентра то в одну, то в другую сторону (см. Рис. 2.6). Амплитуда этих отклонений может быть велика (десятки градусов), а значит, эффект может быть относительно легко наблюдаемым. Далее в разделе 2.2.3 проведем сравнительный анализ различных методов оценки величины амплитуды бифуркационных колебаний ориентации спутника.

Диаграмма « $\omega_0 - e$ »

На Рис. 2.7 приведена диаграмма « $\omega_0 - e$ », на которой нанесены границы областей существования синхронного α -резонанса и синхронного β -резонанса, а также границы области существования бифуркационной моды α -резонанса. Указана и область параметрического резонанса, имеющего место в окрестности $\omega_0 = 3/2$. Границы всех областей были установлены численно.

Рассмотрим основные особенности диаграммы « $\omega_0 - e$ », представленной на Рис. 2.7. Из точки $\omega_0 = 1$, $e = 0$ выходит кривая разветвления [4, 23, 60]. Левее кривой разветвления по оси ω_0 существует только одно нечетное 2π -периодическое решение (ему соответствует синхронный α -резонанс), правее — три решения, одно из которых всегда неустойчиво (два других решения соответствуют синхронному α -резонансу и синхронному β -резонансу).

В точке $\omega_0 = 1/2$, $e = 0$ рождается область параметрического резонанса. На левой границе этой области нечетное 2π -периодическое решение, соответствующее α -резонансу, теряет устойчивость путем бифуркации удвоения периода. При фиксированной величине e и увеличении ω_0 происходят последующие бифуркации удвоения периода, последовательность бифуркаций рассмотрена в разделе 2.2.3. Отмеченная на Рис. 2.7 правая граница области существования моды α_{bif} соответствует второй бифуркации удвоения периода.

В точке $\omega_0 = 3/2$, $e = 0$ рождается область второго параметрического резонанса. На левой границе этой области имеет место бифуркация удвоения периода нечетного 2π -периодического решения, соответствующего синхронному β -резонансу.

Представленные на Рис. 2.7 границы областей существования синхронных α -резонанса и β -резонанса совпадают с определенными ранее в работе В. А. Златоустова и др. [23] границами областей существования и устойчивости нечетных 2π -периодических решений уравнения Белецкого, соответствующих указанным резонансам. Правая граница области существования бифуркационной моды α -резонанса определена впервые.

Построим представительное сечение фазового пространства плоского вращательного движения спутника и укажем на нем местоположение резонансных областей, соответствующих различным режимам синхронного вращения. Рассмотрим зависимость ориентации спутника от времени при вращении в различных режимах синхронного вращения.

Сечение фазового пространства плоского вращательного движения спутника

На Рис. 2.8а приведено сечение фазового пространства $(\theta, d\theta/dt)$ плоского вращательного движения, определенное в перицентре орбиты (определенное равенством $t = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$), для $e = 0.002$, $\omega_0 = 1.058$ («Прометей»). На сечении имеются центры синхронного α -резонанса (нижний на сечении) и синхронного β -резонанса (верхний); для них $\theta = 0 \pmod{\pi}$. Также на сечении имеются два центра моды α_{bif} , расположенные в хаотическом слое на одной горизонтали слева и справа от центра синхронного β -резонанса; для них $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$. Неустойчивому нечетному 2π -периодическому решению уравнения Белецкого на Рис. 2.8а соответствует гиперболическая точка пересечения невозмущенных сепаратрис синхронного α -резонанса.

Вертикальные координаты на сечении центров синхронного α -резонанса и синхронного β -резонанса в зависимости от ω_0 и e можно определить по формуле, приведенной в работе Уиздома и др. [199]. Уравнения для горизон-

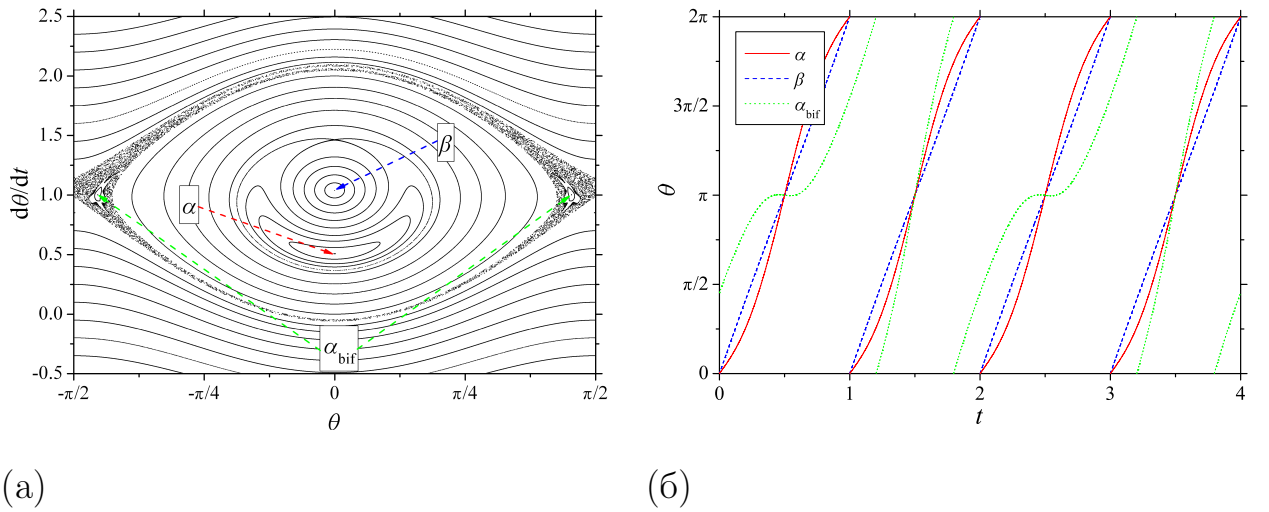


Рис. 2.8. (а) Сечение фазового пространства плоского вращательного движения спутника, определенное в перицентре орбиты, для $e = 0.002$, $\omega_0 = 1.058$ («Прометей»). Указаны центры синхронного α -резонанса, синхронного β -резонанса и моды α_{bif} . (б) Ориентация спутника как функция времени при вращении в синхронном α -резонансе (красная кривая), в синхронном β -резонансе (синяя кривая) и моде α_{bif} (зеленая кривая). Время t в орбитальных периодах.

тальных координат центров синхронного резонанса, соответствующих моде α_{bif} , выведены далее в разделе 2.2.3.

На Рис. 2.8б для случая $e = 0.002$, $\omega_0 = 1.058$ («Прометей») приведены зависимости ориентации спутника от времени при вращении в синхронном α -резонансе, синхронном β -резонансе и моде α_{bif} . Как видно из рисунка, поведение ориентации во времени в разных режимах синхронного резонанса в значительной степени индивидуально. Посредством детального анализа наблюдательных данных об ориентации спутника, полученных с КА, можно установить соответствующий режим синхронного вращения.

2.2.3 Амплитуда бифуркационных колебаний спутника

Измерение амплитуды бифуркационных колебаний реального спутника при его вращении в моде α_{bif} позволит уточнить величину ω_0 для спутника. А именно, зная теоретическую зависимость величины амплитуды колебаний от ω_0 и e , посредством сопоставления наблюдаемой амплитуды с теоретической можно уточнить ω_0 , так как величина e обычно известна с высокой точностью.

Сравним различные методы теоретической оценки величины амплитуды бифуркационных колебаний ориентации спутника относительно направления на планету в перицентре орбиты и рассмотрим последовательность бифуркаций удвоения периода, имеющую место в окрестности области параметрического резонанса $\omega_0 = 1/2$ при фиксированной величине e и изменении ω_0 .

Метод В. В. Белецкого

Для случая малых эксцентриситетов В. В. Белецкий [4] асимптотическим методом Крылова–Боголюбова [8] получил формулу для величины амплитуды колебаний в параметрическом резонансе ориентации спутника и определил границы области параметрического резонанса на множестве значений ω_0 . Напомним, что левая граница области параметрического резонанса совпадает с левой границей области существования бифуркационной моды синхронного резонанса (см. Рис. 2.7). Для малых e амплитуда бифуркационных колеба-

ний ориентации спутника в перицентре орбиты, обозначаемая далее $\gamma = 2\theta$, определяется уравнением [4]:

$$(2 - 3e)\gamma - 16\omega_0^2 J_1(\gamma) = 0, \quad (2.12)$$

где J_1 — функция Бесселя. Область параметрического резонанса на множестве значений ω_0 для малых e , имеет вид [4]

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8}e \leq \omega_0 \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{8}e. \quad (2.13)$$

Расчеты границ области существования моды α_{bif} на плоскости (ω_0, e) , представленные на Рис. 2.7, показывают, что область существования моды α_{bif} значительно перекрывает верхний предел (2.13).

Метод Г. М. Заславского и др.

Получим уравнение для амплитуды бифуркационных колебаний спутника в перицентре орбиты при помощи теории Г. М. Заславского и др. [22].

Предполагая малость e , уравнение Белецкого (2.11) можно привести к виду [199]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{2} \sin 2(\theta - t) - \frac{e\omega_0^2}{4} [\sin(2\theta - t) - 7 \sin(2\theta - 3t)] = 0.$$

Данное уравнение справедливо с точностью до первой степени эксцентриситета. Эквивалентный гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{4} \cos 2(\theta - t) + \frac{e\omega_0^2}{8} [\cos(2\theta - t) - 7 \cos(2\theta - 3t)].$$

Выполнив каноническую замену переменных по формулам

$$q = 2(\theta - t), \quad p = 2 \left(\frac{d\theta}{dt} - 1 \right), \quad (2.14)$$

получим гамильтониан возмущенного нелинейного маятника

$$H = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos q + \frac{e\omega_0^2}{2} [\cos(q + t) - 7 \cos(q - t)]. \quad (2.15)$$

Предполагая, что изменения q имеют малые пределы, воспользуемся разложением $\cos q$ в степенной ряд до третьего члена и подставим это разложение в гамильтониан (2.15). Постоянное слагаемое отбрасываем. Имеем

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} q^2 - \frac{\omega_0^2}{24} q^4 + \frac{e\omega_0^2}{2} [\cos(q + t) - 7 \cos(q - t)]. \quad (2.16)$$

Введем полярные координаты (ρ, ϕ) :

$$q = \rho \sin \phi, \quad p = \rho \omega_0 \cos \phi. \quad (2.17)$$

В новых переменных гамильтониан (2.16) имеет вид

$$H = \frac{\omega_0^2}{2} \rho^2 - \frac{\omega_0^2}{24} \rho^4 \sin^4 \phi + \frac{e\omega_0^2}{2} [\cos(\rho \sin \phi + t) - 7 \cos(\rho \sin \phi - t)]. \quad (2.18)$$

Следуя Г. М. Заславскому и др. [22], выполним осреднение за период и выделим резонансный член. Тогда гамильтониан (2.18) примет вид

$$H = \frac{\omega_0^2}{2} \rho^2 - \frac{\omega_0^2}{64} \rho^4 + \frac{e\omega_0^2}{2} J_2(\rho) [\cos(2\phi + t) - 7 \cos(2\phi - t)] + \frac{e\omega_0^2}{2} \sum_{(m \neq 2)} J_m(\rho) [\cos(m\phi + t) - 7 \cos(m\phi - t)].$$

Введем переменные действие–угол (I, ψ) по формулам $I = \omega_0 \rho^2 / 4$, $\psi = 2\phi - t$ и запишем гамильтониан: $\tilde{H}(I, \psi, t) = H(I, \psi, t) - I$. Представим $\tilde{H}$ в виде суммы $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{V}$, где

$$\tilde{H}_0 = (2\omega_0 - 1)I - \frac{1}{4}I^2 + \frac{e\omega_0^2}{2} J_2(\rho) [\cos(\psi + 2t) - 7 \cos \psi], \quad (2.19)$$

$$\tilde{V} = \frac{e\omega_0^2}{2} \sum_{(m \neq 2)} J_m(\rho) \left[\cos\left(\frac{m}{2}(\psi + t) + t\right) - 7 \cos\left(\frac{m}{2}(\psi + t) - t\right) \right].$$

Центрам синхронного резонанса на сечении фазового пространства соответствуют эллиптические особые точки системы с гамильтонианом (2.19). Их местоположение получаем из системы уравнений

$$\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \psi} = 0.$$

В перицентре орбиты $t = 0 \pmod{2\pi}$ эта система имеет вид

$$\begin{cases} \omega_0 \rho^3 - 8\rho(2\omega_0 - 1) + 48e\omega_0 \frac{dJ_2(\rho)}{d\rho} \cos \psi = 0, \\ J_2(\rho) \sin \psi = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Из второго уравнения системы (2.20) получаем $\psi = 0 \pmod{\pi}$. На сечении фазового пространства в перицентре орбиты для центров синхронного резонанса $\phi = \pi/2 \pmod{\pi}$. В перицентре $\phi = \psi/2$, поэтому $\psi = \pi$. Из (2.14)

и (2.17) имеем $\rho = 2\theta = \gamma$. Из системы (2.20) получаем уравнение для амплитуды бифуркационных колебаний спутника в перицентре орбиты:

$$\gamma^4 - 8\frac{(2\omega_0 - 1)}{\omega_0}\gamma^2 - 48e\gamma J_1(\gamma) - 96eJ_2(\gamma) = 0. \quad (2.21)$$

Уравнения (2.12) и (2.21) определяют значения $\theta_b = \gamma/2$, соответствующие центрам бифурцировавшего синхронного резонанса на сечении фазового пространства в перицентре орбиты, т.е. определяют минимальную величину амплитуды бифуркационных колебаний ориентации фигуры спутника в перицентре орбиты.

Метод Б. В. Чирикова

Используя метод, предложенный Б. В. Чириковым [61], получим уравнение для максимального значения угла θ на сечении фазового пространства и, соответственно, для максимальной амплитуды бифуркационных колебаний спутника в перицентре орбиты, обозначаемую далее $\gamma_{\max}$.

Рассмотрим гамильтониан (2.19). Отбрасывая быстроосциллирующий член с $\cos(\psi + 2t)$, получим гамильтониан, не зависящий явно от времени

$$H_r(I, \psi) = (2\omega_0 - 1)I - \frac{1}{4}I^2 - \frac{7}{2}e\omega_0^2 J_2(\rho) \cos \psi.$$

Поэтому он сохраняется $H_r = \text{const}$. В работе Б. В. Чирикова [61] этот гамильтониан называется резонансным. При $\omega_0 = 1/2$ возмущение настроено в резонанс с колебаниями малой амплитуды. При этом $H_r = 0$ для колебаний, возбуждаемых из положения равновесия. Уравнение для максимальной амплитуды бифуркационных колебаний в перицентре орбиты ($\psi = \pi$) имеет вид

$$\gamma_{\max}^4 - 16\frac{(2\omega_0 - 1)}{\omega_0}\gamma_{\max}^2 - 224eJ_2(\gamma_{\max}) = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) определяет максимальное значение величины угла θ , обозначаемое далее $\theta_{\max} = \gamma_{\max}/2$, в перицентре орбиты при вращении спутника в бифуркационном режиме плоского синхронного вращения. Уравнение для максимальной амплитуды бифуркационных колебаний получено впервые.

Сравнение различных методов

Для проверки теорий и сравнения результатов, получаемых на основе разных методов, рассмотрим два случая вращения спутника в бифуркационной моде α -резонанса, при значениях эксцентриситета $e = 0.015$ («Фобос») и $e = 0.1$ («Гиперион»). В каждом случае найдем зависимость координат центров синхронного резонанса $\theta_b = \gamma/2$ на сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, от величины параметра ω_0 . Исследуем зависимости θ_b и $\theta_{\max}$ от e для фиксированной величины ω_0 . Будем рассматривать горизонтальные координаты только одного из двух центров, соответствующих на сечении моде α_{bif} , поскольку, если сечение фазового пространства построить для $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ (см. Рис. 2.8а), то центры моды α_{bif} , будут расположены симметрично относительно вертикальной оси — для них $\theta = \pm\theta_b$.

На Рис. 2.9 представлена зависимость θ_b от ω_0 . Из рисунка видно, что для малых значений e как уравнение (2.12), так и уравнение (2.21) дают положение центра синхронного резонанса (моды α_{bif}) с большой точностью (Рис. 2.9а). При больших (Рис. 2.9б) значениях e уравнение (2.21) дает координаты центра резонанса точнее, чем уравнение (2.12).

Отметим, что при $\omega_0 \simeq 0.859$ для $e = 0.015$ и при $\omega_0 \simeq 0.588$ для $e = 0.1$

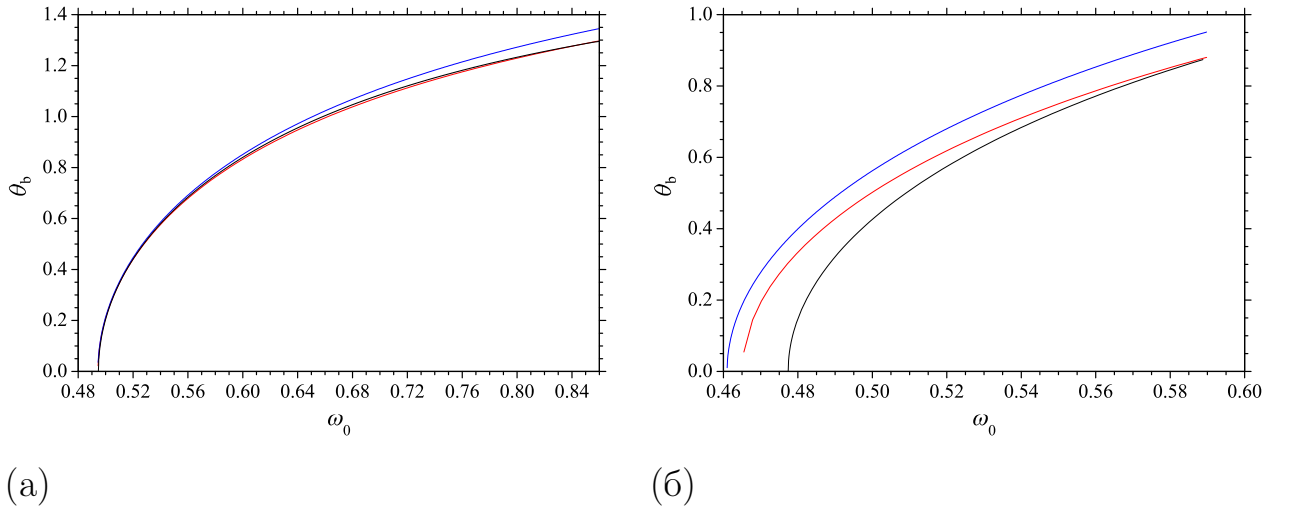


Рис. 2.9. Положение центра бифуркационной моды α -резонанса согласно формуле (2.12) (синяя кривая), по формуле (2.21) (красная кривая) и реальное (черная кривая): (а) $e = 0.015$ («Фобос»). Красная и черная кривые при данном разрешении практически совпадают. (б) $e = 0.1$ («Гиперион»).

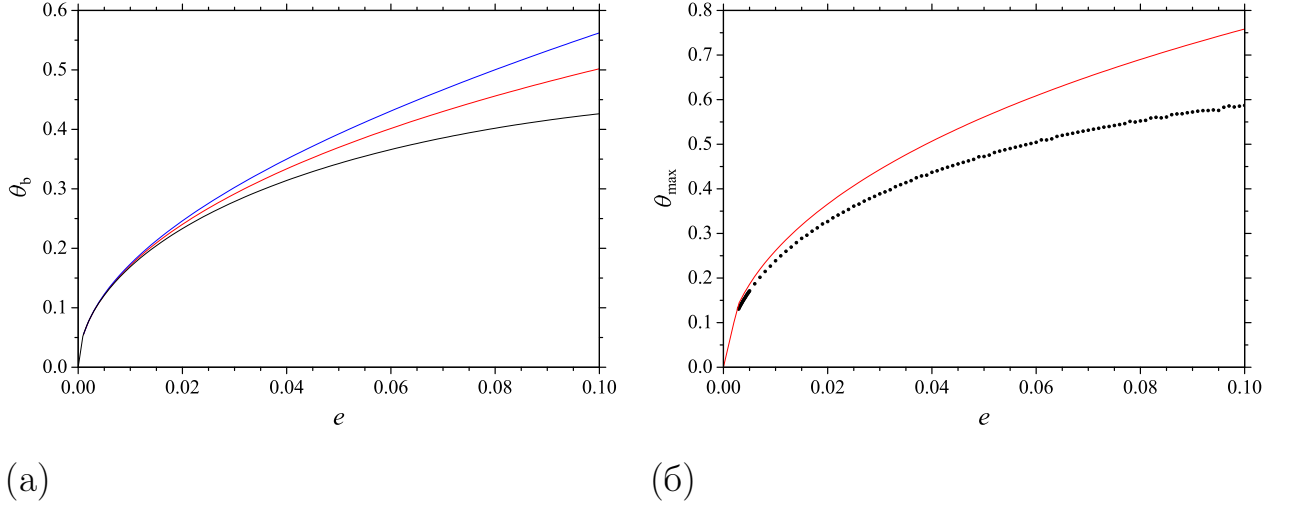


Рис. 2.10. (а) Положение центра бифуркационной моды α -резонанса согласно формуле (2.12) (синяя кривая), по формуле (2.21) (красная кривая) и реальное (черная кривая) для $\omega_0 = 1/2$. (б) Максимальное значение θ в перицентре при бифуркационных колебаниях согласно формуле (2.22) (красная кривая) и реальное (пунктирная кривая) для $\omega_0 = 1/2$.

имеет место вторая бифуркация удвоения периода. Уравнения для амплитуды бифуркационных колебаний спутника (2.12), (2.21) и (2.22) применимы только для значений ω_0 , соответствующих первой бифуркации удвоения периода (применимы в области существования моды α_{bif}).

На Рис. 2.10 представлены зависимости θ_b и $\theta_{\max}$ от e для $\omega_0 = 1/2$. Из Рис. 2.10а видно, что уравнение (2.21) позволяет определять амплитуду бифуркационных колебаний точнее, чем уравнение (2.12). Рис. 2.10б показывает, что для малых значений e формула (2.22) позволяет определить максимальную величину угла θ в перицентре орбиты.

Последовательность бифуркаций удвоения периода

В разделе 2.2.2 было отмечено, что в окрестности области существования моды α_{bif} при увеличении значения параметра ω_0 более $1/2$, при фиксированном e , происходят последующие бифуркации удвоения периода плоских колебаний ориентации спутника на эллиптической орбите. Последовательность бифуркаций удвоения периода при изменении величины e и фиксированном $\omega_0 = \sqrt{3/5}$ была рассмотрена В. И. Гуляевым и др. [11]. В рабо-

те [11] были получены данные об устойчивости периодических колебаний, рождающихся в результате бифуркаций. Показано, что последовательность значений эксцентриситета, при которых происходят бифуркации удвоения, обладает универсальным характером [9, 102].

Рассмотрим последовательность бифуркаций в окрестности $\omega_0 = 1/2$, полагая величину e фиксированной и увеличивая параметр ω_0 . Численные эксперименты показали, что значения ω_0 , при которых имеют место очередные бифуркации, образуют сходящуюся последовательность. Значение ω_0 , соответствующее n -й бифуркации удвоения, обозначим $\omega_0^{(n)}$. Установлено, что данная последовательность геометрически сходится к точке накопления $\omega_* \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_0^{(n)} = \omega_0^{(\infty)}$. Показатель прогрессии, вычисляемый по формуле

$$\delta_n = \frac{\omega_0^{(n-1)} - \omega_0^{(n-2)}}{\omega_0^{(n)} - \omega_0^{(n-1)}} , \quad (2.23)$$

стремится к универсальной для консервативных систем константе, называемой постоянной Фейгенбаума [9, 102]:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 8.72109 \dots$$

В Табл. 2.3 для случая $e = 0.1$ («Гиперион») приведены пять найденных бифуркационных значений ω_0 и вычисленный по формуле (2.23) показатель прогрессии δ_n . Первой бифуркации удвоения периода соответствует

Таблица 2.3. Бифуркационные значения ω_0 и показатель прогрессии δ_n , вычисленный по формуле (2.23), для $e = 0.1$ («Гиперион») .

n	$\omega_0^{(n)}$	δ_n
1	0.4773887	—
2	0.5895134	—
3	0.5990257	11.787
4	0.6001777	8.2575
5	0.6003098	8.7207

$n = 1$, второй — $n = 2$ и т.д. Из Табл. 2.3 видно, что показатель прогрессии, вычисленный по пяти первым бифуркационным значениям ω_0 , близок к универсальной консервативной постоянной Фейгенбаума. При этом точка накопления $\omega_* = 0.600326$.

Из Рис. 2.7 и Табл. 2.3 видно, что бифуркационные моды синхронного резонанса существуют на достаточно большом интервале значений ω_0 (при $e = 0.1$ они имеют место для $\omega_0 \in [0.47, 0.60]$), поэтому нельзя исключать возможность их существования в истории вращательной динамики реальных спутников планет. Тем более, что, как будет показано в разделе 2.2.4, бифуркационная мода α -резонанса может существовать во вращательной динамике ряда известных малых спутников.

2.2.4 Возможные режимы синхронного вращения у малых спутников планет

Рассмотрим возможные режимы плоского синхронного вращения у малых спутников планет. Для этого разместим известные спутники на построенной в разделе 2.2.2 диаграмме « $\omega_0 - e$ ».

На Рис. 2.11 приведена диаграмма « $\omega_0 - e$ », на которой точками указаны местоположения ряда спутников планет с известными величинами ω_0 и e . По сравнению с Рис. 2.7 на Рис. 2.11 изменен масштаб. Положения спутников нанесены согласно Табл. 2.4, составленной по данным из источников [73, 99, 109, 110, 122, 129, 187, 198, 199]. В таблице указано (знак «+»), наблюдается ли у спутника синхронное вращение. Отметим, что приведенные в Табл. 2.4 значения ω_0 у некоторых спутников могут отличаться от значений этих величин, принятых в других разделах. Это вызвано тем, что данные о форме спутников регулярно уточняются, поэтому в разных разделах использовались последние доступные данные.

Из Рис. 2.11 и Табл. 2.4 следует, что в область одновременного существования синхронного α -резонанса и синхронного β -резонанса попадают семь спутников: Амальтея (Ю5), Прометей (С16), Офелия (У7), Дездемона (У10), Джульетта (У11), Белинда (У14) и Наяда (Н3).

В область существования моды α_{bif} попадают 22 спутника: Фобос (М1),

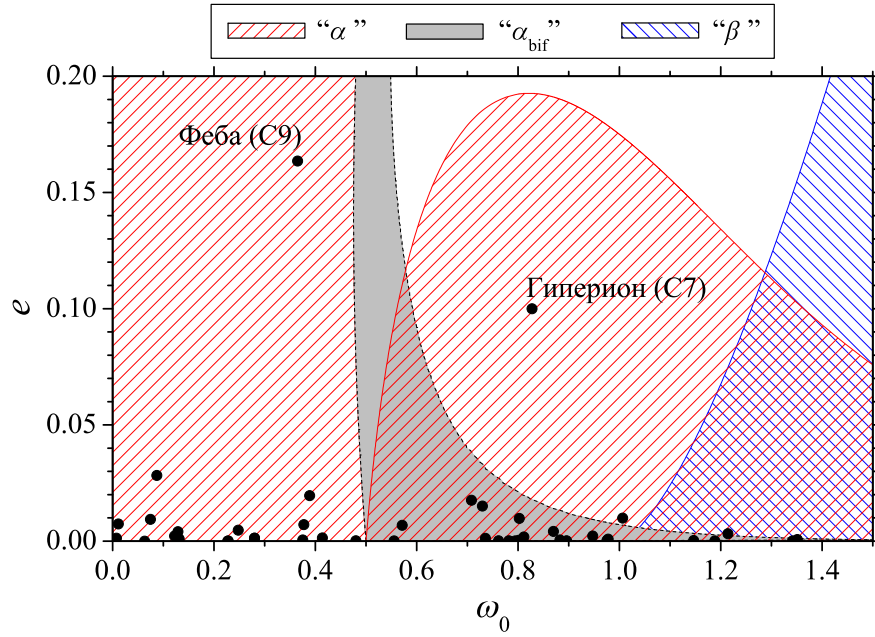


Рис. 2.11. Диаграмма « $\omega_0 - e$ ». Указаны области существования синхронного α -резонанса, синхронного β -резонанса и моды α_{bif} . В белой области синхронный резонанс не существует. Точками указаны положения спутников с известными величинами ω_0 и e , согласно данным из Табл. 2.4.

Деймос (M2), Теба (Ю14), Адрастея (Ю15), Янус (C10), Эпиметей (C11), Телесто (C13), Каллипсо (C14), Атлас (C15), Прометей (C16), Пандора (C17), Корделия (У6), Офелия (У7), Бьянка (У8), Крессида (У9), Дездемона (У10), Джульетта (У11), Порция (У12), Белинда (У14), Наяда (Н3), Деспина (Н5), Галатея (Н6).

Четыре спутника (Прометей (C16), Джульетта (У11), Белинда (У14) и Наяда (Н3)) попадают на Рис. 2.11 в область, где одновременно существуют все три рассмотренных режима плоского синхронного вращения. Возможная резонансная вращательная динамика этих спутников весьма богата: в зависимости от начальных условий спутник может быть захвачен в один из трех режимов синхронного вращения, если вращение в нем является устойчивым.

Таким образом, впервые установлено, что для ряда известных малых спутников планет возможно существование до трех режимов плоского синхронного вращения, в один из которых спутник может быть захвачен в ходе приливной эволюции вращательного движения.

Таблица 2.4. Эксцентриситеты орбиты e и параметры динамической асимметрии ω_0 для ряда естественных спутников. Приведены только спутники с $\omega_0 > 0.001$. Символами «+» отмечены спутники, для которых установлено, что они вращаются синхронно с движением по орбите.

Спутник	ω_0	e		Спутник	ω_0	e	
Фобос (М1)	0.730	0.0151	+	Атлас (С15)	0.735	0.0012	
Деймос (М2)	0.782	0.0002	+	Прометей (С16)	1.058	0.0022	
Ио (Ю1)	0.129	0.0041	+	Пандора (С17)	0.870	0.0042	
Европа (Ю2)	0.075	0.0094	+	Пан (С18)	0.227	0	
Ганимед (Ю3)	0.007	0.0013	+	Ариэль (У1)	0.129	0.0012	+
Каллисто (Ю4)	0.011	0.0074	+	Миранда (У5)	0.280	0.0013	+
Амальтея (Ю5)	1.214	0.0032	+	Корделия (У6)	0.975	0.0003	
Теба (Ю14)	0.708	0.0176	+	Офелия (У7)	1.006	0.0099	
Адрастея (Ю15)	0.811	0.0018		Бьянка (У8)	0.978	0.0009	
Мимас (С1)	0.389	0.0196	+	Крессида (У9)	0.802	0.0004	
Энцелад (С2)	0.248	0.0047	+	Дездемона (У10)	1.188	0.0001	
Тефия (С3)	0.228	0.0001	+	Джувьетта (У11)	1.351	0.0007	
Диона (С4)	0.122	0.0022	+	Порци (У12)	0.794	0.0001	
Рея (С5)	0.131	0.0013	+	Белинда (У14)	1.342	0.0001	
Гиперион (С7)	0.827	0.1		Тритон (Н1)	0.063	0	+
Япет (С8)	0.087	0.0283	+	Наяда (Н3)	1.147	0.0003	
Феба (С9)	0.365	0.1635		Таласса (Н4)	0.480	0.0002	
Янус (С10)	0.571	0.0068	+	Деспина (Н5)	0.761	0.0002	
Эпиметей (С11)	0.802	0.0098	+	Галатея (Н6)	0.555	0.0001	
Елена (С12)	0.377	0.0071		Ларисса (Н7)	0.414	0.0014	
Телесто (С13)	0.896	0.0002		Протей (Н8)	0.376	0.0005	
Калипсо (С14)	0.882	0.00054					

Мода α_{bif} в динамике спутников планет

Обсудим подробно возможность существования моды α_{bif} в динамике спутников планет. В разделе 2.2.3 было показано, что величина эксцентриситета

значительно влияет на амплитуду бифуркационных колебаний ориентации спутника. Поэтому для Фобоса (М1) и Тебы (Ю14), спутников с относительно большой величиной e , бифуркационный режим более ярко выражен по сравнению со спутниками, для которых $e \approx 0$, как, например, у Деймоса (М2), спутников Урана (спутники У6–У12 и У14) и Нептуна (спутники Н3, Н5 и Н6). С другой стороны, с увеличением e протяженность области существования моды α_{bif} по ω_0 сокращается (см. Рис. 2.11), то есть спутники с малой величиной e имеют большие шансы на существование бифуркационного режима.

Необходимо также отметить, что реальные естественные спутники не являются твердыми телами. Исследование колебаний вязкоупругого спутника на эллиптической орбите, выполненное О. В. Холостовой [56], показало, что параметрический резонанс имеет место при величине эксцентриситета, превышающей некоторую критическую величину. Для возможности выявления бифуркационного режима синхронного вращения у спутника (амплитуда бифуркационных колебаний должна быть существенной), эксцентриситет его орбиты должен быть не мал, но и не слишком велик.

Кроме того, если величина ω_0 слишком близка к значению, соответствующему второй бифуркации удвоения (Джульетта (У11) и Белинда (У14) расположены близко к правой границе области существования моды α_{bif}), то размеры островов, соответствующих бифуркационному режиму, на сечении фазового пространства очень малы. Вероятность захвата и нахождения в бифуркационном режиме для этих спутников, вероятно, также мала.

§ 2.3 Устойчивость вращательного движения несферических спутников планет относительно наклона оси вращения

В ходе долговременной динамической эволюции вращательного движения спутник проходит через различные спин-орбитальные резонансные состояния, пока не будет захвачен в одно из них [107, 154, 155, 156]. Возможность нахождения спутника в каком-либо резонансном состоянии напрямую связа-

на с его характером устойчивости относительно наклона оси вращения (см., например, [198]). Предполагается, что на конечной стадии вращательной эволюции ось вращения спутника ортогональна плоскости орбиты (см., подробнее, [84, 86, 154, 155]). Поэтому для понимания характера долговременной динамической эволюции спутников планет исследование устойчивости движения спутников в различных спин-орбитальных резонансных состояниях, и в первую очередь в синхронном резонансе, имеет важное значение.

Рассмотрим подробно устойчивость вращательного движения ряда малых спутников, а именно, исследуем вращательную динамику Фобоса (M1), Деймоса (M2), Амальтеи (Ю5) и Гипериона (C7). Известно [58, 122, 155], что первые три спутника находятся в настоящее время в синхронном вращении. Вращение Гипериона, напротив, является хаотическим (см. § 4.1 и [73, 113, 127, 199]). Устойчивость вращения для всех спутников исследуем как для синхронного резонанса, так и для различных вращательных состояний в ближайшей окрестности синхронного резонанса.

При исследовании устойчивости вращения спутника, также как в работах [73, 198, 199], предполагается, что его орбита представляет собой фиксированный эллипс. Хорошо известно, что элементы орбит рассматриваемых спутников на самом деле испытывают довольно сильные возмущения. В случае Фобоса, Деймоса и Амальтеи возмущения в основном обусловлены сжатием центральной планеты, в случае Гипериона — влиянием Титана (C6). Например, как указано в [73], эксцентриситет орбиты Гипериона колеблется от ≈ 0.08 до ≈ 0.12 с периодом 18.8 лет, а средняя долгота испытывает либрации с амплитудой $\sim 9^\circ$ и периодом 1.75 года. Однако временная шкала долгопериодических возмущений обычно намного превосходит характерное время развития неустойчивости вращения относительно наклона оси вращения (в случае Гипериона последнее составляет 1–2 месяца, см. обсуждение в § 4.1). Поэтому для дальнейшего динамического исследования предположение об орбите как фиксированном эллипсе вполне оправдано.

Параметры фигур спутников (отношения полуосей трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру спутника) и принятые значения эксцентриситетов их орбит приведены в Табл. 2.5. Эти данные взяты из работ [185,

Таблица 2.5. Параметры фигур и эксцентриситеты орбит малых спутников.

Спутник	c/b	b/a	ω_0	e
Фобос (M1)	0.821	0.836	0.730	0.015
Деймос (M2)	0.871	0.827	0.751	0.0005
Амальтея (Ю5)	0.918	0.557	1.256	0.003
Гиперион (С7)	0.772	0.738	0.940	0.1

186, 198]. Для эксцентриситета орбиты Гипериона принято его среднее значение $e = 0.1$, рассмотрим также $e = 0.08$ и $e = 0.1236$ (минимальная и максимальная величина).

2.3.1 Устойчивость синхронного вращения

Рассмотрим устойчивость плоского вращательного движения спутника относительно наклона оси вращения к плоскости орбиты в случаях точных синхронного α -резонанса и синхронного β -резонанса. Для этого используем метод статистического анализа мультипликаторов, основанный на анализе модальной структуры распределения значений модулей мультипликаторов линеаризованной системы гамильтоновых уравнений движения (подробнее о мультипликаторах см. раздел 1.3.1).

Метод статистического анализа мультипликаторов

Ниже приводится описание метода статистического анализа мультипликаторов, в применении к задаче об устойчивости вращения спутника в точном синхронном резонансе относительно наклона оси вращения к плоскости орбиты.

Сначала для избранного значения эксцентриситета, на сечении фазового пространства $(\theta, d\theta/dt)$, определенном равенством $t = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (то есть определенном в перицентре орбиты), вычисляются координаты центра синхронного резонанса в плоской задаче на множестве значений параметра $b/a \in (0, 1]$, поскольку при плоском вращении спутника с однородной плотностью эти координаты определяются только $\omega_0 = \sqrt{3(1 - (b/a)^2)/(1 + (b/a)^2)}$ и e . Координаты центра вычисляются путем ите-

раций, при этом начальные значения координат для итеративного процесса при данном текущем значении ω_0 берутся равными значениям координат, найденным для предыдущего значения ω_0 . При начальном $\omega_0 = 0$ (что соответствует $b/a = 1$) для координат центра синхронного резонанса имеем $\theta = 0 \pmod{\pi}$ и $d\theta/dt = 1$ при любом значении эксцентриситета.

Затем вычисляются модули мультипликаторов для разных значений параметров $c/b \in (0, 1]$ и $b/a \in (0, 1]$ на сетке с высоким разрешением. Шаг сетки на плоскости $(c/b, b/a)$, в узлах которой вычисляются мультипликаторы, берем равным 0.001 по обеим осям. Исследуется устойчивость плоского вращательного движения спутника относительно наклона оси вращения, это пространственная задача, поэтому число степеней свободы $N = 3$, то есть имеются три пары мультипликаторов (см. подробнее раздел 1.3.1). Вычисление мультипликаторов производится следующим образом. Следуя Уиздому и др. [199], рассмотрим две траектории: «опорную»

$$(\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi)$$

и «теневую»

$$(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi, \psi + \delta\psi, p_\theta + \delta p_\theta, p_\phi + \delta p_\phi, p_\psi + \delta p_\psi).$$

Движение описывается системой уравнений (2.7) и (2.10). Линеаризуя эту систему относительно вариаций $\delta\theta, \dots, \delta p_\psi$, получаем систему шестого порядка линейных дифференциальных уравнений для $\delta\theta, \dots, \delta p_\psi$ с периодическими коэффициентами. Эта система интегрируется на промежутке времени в один период орбитального движения ($\Delta t = 2\pi$) шесть раз, при этом вектор начальных условий

$$(\delta\theta, \delta\phi, \delta\psi, \delta p_\theta, \delta p_\phi, \delta p_\psi),$$

последовательно полагается равным столбцам матрицы $\tilde{\Delta} \cdot \mathbf{E}$, где принято $\tilde{\Delta} = 10^{-7}$, а $\mathbf{E}$ есть единичная матрица размера 6×6 . Это позволяет определить матрицу линейного преобразования за период (матрицу монодромии). Собственные числа ρ_i ($i = 1, \dots, 6$) этой матрицы являются мультипликаторами системы линеаризованных уравнений движения.

Для нахождения критерия того, что мультипликатор лежит на единичной окружности, строится распределение модулей мультипликаторов $|\rho_i|$

и анализируется его модальная структура. Анализ распределения модулей мультипликаторов позволяет выделить пик в окрестности $|\rho_i| = 1$ и определить пороговое значение модуля мультипликатора, определяющее его принадлежность единичной окружности на комплексной плоскости.

На последнем этапе плоскость параметров $(c/b, b/a)$ для избранной величины e разделяется на три области: область устойчивого движения (все мультипликаторы лежат на единичной окружности и среди них нет кратных); область неустойчивого движения относительно смещения оси вращения спутника от нормали к плоскости орбиты по одному направлению (пара мультипликаторов не лежит на единичной окружности); область неустойчивого движения относительно смещения оси вращения по двум направлениям (две пары мультипликаторов не лежат на единичной окружности). Указав на полученной диаграмме « $c/b - b/a$ » с областями устойчивости положение спутника с соответствующей величиной e , можно сделать вывод о характере устойчивости движения спутника в синхронном резонансе.

Диаграммы устойчивости на плоскости $(c/b, b/a)$

Применим метод статистического анализа мультипликаторов для анализа устойчивости синхронного вращения Фобоса (M1), Деймоса (M2), Амальтеи (Ю5) и Гипериона (С7).

Для вычисления мультипликаторов необходимо задавать начальные условия для соответствующих периодических траекторий — координаты центров синхронных резонансов на сечении фазового пространства. Эти начальные условия находились численно. На Рис. 2.12 для случая $e = 0.1$ («Гиперион») приведен пример зависимости найденных вертикальных координат $d\theta/dt$ центров синхронного α -резонанса и синхронного β -резонансов на сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, от величины параметра ω_0 . Горизонтальная координата для обоих резонансов $\theta = 0$. Эти координаты использовались в качестве начальных условий. Для остальных углов Эйлера и их производных по времени положим: $\phi = \psi = 0$, $d\phi/dt = d\psi/dt = 0$.

Рассмотрим эволюцию $d\theta/dt$ при изменении ω_0 , представленную на Рис. 2.12, подробно. При $\omega_0 = 0$ на сечении фазового пространства, опре-

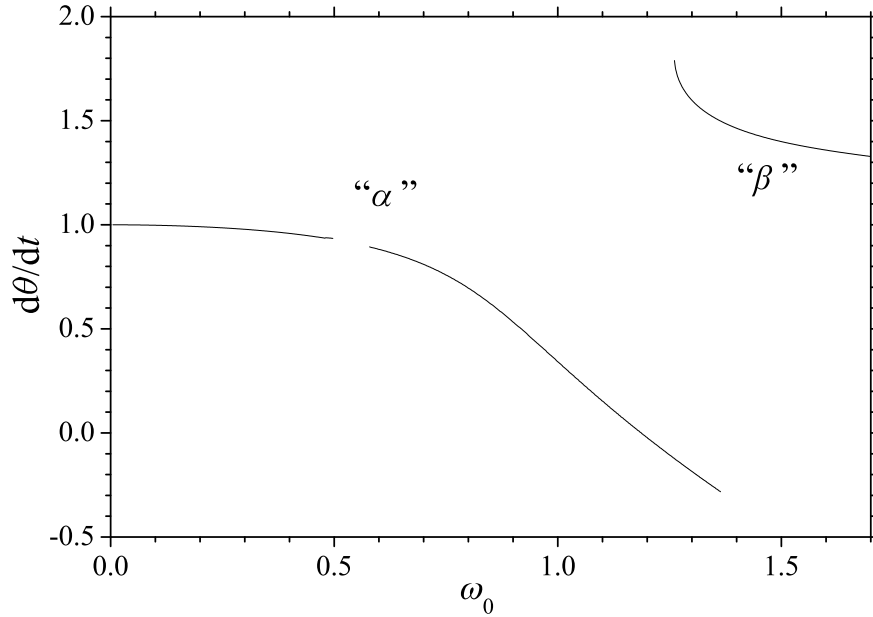


Рис. 2.12. Координата $d\theta/dt$ центра синхронного резонанса на сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, в зависимости от ω_0 ; $e = 0.1$ («Гиперион»). Кривая слева соответствует центру α -резонанса, справа — центру β -резонанса. Разрыв в кривой при $\omega_0 \approx 1/2$ соответствует области параметрического резонанса.

деленном в перицентре орбиты, существует центр синхронного α -резонанса координатами $\theta = 0 \pmod{\pi}$, $d\theta/dt = 1$. Если эксцентриситет ненулевой, то при увеличении ω_0 центр резонанса смещается по оси $d\theta/dt$ вниз, и при определенном значении ω_0 (например, если $e = 0.1$, то при $\omega_0 \simeq 1.26$) возникает еще один синхронный резонанс — синхронный β -резонанс. При дальнейшем увеличении параметра ω_0 , на ограниченном интервале его изменения, величина которого зависит от эксцентриситета, синхронный α -резонанс и синхронный β -резонанс сосуществуют вместе, а именно, на сечении фазового пространства имеются два центра, расположенные на одной вертикали (см., например, Рис. 2.8). При увеличении ω_0 , синхронный α -резонанс исчезает (при $\omega_0 \simeq 1.37$, если $e = 0.1$), то есть он становится неустойчивым в плоской задаче; остается только синхронный β -резонанс. Отметим, что в окрестности $\omega_0 = 1/2$ на Рис. 2.12 имеется разрыв, он соответствует области параметрического резонанса — области существования моды α_{bif} (см. подробнее § 2.2). Устойчивость синхронного вращения спутников в моде α_{bif} рассматривается

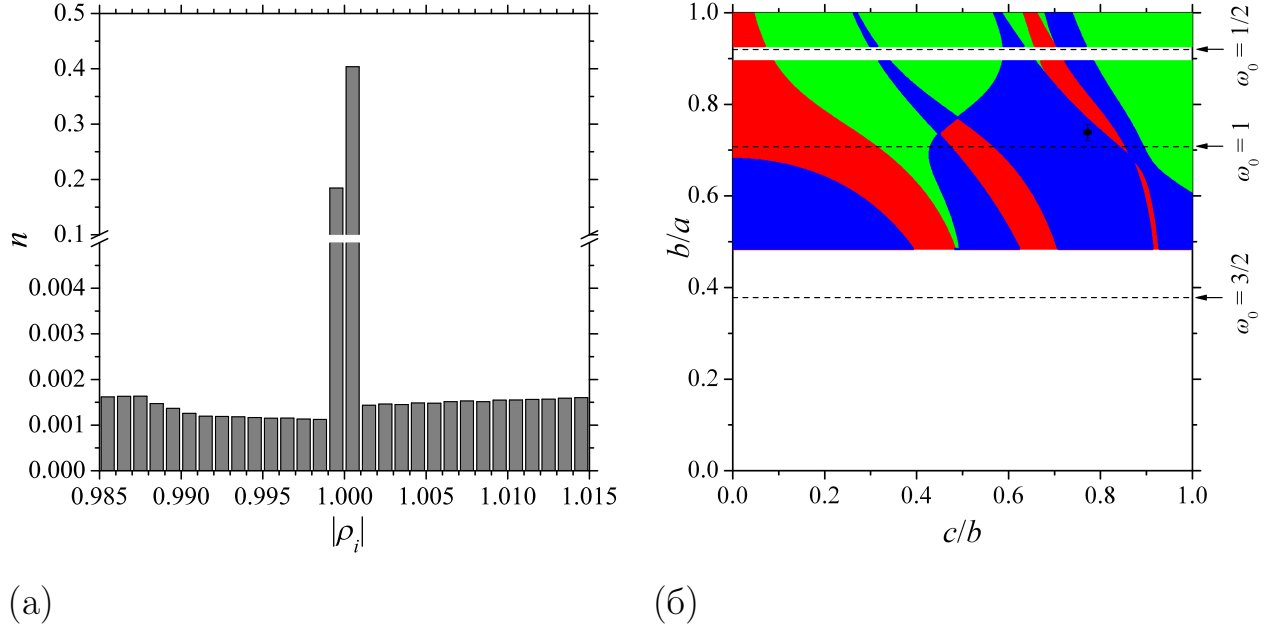


Рис. 2.13. (а) Нормированное дифференциальное распределение модулей мультипликаторов для выборки значений параметров, определенной в тексте; $e = 0.1$ («Гиперион»). (б) Области устойчивости (зеленый цвет) и неустойчивости (синий и красный цвета) относительно наклона оси вращения спутника в центре синхронного α -резонанса, $e = 0.1$ («Гиперион»). Точкой с барами указано положение Гипериона (по данным Табл. 2.5). Штриховые горизонтальные линии соответствуют приведенным справа значениям ω_0 .

в разделе 2.3.2.

Анализ расположения мультипликаторов относительно единичной окружности на плоскости в комплексном пространстве показал, что исчезновение синхронного α -резонанса с увеличением ω_0 происходит путем каскада бифуркаций удвоения периода, а исчезновение синхронного β -резонанса при уменьшении ω_0 происходит путем тангенциальной бифуркации. (О типах бифуркаций см., например, [7, 29].)

На Рис. 2.13а представлен пример нормированного дифференциального распределения значений модулей мультипликаторов $|\rho_i|$, вычисленных для спутника, вращающегося в синхронном α -резонансе на орбите с эксцентриситетом $e = 0.1$ («Гиперион»). Синхронный β -резонанс для принятых в случае Гипериона значений параметров фигуры (см. Табл. 2.5) не существует. На рисунке представлена только ближайшая окрестность значения $|\rho_i| = 1$ (то

есть окрестность единичной окружности с центром в начале системы координат на комплексной плоскости). Из вида распределения получаем пороговое значение отклонения модуля мультипликатора от единицы, служащее критерием того, что мультипликатор не принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости. В данном случае (для Гипериона) оно принято равным 0.002. Для случаев Фобоса, Деймоса и Амальтеи величина порогового отклонения модуля мультипликатора от единицы оказалась такой же.

На Рис. 2.13б показана плоскость параметров $(c/b, b/a)$ для случая $e = 0.1$ («Гиперион»). Множество значений параметров на Рис. 2.13б и последующих рисунках разделено на три группы, образующие области: устойчивости, показанные зеленым цветом, неустойчивости по одному направлению — синим, неустойчивости по двум направлениям — красным. В белых областях синхронный резонанс в плоской задаче не существует. Заметим, что если орбита круговая, на диаграммах « $c/b - b/a$ » имеет место устойчивость на всей плоскости (см. подробнее [4]).

На Рис. 2.13б, согласно Табл. 2.5, нанесено положение Гипериона по современным данным [186], полученным на основе анализа изображений, сделанных КА «Кассини». В соответствии с этими данными, Гиперион расположен на диаграмме « $c/b - b/a$ » глубоко в области неустойчивости. Вычисление и анализ значений мультипликаторов, проведенные для двух других возможных значений эксцентриситета орбиты Гипериона — $e = 0.08$ и $e = 0.1236$, показали, что и в этих случаях синхронное вращение Гипериона неустойчиво.

Отметим, что ранее Уиздом и др. [199] исследовали устойчивость вращения Гипериона в синхронном α -резонансе для случая $e = 0.1$, посредством вычисления мультипликаторов на множестве возможных значений $(A/C, B/C)$, и пришли к выводу о возможной неустойчивости синхронного вращения Гипериона относительно наклона оси вращения к плоскости орбиты. Использование высокого разрешения сетки значений параметров (на Рис. 2.13б разрешение по осям на два порядка выше чем на Рис. 4 в работе [199]), для которых вычислялись мультипликаторы, и современных данных [186] о фигуре Гипериона позволяют сделать более определенный вывод о неустойчивости синхронного вращения Гипериона.

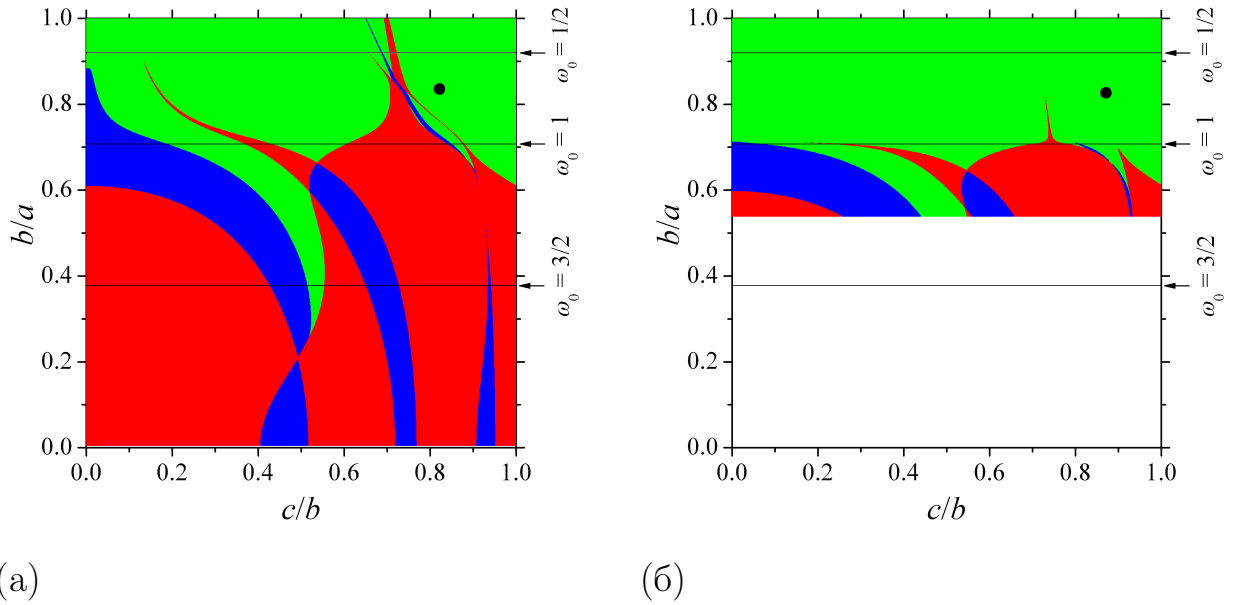


Рис. 2.14. Области устойчивости (зеленый цвет) и неустойчивости (синий и красный цвета) относительно наклона оси вращения спутника: (а) центр синхронного α -резонанса, $e = 0.015$ («Фобос»); (б) центр синхронного α -резонанса, $e = 0.0005$ («Деймос»). Точками указаны положения Фобоса (М1) и Деймоса (М2), согласно Табл. 2.5. Штриховые горизонтальные линии соответствуют приведенным справа значениям ω_0 .

Диаграммы « $c/b - b/a$ » в случае Фобоса, Деймоса и Амальтеи представлены на Рис. 2.14 и 2.15. Для Фобоса и Деймоса (Рис. 2.14), как и в случае Гипериона (Рис. 2.13б), результаты представлены только для синхронного α -резонанса, поскольку синхронный β -резонанс при соответствующих значениях параметров фигур спутников (см. Табл. 2.5) не существует. Из Рис. 2.14 следует, что Фобос и Деймос расположены в областях устойчивости на диаграммах « $c/b - b/a$ ». Из наблюдений известно, что эти спутники действительно вращаются в синхронном резонансе [58, 122, 155, 156].

В случае Амальтеи синхронный α -резонанс и синхронный β -резонанс сосуществуют в протяженной по ω_0 области (см. раздел 2.2.4). Из положения Амальтеи на диаграмме « $c/b - b/a$ » (Рис. 2.15) следует, что α -резонанс для Амальтеи неустойчив. Вращение Амальтеи в синхронном β -резонансе, напротив, устойчиво. Так как известно [58, 122, 155], что Амальтея вращается синхронно, то, согласно проведенному анализу устойчивости, она должна

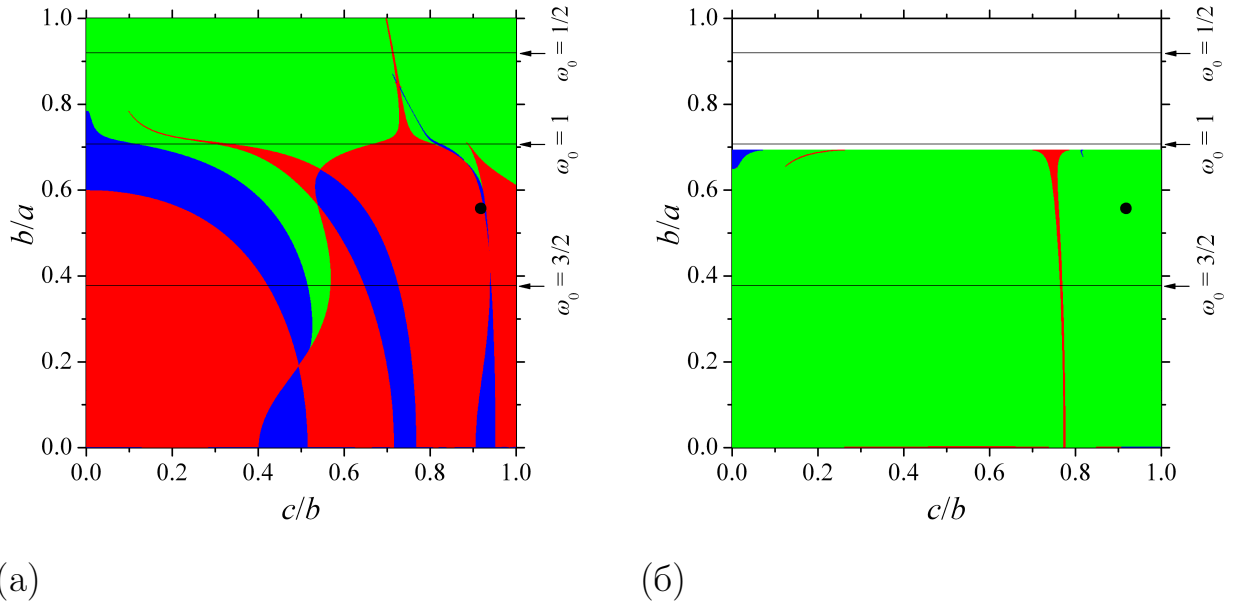


Рис. 2.15. Области устойчивости (зеленый цвет) и неустойчивости (синий и красный цвета) относительно наклона оси вращения спутника, $e = 0.003$ («Амальтея»): (а) центр синхронного α -резонанса, (б) центр синхронного β -резонанса. Точкой указано положение Амальтеи (Ю5) (по данным Табл. 2.5). Штриховые горизонтальные линии соответствуют приведенным справа значениям ω_0 .

быть захвачена в синхронный β -резонанс.

В окрестности $\omega_0 = 1/2$ имеет место параметрический резонанс (см. подробнее § 2.2). Указанная область значений ω_0 соответствует разрыву кривой на Рис. 2.12 и светлой узкой горизонтальной полосе в верхней части Рис. 2.13б («Гиперион»). На Рис. 2.14 («Фобос» и «Деймос») и Рис. 2.15а («Амальтея», α -резонанс) эта полоса не видна, так как она слишком узкая. В области параметрического резонанса синхронное вращательное движение в α -резонансе неустойчиво в плоской постановке задачи.

На Рис. 2.13–2.15 области неустойчивого движения образуют «языки», характерные для зон параметрических резонансов. В отличие от параметрического резонанса в окрестностях значений $\omega_0 = 1/2$ и $3/2$, эти резонансы являются существенно «трехмерным» явлением: они проявляются в пространственном (трехмерном) вращательном движении спутника. Например, одной из наиболее выраженных особенностей на Рис. 2.14а и Рис. 2.15а яв-

ляется «языкообразная» область неустойчивости, берущая начало в точке $b/a = 1$, $c/b \approx 0.698$. Линия $b/a = 1$ отвечает динамически-симметричному спутнику в виде сплюснутого сфероида. Вращательное движение такого спутника на круговой орбите (а орбиты Фобоса, Деймоса и Амальтеи близки к круговым) описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы (см., например, [178]), при этом частоты системы, линеаризованной в окрестности соответствующего положения равновесия, можно вычислить по известным формулам (см. формулы (4.9) в работе И. И. Шевченко и А. Г. Сокольского [178]). По этим формулам легко убедиться, что данная точка, порождающая рассматриваемую зону неустойчивости, отвечает резонансу 1:1 между частотами линеаризованной системы.

2.3.2 Устойчивость любого типа вращения

Посредством вычисления МХПЛ, проведем исследование устойчивости для траекторий на представительной выборке начальных условий. Начальные условия, для которых вычисляются МХПЛ, задают траектории различного рода (периодические, квазипериодические, хаотические) в фазовом пространстве вращательного движения в окрестности синхронного резонанса. Исследование их устойчивости дает информацию о возможности захвата спутника в какое-либо резонансное вращение. Проведем его для Фобоса (M1), Деймоса (M2), Амальтеи (Ю5) и Гипериона (С7).

Чтобы разделить траектории на регулярные и хаотические, надо задать критерий отличия МХПЛ от нуля (в случае регулярной траектории теоретическая величина МХПЛ равна нулю), либо использовать статистический метод для разделения траекторий, а именно, провести анализ дифференциального распределения МХПЛ вычисленных на выборке значений начальных условий (или значений параметров). Статистический метод для разделения регулярных и хаотических траекторий движения был разработан для исследования устойчивости вращения спутников планет [43] и апробирован в других задачах небесной механики, например, в задаче Хенон–Хейлеса [45, 69, 145] и в задаче о хаотической динамике астероидов вблизи резонанса средних движений 3/1 с Юпитером [67].

Суть метода заключается в следующем — регулярным траекториям соответствует подвижный пик в распределении вычисленных значений МХПЛ. Если построить график « $\lg L - F(L)$ », где L — величина МХПЛ, $F(L)$ — число попаданий вычисленных значений МХПЛ в интервал $(\lg L, \lg L + \Delta \lg L)$, где $\Delta \lg L > 0$ — длина интервала, то с ростом промежутка времени, на котором вычисляется МХПЛ, пик, соответствующий регулярным траекториям, смещается по оси абсцисс в сторону уменьшения величин показателей. Пики, соответствующие хаотическим траекториям, остаются на месте. Разделив пики в распределении, получим пороговую величину МХПЛ для разделения регулярных и хаотических траекторий.

При исследовании устойчивости вращательного движения спутника, распределения МХПЛ строились для 200 траекторий с начальными условиями (движение начинается в перицентре — $f = 0$): (I) $\theta = 0, d\theta/dt = 0, \dots, 4$; (II) $\theta = \pi/2, d\theta/dt = 0, \dots, 4$. Величина шага по $d\theta/dt$ положена равной 0.04. Для остальных углов Эйлера и их производных по времени принято: $\phi = \psi = 0, d\phi/dt = d\psi/dt = 0$.

МХПЛ вычислялись методом теневой траектории (см. раздел 1.3.2) на интервале $t = 10^4$ (один орбитальный период спутника равен 2π единицам времени). Величина вектора смещения теневой траектории относительно опорной в формуле (1.4) принята равной $d_0 = 10^{-7}$. Малое смещение по начальным данным теневой траектории относительно опорной бралось со сдвигом по углу нутации ϕ , поскольку исследовалась устойчивость относительно наклона оси вращения.

Из дифференциальных распределений МХПЛ, вычисленных на множествах (I) и (II), находился критерий для разделения траекторий на регулярные и хаотические. Затем строилась плоскость $(\theta, d\theta/dt)$ сечения фазового пространства, определенного равенством $t = 2\pi m, m = 0, 1, 2, \dots$, то есть определенного в перицентре орбиты. Регулярные и хаотические траектории на плоскости сечения выделялись разными цветами.

Пример построенного дифференциального распределения вычисленных значений МХПЛ ($e = 0.1, \omega_0 = 0.827$, «Гиперион») приведен на Рис. 2.16. На Рис. 2.16 представлены распределения вычисленных (на промежутках

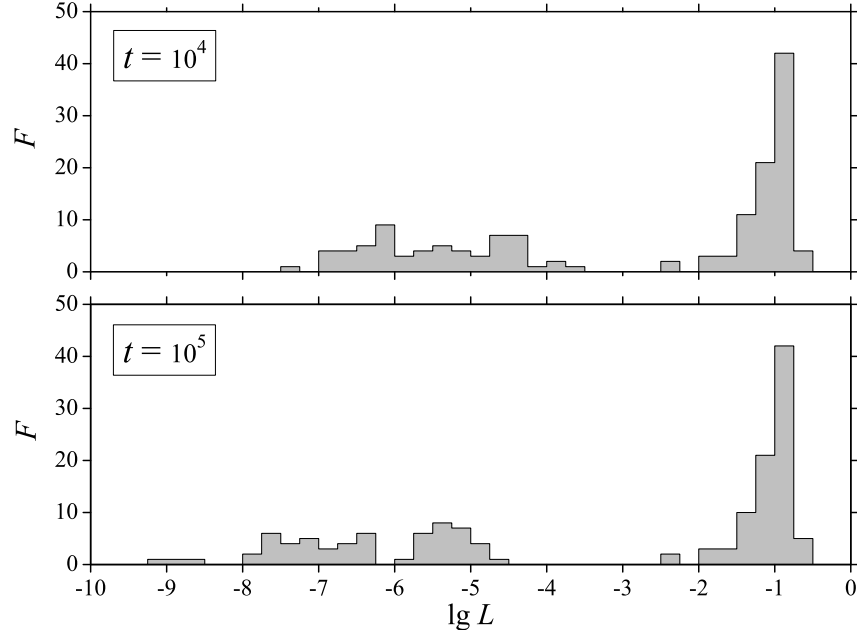


Рис. 2.16. Дифференциальные распределения значений МХПЛ, вычисленных на промежутках времени разной длины: верхний рисунок — $t = 10^4$, нижний — $t = 10^5$. МХПЛ вычислялись на выборке начальных условий, определенной в тексте, для траекторий с начальным значением $\theta = 0$; $e = 0.1$, $\omega_0 = 0.827$ («Гиперион»).

$t = 10^4$ и $t = 10^5$) значений МХПЛ для траекторий с начальным значением $\theta = 0$. Видно, что при увеличении интервала времени, на котором вычисляются МХПЛ, пик, соответствующий хаотическим траекториям, остается на месте, а пик, соответствующий регулярным траекториям, смещается в область меньших значений МХПЛ — регулярная и хаотическая компоненты на распределении четко разделяются. Критерий для разделения регулярной и хаотической компонент, полученный из анализа распределений значений МХПЛ, одинаков для всех рассматриваемых спутников: траектория является регулярной, если $\lg L < -3.5$; если $\lg L \geq -3.5$, она является хаотической.

Сечения фазового пространства для Гипериона, Амальтеи, Фобоса и Деймоса приведены на Рис. 2.17. Как и в разделе 2.3.1, в случае Гипериона рассматривались три значения эксцентриситета: $e = 0.08$, 0.1 и 0.1236 . На Рис. 2.17а представлено сечение только для $e = 0.1$. На Рис. 2.17 устойчивые и неустойчивые траектории выделены разными цветами.

Результаты анализа характера устойчивости траекторий на построен-

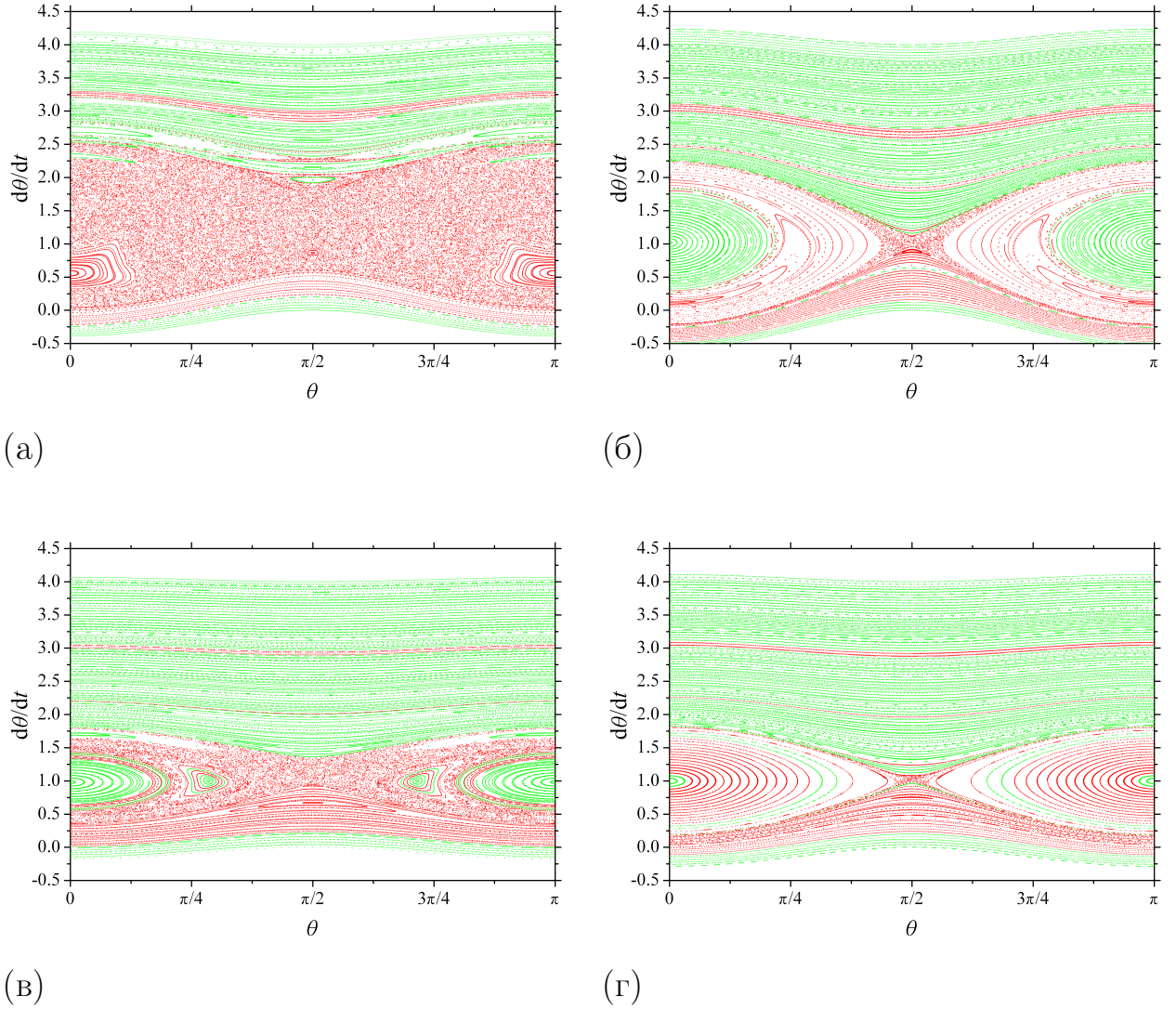


Рис. 2.17. Сечение фазового пространства вращательного движения, определенное в перицентре орбиты. (а) $e = 0.1$, $\omega_0 = 0.827$ («Гиперион»); (б) $e = 0.003$, $\omega_0 = 1.256$ («Амальтея»); (в) $e = 0.015$, $\omega_0 = 0.730$ («Фобос»); (г) $e = 0.0005$, $\omega_0 = 0.751$ («Деймос»). Зеленым цветом указаны устойчивые относительно наклона оси вращения траектории, красным — неустойчивые.

ных сечениях фазового пространства, представлены в Табл. 2.6 (так же и для $e = 0.08$ и $e = 0.1236$) и Табл. 2.7. В этих таблицах приведены координаты $(\theta, d\theta/dt)$ центра резонанса на сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, и данные о характере устойчивости движения спутника в данном резонансе. Устойчивому относительно наклона оси вращения движению соответствует знак «+», неустойчивому — знак «-» в графе «Уст.». В случае отсутствия резонанса при принятом разрешении по

Таблица 2.6. Местоположение $\theta \pmod{\pi}$, $d\theta/dt$ и характер устойчивости ряда спин-орбитальных резонансов в случае Гипериона.

Резонанс	$e = 0.0800$		$e = 0.1000$		$e = 0.1236$	
	$\theta, d\theta/dt$	Уст.	$\theta, d\theta/dt$	Уст.	$\theta, d\theta/dt$	Уст.
1:2	$\pi/2, 0.8515$	—	$\pi/2, 0.8693$	—	$\pi/2, 0.8913$	—
1:1 α -рез.	0, 0.6087	—	0, 0.5577	—	0, 0.5072	—
5:4	—		—		0.9825, 1.3596 2.1592, 1.3596	—
5:4 вторичный	—		—		0.6849, 1.4347 2.4568, 1.4347	—
2:1	0, 2.2991	+	0, 2.3218	+	0, 2.3455	+
9:4	0, 2.5048 $\pi/2, 1.9914$	+	0, 2.5344 $\pi/2, 1.9615$	+	$\pi/2, 1.8972$ $\pi/2, 1.9660$ 0.2353, 2.5454 2.9065, 2.5454	+
5:2	0, 2.6991	+	0, 2.7199	+	0, 2.7462	+
3:1	0, 3.1435	+	0, 3.1589	+	0, 3.1795	+
7:2	—		—		0, 3.6376	+

начальным условиям (а в случае синхронного резонанса, если данный режим синхронного вращения не существует, см. подробнее раздел 2.2.2), в графе « $\theta, d\theta/dt$ » поставлен прочерк. Таким образом, в Табл. 2.6 и 2.7 представлены основные спин-орбитальные состояния, в которых указанные спутники могут (знак «+») либо не могут (знак «—») находиться в ходе своей динамической эволюции вращательного движения при близких к современным значениях e и ω_0 .

Полученные фазовые сечения содержат полезную информацию об характере устойчивости также и нерезонансных спин-орбитальных состояний. Большую часть Рис. 2.17а (Гиперион, $e = 0.1$) занимает хаотический слой, окружающий резонансы 1:1 и 1:2. Широкая полоса из квазипериодических траекторий ниже этого основного слоя неустойчива относительно наклона.

Таблица 2.7. Местоположение $\theta \pmod{\pi}$, $d\theta/dt$ и характер устойчивости ряда спин-орбитальных резонансов в случае Фобоса, Деймоса и Амальтеи.

Резонанс	Фобос		Деймос		Амальтея	
	$\theta, d\theta/dt$	Уст.	$\theta, d\theta/dt$	Уст.	$\theta, d\theta/dt$	Уст.
1:2	$\pi/2, 0.6729$	—	$\pi/2, 0.7554$	—	$\pi/2, 0.8838$	—
1:1 β -рез.	0, 0.9813	+	0, 0.9981	+	0, 1.0230	+
1:1 мода α_{bif}	0.8939, 0.9980 2.2476, 0.9980	+	—		—	
1:1 α -рез.	—		—		0, 0.1969	—
3:2	0, 1.7041	+	—		—	
2:1	0, 2.1063	+	—		—	

Выше основного слоя подобная полоса отсутствует. На Рис. 2.17а траектории неустойчивы также и в окрестности сепаратрис резонансов 5:2 и 3:1. Резонанс 3:2, как показали Уиздом и др. [199], при данных значениях параметров (ω_0 и e) не существует, вместо него на сечении присутствует резонанс второго порядка 9:4, погруженный в основной хаотический слой.

Что касается значений эксцентриситета Гипериона $e = 0.08$ и 0.1236 , фазовые сечения для которых здесь не приведены, то при $e = 0.08$, помимо неустойчивых относительно наклона траекторий, принадлежащих основному хаотическому слою, на фазовых сечениях присутствуют отделенные от основного слоя неустойчивые траектории в окрестности сепаратрисы резонанса 3:1. В окрестности сепаратрисы резонанса 5:2 неустойчивых траекторий нет, с точностью до принятого разрешения по начальным условиям. При $e = 0.1236$, кроме неустойчивых траекторий, окружающих резонанс 3:1, проявляются также и неустойчивые траектории в окрестности сепаратрисы резонанса 7:2; резонанс 5:2 погружается в основной хаотический слой.

В случае Амальтеи (Рис. 2.17б) одновременно существуют два синхронных резонанса (см. подробнее раздел 2.4.1). Центр синхронного α -резонанса

имеет меньшие координаты по $d\theta/dt$, центр β -резонанса — бóльшие. Движение в центре синхронного β -резонанса является устойчивым относительно наклона, а в центре α -резонанса — неустойчивым. На сечении видны неустойчивые траектории в окрестности резонансов 5:2 и 3:1.

В случае Фобоса существуют два режима плоского синхронного вращения (см. Рис. 2.17в, Табл. 2.7 и выводы в разделе 2.4.1), синхронный α -резонанс и бифуркационная мода α -резонанса. Движение как в центре основного резонанса, так и в центре бифуркационной моды является устойчивым относительно наклона. Помимо области неустойчивости, ассоциированной с основным хаотическим слоем, в случае Фобоса на сечении также видны неустойчивые траектории около сепаратрис резонансов 2:1 и 3:1 (сами резонансы, однако, при данном разрешении рисунка не видны).

В случае Деймоса (Рис. 2.17г) на сечении присутствуют неустойчивые траектории в окрестности резонансов 9:4 и 3:1. Узкий хаотический слой вокруг сепаратрисы резонанса 1:2 в случае Фобоса, Деймоса и, возможно, Амальтеи отделен от основного хаотического слоя вокруг сепаратрисы синхронного резонанса (Рис. 2.17б–г).

Полученные результаты о характере устойчивости спин-орбитальных резонансов 1:2, 1:1, 2:1, 9:4 в случае Гипериона (Табл. 2.6, $e = 0.1$), исследовавшихся ранее Уиздомом и др. [199], и резонансов 1:2, 1:1 и 3:2 в случае Фобоса (Табл. 2.7), изучавшихся Уиздомом [198], полностью совпадают с результатами этих авторов. Сведения о характере устойчивости остальных перечисленных в Табл. 2.6 и 2.7 резонансов в случаях Гипериона и Фобоса, и о характере устойчивости всех резонансов для случаев Деймоса и Амальтеи получены впервые. Для всех спутников выводы о характере устойчивости синхронного вращения, приведенные в Табл. 2.6 и 2.7, находятся в согласии с результатами анализа устойчивости вращения этих спутников в точном синхронном резонансе, представленными в разделе 2.3.1.

§ 2.4 Вращательные состояния, преобладающие у спутников планет

За последние два десятилетия открыто множество новых малых спутников. Вращательные состояния большинства из них еще не установлены. Рассмотрим задачу о типичных современных вращательных режимах спутников планет с точки зрения динамической устойчивости. Выводы о возможных режимах вращения спутника сделаем исключительно на основе результатов анализа характера движения в этих режимах для современных динамических условий (значений физических и орбитальных параметров спутников, ориентации фигур и пр.), которые следуют из данных наблюдений.

Ранее Пил [155] посредством вычисления времен приливного замедления показал, что большинство иррегулярных спутников должны были сохранить свое первоначальное (быстрое) вращение до настоящего времени. Полученные далее выводы независимы от постулатов теории приливной эволюции: оценки времени приливного замедления вращения рассматриваются как дополнительный аргумент к сделанным выводам.

2.4.1 Положения спутников на диаграмме « $\omega_0 - e$ »

Разместим все известные в настоящее время спутники планет на диаграмме « $\omega_0 - e$ », построенной в разделе 2.2.2, и сделаем выводы о возможных для них режимах синхронного вращения.

На Рис. 2.18 представлена плоскость (ω_0, e) , на которой выделены области существования различных режимов плоского синхронного вращения (эти области обозначены таким же образом, как и на Рис. 2.7). Вся плоскость разбита на несколько более мелких областей, обозначенных римскими цифрами. В областях, отмеченных как «Ia» и «Iб», существует только синхронный α -резонанс, в области «II» существует только синхронный β -резонанс, в области «III» одновременно существуют синхронные α -резонанс и β -резонанс, в области «IV» сосуществуют синхронный α -резонанс и бифуркационная мода α -резонанса (мода α_{bif}), в области «V» не существует никакого синхронного резонанса, в области «VI» существует лишь мода α_{bif} .

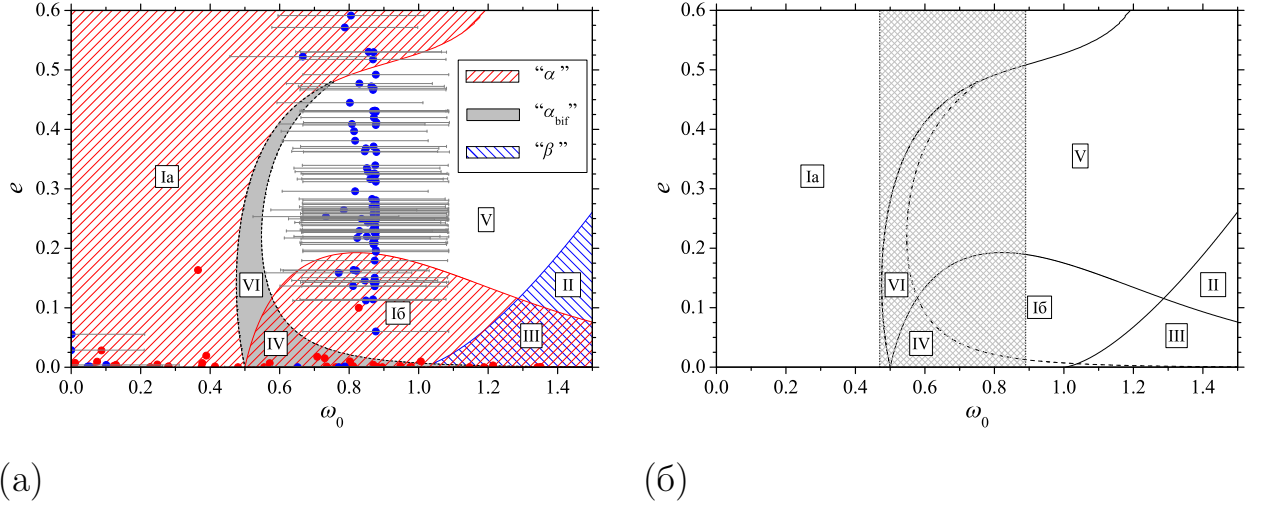


Рис. 2.18. (а) Положения на диаграмме « $\omega_0 - e$ » известных спутников планет. Красными точками обозначены спутники, для которых известна величина ω_0 . Синими точками с барами указаны положения спутников, для которых ω_0 получена при помощи аппроксимации по формуле (2.2). (б) Предполагаемые положения (заштрихованная область) на диаграмме « $\omega_0 - e$ » спутников из группы А, выделенной на Рис. 2.3.

На основе данных [73, 99, 110, 109, 129, 122, 186, 187, 199, 198] об орбитальных эксцентриситетах и размерах 145 спутников планет укажем положения этих спутников на диаграмме « $\omega_0 - e$ ». Красными кружками на Рис. 2.18а обозначены спутники, для которых известна величина ω_0 (все эти спутники были указаны на Рис. 2.11). Синими кружками указаны положения спутников, для которых ω_0 получено при помощи аппроксимации по формуле (2.2), где, как и в разделе 2.1.2, принято: $A_0 = 0.88 \pm 0.07$, $R_0 = 270 \pm 65$ км. Для этих спутников горизонтальными барами указаны 3σ ошибки оценки величины ω_0 . Они все ограничены величиной 0.21, соответствующей неопределенности в A_0 для аппроксимации (2.2). Это дает приблизительный диапазон возможных значений ω_0 для малых значений R .

Отметим, что экспоненциальная (как и любая другая) аппроксимация использовалась исключительно как инструмент, позволяющий разместить на диаграмме « $\omega_0 - e$ » спутники с неизвестной величиной ω_0 . Практически то же самое можно сделать без использования аппроксимаций, например, основываясь исключительно на разделении спутников на плоскости (ω_0, R) на

две группы — А и В (см. Рис. 2.3 в разделе 2.1.2), что продемонстрировано на Рис. 2.18б, где отмечена область, соответствующая прямоугольнику А на Рис. 2.3. Границы области определялись посредством вычисления средней величины ω_0 для объектов, попавших в прямоугольник А.

Заштрихованная на Рис. 2.18б область соответствует $\omega_0 = 0.68 \pm 0.21$, где неопределенность равна 3σ ошибки среднего значения ω_0 для спутников из области А на Рис. 2.3. Видно, что предсказанное таким образом положение на диаграмме « $\omega_0 - e$ » спутников с неизвестной величиной ω_0 практически идентично положению этих спутников, основанному на использовании экспоненциальной аппроксимации (2.2). Однако использование экспоненциальной аппроксимации корректней, поскольку аппроксимация дает правильное поведение величины ω_0 в пределе $R \rightarrow 0$, в то время как представленный выше метод дает среднее значение ω_0 , одинаковое для всех R от 0 до ≈ 250 км.

Наибольший интерес на Рис. 2.18а представляют области Ib и V: в области Ib (в нее попадают 15 объектов) находится единственный известный спутник с хаотическим режимом вращения — Гиперион (С7), а для спутников, попавших в область V (77 объектов), синхронный резонанс в фазовом пространстве плоского вращательного движения не существует.

Рассмотрим устойчивость плоского синхронного вращения относительно наклона оси вращения для спутников из области Ib, то есть для спутников, находящихся в точном синхронном α -резонансе. В качестве типичного представителя этой области выберем спутник с $e = 0.1$. Данная величина соответствует средней величине эксцентриситета орбиты Гипериона (С7). В разделе 2.3.1 была подробно изучена устойчивость синхронного вращения данного спутника. В частности, на плоскости $(c/b, b/a)$ были выделены области устойчивого и неустойчивого плоского вращательного движения относительно наклона оси вращения (см. Рис. 2.13б). Гиперион расположен на Рис. 2.13б в области неустойчивого движения, занимающей большую часть площади плоскости $(c/b, b/a)$. С увеличением $e > 0.1$, площадь области неустойчивости также возрастает и это значит, что для спутников, находящихся в области Ib выше над Гиперионом (см. Рис. 2.18а), практически нет шансов оказаться в синхронном вращательном состоянии, устойчивом относительно наклона

оси вращения. Для 12 объектов, попавших в область Ib, эксцентриситет орбиты больше 0.1. Поэтому можно добавить эти 12 спутников к тем спутникам, которые находятся во вращательном состоянии, отличном от синхронного.

Таким образом, 77 объектов из области V и 12 из области Ib должны вращаться или регулярно и существенно быстрее синхронного вращения (те спутники, чья приливная эволюция еще не завершена), или хаотически (спутники, завершившие приливную эволюцию). Подводя итог, видно, что большая часть (по крайней мере 89 объектов) из всех спутников с неизвестным состоянием вращения (из 140 спутников), то есть минимум 64% спутников, не могут вращаться синхронно.

С развитием наблюдательной техники открывается все большее и большее количество новых спутников планет. Поскольку они все имеют малые размеры, в соответствии с формулой (2.2), значения ω_0 для них велики. Кроме того, вновь открытые объекты обычно имеют орбиты со значительными эксцентриситетами [122, 166]. Следовательно, все новые малые спутники будут находиться в области V на диаграмме « $\omega_0 - e$ » (см. Рис. 2.7), то есть в области, где синхронный резонанс 1:1 не существует.

2.4.2 Времена приливного замедления вращения

Вычисление времени приливного замедления вращения до синхронного состояния из-за приливной эволюции показывает, сможет ли вращение спутника достичь синхронного состояния за время, прошедшее с момента формирования спутника. Для тех спутников, про которые известно, что они захвачены в синхронный резонанс 1:1 или любой другой спин-орбитальный резонанс, современные динамические и физические свойства спутника позволяют сделать это за достаточно короткий [155], по крайней мере меньший возраста Солнечной системы, временной интервал приливного замедления до резонансного состояния.

При помощи формул из работы Доброволскиса [92] получим теоретические оценки времени приливного замедления вращения для спутников из областей Ib и V на Рис. 2.18а. Согласно [92], для величины времени прилив-

ного замедления имеем:

$$T_{\text{despin}} = \frac{\omega_I - \omega}{|\dot{\omega}|},$$

где ω_I и ω — начальная и конечная угловые скорости вращения спутника, соответственно, а

$$|\dot{\omega}| = \frac{45\rho R^2 n^4}{38\mu Q} \quad (2.24)$$

представляет собой модуль скорости замедления вращения (см. уравнения (1) и (11) в [92]). Здесь R — радиус спутника, $n = 2\pi/P_{\text{orb}}$ — среднее движение, P_{orb} — орбитальный период, ρ и μ — соответственно плотность и модуль сдвига спутника; Q — приливная диссипативная функция спутника.

Уравнение (2.24) соответствует наиболее общему случаю спутника с низким значением эксцентриситета орбиты (см. подробнее [92]). В случае высоких эксцентриситетов используем формулу (4) из [92]:

$$|\dot{\omega}| = (1 - e^2)^{-9/2} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \right) \frac{45\rho R^2 n^4}{38\mu Q}.$$

Оценки T_{despin} были сделаны для двух наборов значений параметров, а именно, для набора из работы Доброволскиса [92]:

$$\omega_I = \frac{2\pi}{10 \text{ ч}}, \quad \rho = 1 \text{ г см}^{-3}, \quad \mu = 3.5 \times 10^{10} \text{ дин см}^{-2}$$

и набора из работы Пила [155]:

$$\omega_I = \frac{2\pi}{2.3 \text{ ч}}, \quad \rho = 2 \text{ г см}^{-3}, \quad \mu = 5 \times 10^{11} \text{ дин см}^{-2}.$$

Финальное значение ω было положено равным $2\pi/P_{\text{orb}}$, то есть величине, соответствующей синхронному резонансу, однако отметим, что для любых оценок по порядку величины, выбор точного финального значения ω не играет большой роли.

Вычисление T_{despin} для объектов из областей Ib и V показало, что минимальные значения времен приливного замедления имеют Элара (Ю7) — $6 \times 10^{12}Q$ лет, Карме (Ю11) — $4 \times 10^{13}Q$ лет и Темисто (Ю18) — $7 \times 10^{12}Q$ лет. Эти минимальные значения превышают типичные значения для других спутников (см., например, [155]) на 2–3 порядка. Полагая $Q \sim 100$ [155], видно, что времена приливного замедления для спутников из областей Ib и V намного больше, чем возраст Солнечной системы. Скорость вращения этих

спутников за время их приливной эволюции не могла снизиться до величины, при которой происходит пересечение хаотической области вблизи спино-орбитальных резонансов низкого порядка. Поэтому, в согласии с общим выводом, сделанным ранее Пилом [155] на основе оценок времен приливного замедления вращения, большинство иррегулярных спутников (к ним относятся подавляющее большинство малых спутников) все еще находится во вращательных состояниях, близких к первоначальным.

Иррегулярные спутники могут представлять собой как результат орбитального захвата [120, 121, 165], так и результат распада больших тел [85, 120, 165]. Если объекты из областей Ib и V представляют собой результат недавнего захвата или распада, то значения времен приливной эволюции у них будут малы. Если большинство из них произошли в результате захвата из популяции астероидов, то распределение скоростей вращения у спутников должно остаться практически неизменным и соответствовать распределению скоростей вращения астероидов. Может ли захваченный астероид обладать достаточно большим начальным периодом вращения для непосредственного попадания в хаотическую область?

Согласно Правецу и Харрису [114, 160], среди астероидов имеется статистически значимая (около 2% от общей популяции) группа «медленных ротаторов» с измеренными периодами $\approx 1\,000$ часов (около 50 дней); наблюдаемая нижняя граница периодов вращения в этой группе астероидов составляет ≈ 30 часов для объектов с диаметром менее 10 км. Более того, обнаружены [142, 161] медленные ротаторы, обладающие еще более медленным вращением. В работе Правеца и др. [161] этот факт объясняется на основе действия эффекта Ярковского.

В принципе, спутник с достаточно малым орбитальным периодом, например, Темисто (Ю18) ($P_{\text{orb}} \simeq 130$ суток), если он представляет собой захваченный на орбиту объект, мог оказаться в хаотической области фазового пространства, учитывая, что ширина хаотической области, зависящая от инерционных и орбитальных параметров спутника, может быть достаточно большой по частотам вращения — верхняя граница хаотической области может на порядок превышать размеры области синхронного вращения (см.

Рис. 7–9 в [92] и Рис. 3 в [129]). Однако вероятность этого мала: можно ожидать, что вряд ли больше чем один–два спутника из области V на Рис. 2.18а вращаются хаотически, конечно, при условии, что приливные процессы хорошо описываются в рамках классической теории приливной эволюции и реальное приливное замедление не происходит существенно быстрее.

§ 2.5 Выводы ко второй главе

В настоящей главе рассмотрена вращательная динамика малых спутников планет. Приведем основные полученные результаты. Они опубликованы в работах [33, 34, 42, 43, 44, 50, 147, 148].

В § 2.1 дана краткая статистическая информация об орбитальных и физических параметрах спутников планет. Среди всех известных спутников выделены малые (радиус фигуры $R < 300$ км). Построена экспоненциальная аппроксимация (Рис. 2.3) эмпирической зависимости параметра $\omega_0 = \sqrt{3(B - A)/C}$ ($A < B < C$ — главные центральные моменты инерции спутника), характеризующего несферичность фигуры спутника, от радиуса спутника R . Рассмотрены наблюдаемые режимы вращения спутников планет.

В § 2.2 изучена вращательная динамика несферического твердого тела («спутника») относительно его центра масс на невозмущенной эллиптической орбите вокруг планеты. В случае плоского (в плоскости орбиты) вращательного движения динамика спутника описывается уравнением Белецкого (2.11) и определяется начальными условиями, величиной эксцентриситета орбиты e и величиной параметра ω_0 .

На плоскости (ω_0, e) выявлены границы областей существования трех режимов плоского синхронного вращения спутника (Рис. 2.7): синхронного α -резонанса, синхронного β -резонанса и бифуркационной моды α -резонанса (моды α_{bif}). Синхронные α -резонанс и β -резонанс соответствуют устойчивым нечетным 2π -периодическим решениям уравнения Белецкого (2.11). Мода α_{bif} существует в окрестности области параметрического резонанса при $\omega_0 = 1/2$, и соответствует нечетному 4π -периодическому решению уравнения Белецкого. При вращении спутника в бифуркационном режиме синхронного

резонанса имеют место «бифуркационные» колебания ориентации спутника относительно центра масс (см. Рис. 2.6) с периодом, в два раза большим периода обращения спутника по орбите. Границы области существования моды α_{bif} на плоскости (ω_0, e) определены впервые.

Подробно рассмотрен бифуркационный режим плоского синхронного вращения (мода α_{bif}). Выведены аналитические формулы для минимальной и максимальной амплитуд бифуркационных колебаний ориентации спутника в перицентре орбиты. Полученное уравнение (2.21) для минимальной амплитуды бифуркационных колебаний позволяет оценивать величину амплитуды точнее (см. Рис. 2.9), чем существовавшая ранее теория (2.12). Уравнение (2.22) для максимальной амплитуды бифуркационных колебаний ориентации спутника получено впервые.

Аналитические формулы (2.21) и (2.22) позволяют прогнозировать возможность наблюдения бифуркационного режима у спутников планет. Вследствие чувствительности величины амплитуды бифуркационных колебаний спутника к величине параметра ω_0 , выявление посредством наблюдений бифуркационного режима у реального спутника позволило бы наложить жесткие ограничения на значение этого динамического параметра у наблюдаемого спутника.

Показано, что при увеличении параметра ω_0 в окрестности $\omega_0 = 1/2$ при фиксированной величине e происходят последовательные бифуркации удвоения периода плоских колебаний ориентации спутника. Первой бифуркации соответствует мода α_{bif} . Значения ω_0 , при которых происходят бифуркации, образуют сходящуюся последовательность (Табл. 2.3). Сделан вывод о возможности присутствия бифуркационных мод в истории вращательной эволюции спутников планет.

Путем анализа на диаграмме « $\omega_0 - e$ » местоположения спутников с известными ω_0 и e (Рис. 2.11), впервые найдены спутники, для которых в фазовом пространстве плоского вращательного движения возможно одновременное существование нескольких режимов синхронного вращения. Оказалось, что у семи спутников (Амальтея (Ю5), Прометей (С16), Офелия (У7), Дездемона (У10), Джульетта (У11), Белинда (У14) и Наяда (Н3)) в фазовом

пространстве вращательного движения одновременно существуют синхронный α -резонанс и синхронный β -резонанс.

Бифуркационный режим синхронного вращения (мода α_{bif}) возможен у 22 спутников, их список включает: Фобос (M1), Деймос (M2), Теба (Ю14), Адрастея (Ю15), Янус (C10), Эпиметей (C11), Телесто (C13), Каллипсо (C14), Атлас (C15), Прометей (C16), Пандора (C17), Корделия (У6), Офелия (У7), Бьянка (У8), Крессида (У9), Дездемона (У10), Джульетта (У11), Порция (У12), Белинда (У14), Наяда (Н3), Деспина (Н5), Галатея (Н6).

Для четырех спутников (Прометей (C16), Джульетта (У11), Белинда (У14) и Наяда (Н3)) в фазовом пространстве вращательного движения одновременно существуют все три режима плоского синхронного вращения (см. пример сечения фазового пространства на Рис. 2.8). Возможная резонансная вращательная динамика этих спутников весьма богата; в зависимости от начальных условий спутник может быть захвачен в один из трех режимов синхронного вращения, если движение в нем является устойчивым.

В § 2.3 исследована устойчивость плоского вращательного движения спутников относительно наклона оси вращения к плоскости орбиты. Рассмотрена динамика четырех спутников — Фобоса (M1), Деймоса (M2), Амальтеи (Ю5) и Гипериона (C7). Для случая точных синхронных α -резонанса и β -резонанса на плоскости значений параметров $(c/b, b/a)$, характеризующих фигуру спутника ($a > b > c$ — полуоси эллипсоида, аппроксимирующего фигуру спутника), для всех рассмотренных спутников определены границы областей устойчивости/неустойчивости относительно наклона оси вращения спутника при плоском вращении. Для разделения плоских резонансных вращений на устойчивые/неустойчивые применялся статистический метод. Основной идеей метода является получение порогового критерия, следующего из анализа модальной структуры дифференциального распределения модулей мультипликаторов линеаризованной гамильтоновой системы уравнений движения, вычисленных на сетке значений параметров $(c/b, b/a)$.

В результате анализа положения спутников на построенных диаграммах « $c/b - b/a$ » (Рис. 2.13–2.14), где выделены области параметров с разным характером устойчивости, сделан вывод об устойчивости синхронного вра-

щения Фобоса (М1) и Деймоса (М2) в возможном для них синхронном α -резонансе. В случае Амальтеи (Ю5) впервые сделан вывод о неустойчивости ее вращательного движения в синхронном α -резонансе и устойчивости вращения в синхронном β -резонансе. Показано, что вращение Гипериона (С7) в возможном для него синхронном α -резонансе неустойчиво.

Вычисление МХПЛ на сетке начальных условий $(\theta, d\theta/dt)$, задающих вращательное движение спутника, и последующий анализ дифференциальных распределений вычисленных значений МХПЛ позволили разделить траектории плоского вращения любого типа (периодического, квазипериодического, хаотического) на устойчивые/неустойчивые относительно наклона оси вращения спутника. Для случаев Фобоса (М1), Деймоса (М2), Амальтеи (Ю5) и Гипериона (С7) данным методом проведена графическая классификация (Рис. 2.17) траекторий вращательного движения на устойчивые/неустойчивые. На представительном сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, для перечисленных спутников установлено местоположение и получены данные о характере устойчивости относительно наклона оси вращения ряда состояний в окрестности синхронного резонанса. Эти данные (Табл. 2.6 и 2.7), в частности, дают ответ на вопрос, могут ли рассмотренные спутники находиться в том или ином спин-орбитальном резонансе.

В § 2.4 рассмотрен вопрос о типичных режимах вращения малых спутников планет. Впервые показано, что несмотря на то, что большинство спутников с установленными вращательными состояниями вращаются синхронно с орбитальным движением, значительная часть (по крайней мере $\approx 64\%$) из всех спутников с неустановленным в настоящее время режимом вращения не могут вращаться синхронно, поскольку для этих спутников не существует устойчивого спин-орбитального резонанса 1:1.

Данный вывод следует из анализа положения всех известных спутников на диаграмме « $\omega_0 - e$ ». А именно, на диаграмме « $\omega_0 - e$ » значительная часть спутников попадает в область (см. Рис. 2.18), где синхронный резонанс не существует. Малые спутники, попавшие в эту область, вращаются либо много быстрее, чем синхронно, либо, что менее вероятно, хаотично.

Глава 3

Моделирование кривых блеска малых спутников планет

Информацию о реальных режимах вращения спутников планет получают в основном с космических аппаратов (КА), а также из сопоставления наблюдаемых кривых блеска спутников с модельными, то есть рассчитываемыми теоретически при заданных предположениях. Такое сопоставление позволяет определить из наблюдений характер вращения спутника, уточнить его инерционные параметры и получить информацию об отражающих свойствах его поверхности. Моделирование наблюдаемых кривых блеска, в свою очередь, позволяет детально планировать космические миссии к спутникам.

В настоящей главе приводится описание алгоритма построения теоретических кривых блеска малых спутников планет. В качестве примера реализации алгоритма построения теоретических кривых блеска проводится моделирование вращательной динамики двух спутников Сатурна — Гипериона (С7) и Фебы (С9).

Выбор для моделирования кривых блеска указанных спутников Сатурна был основан на том, что Гиперион представляет собой прототип хаотической [73, 126, 199] вращательной динамики малых спутников, а Феба — прототип регулярной [131, 190] вращательной динамики. Для моделирования использовались наблюдательные данные, полученные А. В. Девяткиным и др. [12, 13, 14, 15, 16] в Пулкове (ГАО РАН) за период 1999–2000 гг. В случае Гипериона также использовались наблюдательные данные, полученные Клаветтером [126, 127] в 1987 г.

§ 3.1 Алгоритм для моделирования кривых блеска спутников планет

3.1.1 Система координат и уравнения движения

При моделировании кривых блеска рассматривается движение несферического твердого тела (спутника) относительно его центра масс, находящегося на эллиптической орбите вокруг планеты. Вращательное движение спутника рассматривается при тех же предположениях, что и в Главе 2. Орбиту спутника будем считать возмущенной, если период возмущений сопоставим с интервалом моделирования, и задавать ее элементы при помощи имеющихся эфемерид. Если период возмущения велик, то, как и в Главе 2, предполагаем орбиту фиксированным эллипсом.

Вращательное движение спутника в гравитационном поле планеты описывается системой из динамических (2.7) и кинематических (2.9) уравнений Эйлера. Так как рассматривается пространственное вращение спутника, то необходимо избегать сингулярностей, имеющих место в кинематических уравнениях Эйлера (в уравнениях (2.9) сингулярность имеет место при $\phi = \pm\pi/2$). По этой причине при численном интегрировании уравнений движения здесь, так же как и в работах Клаветтера [127] и Блэка и др. [73], используются две системы углов Эйлера, обозначаемые далее I и II; нижний индекс I у переменных соответствует системе I, индекс II — системе II. Рассмотрим основные отличия используемых систем углов Эйлера.

Как указано в разделе 2.2.1, ориентация фигуры спутника относительно осей прямоугольной системы координат $Oxyz$ задается путем его воображаемых поворотов на углы Эйлера θ, ϕ, ψ из положения совпадения главных осей инерции a', b', c' с осями системы координат до их реального положения. Последовательность поворотов зависит от используемой системы углов Эйлера и может быть описана произведением трех матриц $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$. Согласно Клаветтеру [127], матрица $\mathbf{B}$ в системах I и II имеет вид

$$\mathbf{B}_I = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{II} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Матрицы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ в системах I и II одинаковые. Они имеют следующий вид

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Одно из различий систем I и II состоит в следующем. В системе II угол ϕ есть угол между осью, соответствующей наименьшему главному центральному моменту инерции спутника, и орбитальной плоскостью, тогда как в системе I угол между данной прямой и данной плоскостью выражается через координатные углы довольно сложным образом. Подробнее о различии систем I и II см. статью Уиздома [198].

Кинематические уравнения Эйлера и направляющие косинусы в системе I приведены в Главе 2, им соответствуют уравнения (2.9) и (2.8). Выпишем здесь аналогичные уравнения в системе II. Согласно [73, 127], они имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{(\omega_a \sin \psi + \omega_b \cos \psi)}{\sin \phi}, \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega_a \cos \psi - \omega_b \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega_c - \frac{d\theta}{dt} \cos \phi. \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos(\theta - f) \cos \psi - \sin(\theta - f) \cos \phi \sin \psi, \\ \beta &= -\cos(\theta - f) \sin \psi - \sin(\theta - f) \cos \phi \cos \psi, \\ \gamma &= \sin(\theta - f) \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнения перехода из системы I в систему II, согласно Клаветтеру [127], записываются в виде

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= \operatorname{arctg} \frac{-\cos \phi_I \sin \psi_I}{\sin \phi_I}, \\ \phi_{II} &= \operatorname{arctg} \frac{\sin \phi_I}{\cos \psi_{II} \cos \psi_I \cos \phi_I}, \\ \theta_{II} &= \operatorname{arctg} \frac{\cos \theta_I \sin \psi_I + \sin \theta_I \sin \phi_I \cos \psi_I}{\cos \theta_I \sin \phi_I \cos \psi_I - \sin \theta_I \sin \psi_I}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения перехода из системы II в систему I имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\psi_I &= \arctg \frac{-\sin \phi_{II} \sin \psi_{II}}{\cos \phi_{II}}, \\ \phi_I &= \arctg \frac{\cos \psi_{II} \sin \phi_{II} \cos \psi_I}{\cos \phi_{II}}, \\ \theta_I &= \arctg \frac{\cos \theta_{II} \sin \psi_{II} + \sin \theta_{II} \cos \phi_{II} \cos \psi_{II}}{\cos \theta_{II} \cos \phi_{II} \cos \psi_{II} - \sin \theta_{II} \sin \psi_{II}}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Углы определены в следующих интервалах: $\theta_{I,II} \in [0, 2\pi)$, $\phi_I \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\phi_{II} \in (0, \pi)$ и $\psi_{I,II} \in [0, 2\pi)$. Для вектора угловой скорости вращения спутника имеем $\boldsymbol{\omega}_I = \boldsymbol{\omega}_{II}$.

В алгоритме численного интегрирования уравнений пространственного вращения спутника с целью предотвращения сингулярностей предусмотрены автоматические переходы между системами координат: от системы I к системе II, если $|\cos \phi_I| < 0.1$; и от системы II к системе I, если $|\sin \phi_{II}| < 0.1$.

3.1.2 Метод расчета освещенной площади поверхности спутника

В предположении, что поверхность спутника отражает падающий на него свет согласно закону Ламберта (то есть яркость рассеивающей свет поверхности одинакова во всех направлениях), наблюдаемая интегральная звездная величина спутника определяется площадью проекции на небесную сферу видимой освещенной части его фигуры. Задача моделирования кривых блеска, таким образом, сводится к нахождению этой площади. Существуют различные методы, позволяющие определять видимую площадь поверхности спутника, когда его фигура моделируется трехосным эллипсоидом. Например, метод, разработанный О. К. Тублиной и К. В. Холшевниковым [59], или метод, приведенный в работе Клаветтера [127]. Рассмотрим последний метод подробно, так как он используется далее для моделирования кривых блеска.

Выпишем уравнение трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру спутника, с полуосями $a > b > c$ и центром в начале планетоцентрической системы координат $O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$:

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} + \frac{\tilde{z}^2}{c^2} = 1. \quad (3.7)$$

Подставляя в (3.7) выражения для осей системы координат $Oxyz$, связанной со спутником, в планетоцентрической системе координат

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}$ — матрица поворотов (см. раздел 3.1.1), следуя Клаветтеру [127], сведем уравнение (3.7) к следующему виду

$$\mathcal{A}x^2 + 2\mathcal{B}xy + 2\mathcal{C}xz + \mathcal{D}y^2 + \mathcal{E}z^2 + 2\mathcal{F}yz = 1, \quad (3.8)$$

где $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{F}$ — коэффициенты, зависящие от углов Эйлера θ, ϕ, ψ .

Продифференцировав (3.8) по x , получаем уравнение для проекции трехосного эллипсоида на плоскость Oyz , перпендикулярную направлению «спутник — планета»: $2Ax + 2By + 2Cz = 0$. Подставив в уравнение (3.8) выражение для $x = -(By + Cz)/A$, получим уравнение

$$\mathcal{G}y^2 + 2\mathcal{J}yz + \mathcal{H}z^2 = 1, \quad (3.9)$$

где $\mathcal{G} = \mathcal{D} - \mathcal{B}^2/\mathcal{A}$, $\mathcal{H} = \mathcal{E} - \mathcal{C}^2/\mathcal{A}$, $\mathcal{J} = \mathcal{F} - \mathcal{BC}/\mathcal{A}$. Уравнение (3.9) при условии $\mathcal{J}^2 < \mathcal{G}\mathcal{H}$ является уравнением эллипса на плоскости Oyz , угол поворота которого относительно оси Oy дается формулой

$$\delta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\mathcal{J}}{\mathcal{G} - \mathcal{H}}.$$

В полярных координатах (r, δ) уравнение эллипса имеет вид

$$r^2 = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}{\mathcal{G} + \mathcal{H} \operatorname{tg}^2 \delta + 2\mathcal{J} \operatorname{tg} \delta}.$$

Площадь эллипса $S = \pi a_e b_e$, где a_e, b_e — полуоси эллипса. В настоящем случае

$$S = \pi r(\delta) r(\delta + \pi/2). \quad (3.10)$$

Приведенные формулы дают площадь в планетоцентрической системе координат. Для земного наблюдателя уравнение для площади получается аналогичным образом. В последнем случае матрица поворотов содержит еще два

дополнительных поворота: $\mathbf{A} = \mathbf{BCDEF}$, где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos \tau & 0 & -\sin \tau \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \tau & 0 & \cos \tau \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Угол ξ представляет собой модуль разницы долгот Солнца и планеты. Угол τ есть угол между плоскостью орбиты спутника и плоскостью эклиптики. Действуя так же, как и в случае определения площади эллипсоида в планетоцентрической системе координат, получаем выражения для коэффициентов $\mathcal{A}, \dots, \mathcal{F}$, зависящих теперь от θ, ϕ, ψ, ξ и τ . Эти формулы здесь не приводятся, поскольку они слишком громоздкие.

3.1.3 Интегральная звездная величина спутника

При помощи программы, написанной на языке ФОРТРАН и реализующей алгоритм, описанный в разделе 3.1.2, вычислялась площадь S наблюдаемой проекции освещенной части поверхности спутника, нормализованная на величину максимальной площади проекции фигуры спутника. Интегральная звездная величина спутника, если для его поверхности справедлив ламбертовский закон отражения, выражается формулой

$$m_s = -2.5 \lg S + \mathcal{M}, \quad (3.12)$$

где $\mathcal{M}$ — некоторая постоянная, индивидуальная для каждого спутника.

Коррекция кривой блеска за угол фазы

При моделировании необходимо осуществлять коррекцию кривой блеска за угол фазы «Солнце – спутник – Земля» (угол между перечисленными телами), учитывающую, по существу, физические свойства отражающей поверхности. Для коррекции за угол фазы использовался (как и в работе Клаветтера [126]) метод Боуэлла и др. [75], разработанный первоначально для астероидов. Используется следующая формула [75]:

$$m = H - 2.5 \lg[(1 - G)F_1(\alpha) + GF_2(\alpha)], \quad (3.13)$$

где m — звездная величина спутника, приведенная к средней оппозиции планеты, α — угол фазы, а F_1 и F_2 — функции следующего вида [75]:

$$F_i(\alpha) = W F_i^S + (1 - W) F_i^L, \quad i = 1, 2; \quad W = \exp\left(-90.56 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$F_i^S = 1 - \frac{C_i \sin \alpha}{0.119 + 1.341 \sin \alpha - 0.754 \sin^2 \alpha}, \quad F_i^L = \exp\left(-A_i \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^{B_i}\right),$$

для значений постоянных принимаем [75]:

$$A_1 = 3.332, \quad B_1 = 0.631, \quad C_1 = 0.986,$$

$$A_2 = 1.862, \quad B_2 = 1.218, \quad C_2 = 0.238.$$

Формула (3.13) описывает зависимость звездной величины спутника от угла фазы. Физический смысл параметров H и G в этой формуле следующий. Параметр H представляет собой приведенную к средней оппозиции планеты звездную величину спутника при $\alpha = 0$. Отметим, что при моделировании кривых блеска приведение теоретической звездной величины спутника к средней оппозиции планеты не проводилось, поскольку данная коррекция уже была сделана для звездных величин, полученных из наблюдений. Параметр G характеризует наклон кривой, описывающей изменение звездной величины спутника, приведенной к средней оппозиции планеты, от угла фазы. Параметры H и G обычно определяются методом наименьших квадратов на основе наблюдательных данных.

С учетом коррекции за угол фазы (3.13) теоретическая звездная величина спутника записывается в виде

$$m = m_s + H - 2.5 \lg[(1 - G)F_1(\alpha) + GF_2(\alpha)] + \mathcal{M}', \quad (3.14)$$

где $\mathcal{M}'$ — константа, определяемая из моделирования наблюдаемой кривой блеска для конкретного спутника.

Максимальная теоретическая амплитуда изменения блеска спутника при ламбертовском законе отражения равна $2.5 \lg(a/c)$. Для величин полуосей эллипсоида, аппроксимирующего фигуру спутника, по данным из наблюдений с КА амплитуда обычно получается меньше наблюдаемой, поскольку закон отражения отличается от ламбертовского. Добиться совпадения теоретической и наблюдаемой амплитуд изменения блеска спутника

можно посредством замены геометрического эллипсоида на так называемый «фотометрический» эллипсоид. Введение фотометрического эллипсоида по существу означает учет вариаций величины альбедо по поверхности спутника (наличия локальных относительно ярких и темных участков) и отличия поверхности от ортотропной. Под площадью S в (3.12) далее подразумевается площадь наблюдаемой проекции освещенной поверхности фотометрического эллипсоида.

Метод варьирования начальных условий и параметров

Решение задачи совпадения модельных и наблюдаемых кривых блеска проводилось путем варьирования значений начальных условий и параметров задачи. Проводилась вариация следующих начальных условий и параметров: углов θ , ϕ , ψ ; производных углов $d\theta/dt$, $d\phi/dt$, $d\psi/dt$; отношений моментов инерции A/C , B/C ; полуосей фотометрического эллипсоида a и c ; параметров фазовой функции H и G . Отметим, что постоянная $\mathcal{M}'$ в формуле (3.14) при моделировании была включена в параметр H .

Моделирование кривых блеска проводилось в два этапа. На первом этапе моделирования методом вариации значений начальных условий и параметров находилось грубое приближение к наблюдаемой кривой блеска. Наилучшее приближение находилось путем минимизации величины

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i^{\text{obs}} - m_i}{\Delta m_i^{\text{obs}}} \right)^2, \quad (3.15)$$

где N — количество точек наблюдаемой кривой блеска, m_i^{obs} — наблюдаемая звездная величина спутника в момент времени t_i , m_i — теоретическая звездная величина спутника в тот же самый момент времени, вычисленная по формуле (3.14), Δm_i^{obs} — среднеквадратичная ошибка наблюдаемой звездной величины.

На втором этапе проводилось уточнение найденных значений начальных условий и параметров при помощи метода наискорейшего спуска (метод градиента), при этом по-прежнему минимизировалась величина (3.15). На этом этапе на основе вычисления ковариационных матриц находились среднеквадратичные ошибки значений начальных условий и параметров.

§ 3.2 Кривые блеска и вращательная динамика Гипериона

3.2.1 Фигура и вращательная динамика Гипериона

Седьмой спутник Сатурна — Гиперион был открыт 1848 г. У. Бондом и Дж. Бондом и независимо от них У. Ласселом. Средняя визуальная звездная величина Гипериона (C7) составляет 14.4^m . Орбита Гипериона отличается заметным эксцентриситетом ($e \approx 0.1$) и малым наклоном к экватору (плоскости колец) Сатурна ($i = 0.43^\circ$). Орбитальный период составляет $P_{\text{orb}} \approx 21.28$ суток, а большая полуось орбиты $\approx 25R_{\text{Saturn}}$, где $R_{\text{Saturn}} \simeq 57\,600$ км — средний радиус Сатурна.

Согласно наблюдениям с КА «Вояджер-2» [187, 189] и «Кассини» [186], Гиперион отличается сильно вытянутой формой, полуоси трехосного эллипсоида, аппроксимирующего его фигуру — $(180 \times 133 \times 103)$ км. На поверхности Гипериона имеются редкие кратеры, один из которых имеет диаметр 120 км с высотой рельефа около 10 км. Имеется несколько глубоких кратеров поперечником 40–50 км. Хотя Гиперион имеет почти такие же размеры, как другие спутники Сатурна — Мимас (C1) или Энцелад (C2), его грубые очертания сильно контрастируют с их сферической формой. Гиперион вероятно является самым большим спутником, форма которого существенно отличается [188] от сферически симметричной. Согласно теоретическому исследованию Уиздома и др. [199], именно сильно несимметричная геометрическая форма Гипериона ($\omega_0 = 0.94$, согласно [186]) в сочетании с довольно большим эксцентриситетом орбиты сделали его наиболее вероятным кандидатом, среди известных спутников планет, на хаотическое вращение.

Моделирование вращательной динамики и кривых блеска Гипериона проводилось ранее Клаветтером [126, 127] на основе полученных им в 1987 г. наблюдательных данных. Блэк и др. [73, 187] моделировали вращательную динамику Гипериона на основе данных наблюдений с КА «Вояджер-2». Моделирование вращательной динамики Гипериона как на основе наблюдений с КА «Вояджер-2», так и на основе наблюдений с КА «Кассини» было проведено Харбисон и др. [113]. Во всех случаях основной целью моделирования

являлось выяснение характера вращения Гипериона.

Клаветтер [126, 127] сделал вывод, что вращение Гипериона является, вероятно, хаотическим. Блэк и др. [73] и Харбисон и др. [113], установили, что скорость вращения Гипериона примерно в четыре раза выше скорости его обращения по орбите. При столь высокой частоте вращения, далекой от синхронного резонанса, вращение может быть и регулярным. Однако Блэк и др. [73] на основании результатов моделирования долговременной вращательной динамики более склонны считать вращение Гипериона хаотическим. Вычисление ХПЛ, проведенное Харбисон и др. [113] для наблюдаемой вращательной динамики Гипериона, также указывает на хаотический характер его вращения с ляпуновским временем около двух месяцев.

3.2.2 Модельная кривая блеска Гипериона

Моделирование кривых блеска Гипериона проводилось для четырех наборов наблюдательных данных. В качестве первого набора взяты наблюдения Клаветтера (Табл. 3 в статье [126]). В качестве второго, третьего и четвертого наборов взяты наблюдения, проведенные А. В. Девяткиным и др. [12, 13, 14, 15] в Пулкове (ГАО РАН): с сентября по декабрь 1999 г., с января по март 2000 г. и в сентябре – октябре 2000 г. Разбиение ряда наблюдений, проведенных в Пулкове, на отдельные интервалы вызвано как перерывами в наблюдениях, так и тем фактом, что информация о начальных условиях, задающих вращательное движение Гипериона, утрачивается в его возможной хаотической динамике на временах в 1–2 месяца (см. обсуждение в § 4.1).

Для моделирования кривых блеска Гипериона необходимо знать его положение на орбите вокруг Сатурна, задаваемое средней аномалией $M = l - \varpi$, где l — средняя долгота, ϖ — долгота перицентра орбиты. Средняя долгота, долгота перицентра и эксцентриситет орбиты Гипериона находились по формулам [127]:

$$\begin{aligned} l &= 176.293^\circ + 16.9199896^\circ(JD - 2415020.0) + 9.092^\circ\sigma + \\ &\quad 0.211^\circ \sin(x + \sigma) + 0.092^\circ \sin(x - \sigma) - 0.077^\circ \sin x, \\ \varpi &= 70.05^\circ - 18.6562^\circ t - 13.67^\circ \sin x + 0.93^\circ \sin 2x - 0.47^\circ \sin \sigma, \\ e &= 0.10419 + 0.02414 \cos x - 0.00401 \cos \sigma - 0.00183 \cos 2x, \end{aligned}$$

где JD — юлианская дата, а величины σ и x даются формулами

$$\sigma = 93.13^\circ + 0.562039^\circ(JD - 2415020.0), \quad x = 148.72^\circ - 19.184^\circ t,$$

где t — время в тропических годах с 1900.0 года (при вычислениях тропический год полагался равным 365.242199 суток). При моделировании учитывался наклон плоскости орбиты Гипериона к плоскости колец Сатурна и наклон плоскости колец к эклиптике, равный 2.49° [127].

Вариация начальных условий и параметров на первом этапе моделирования проводилась в следующих пределах: углы θ и ψ варьировались от 0 до π с шагом 0.01, угол ϕ — от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом 0.01; производные углов $d\theta/dt$, $d\phi/dt$, $d\psi/dt$ — от -4 до 4 с шагом 0.02; отношения моментов инерции A/C и B/C от 0.5 до 0.9 с шагом 0.02, при этом всегда соблюдалось условие $A/C \leq B/C$; полуоси фотометрического эллипсоида a — от 150 км до 300 км, c — от 80 км до 130 км с шагом 10 км, величина третьей полуоси была фиксирована, $b = 140$ км; параметр H варьировался от 12^m до 14^m с шагом 0.01^m ; параметр G — от -1 до 1 с шагом 0.01.

Полученные значения начальных условий и параметров, задающие модельную кривую блеска Гипериона, наилучшим образом согласующуюся с наблюдаемой кривой, для всех наборов наблюдательных данных приведены в Табл. 3.1. Значения углов приведены в радианах в системе I; значения производных углов Эйлера вычислены в предположении, что один орбитальный период равен 2π единицам времени. В Табл. 3.2 в качестве a , b и c приводятся значения полуосей фотометрического эллипсоида. Также в Табл. 3.2 приведены значения χ^2 , вычисленные для всех модельных кривых блеска по формуле (3.15).

На Рис. 3.1 приведены модельные кривые блеска Гипериона, построенные для значений начальных условий и параметров, указанных в Табл. 3.1. Модельные кривые блеска строились посредством вычисления теоретической звездной величины блеска Гипериона по формуле (3.14) с равномерным шагом по времени в 0.001 суток. На Рис. 3.1 нанесены также наблюдавшиеся значения звездной величины Гипериона, приведенные к средней оппозиции Сатурна и нескорректированные за угол фазы, поскольку такая коррекция осуществляется для теоретической кривой по формуле (3.14).

Таблица 3.1. Начальные условия и параметры по итогам моделирования кривых блеска Гипериона и вычисленные для них по формуле (3.15) значения χ^2 .

	Клаветтер, 1987	Пулково, 1999	Пулково, 2000а	Пулково, 2000б
JD	2446947.9	2451481.3	2451551.3	2451794.5
θ	2.822 ± 0.08	0.220 ± 0.05	0.040 ± 0.02	2.047 ± 0.03
ϕ	0.700 ± 0.09	0.869 ± 0.07	0.039 ± 0.05	0.468 ± 0.02
ψ	1.211 ± 0.08	3.080 ± 0.03	3.055 ± 0.04	3.048 ± 0.04
$d\theta/dt$	1.685 ± 0.05	2.220 ± 0.08	0.356 ± 0.07	1.123 ± 0.03
$d\phi/dt$	0.000 ± 0.04	-0.738 ± 0.05	-0.869 ± 0.08	0.062 ± 0.05
$d\psi/dt$	1.100 ± 0.07	1.810 ± 0.09	1.521 ± 0.03	0.154 ± 0.02
a , км	160 ± 13	225 ± 23	235 ± 27	240 ± 28
b , км	140	140	140	140
c , км	110 ± 11	95 ± 10	105 ± 12	100 ± 15
A/C	0.537 ± 0.09	0.575 ± 0.05	0.593 ± 0.04	0.566 ± 0.02
B/C	0.798 ± 0.05	0.701 ± 0.03	0.707 ± 0.07	0.699 ± 0.04
H , ^m	13.829 ± 0.08	12.907 ± 0.08	12.894 ± 0.06	12.794 ± 0.06
G	0.116 ± 0.06	-0.984 ± 0.07	-0.907 ± 0.07	-0.949 ± 0.08
χ^2	0.124	0.142	0.147	0.133

Из Рис. 3.1 видно, что модельные кривые блеска сходны с наблюдаемыми кривыми по своему общему характеру, но, разумеется, не совпадают в деталях. Видно, что блеск Гипериона, описываемый модельными кривыми, изменяется нерегулярно и в широких пределах. Во всех случаях вращение Гипериона вероятно носит хаотический характер, поскольку начальные условия для интегрирования находятся внутри хаотической компоненты фазового пространства (см. сечения фазового пространства, построенные для случая Гипериона в Главе 2). Вывод о хаотическом характере вращения Гипериона подтверждают [144] положительные величины МХПЛ, вычисленных (см. подробнее § 4.1) для всех наборов начальных условий, приведенных в Табл. 3.1. Динамический хаос во вращательной динамике Гипериона рас-

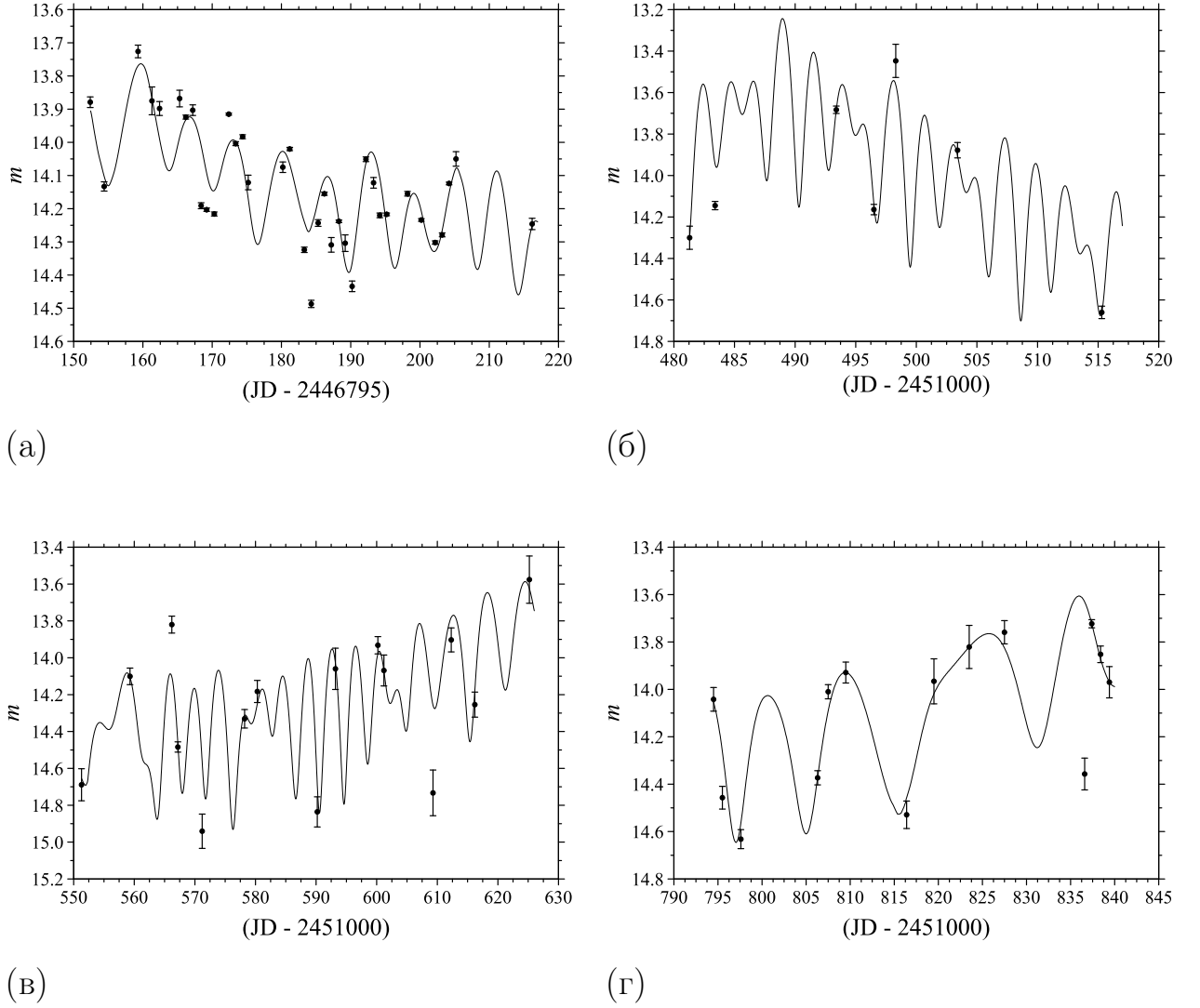


Рис. 3.1. Модельные кривые блеска Гипериона (C7): (а) для наблюдательных данных Клаветтера [126]; для наблюдений, выполненных в Пулкове за период: (б) с сентября по декабрь 1999 г.; (в) с января по март 2000 г.; (г) с сентября по октябрь 2000 г. Точками с барами указаны наблюдавшиеся значения звездных величин Гипериона.

сматривается в § 4.1.

Причиной отклонений значений параметров фазовой функции H и G , полученных для пулковских наблюдений (см. Табл. 3.1), от значений, найденных Клаветтером [127] ($H = 13.85 \pm 0.13$, $G = 0.074 \pm 0.03$), может являться тот факт, что значительная часть наблюдений в Пулковке проводилась при больших углах фазы ($\alpha > 3^\circ$), в то время как H представляет собой значение блеска Гипериона при нулевом угле фазы. Поскольку параметр G характери-

зует наклон кривой, описывающей изменение блеска спутника от угла фазы, для точной оценки этого параметра необходимо равномерное распределение наблюдений на всем промежутке изменения этого угла (в случае Сатурна $\alpha \in [0^\circ, 6.5^\circ]$). Пулковские данные дают приближения параметров H и G , описывающие изменение блеска Гипериона при больших углах фазы (то есть получены локальные оценки величин этих параметров), но не на всем промежутке изменения этого угла. Наблюдательные данные, полученные Клаветтером [126], распределены более равномерно по возможным значениям угла фазы. Моделирование наблюдательных данных Клаветтера [126] дало значения H и G , близкие к значениям, найденным Клаветтером [127].

Отметим, что в работе [15] проводилось моделирование наблюдаемой кривой блеска Гипериона, полученной в ГАО РАН за период 2001–2003 гг. Для пяти отрезков наблюдаемой кривой блеска были определены значения начальных условий и параметров, задающих модельные кривые блеска Гипериона, и подтвержден хаотический характер его вращения.

§ 3.3 Кривая блеска и вращательная динамика Фебы

3.3.1 Вращательная динамика и фигура Фебы

Девятый спутник Сатурна — Феба был открыт в 1899 г. У.Пикерингом. Средняя визуальная звездная величина Фебы (С9) составляет 16.4^m . Феба является первым спутником, для которого было установлено обратное (по отношению к направлению собственного вращения Сатурна) движение по орбите — согласно Якобсону [119] наклонение орбиты $i \approx 175^\circ$. Кроме того, орбита Фебы имеет [119] существенный эксцентриситет $e = 0.1643$. Феба является первым открытым иррегулярным спутником (см. раздел 2.1.1). Орбитальный период Фебы составляет $P_{\text{orb}} \approx 550$ дней, большая полуось орбиты $\approx 220R_{\text{Saturn}}$, то есть Феба значительно (в 9 раз дальше, чем Гиперион) удалена от Сатурна.

В 1972 г. Андерсон [71] посредством анализа фотометрических наблюдений Фебы установил, что величина периода ее собственного вращения лежит между 9 и 13 часами, то есть угловая скорость вращения Фебы суще-

ственно (на три порядка) быстрее скорости ее обращения по орбите. Анализ изображений Фебы, полученных в 1981 г. с КА «Вояджер–2», позволил Томасу и др. [190] оценить полуоси трехосного эллипсоида, аппроксимирующего фигуру Фебы — $(115 \times 110 \times 105)$ км, и уточнить период ее собственного вращения $P_{\text{rot}} = 9.4 \pm 0.2$ часа.

Проведенные в 1986 г. Крузе и др. [131] наблюдения Фебы показали, что ее кривая блеска имеет форму, близкую к синусоиде с периодом 9.282 ± 0.015 часа и амплитудой 0.23^{m} . Анализ наблюдений показал возможное наличие бимодальной структуры в функции отражения для поверхности Фебы. Крузе и др. [131] оценили величину альбедо Фебы в 0.084 ± 0.003 .

Позднее Симонелли и др. [180] на основе изображений, полученных с КА «Вояджер–2», построили подробную карту альбедо поверхности Фебы, подтвердившую вывод Крузе и др. [131] о бимодальной структуре альбедо. Вероятно, поверхность Фебы покрыта двумя разными материалами с различными отражающими свойствами. Кроме того, в [180] на основе наземных наблюдений [131] и наблюдений «Вояджер–2» была построена фазовая функция Фебы.

Бауэр и др. [72] на основе анализа наземных наблюдений Фебы, проведенных в 2003–2004 гг., определили период ее собственного вращения с высокой точностью — 9.2735 ± 0.0006 часа. В работе [72] также были получены оценки параметров фазовой функции Фебы в рамках модели Боуэлла и др. [75] и величины альбедо — 0.0821 ± 0.0015 .

Анализ изображений с КА «Кассини», полученных в 2004 г. [158], позволил Томасу и др. [186] уточнить данные о фигуре Фебы — $(109 \times 108 \times 102)$ км, погрешность оценок величин полуосей составляет менее 1.5 км.

Таким образом, Феба представляет собой иррегулярный спутник, движущийся по весьма удаленной от Сатурна орбите. Феба обладает быстрым несинхронным вращением ($P_{\text{orb}}/P_{\text{rot}} \approx 1\,400$), а ее фигура близка к сферической (для оценок полуосей фигуры Фебы из работы Томаса и др. [186] по формуле (2.3) имеем $\omega_0 = 0.157$).

3.3.2 Модельная кривая блеска Фебы

Моделирование кривой блеска Фебы проводилось на основе наблюдательных данных, полученных А. В. Девяткиным и др. [13, 14, 15, 16] в Пулкове (ГАО РАН) с сентября 1999 г. по октябрь 2000 г. При моделировании предполагалось, что орбита Фебы является фиксированным эллипсом, так как орбитальные возмущения в данном случае значительно меньше, чем для случая Гипериона. К тому же промежуток времени, в течение которого проводились наблюдения (395 дней), меньше периода орбитального движения Фебы.

Средняя долгота l , долгота перицентра ϖ , эксцентриситет и наклонение орбиты Фебы находились по формулам из работы Якобсона [119]:

$$\begin{aligned} l &= 390.742^\circ + 0.6566799^\circ t, \\ \varpi &= 203.958^\circ + 0.003261903^\circ t, \\ e &= 0.16435, \\ i &= 174.751^\circ, \end{aligned}$$

где $t = (JD - 2447892.5)$, JD — юлианская дата.

Вариация начальных условий и параметров при моделировании проводилась в следующих пределах: углы θ и ψ варьировались от 0 до π с шагом 0.01, угол ϕ — от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом 0.01; $d\theta/dt$, $d\phi/dt$, $d\psi/dt$ от -2000 до 2000 с шагом 50; A/C и B/C от 0.85 до 1.00 с шагом 0.01, при этом всегда соблюдалось условие $A/C \leq B/C$; a от 110 км до 300 км, c от 50 км до 110 км с шагом 10 км, величина третьей полуоси была фиксирована, $b = 110$ км; величина H варьировалась от 15^m до 17^m с шагом 0.01^m ; G от -1 до 1 с шагом 0.01.

Полученные значения начальных условий и параметров, задающие модельную кривую блеска Фебы, наилучшим образом согласующуюся с наблюдаемой кривой, приведены в Табл. 3.2. Значения углов приведены в радианах в системе I. В Табл. 3.2 в качестве a , b и c приводятся значения полуосей фотометрического эллипсоида.

На Рис. 3.2 и 3.3 приведена модельная кривая блеска Фебы, построенная для значений начальных условий и параметров, указанных в Табл. 3.2. Рис. 3.2 содержит всю модельную кривую блеска, на Рис. 3.3 в увеличенном

Таблица 3.2. Начальные условия и параметры по итогам моделирования кривой блеска Фебы. Вычисленное для них по формуле (3.15) значение $\chi^2 = 0.119$.

JD	2451481.3	a , км	190 ± 21
θ	2.603 ± 0.02	b , км	110
ϕ	0.269 ± 0.03	c , км	70 ± 14
ψ	0.000 ± 0.02	A/C	0.945 ± 0.07
$d\theta/dt$	1417 ± 15	B/C	0.954 ± 0.09
$d\phi/dt$	6 ± 2	H , m	15.11 ± 0.09
$d\psi/dt$	0 ± 4	G	0.12 ± 0.06

масштабе представлены ее отдельные фрагменты. Как и в случае Гипериона, на рисунках нанесены наблюдавшиеся [13, 14, 15, 16] значения звездной величины Фебы, приведенные к средней оппозиции Сатурна и нескорректированные за угол фазы (из общей формы модельной кривой на Рис. 3.2 видно периодическое изменение блеска Фебы, обусловленное орбитальным движением Земли и Сатурна — изменением угла фазы).

Полученные значения начальных условий (Табл. 3.2) принадлежат области регулярного движения в фазовом пространстве вращательного движения, что указывает на регулярный характер вращения Фебы. На регулярное вращение указывает и форма модельной кривой блеска. Моделирование долговременной вращательной динамики Фебы, проведенное на промежутке в 15 000 суток (≈ 30 орбитальных периодов) для значений начальных условий и параметров из Табл. 3.2, показало, что величина модуля вектора угловой скорости вращения Фебы относительно собственного центра масс является постоянной. Вычисление [144] МХПЛ для значений начальных условий и параметров, приведенных в Табл. 3.2, показало, что максимальный ХПЛ имеет нулевую величину — вращательное движение Фебы является регулярным.

Период вращения Фебы относительно собственного центра масс, соответствующий приведенным в Табл. 3.2 значениям начальных условий, составляет 9.3 ± 0.1 часа, что хорошо согласуется с оценкой периода, полученной

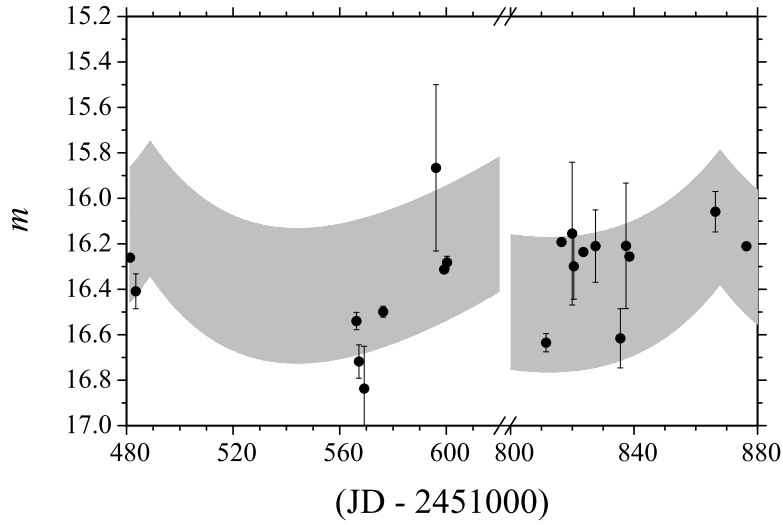


Рис. 3.2. Модельная кривая блеска Фебы (С9) для наблюдений, выполненных в Пулковке в 1999–2000 гг. В увеличенном масштабе фрагменты кривой блеска представлены на Рис. 3.3. Точками с барами указаны наблюдавшиеся значения звездных величин Фебы.

в работах [72, 131, 190]. Также наблюдается хорошее согласие полученной из моделирования величины параметра фазовой функции $G = 0.12 \pm 0.06$ со значениями данного параметра, полученными в работах Крузе и др. [131] ($G = 0.15$) и Бауэра и др. [72] ($G = 0.14 \pm 0.04$).

Отношения моментов инерции Фебы, полученные из моделирования (см. Табл. 3.2), близки к отношениям моментов — $A/C = 0.937$, $B/C = 0.946$, вычисленным по формуле (2.4) для значений полуосей эллипсоида (см. работы Порко и др. [158] и Томаса [186]), аппроксимирующего фигуру Фебы, полученных из анализа снимков с КА «Кассини».

Значительная величина отношения полуосей фотометрического эллипсоида Фебы ($a/c \approx 2.7$) может указывать как на несферическую форму (однако, близость значений A/C и B/C к единице и снимки с КА [158] указывают, что фигура Фебы близка к сферической), так и на существенное отличие поверхности Фебы от ламбертовской и значительные вариации величины альбеда по поверхности (что подтверждается наличием бимодальной структуры [131, 171]).

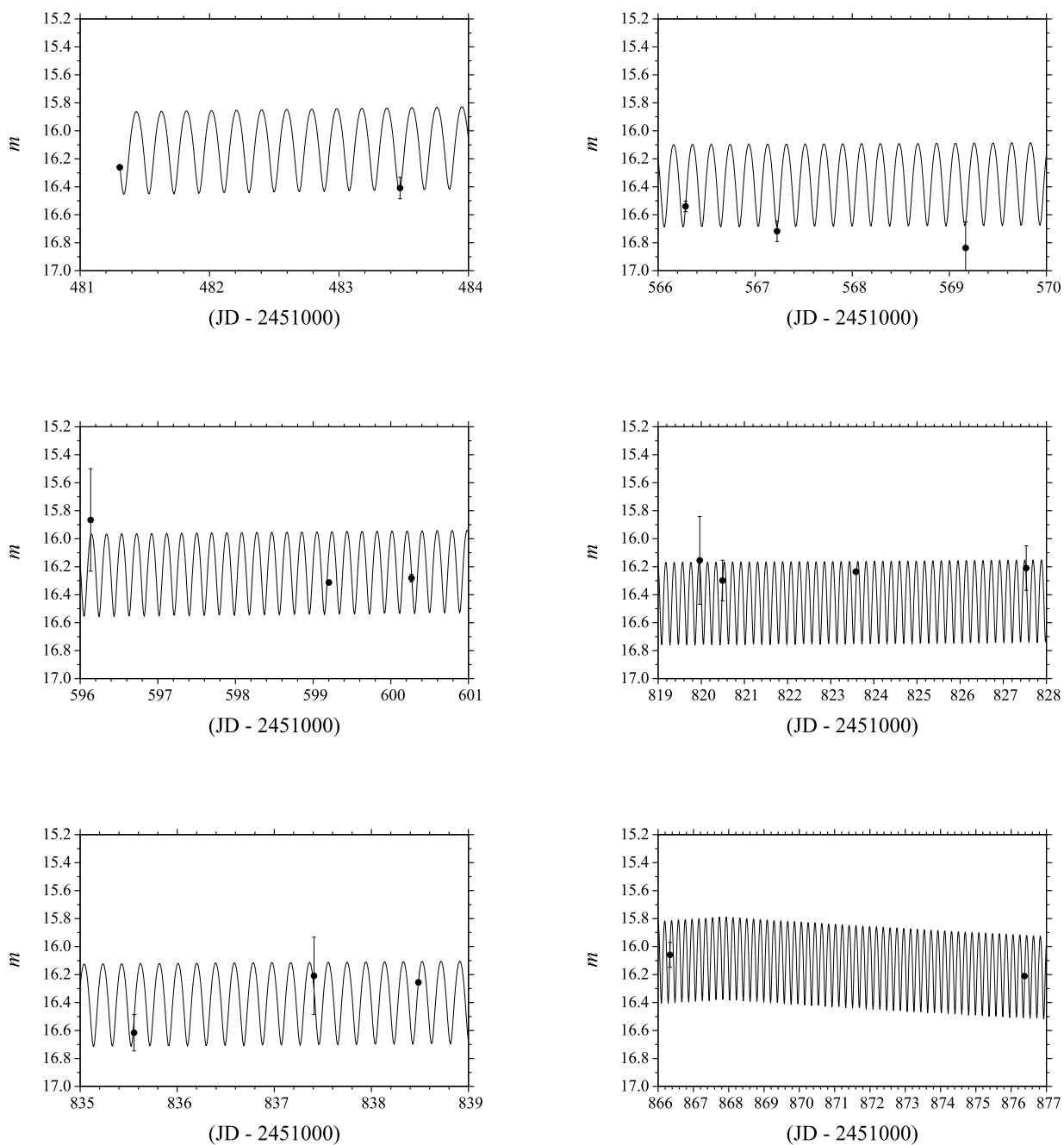


Рис. 3.3. Модельная кривая блеска Фебы (С9) для наблюдений, выполненных в Пулковке в 1999–2000 гг. На панелях представлены фрагменты всей кривой блеска, изображенной на Рис. 3.2. Точками с барами указаны наблюдавшиеся значения звездных величин Фебы.

В работе Коттро и др. [89] было рассмотрено прецессионно-нутацционное вращение Фебы на интервале в 9 000 суток и получены оценки для величины максимального отклонения ее оси вращения от нормали к плоскости орбиты ($\approx 24^\circ$). Найденный из моделирования кривых блеска наклон оси вращения Фебы — $\phi \approx 15^\circ$ (см. Табл. 3.2), близок к величине, полученной в [89].

Отметим, что моделирование наблюдаемой кривой блеска Фебы, результаты которого представлены здесь, было выполнено еще до того, как наблюдения и анализ кривой блеска Фебы выполнили Бауэр и др. [72], были получены снимки Фебы с КА «Кассини» и проведен [158, 186] их анализ.

§ 3.4 Выводы к третьей главе

В настоящей главе на основе моделирования кривых блеска изучалась вращательная динамика малых спутников планет. Проведено моделирование кривых блеска и вращательной динамики двух малых спутников Сатурна — Гипериона (С7) и Фебы (С9), как прототипов хаотической и регулярной вращательной динамики. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [12, 13, 14, 15, 16, 144].

В § 3.1 описаны разработанные алгоритмы моделирования кривых блеска и вращательной динамики спутника. Были приняты следующие предположения: спутник представляет собой несферическое твердое тело, движущееся по эллиптической орбите вокруг планеты. Планета считалась неподвижной гравитирующей точкой; размеры спутника много меньше радиуса орбитального движения. При расчете светового потока от спутника предполагалось, что спутник является трехосным эллипсоидом с заданными размерами, а поверхность спутника является ортотропной (световой поток от спутника пропорционален видимой части его освещенной поверхности в проекции на небесную сферу). Отклонения от ортотропности для отражающей поверхности учитывались в среднем, путем коррекции теоретической кривой блеска за угол фазы «Солнце — спутник — наблюдатель» при заданном виде фазовой функции.

Решение задачи моделирования наблюдаемой кривой блеска спутника проводилось посредством варьирования значений начальных условий и

параметров задачи. На первом этапе моделирования путем вариации значений начальных условий и параметров находилось грубое приближение к наблюдаемой кривой блеска. Наилучшее приближение находилось путем минимизации суммы квадратов отклонений теоретических значений звездной величины спутника от наблюдаемых. На втором этапе проводилось уточнение найденных таким образом значений начальных условий и параметров методом наискорейшего спуска (методом градиента).

В § 3.2 приведены результаты моделирования наблюдаемых кривых блеска Гипериона. Для моделирования кривых блеска использовались данные, полученные Клаветтером [126], и наблюдения, проводившиеся [12, 13, 14] в ГАО РАН группой под руководством А. В. Девяткина. Ряд наблюдений, проведенных в ГАО РАН, был разбит на отдельные интервалы, что обусловлено как перерывами в наблюдениях, так и тем фактом, что при хаотическом вращении информация о начальных условиях, задающих вращательное движение Гипериона, утрачивается в его динамике на временах в 1–2 месяца [65, 199]. При моделировании предполагалось, что Гиперион движется по возмущенной [126] эллиптической орбите, поскольку орбита испытывает, в частности, сильные короткопериодические возмущения из-за резонанса [52] в орбитальном движении с другим спутником Сатурна — Титаном (С6).

Для четырех отрезков наблюдательных данных определено вращательное состояние Гипериона и найдены значения параметров его фазовой функции (см. Табл. 3.1). Начальные условия для траекторий вращательного движения Гипериона, соответствующих наилучшим приближениям наблюдаемой кривой блеска, находятся в хаотической компоненте фазового пространства, как следует из вычислений ХПЛ (см. § 4.1). Таким образом, Гиперион в период, охватываемый наблюдениями, вращался хаотически.

Подробно динамический хаос во вращательной динамике Гипериона рассматривается далее в § 4.1.

В § 3.3 приведены результаты моделирования наблюдаемой кривой блеска Фебы, полученной [13, 14, 15, 16] в ГАО РАН. Моделирование выполнено для всего имеющегося ряда наблюдений без разбиения его на части. При моделировании предполагалось, что орбита Фебы является фиксированным

эллипсом [119], так как возмущения в данном случае значительно меньше, чем в случае Гипериона, к тому же промежуток времени, для которого проводилось моделирование кривой блеска (395 суток), меньше периода орбитального вращения Фебы, равного 550 суткам.

Определенные для Фебы начальные условия (см. Табл. 3.2), соответствующие наилучшим приближениям наблюдаемой кривой блеска, принадлежат регулярной компоненте фазового пространства вращательного движения. Вычисление [144] МХПЛ также указывает на регулярное вращение Фебы. Период вращения, соответствующий этим начальным условиям, составляет 9.3 ± 0.1 часа. Моделирование наблюдаемых кривых блеска и вращательной динамики Фебы проведено впервые.

Моделирование наблюдаемых кривых блеска Гипериона и Фебы при помощи разработанного алгоритма показало, что он может применяться для моделирования кривых блеска малых спутников планет. На это указывает тот факт, что полученные из моделирования значения параметров, характеризующих вращательное состояние Фебы и ее динамические свойства, хорошо согласуются с результатами, полученными другими авторами [72, 131, 171].

Разработанный алгоритм моделирования кривых блеска малых спутников планет после адаптации применялся [17, 91] для моделирования кривой блеска астероида сближающегося с Землей — (367943) Дуэнде на участке траектории его сближения с Землей. Были получены начальные условия, характеризующие вращательное состояние астероида, и сделаны оценки размеров его фигуры. Показано, что гравитационное взаимодействие с Землей изменило скорость вращения и ориентацию в пространстве оси вращения астероида.

Глава 4

Динамический хаос во вращательной динамике спутников

§ 4.1 Динамический хаос во вращении Гипериона

Как отмечалось во Введении и Главе 2, теоретическое исследование вращательной динамики спутников планет, проведенное Уиздомом и др. [198, 199], показало, что среди относительно крупных спутников планет Солнечной системы хаотическое вращение возможно у седьмого спутника Сатурна — Гипериона. В § 3.2 было проведено моделирование кривых блеска Гипериона (C7) для четырех наборов наблюдательных данных. Был сделан вывод, что во всех случаях вращение носит хаотический характер, поскольку начальные условия (см. Табл. 3.1) для траекторий вращательного движения Гипериона, соответствующих наилучшим приближениям его наблюдаемой кривой блеска, лежат внутри хаотической компоненты фазового пространства (см. пример сечения фазового пространства, построенного для случая Гипериона, на Рис. 2.17а). Для того чтобы строго установить факт хаотического вращения Гипериона для всех наборов начальных условий и параметров из Табл. 3.1, задающих его вращательную динамику, вычислим ХПЛ и определим величину ляпуновского времени.

4.1.1 Угловая скорость вращения Гипериона

Сначала рассмотрим характер зависимости величины угловой скорости вращения Гипериона от времени на длительном интервале времени интегрирования. Ранее Блэк и др. [73] посредством моделирования долговременной

вращательной динамики Гипериона на основе данных, полученных из анализа наблюдений с КА «Вояджер–2» [187], построили зависимость $\boldsymbol{\omega}(t)$ — вектора угловой скорости вращения Гипериона от времени (см. Рис. 10 в [73]) на интервале в $\approx 16\,000$ лет. Позднее зависимость $\boldsymbol{\omega}(t)$ на промежутке в ≈ 300 суток была построена в работе Харбисон и др. [113], посредством моделирования вращательной динамики Гипериона, для начальных условий, полученных из анализа наблюдений КА «Вояджер–2» и «Кассини». Построим зависимость $\boldsymbol{\omega}(t)$ для начальных условий и параметров из Табл. 3.1, полученных в Главе 3 посредством моделирования наблюдаемых кривых блеска Гипериона.

На Рис. 4.1 представлена зависимость от времени модуля вектора угловой скорости вращения Гипериона — $|\boldsymbol{\omega}|$ и зависимости от времени ω_a , ω_b и ω_c — величин проекций $\boldsymbol{\omega}$ на главные центральные оси инерции a' , b' , c' спутника. Зависимости построены посредством моделирования вращательной динамики Гипериона на промежутке 15 000 суток (≈ 700 орбитальных периодов). В качестве начальных условий для моделирования из Табл. 3.1 взяты значения, полученные для третьего набора наблюдательных данных. Напомним, что синхронному вращению соответствует $|\boldsymbol{\omega}| = 1$.

Из Рис. 4.1 видно, что скорость вращения Гипериона нерегулярно меняется в больших пределах на коротких временных интервалах, что указывает на хаотический характер его вращения. Схожий характер зависимости $\boldsymbol{\omega}(t)$ от времени был получен при интегрировании вращательной динамики Гипериона для остальных трех наборов начальных условий и параметров, приведенных в Табл. 3.1.

Отметим, что в представленной на Рис. 4.1 зависимости угловой скорости от времени присутствует длинный участок (около 5 000 суток), где наблюдается быстрое обратное (относительно движения по орбите) вращение Гипериона вокруг оси, совпадающей с осью его наибольшего главного центрального момента инерции (осью a'), с примерно постоянной скоростью, в 3.5 раза превышающей скорость орбитального вращения. Аналогичные особенности в зависимости $\boldsymbol{\omega}(t)$ были отмечены и в работах Блэка и др. [73] и Харбисон и др. [113] при моделировании вращательной динамики Гипериона

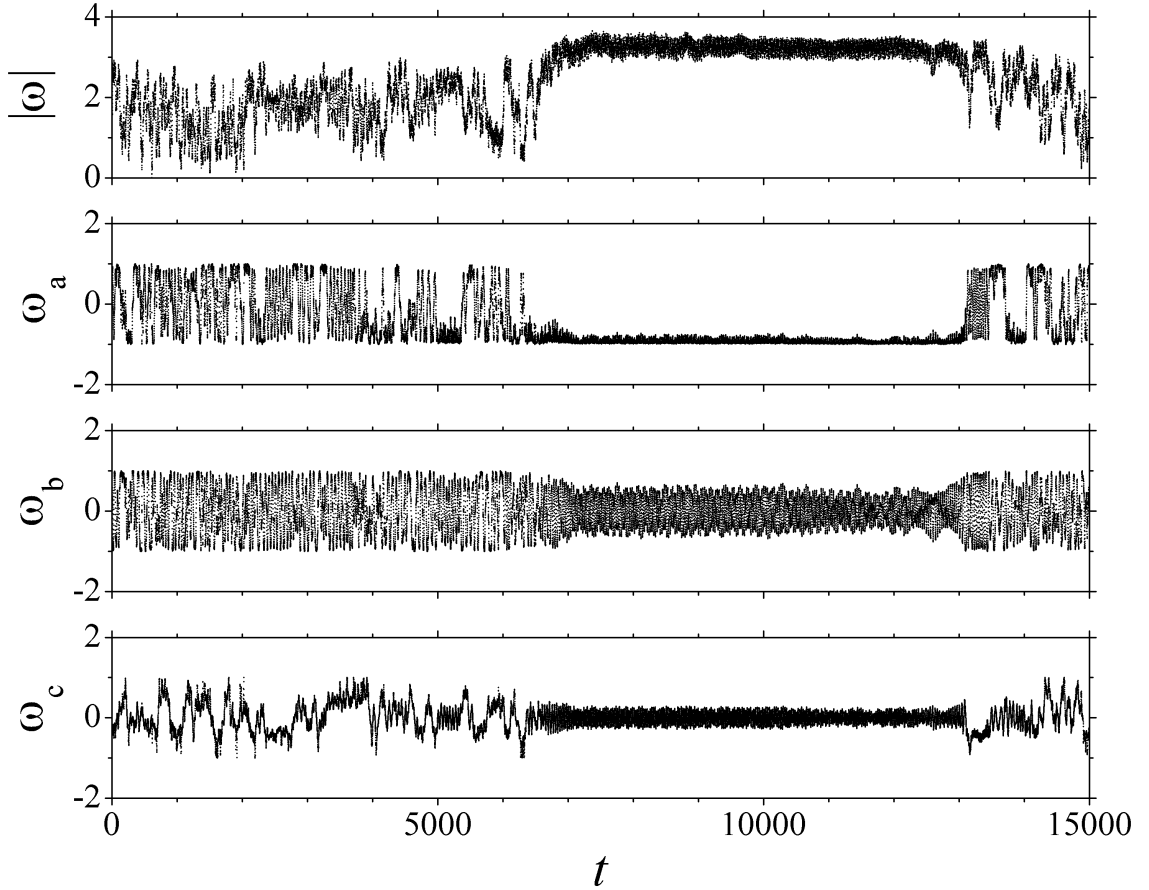


Рис. 4.1. Модуль вектора угловой скорости ω собственного вращения Гипериона (C7) и проекции ω_a , ω_b и ω_c вектора угловой скорости ω на главные центральные оси инерции a' , b' , c' спутника. В качестве начальных условий и параметров для интегрирования взяты значения (см. Табл. 3.1), полученные при моделировании наблюдений Гипериона, выполненных в Пулковке за период сентябрь – октябрь 2000 г. Время выражено в сутках.

на основе данных наблюдений с КА. Наблюдаемое на Рис. 4.1 поведение $\omega(t)$ характерно для перемежаемости [7, 29], когда в поведении динамической системы чередуются хаотическое и схожее с регулярным поведение.

Поскольку на относительно длинных интервалах времени скорость вращения Гипериона может быть примерно постоянной, для определения или уточнения параметров вращения Гипериона из наблюдений необходим длительный ряд наблюдений, проведенных как можно с большей частотой.

4.1.2 Ляпуновское время вращательной динамики

Чтобы строго установить характер вращения Гипериона (С7) вычислим ХПЛ для всех наборов значений начальных условий и параметров (см. Табл. 3.1), полученных из моделирования его кривых блеска, и определим величину ляпуновского времени для его вращательной динамики.

На Рис. 4.2 представлены зависимости от времени текущих величин ХПЛ $L_1 > L_2 > L_3$, вычисленных для второго и четвертого наборов значений начальных условий и параметров из Табл. 3.1. Вычисление ХПЛ проводилось при помощи HQRВ-метода на интервале времени $t = 10^5$ (единица времени равна $1/(2\pi)$ орбитального периода). Из Рис. 4.2 видно, что все ХПЛ отличны от нуля, то есть вращательное движение Гипериона хаотично. Для двух оставшихся наборов (первого и третьего) значений начальных условий и параметров из Табл. 3.1 все вычисленные ХПЛ также оказались отличны от нуля, то есть на всех рассмотренных отрезках времени моделирования вращение Гипериона являлось хаотическим. Вычисление [15, 16] ХПЛ для начальных условий и параметров, полученных из моделирования наблюдаемой кривой блеска Гипериона, полученной в ГАО РАН за период

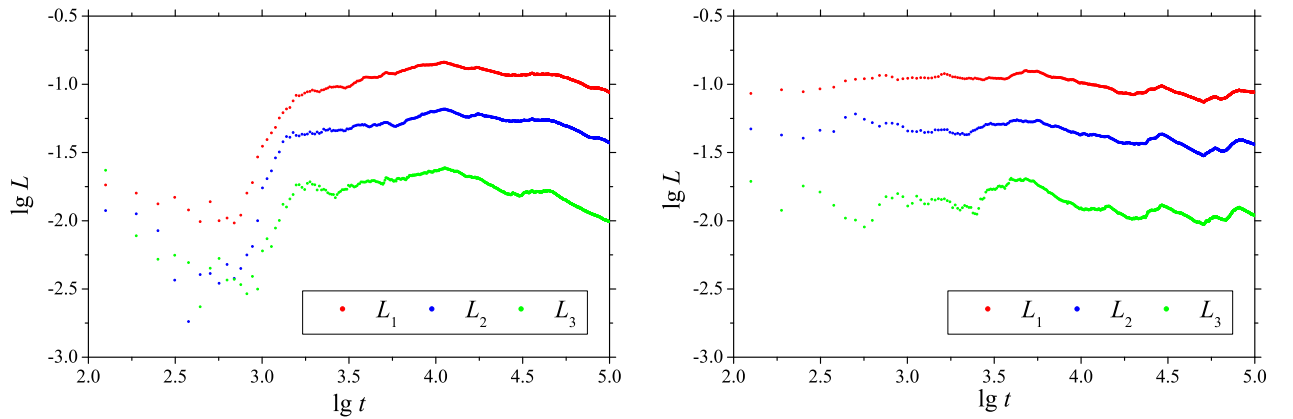


Рис. 4.2. Зависимость текущих величин ХПЛ ($L_1 > L_2 > L_3$) от времени на котором они вычисляются для вращательной динамики Гипериона (С7). В качестве начальных условий и параметров для интегрирования взяты значения (см. Табл. 3.1), полученные при моделировании наблюдений, выполненных в Пулковке за период: сентябрь – декабрь 1999 г. (слева) и январь – март 2000 г. (справа). Единица времени равна $1/(2\pi)$ орбитального периода.

Таблица 4.1. Ляпуновские времена для вращательной динамики Гипериона (С7), вычисленные для значений начальных условий и параметров, полученных из моделирования его кривых блеска (см. Табл. 3.1).

Наблюдательные данные	Клаветтер, 1987	Пулково, 1999	Пулково, 2000а	Пулково, 2000б
T_L , сутки	51 ± 5	42 ± 6	49 ± 4	38 ± 5

2001–2003 гг., также подтвердило хаотический характер его вращения.

Оценим величину ляпуновского времени T_L вращательной динамики Гипериона. В Табл. 4.1 приведены оценки величины T_L , полученные посредством вычисления ХПЛ для всех начальных условий и параметров, указанных в Табл. 3.1. Ляпуновское время вычислялось по формуле:

$$T_L = P_{\text{orb}} / (2\pi L_1),$$

где $P_{\text{orb}} = 21.28$ суток — орбитальный период Гипериона, L_1 — величина МХПЛ. В качестве L_1 было принято среднее значение МХПЛ на промежутке времени его вычисления $t = [10^4, 10^5]$.

Из Табл. 4.1 видно, что ляпуновское время для вращательной динамики Гипериона составляет от 38 до 51 суток. Ранее Уиздом и др. [199] посредством вычисления ХПЛ для хаотического вращения спутника с параметрами Гипериона, оценили величину ляпуновского времени в два орбитальных периода (≈ 42 дня). Теоретическая оценка ляпуновского времени для Гипериона, полученная в работах И. И. Шевченко [63, 65] при помощи метода, описанного в разделе 1.3.2, составляет ≈ 31 сут. В. В. Куприянов и И. И. Шевченко [129] оценили ляпуновское время для хаотического вращения Гипериона в 54 сут. Недавно оценка ляпуновского времени в 61.4 ± 3.6 суток для вращательной динамики Гипериона была получена в работе Харбисон и др. [113], посредством моделирования вращательной динамики Гипериона на основе данных, полученных с КА «Вояджер–2» и «Кассини».

Оценки ляпуновского времени (Табл. 4.1), полученные посредством вычисления ХПЛ для начальных условий, задающих модельные кривые блеска Гипериона, близки к оценкам, полученным другими исследователями. Та-

ким образом, информация о начальных условиях, задающих вращательное движение Гипериона, утрачивается в его динамике на временах в 1–2 месяца. Соответственно, любая полезная информация о вращательной динамике Гипериона может быть извлечена из его кривой блеска при моделировании отрезков кривой блеска на интервалах меньше ляпуновского времени. Моделирование на бóльших интервалах времени интересно с точки зрения выяснения общих статистических свойств хаотического движения (например, с целью уточнения значения МХПЛ/ляпуновского времени, построения частотного спектра движения), но не для детального восстановления формы кривой.

Таким образом, теоретически предсказанное Уиздомом и др. [199] хаотическое вращение Гипериона подтверждается вычислением ХПЛ для начальных условий, полученных из моделирования (см. § 3.2) его наблюдаемых кривых блеска. Ляпуновское время для хаотического вращения Гипериона согласно различным оценкам составляет 1–2 месяца (1.5–3 орбитальных периода). В настоящее время Гиперион является самым крупным объектом в Солнечной системе, для которого строго установлен режим хаотического вращения.

§ 4.2 Режимы вращения Прометея и Пандоры

В теоретическом исследовании В. В. Куприянова и И. И. Шевченко [129] было указано на то, что два спутника Сатурна — Прометей (С16) и Пандора (С17) могут находиться в режиме хаотического вращения. В отличие от случая Гипериона (С7), рассмотренного в § 4.1, хаос во вращении этих двух спутников вызван скорее особенностями их динамических и физических параметров, чем просто большой протяженностью (как установили Уиздом и др. [199]) хаотической области в фазовом пространстве вращательного движения.

Примечательно, что орбитальная динамика Прометея и Пандоры характеризуется [87, 101, 108, 174] ляпуновским временем в три года и этот динамический хаос (в орбитальном движении) действительно наблюдается [103].

Поскольку возможность наличия хаоса во вращательном движении свя-

зана в том числе и с устойчивостью синхронного вращения (см. подробнее [198, 199]), исследуем устойчивость плоского вращения Прометея и Пандоры относительно наклона оси вращения для центров синхронного резонанса и для траекторий фазового пространства в окрестности синхронного резонанса. Для ряда других малых спутников аналогичный анализ устойчивости вращения проводился в Главе 2.

Важной задачей, прежде всего с наблюдательной точки зрения, является следующая: имеется ли преимущественная ориентация фигур спутников при их хаотическом вращении, или все направления равновероятны? Ориентация спутника при хаотическом вращении, вообще говоря, не обязательно должна быть изотропной. На примере Прометея и Пандоры подробно рассмотрим ориентацию фигур малых спутников при их хаотическом вращении.

Исследование вращательной динамики Прометея и Пандоры проведем при тех же предположениях, что и в Главе 2: спутники представляют собой несферические твердые тела, движущиеся вокруг планеты (гравитирующей точки) по невозмущенным эллиптическим орбитам. Размеры спутников много меньше радиуса орбитального движения, а их массы малы по сравнению с массой Сатурна. Пространственная вращательная динамика спутников определяется параметрами e , c/b , b/a (предполагаем спутники однородными) и начальными условиями.

Сжатие Сатурна вызывает прецессию перицентров орбит спутников со скоростью [108]: $3.1911 \times 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{с}$ в случае Прометея и $3.0082 \times 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{с}$ в случае Пандоры. Следовательно периоды прецессии равны 0.36 и 0.38 года, соответственно. Эти значения намного больше, чем ляпуновские времена (составляющие менее суток, см. [129]) вращения этих спутников, если оно является хаотическим. Так как временные шкалы столь различны, прецессия орбит спутников не учитывается. Орбитальные периоды спутников тоже весьма малы [58, 122] — 0.613 суток для Прометея и 0.629 суток для Пандоры.

4.2.1 Возможные режимы синхронного вращения

В Главе 2 было указано, что при определенных значениях параметров ω_0 и e в фазовом пространстве плоского вращательного движения спутника возможно одновременное существование до трех режимов синхронного вращения, в один из которых может быть захвачен спутник, если вращение в этом режиме устойчиво. Рассмотрим эту возможность применительно к Прометею (C16) и Пандоре (C17).

Доступные данные о параметрах фигур Прометея и Пандоры собраны в Табл. 4.2. Отметим, что данные о фигурах спутников, взятые из [185], приводятся в [100, 162, 163, 164]. Кроме того, там же приводятся данные о принятых координатах полюсов вращения Прометея и Пандоры (во всех источниках эти координаты одинаковы). Орбитальный эксцентриситет примем равным $e = 0.002$ для Прометея и $e = 0.004$ для Пандоры, как указано в [100].

На Рис. 4.3 приведен в увеличенном масштабе фрагмент диаграммы « $\omega_0 - e$ » (представленной в полном масштабе на Рис. 2.7), где указаны местоположения Прометея и Пандоры согласно данным из Табл. 4.2. На рисунке указаны границы областей существования синхронного α -резонанса, синхронного β -резонанса и бифуркационной моды α -резонанса (моды α_{bif}).

Как следует из Рис. 4.3 синхронный α -резонанс существует для обоих спутников, для всех рассмотренных данных. В случае Прометея синхронный β -резонанс не существует только для данных из [159, 198]. В соответствии

Таблица 4.2. Параметры фигур Прометея и Пандоры.

Прометей (C16)			Пандора (C17)			Источник
b/a	c/b	ω_0	b/a	c/b	ω_0	
0.676	0.680	1.058	0.800	0.705	0.812	[100, 185]
0.608	0.726	1.174	0.741	0.782	0.934	[110]
0.734	0.696	0.948	0.773	0.804	0.869	[159]
0.586	0.706	1.211	0.737	0.738	0.942	[182]
0.714	0.740	0.987	0.764	0.786	0.889	[198]

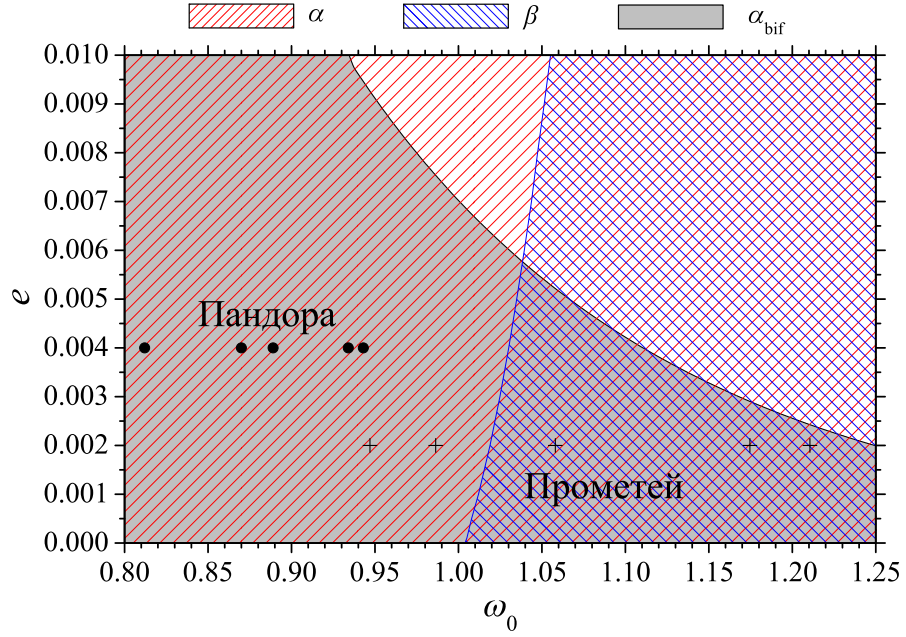


Рис. 4.3. Положения Прометей (крестики) и Пандоры (кружки) на диаграмме « $\omega_0 - e$ » в соответствии с данными Табл. 4.2. Штриховкой и серым тоном указаны области существования различных режимов синхронного резонанса.

со всеми другими источниками, Прометей расположен в области существования этой моды. Для случая Пандоры синхронный β -резонанс не существует для всех рассмотренных данных. Для всех данных о фигурах Прометей и Пандоры возможно существование бифуркационной моды α -резонанса (см. подробнее о бифуркационной моде § 2.2).

Далее положим, согласно данным из [185]: $\omega_0 = 1.058$ для Прометей и $\omega_0 = 0.812$ для Пандоры. Возможная вращательная динамика Прометей и Пандоры весьма разнообразна: для Прометей в фазовом пространстве плоского вращательного движения присутствуют три, а для Пандоры — два различных режима синхронного вращения. В Главе 2 аналогичный вывод был сделан на меньшей выборке данных о параметрах фигур этих спутников. Спутник может быть захвачен в один из возможных режимов синхронного вращения, если вращение в этом режиме является устойчивым.

4.2.2 Устойчивость синхронного вращения

Рассмотрим устойчивость относительно наклона оси вращения плоского вращения Прометей и Пандоры в случаях точного синхронного α -резонанса,

синхронного β -резонанса и моды α_{bif} . Для случаев синхронных α -резонанса и β -резонанса используем метод, основанный на анализе модальной структуры распределения модулей мультипликаторов периодических решений уравнений движения (см. подробнее раздел 2.3.1). Анализ устойчивости в случае моды α_{bif} проведем посредством вычисления всего спектра ХПЛ и последующим анализом дифференциальных распределений вычисленных значений ХПЛ (см. подробнее раздел 2.3.2). Мультипликаторы и ХПЛ будем вычислять для начальных условий, соответствующих центрам синхронного резонанса, при различных значениях параметров на плоскости $(c/b, b/a)$. Шаг равномерной сетки на плоскости значений параметров положим равным 0.001 как по c/b , так и по b/a .

На Рис. 4.4 и 4.5 для обоих спутников представлены координаты θ и $d\theta/dt$ центров синхронных резонансов на сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, в зависимости от величины параметра ω_0 при фиксированной величине e . Эти координаты использовались для

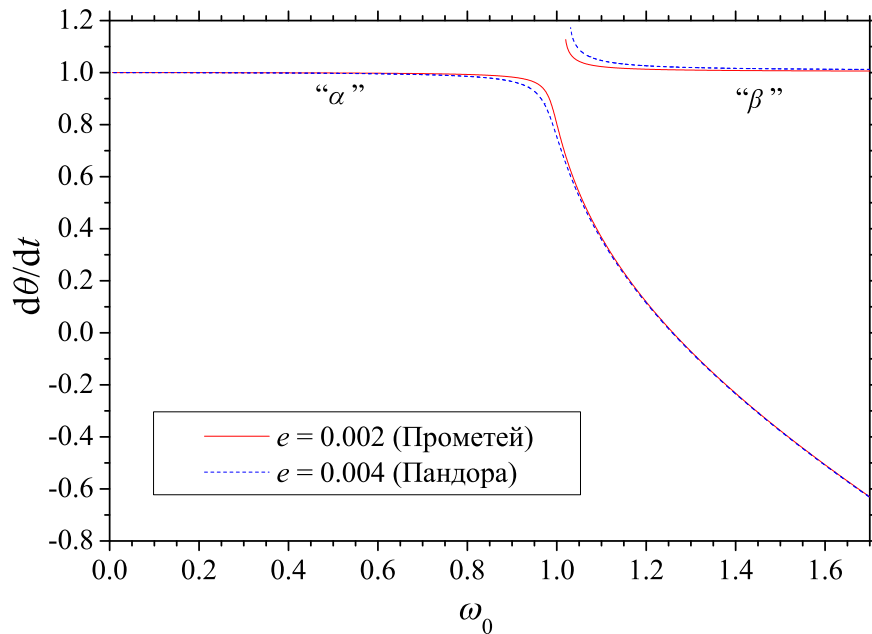


Рис. 4.4. Координаты $d\theta/dt$ центров синхронного резонанса на плоскости сечения фазового пространства, определенного в перицентре орбиты, в зависимости от величины параметра ω_0 . Кривые, начинающиеся слева, соответствуют синхронному α -резонансу, кривые, начинающиеся справа, — синхронному β -резонансу. Для второй координаты во всех случаях имеем $\theta = 0$.

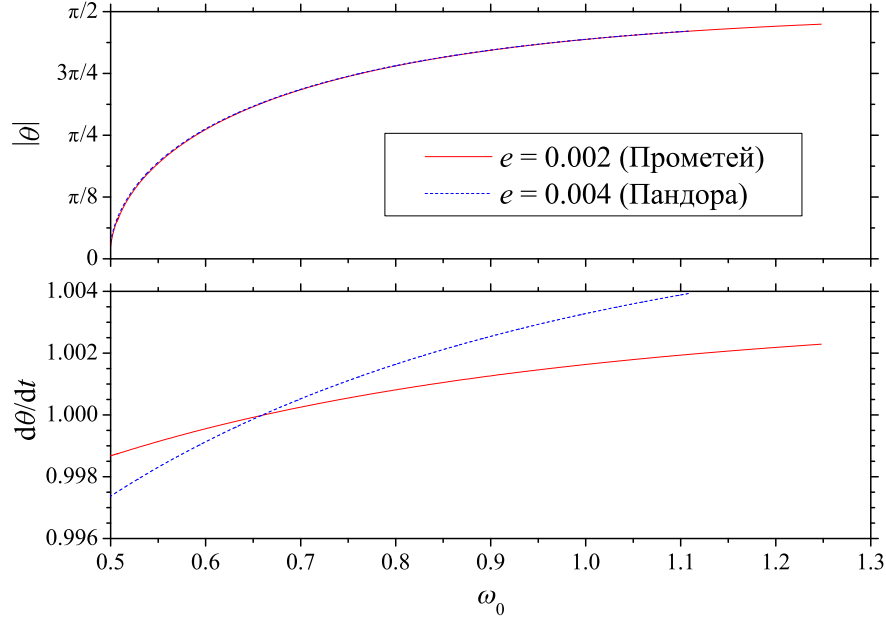


Рис. 4.5. Координаты θ и $d\theta/dt$ центров моды α_{bif} на плоскости сечения фазового пространства, определенного в перицентре орбиты, в зависимости от величины параметра ω_0 . На верхнем рисунке кривые практически совпадают.

задания начальной ориентации спутников при исследовании устойчивости синхронного вращения. Кривая, начинающаяся с левой стороны Рис. 4.4, соответствует синхронному α -резонансу, кривая, берущая свое начала справа, соответствует синхронному β -резонансу. Подобная зависимость для случая Гипериона (C7) ($e = 0.1$) представлена на Рис. 2.12 в Главе 2, там же дано подробное описание наблюдаемой зависимости.

Моде α_{bif} на сечении фазового пространства соответствуют два центра резонанса, координаты которых (см. Рис. 4.5) имеют одинаковые значения по $d\theta/dt$ и равные по модулю но разные по знаку значения θ (в случае, если при построении сечения значения θ приведены в интервал $[-\pi/2, \pi/2)$, см., например, Рис. 2.8).

Диаграммы « $c/b - b/a$ » с выявленными на плоскости $(c/b, b/a)$ областями устойчивости и неустойчивости показаны на Рис 4.6 (для Прометея) и Рис. 4.7 (для Пандоры). Как и на Рис. 2.13–2.15, области устойчивости показаны зеленым цветом, области минимальной неустойчивости (с одной степенью свободы) показаны синим цветом, области максимальной неустойчивости (с двумя степенями свободы) показаны красным цветом. Для ори-

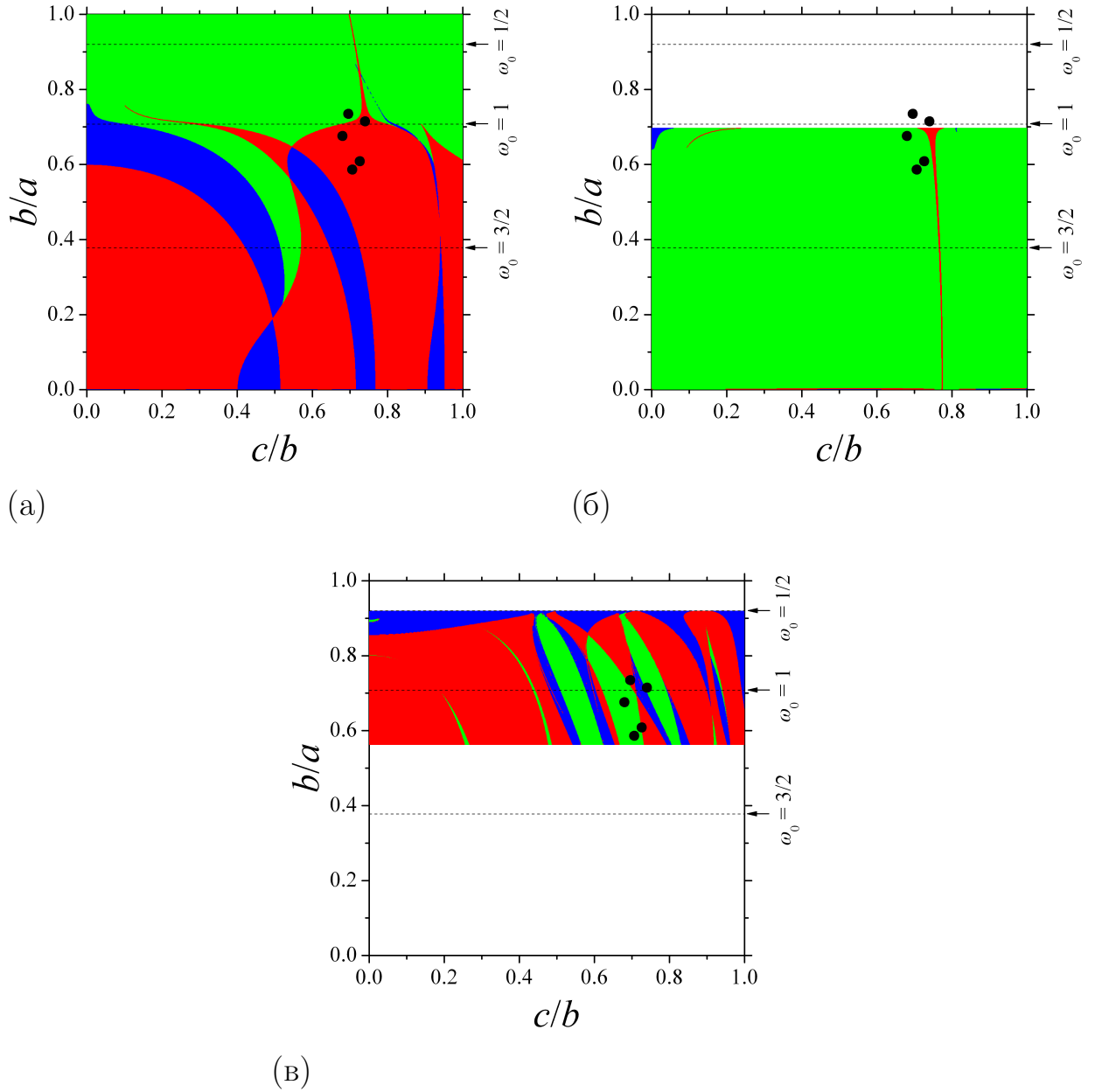


Рис. 4.6. Области устойчивости (зеленый цвет) и неустойчивости (синий и красный цвета) относительно наклона оси вращения; $e = 0.002$ («Прометей»): (а) для центра синхронного α -резонанса, (б) для центра синхронного β -резонанса, (в) для центра моды α_{bif} . Положения Прометея (C16), согласно данным из Табл. 4.2, указаны черными точками.

ентации на рисунках нанесены линии постоянных значений параметра ω_0 .

В рассматриваемой задаче об устойчивости плоского вращения спутника относительно наклона оси вращения существуют три пары мультипликаторов $\rho_i = 1/\rho_{i+3}$ и три пары ХПЛ $L_i = -L_{i+3}$, $i = 1, 2, 3$. В случае

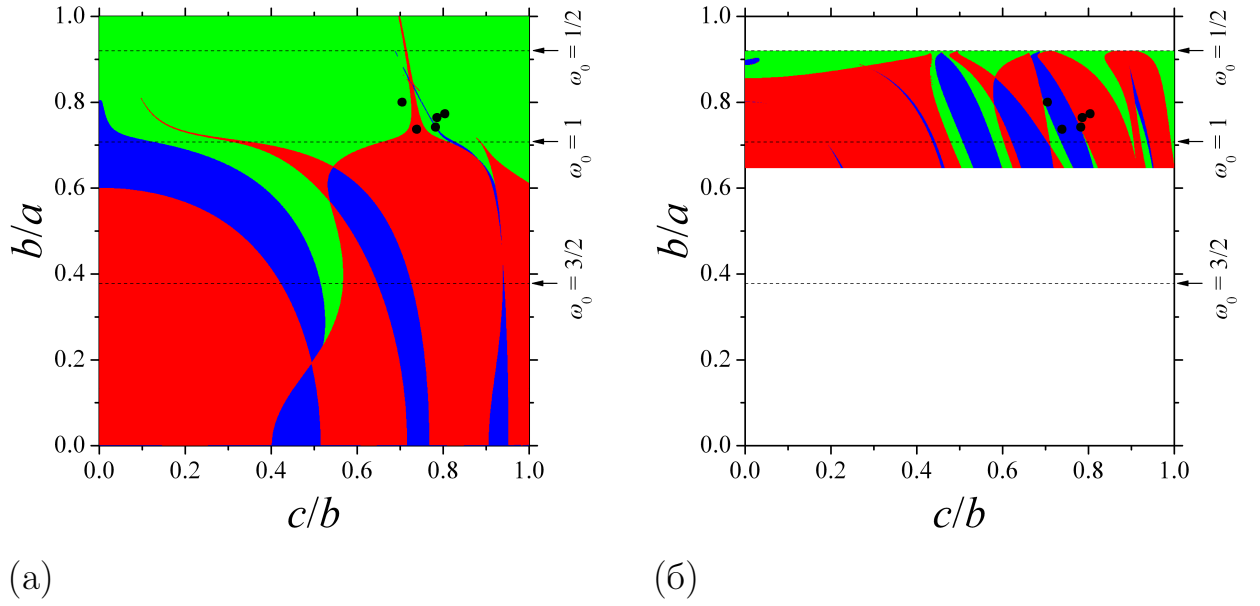


Рис. 4.7. Области устойчивости (зеленый цвет) и неустойчивости (синий и красный цвета) относительно наклона оси вращения; $e = 0.004$ («Пандора»): (а) для центра синхронного α -резонанса, (б) для центра моды α_{bif} . Положения Пандоры (C17), согласно данным из Табл. 4.2, указаны черными точками.

устойчивого движения: $|\rho_i| = 1$ и $L_i = 0$ для $\forall i$. Для синхронных α - и β -резонансов области минимальной неустойчивости соответствуют случаю, когда одна пара мультипликаторов не лежит на единичной окружности, области максимальной неустойчивости — случаю, когда две пары мультипликаторов сошли с единичной окружности на комплексной плоскости (см. подробнее § 1.3). Для моды α_{bif} области минимальной неустойчивости соответствуют случаю, когда только один ХПЛ больше нуля, области максимальной неустойчивости — случаю, когда два ХПЛ больше нуля.

Из диаграмм, приведенных на Рис. 4.6а и 4.6б, следует, что вращение в синхронном α -резонансе неустойчиво относительно наклона оси вращения для большинства доступных наблюдательных данных о параметрах фигуры Прометея. В случае данных из [159], вращение Прометея в синхронном α -резонансе близко к неустойчивому. Вращение Прометея в синхронном β -резонансе близко к неустойчивому. В случае Пандоры (см. Рис. 4.7а), вращение в синхронном α -резонансе близко к неустойчивому для данных [159, 185, 198]

и неустойчиво для данных из [110, 182]. Из диаграмм, представленных на Рис. 4.6в и 4.7б, следует, что синхронное вращение в режиме α_{bif} неустойчиво относительно наклона оси вращения как в случае Прометея, так и в случае Пандоры. Таким образом, плоское синхронное вращательное движение Прометея и Пандоры с большой долей вероятности является неустойчивым относительно наклона оси вращения.

4.2.3 Устойчивость любого типа вращения

Рассмотрим устойчивость относительно наклона оси вращения для траекторий различного рода в окрестности синхронного резонанса. Вычисление ХПЛ на сетке начальных условий, при фиксированных значениях ω_0 и e , и последующий анализ распределений значений вычисленных ХПЛ позволяют провести такое исследование.

В Главе 2 подобное исследование устойчивости проведено для ряда других малых спутников, при этом вычислялся только МХПЛ — L_1 . Для случаев Прометея и Пандоры исследование устойчивости их вращения проведем посредством вычисления всего спектра ХПЛ при помощи HQRВ-метода. Для разделения траекторий на устойчивые и неустойчивые использовались вычисленные значения МХПЛ, значения положительных младших в спектре ХПЛ $L_2 > L_3$ использовались для контроля вычислений. Как и в разделе 2.3.2, сечения фазового пространства построим на плоскости $(\theta, d\theta/dt)$, определенной в перицентре орбиты, то есть для $t = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. В качестве значений ω_0 , задающих фигуры спутников, приняты значения из [185] (см. Табл. 4.2).

Вычисление ХПЛ было проведено для двух множеств траекторий — (1) и (2), заданных наборами начальных условий: (1) $\theta = 0$, (2) $\theta = \pi/2$; для обоих наборов множество значений $d\theta/dt$ бралось из интервала $[-0.5, 2.5]$ с равномерным шагом 0.003 в случае Прометея и из интервала $[0.0, 2.0]$ с шагом 0.002 в случае Пандоры. Начальные условия также включали в себя $\phi = \psi = 0$, $d\phi/dt = d\psi/dt = 0$; движение начиналось в перицентре (в начальный момент времени $f = 0$). Таким образом, для каждого спутника ХПЛ были вычислены у 2 000 траекторий.

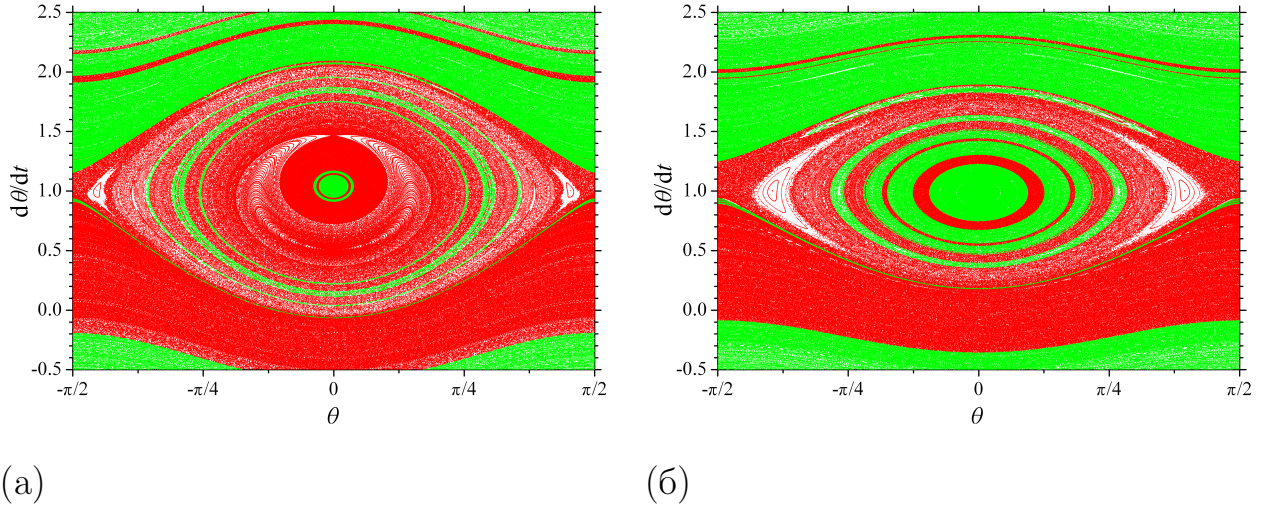


Рис. 4.8. Сечение фазового пространства вращательного движения спутника. (а) $e = 0.002$, $\omega_0 = 1.058$ («Прометей»); (б) $e = 0.004$, $\omega_0 = 0.812$ («Пандора»). Зеленым цветом указаны устойчивые относительно наклона оси вращения траектории, красным — неустойчивые.

Посредством построения и анализа дифференциального распределения вычисленных значений ХПЛ, был найден критерий для разделения хаотических и регулярных траекторий (см. подробнее раздел 2.3.2). Было принято, что МХПЛ отличен от нуля (то есть движение является хаотическим), если $\lg L_1 > -3$ при вычислении его на промежутке времени в $t = 10^5$. Разделение хаотических и регулярных орбит позволило построить сечения фазового пространства, на которых разными цветами выделены устойчивые и неустойчивые относительно наклона оси вращения траектории.

Сечения фазового пространства вращательного движения для случаев Прометея и Пандоры, представлены на Рис. 4.8. Рассмотрим их подробно. В случае Прометея (Рис. 4.8а) на сечении имеются центр синхронного α -резонанса (нижний на сечении) и центр синхронного β -резонанса (верхний на сечении). В случае Пандоры (Рис. 4.8б) на сечении присутствует только центр синхронного α -резонанса (синхронный β -резонанс для Пандоры не существует). Кроме того, как для Прометея, так и для Пандоры существует бифуркационная мода α -резонанса (мода α_{bif}), центры которой находятся внутри хаотического слоя слева и справа от центра синхронного β -резонанса в случае Прометея и центра синхронного α -резонанса в случае Пандоры. От-

метим, что для обоих спутников на сечениях ниже основного хаотического слоя присутствует широкая полоса из квазипериодических траекторий, являющихся неустойчивыми относительно наклона оси вращения. И напротив, квазипериодические траектории выше хаотического слоя устойчивы.

Основной особенностью, обнаруженной на построенных сечениях, является тот факт, что либрационные траектории устойчивы только в ближайшей окрестности центра синхронного β -резонанса в случае Прометея и в окрестности центра синхронного α -резонанса в случае Пандоры. Для либрационных траекторий, окружающих главный центр синхронного резонанса наблюдается чередование кольцеобразных зон устойчивого и неустойчивого движения, причем в случае Пандоры чередование выражено более явно, чем в случае Прометея.

Во время процесса приливного захвата в синхронный резонанс оба спутника будут пересекать эти промежуточные полосы неустойчивости. Присутствие таких полос неустойчивости может затруднить захват спутника в точный синхронный резонанс по сравнению с обычной ситуацией, когда эти полосы отсутствуют, поскольку спутник из-за неустойчивости относительно наклона оси вращения будет стремиться выйти из плоского режима вращения в этих областях. Такие полосы из неустойчивых траекторий образуют «барьеры» для захвата спутника в синхронное вращение и, помимо Прометея и Пандоры, существуют в случае других малых спутников (см., например, Рис. 2.17).

4.2.4 Ориентация фигур при хаотическом вращении

Далее рассмотрим задачу о том, существует ли преимущественная ориентация фигуры спутника при хаотическом вращении, или такое «хаотическое кувыркание» изотропно. Это важно для заключения о характере вращения спутника из анализа наблюдательных данных. Например, в случае вращения в синхронном спин-орбитальном резонансе спутник всегда направлен на планету одной и той же стороной.

Для описания вращения спутника будем использовать систему углов Эйлера (θ, ϕ, ψ) , принятую в работе Уиздома [198] (она обозначена в Главе 3

как система II). Причина для выбора второй системы координат заключается в том, что в принятой в Главе 2 и в разделах 4.2.2–4.2.3 системе углов Эйлера (система I) ориентация наибольшей оси фигуры спутника относительно направления на планету выражается довольно сложным образом через тригонометрические функции от углов Эйлера. В системе углов Эйлера, принятой в работе [198], эта ориентация имеет простое выражение. Угол ϕ в данной системе соответствует углу между наибольшей осью фигуры спутника (осью минимального момента инерции) и плоскостью орбиты, а угол $(\theta - f)$ представляет собой угол между направлением на планету и плоскостью, в которой лежит наибольшая ось фигуры спутника и которая ортогональна плоскости орбиты.

Уиздом [198] построил проекцию одной из траекторий пространственного вращения Фобоса (M1) на плоскость $(\phi, \theta - nt)$, где n — среднее движение (см. Рис. 5 в [198]; отметим, что для малых эксцентриситетов $\theta - f \approx \theta - nt$). Начальные условия, задающие вращение Фобоса, соответствовали при плоском вращении орбитальному резонансу 1:2. В первоначальный момент времени ось вращения была смещена от нормали к плоскости орбиты на 10^{-4} радиан. Анализ Рис. 5 в работе [198] показывает, что пространственное вращение Фобоса с такими начальными условиями на интервале времени интегрирования в 75 орбитальных периодов не является полностью хаотичным: присутствует преимущественная ориентация наибольшей оси фигуры спутника по направлению на планету. Подробное изучение характера ориентации Фобоса при хаотическом вращении Уиздом [198] не проводил.

Построим аналогичный рисунок для хаотического вращения Прометея и Пандоры вблизи синхронного резонанса 1:1 и подробно изучим ориентацию фигур спутников на длительном интервале времени. Для вычислений используем значения c/b и b/a , данные в [185] (см. Табл. 4.2). Начальные условия для интегрирования были взяты внутри хаотического слоя вокруг синхронного резонанса на сечении фазового пространства плоского вращательного движения, определенном в перицентре орбиты (см. Рис. 4.8). Полученная посредством численного интегрирования проекция одной из пространственных хаотических траекторий на плоскость $(\phi, \theta - f)$ представле-

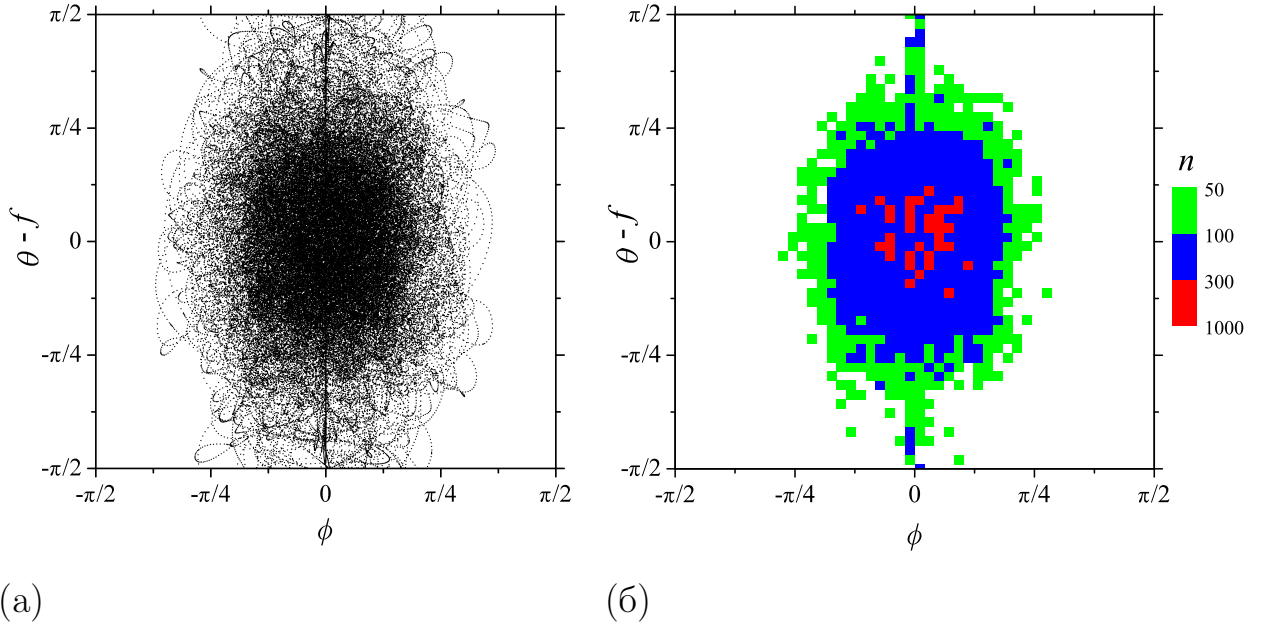


Рис. 4.9. Ориентация Прометея (C16) при хаотическом вращении. (а) Проекция хаотической траектории на плоскость $(\phi, \theta - f)$. Время интегрирования 1 000 орбитальных периодов. (б) График плотности дискретных проекций хаотической траектории на плоскость $(\phi, \theta - f)$. Время интегрирования 10 000 орбитальных периодов. Белая область соответствует $n < 50$. Направление на Сатурн соответствует точке $(0, 0)$.

на на Рис. 4.9а. Кроме того, на Рис. 4.9б приведен график плотности для дискретной проекции той же траектории на эту же плоскость. Здесь представлены рисунки только для случая Прометея, в случае Пандоры рисунки схожи с представленными.

Шаг для вывода проекции был взят равным 0.01 орбитального периода. График плотности строился следующим образом: квадрат $(\phi, \theta - f) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$ был разделен равномерной сеткой на 40×40 ячеек. Величина n равна количеству точек проекции траектории, попавших в данную ячейку. Рис. 4.9а построен для одной траектории при интегрировании на промежутке в 1 000 орбитальных периодов. Рис. 4.9б построен для той же самой траектории при интегрировании на промежутке времени в 10^4 орбитальных периодов (≈ 16 лет).

Средний радиус Сатурна равен 57 600 км; большие полуоси орбит Прометея и Пандоры равны 139 400 км и 141 700 км соответственно [103]. Ис-

ходя из этого, относительная площадь (по отношению к площади небесной полусферы) диска Сатурна, видимого со спутника, равна 8.9% для Прометея и 8.6% для Пандоры. Эти значения соответствуют относительной величине времени, когда фигуры этих спутников ориентированы в направлении на Сатурн (наибольшая ось фигуры спутника примерно параллельна радиус-вектору планета — спутник), если ориентация спутников во время хаотического «кувыркания» является изотропной.

Для хаотической траектории, представленной на Рис. 4.9, была вычислена средняя величина относительного времени ориентации фигуры спутника по направлению на Сатурн. На промежутке времени интегрирования в 10^4 орбитальных периодов данная величина оказалась равной $\approx 30\%$ для Прометея и $\approx 22\%$ для Пандоры; то есть «изотропная норма» превышена в 3.3 и 2.6 раза, соответственно. Из Рис. 4.9 и этих численных оценок очевидно, что при хаотическом вращении имеет место предпочтительная ориентация наибольших осей фигур спутников по направлению на Сатурн.

Проведенные численные эксперименты показали, что на используемом временном интервале численного интегрирования в 10^4 орбитальных периодов средние значения относительного времени ориентации фигур Прометея и Пандоры по направлению на Сатурн зависят от выбора начальных условий. Интегрирование проводилось для хаотических траекторий с различными начальными условиями, определенными в хаотическом слое вокруг синхронного резонанса. Полученные значения средней величины относительного времени ориентации фигуры спутника по направлению на Сатурн находились в интервале 20–30%. Хотя и наблюдается существенный разброс данной величины видно, что во всех рассмотренных случаях предпочтительная ориентация фигур спутников ярко выражена. Следует ожидать, что в хаотической вращательной динамике других малых спутников планет в окрестности синхронного резонанса должен проявляться эффект преимущественной ориентации их наибольших осей фигур на планету.

§ 4.3 Странные аттракторы во вращательной динамике спутников планет

Ранее в Главе 2 и § 4.1–§ 4.2 при исследовании вращательного движения малых спутников планет приливное взаимодействие между планетой и спутником не учитывалось, то есть рассматривалась консервативная задача. Рассмотрим далее, как учет приливного взаимодействия (наличие диссипации) влияет на возможную вращательную динамику спутников.

Исследование плоского вращательного движения спутника несферической формы как для консервативного случая, так и для случая наличия диссипации, проведено в работе Карасопулоса [123]. Для различных значений параметров задачи и начальных условий в работе [123] построены сечения фазового пространства относительного движения, вычислен МХПЛ. Показано, что при наличии диссипации, в фазовом пространстве вращательного движения могут существовать как обычный аттрактор, так и странный аттрактор.

Напомним определение [29, 30] аттрактора. Уменьшение фазового объема диссипативной системы приводит к тому, что все ее траектории притягиваются к поверхности меньшей размерности, чем у исходного фазового пространства. Эта поверхность называется аттрактором. Выделяют два типа аттракторов — обычный (регулярный) и странный (хаотический). Одним из основных свойств странного аттрактора является то, что на нем близкие траектории фазового пространства расходятся экспоненциально, то есть движение является хаотическим.

Проведенное в работе Кхана и др. [125] исследование динамики плоского движения спутника под действием гравитационного приливного момента показало, что при определенных значениях параметров задачи на сечениях фазового пространства появляется структура, характерная для странного аттрактора. На возникновение странного аттрактора в данной задаче было указано и в монографии В. В. Белецкого [5], вывод был сделан на основе анализа сечений фазового пространства. Странный аттрактор возникает в том месте на сечении, где располагается хаотический слой в окрестности сепара-

трисы синхронного резонанса при отсутствии приливного взаимодействия. Кхан и др. [125] для малых значений эксцентриситета орбиты получили аналитическую оценку величины параметра, характеризующего приливную диссипацию, при которой возникает хаотическое движение, то есть формируется странный аттрактор.

Хотя обнаруженная в работах [5, 125] на сечении фазового пространства структура действительно имеет вид странного аттрактора (примеры сечений фазового пространства на которых присутствует аттрактор см., например, в [29]), четких критериев для ее классификации авторы не использовали. Вычисление МХПЛ в работе Карасопулоса [123], напротив, позволило сделать вывод о том, что возникающий аттрактор действительно является странным — в случае хаотического движения на странном аттракторе величина МХПЛ является положительной. Оценки величины фрактальной размерности (для странного аттрактора эта величина является дробной) подтвердили этот вывод.

Малые спутники планет представляют собой по большей части тела несферической формы, движущиеся по орбитам с существенным эксцентриситетом, и являются одними из основных кандидатов на наличие в фазовом пространстве вращательного движения странного аттрактора. Учет приливного взаимодействия расширяет список возможных режимов вращательного движения спутника в окрестности синхронного резонанса — в диссипативной системе возможно хаотическое движение на странном аттракторе.

Рассмотрим возможность формирования странного аттрактора во вращательной динамике малых спутников при достижении окрестности сепаратрисы синхронного резонанса в ходе приливной эволюции вращательного движения. Для этого построим представительные сечения фазового пространства вращательного движения и вычислим ХПЛ на множестве значений параметров задачи. Определим области значений параметров задачи, при которых возможно существование странного аттрактора. Среди известных в настоящее время спутников планет рассмотрим кандидатов на возможное наличие странного аттрактора в фазовом пространстве вращательного движения в ходе приливной эволюции вращательного движения.

4.3.1 Уравнение движения с учетом приливного взаимодействия

Рассмотрим плоское вращательное движение спутника в той же постановке задачи и при тех же предположениях, что и в § 2.2, когда приливное взаимодействие спутника и планеты не учитывалось.

Уравнение вращательного движения спутника относительно центра масс с учетом приливного взаимодействия имеет вид [107, 125]:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{GM}{r^3} \sin 2(\phi - f) = T, \quad (4.1)$$

где $\phi = \theta + f$, θ — угол между осью наименьшего главного центрального момента инерции спутника и $\mathbf{r}$ — радиус-вектором «планета — центр масс спутника», f — истинная аномалия, $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos f)$, a — большая полуось, e — эксцентриситет орбиты спутника, $\omega_0 = \sqrt{3(B - A)/C}$ — параметр, характеризующий динамическую асимметрию фигуры спутника, G — гравитационная постоянная, M — масса планеты.

В правой части уравнения (4.1) стоит приливной момент T , для которого имеем [107, 125]

$$T = -\frac{3}{2} \frac{GM^2 R^5}{Cr^6} k_2 \sin 2\delta, \quad (4.2)$$

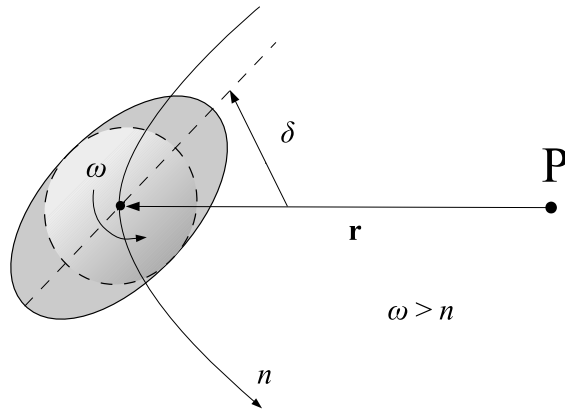


Рис. 4.10. Схема запаздывания приливного горба на спутнике для случая первоначально быстрого вращения спутника $\omega > n$. P — планета, δ — угол запаздывания приливного горба, ω — угловая скорость вращения спутника, n — среднее движение, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор «планета — центр масс спутника».

где k_2 — число Лява, R — средний радиус фигуры спутника, δ — угол запаздывания приливного горба на спутнике относительно $\mathbf{r}$ (см. Рис. 4.10).

В случае идеально упругого несжимаемого однородного спутника сферической формы для k_2 имеем [1, 78, 93, 156]

$$k_2 = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + 19\mu R/(2Gm\rho)},$$

где μ — модуль сдвига, ρ — средняя плотность, m — масса спутника.

Полагая, что задержка приливной фазы на спутнике пропорциональна частоте приливов, а также принимая величину наибольшего главного центрального момента инерции спутника $C = 0.4mR^2$ (случай сфероида Маклорена), для приливного момента имеем [1, 93, 156]:

$$T \approx -\frac{15}{4} \frac{GM^2}{m} \frac{R^3}{r^6} \frac{k_2}{Q}. \quad (4.3)$$

Здесь Q — диссипативная (приливая) функция: $Q \approx 1/(2\delta)$ (см. подробнее [95, 107, 112]).

Используя среднее значение приливного момента за период обращения спутника по орбите, полагая $GM = 1$, $Q = \text{const}$ и $k_2 = \text{const}$, путем замены t на f , приведем уравнение (4.1) к виду [5]:

$$(1+e \cos f) \frac{d^2\theta}{df^2} + [\beta(1+e \cos f)^5 - 2e \sin f] \frac{d\theta}{df} + \omega_0^2 \sin \theta \cos \theta = 2e \sin f, \quad (4.4)$$

где для параметра $\beta \geq 0$ (далее параметр диссипации), характеризующего величину приливного взаимодействия, имеем

$$\beta = \frac{15}{4} \frac{M}{m} \left(\frac{R}{a} \right)^3 \frac{k_2}{Q} (1 - e^2)^{-9/2}. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) используется далее для численного исследования вращательного движения спутника под действием приливного гравитационного момента. В случае $\beta = 0$ уравнение (4.4) сводится к уравнению Белецкого (2.11).

4.3.2 Сечения фазового пространства

В разделе 2.2.2 на плоскости (ω_0, e) были выделены области существования различных режимов плоского синхронного вращения спутника. Было показано, что в некоторых областях на данной плоскости существует одновременно до трех различных режимов синхронного вращения. В то же время,

есть большая область (см. Рис. 2.7), в которой плоское синхронное вращение невозможно (синхронный резонанс не существует). Указав на диаграмме « $\omega_0 - e$ » местоположение известных спутников планет, в разделе 2.4.1 сделаны выводы о возможных для них режимах плоского синхронного вращения. При этом оказалось, что для значительной части известных малых спутников плоское синхронное вращение невозможно. У этих спутников $e \in [0.2, 0.5]$, $\omega_0 \in [0.7, 1.1]$. Рассмотрим модельный случай, соответствующий спутнику из этой области.

На Рис. 4.11 для разных значений β представлены сечения фазового пространства плоского вращательного движения спутника в случае $e = 0.2$, $\omega_0 = 1$. Как и в разделе 2.3.2 сечение определено в перицентре орбиты — скорости и координаты траекторий фазового пространства фиксируются при $f = 0 \pmod{2\pi}$. Начальные условия для построения сечений выбирались на равномерной сетке 100×100 на плоскости $(\theta, d\theta/df)$, где $\theta \in [0, \pi/2]$, $d\theta/df \in [-1.5, 1.5]$. Для каждой точки интегрирование проводилось на промежутке времени $t = 1\,000$.

При интегрировании уравнения (4.4) было принято: среднее движение $n = 1$, то есть один орбитальный период равен 2π единицам времени. Параметры интегратора DOPRI8 были следующими: максимальная величина шага интегрирования по времени была положена равной 0.1, а локальная точность интегрирования была равна 10^{-12} .

Рассмотрим детально представленное на Рис. 4.11 изменение картины на сечении фазового пространства при изменении β . Когда приливное взаимодействие отсутствует ($\beta = 0$), на сечении присутствует большой хаотический слой. Хаотический слой находится в том месте, где должен располагаться центр синхронного резонанса и окружающие его либрационные траектории. Однако синхронный резонанс при выбранных значениях e и ω_0 , не существует (см. подробнее раздел 2.4.1). В верхней части хаотического слоя находится центр резонанса 3:2 и окружающие его либрационные траектории; над хаотическим слоем расположен центр резонанса 2:1. Выше и ниже хаотического слоя располагаются траектории, соответствующие вращательному режиму движения математического маятника.

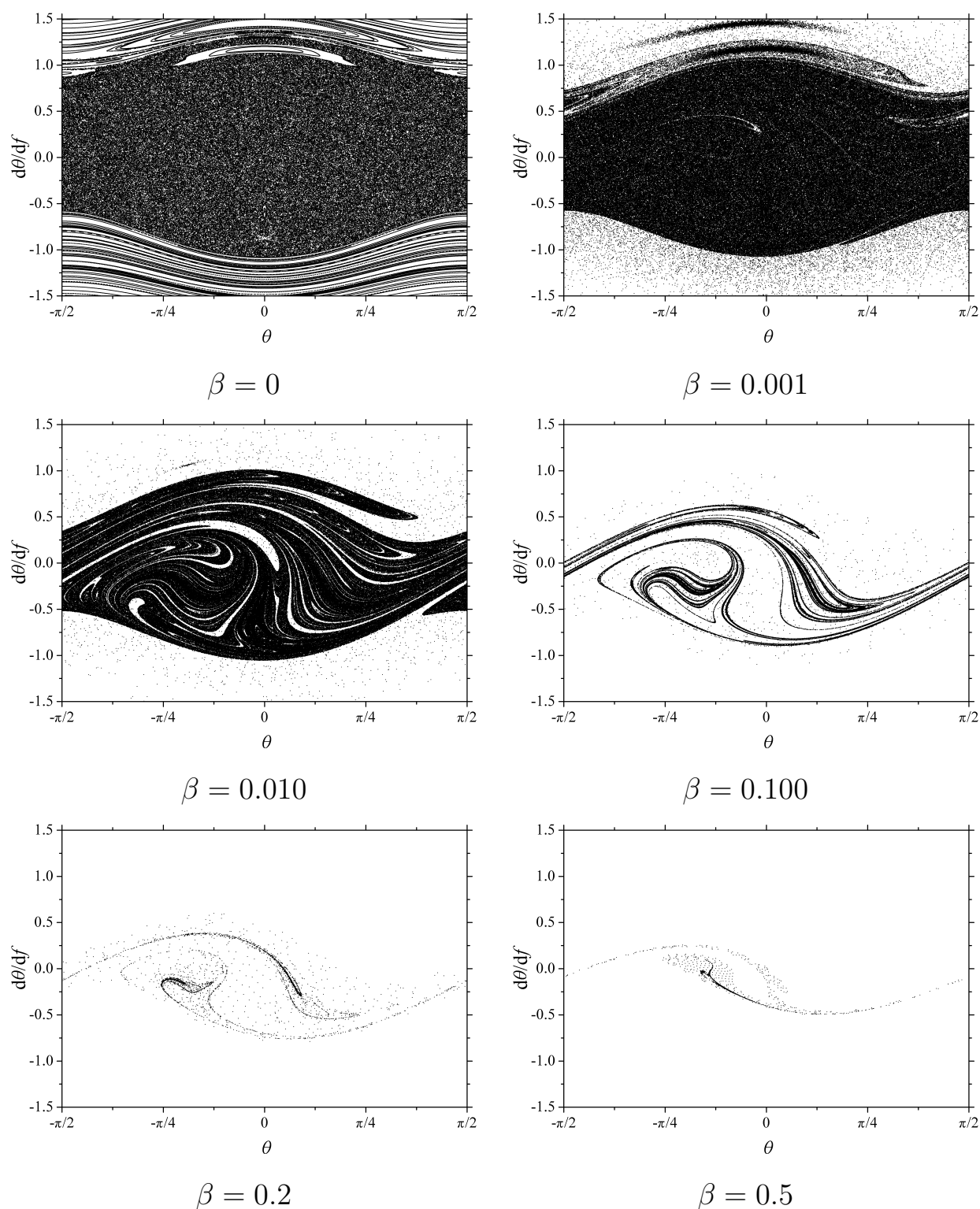


Рис. 4.11. Сечение фазового пространства плоского вращательного движения для разных значений параметра диссипации β ; $e = 0.2$, $\omega_0 = 1.0$.

При $\beta = 0.001$ траектории, соответствующие вращательным режимам, разрушаются. Центры резонансов и хаотический слой на сечении являют-

ся центрами притяжения траекторий. Симметрия хаотического слоя относительно вертикальной оси, проходящей через $\theta = 0$, нарушается.

При $\beta = 0.01$ и $\beta = 0.1$ на сечении четко выделяется структура аналогичная той, что представлена на Рис. 6 в монографии В. В. Белецкого [5]. Вид этой структуры характерен для странного аттрактора. С увеличением β до 0.1 относительная площадь, занимаемая на сечении странным аттрактором, уменьшается. Траектории фазового пространства притягиваются к странному аттрактору за время в 20–50 орбитальных периодов спутника, поэтому на сечении аттрактор окружен неплотным «облаком» точек, разбросанных хаотическим образом.

При $\beta = 0.2$ и $\beta = 0.5$ вид аттрактора на сечении меняется. Как будет показано в разделе 4.3.3, при указанных значениях β вместо странного аттрактора в фазовом пространстве существует обычный аттрактор. Траектории фазового пространства притягиваются к аттрактору за время в 5–10 орбитальных периодов. Поэтому присутствующее на предыдущих сечениях облако из точек, окружающих аттрактор, уже не наблюдается. Вместо него проявляется «слоистая» структура аттрактора, вызванная, вероятно, артефактами вычислений.

Объяснение наблюдаемых на Рис. 4.11 изменений картины на сечении фазового пространства при вариации β дадим посредством вычисления и анализа значений ХПЛ.

4.3.3 Характеристические показатели Ляпунова

В задаче о плоском вращательном движении спутника есть два ХПЛ $L_1 \geq L_2$. Поскольку учитывается приливное взаимодействие планеты и спутника, $L_1 \neq -L_2$, такая система неконсервативна. Как показано в разделе 4.3.2 и работах [5, 123, 125], при определенных значениях параметров задачи — e , ω_0 и β , в фазовом пространстве может существовать странный аттрактор. Так как движение на странном аттракторе является хаотическим, величина максимального ХПЛ — L_1 должна быть положительной.

На Рис. 4.12 для случая $e = 0.2$, $\omega_0 = 1.0$ представлены зависимости L_1 и L_2 от величины параметра диссипации β . Вычисление ХПЛ проводилось

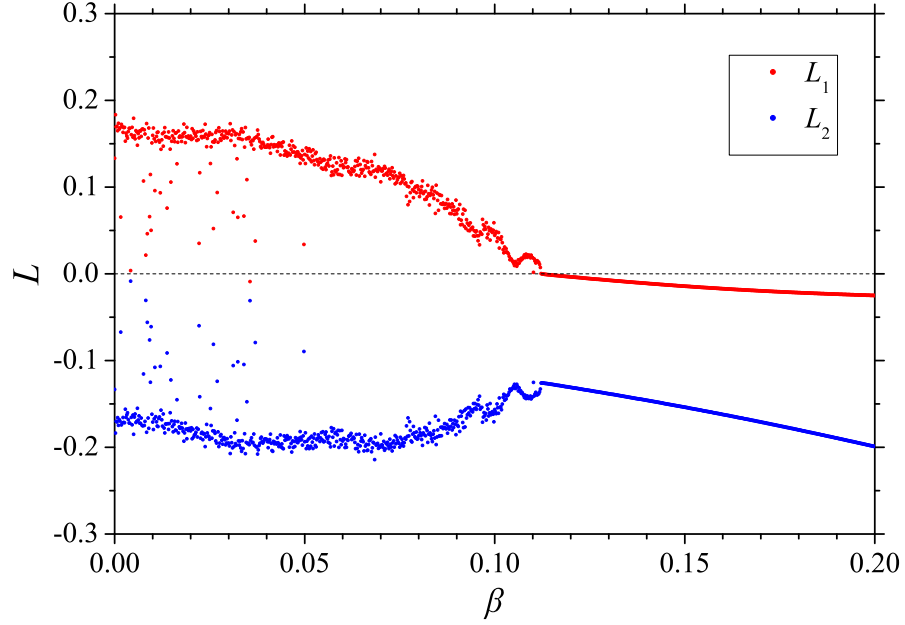


Рис. 4.12. Зависимость ХПЛ $L_1 > L_2$ от параметра диссипации β для $e = 0.2$, $\omega_0 = 1$. ХПЛ вычислены для начальных условий: $\theta = -\pi/2$, $d\theta/df = 0$.

при помощи HQRВ-метода. При вычислении ХПЛ интегрирование уравнений движения выполнялось на промежутке времени $t = 10^5$. В качестве начальных условий для интегрирования на сечении фазового пространства, определенном в перицентре орбиты, была выбрана точка с координатами: $\theta = -\pi/2$, $d\theta/df = 0$. При $\beta = 0$ точка с указанными координатами находится внутри хаотического слоя в окрестности сепаратрисы синхронного резонанса, если он существует, или в хаотическом слое на месте синхронного резонанса, когда синхронный резонанс не существует (см. подробнее § 2.2).

Из Рис. 4.12 видно, что для подавляющего большинства значений параметра $\beta \in [0, 0.11]$ величина МХПЛ является положительной. Именно в этом диапазоне значений β возможно существование странного аттрактора. При $\beta < 0.01$ система близка к гамильтоновой, на Рис. 4.12 видно, что в этом случае $L_1 \approx -L_2$. Присутствие странного аттрактора на сечениях фазового пространства (Рис. 4.11) при $\beta = 0.01$ и $\beta = 0.1$ подтверждает положительная величина МХПЛ. Изменение вида сечений на Рис. 4.11 при увеличении $\beta > 0.11$ объясняется тем, что вместо странного аттрактора появляется обычный аттрактор, для движения на котором оба ХПЛ меньше нуля. Отметим, что выводы о том, что аттрактор является странным, сделаны на

основе положительной величины МХПЛ для движения на нем и на основе визуального анализа сечений фазового пространства. Для более строгих выводов о типе аттрактора необходимо использование дополнительных методов, например, вычисление фрактальной размерности аттрактора [29, 30].

На Рис. 4.13 для случая $e = 0.2$, $\omega_0 = 1.0$ приведены зависимости угловой скорости вращения спутника $d\theta/dt$ от времени и сечения фазового пространства вращательного движения. Зависимости и сечения построены для одной траектории с начальными условиями: $\theta = d\theta/df = 0$ при разных значениях β . Величина угловой скорости вращения спутника фиксировалась при прохождении спутником перицентра орбиты.

В случае $\beta = 0$ на Рис. 4.13 видно, что скорость вращения спутника меняется хаотически с большой амплитудой, при этом точки на плоскости рисунка расположены довольно равномерно. На сечении присутствует обычный хаотический слой.

При $\beta = 0.1$ существует странный аттрактор, скорость вращения спутника меняется хаотически, хотя существуют точки притяжения, которые определяются по наличию на плоскости рисунка двух черных горизонтальных полос. На сечении присутствует структура характерная для странного аттрактора.

При $\beta = 0.15$ существует обычный аттрактор. На плоскости рисунка с зависимостью скорости вращения от времени присутствуют две горизонтальные линии. При вращении спутника значение угла θ «перескакивает» с одной величины на другую через промежуток времени в один орбитальный период. На сечении видны две точки притяжения с координатами $\theta = 0.29$, $d\theta/df = -0.26$ и $\theta = -0.65$, $d\theta/df = -0.19$, соответствующие аттрактору.

Наблюдаемая на сечениях фазового пространства, представленных на Рис. 4.11 для $\beta = 0.2$ и 0.5 , «слоистая» структура аттрактора вероятно вызвана тем, что сечения строились посредством интегрирования на сетке начальных условий, а не для одной точки, как на Рис. 4.13. Траектории фазового пространства, соответствующие различным начальным условиям, при интегрировании быстро «притягиваются» к указанным выше двум точкам (их координаты зависят от величины β), оставляя следы на сечении.

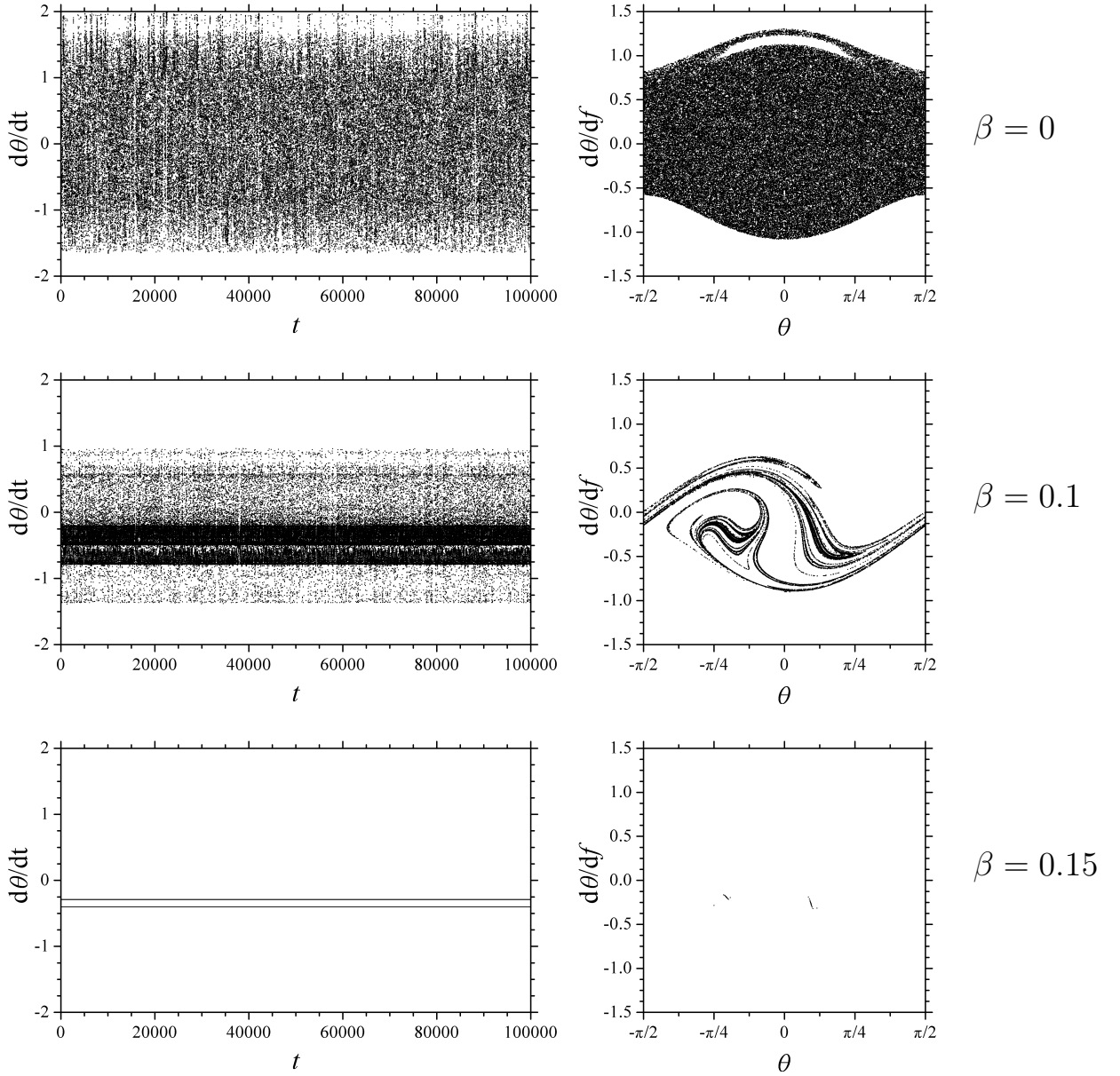


Рис. 4.13. Зависимость угловой скорости вращения спутника $\omega \equiv d\theta/dt$ от времени (слева) и определенное в перигенте орбиты сечение фазового пространства вращательного движения (справа), построенные для одной траектории с начальными условиями: $\theta = d\theta/df = 0$; $e = 0.2$, $\omega_0 = 1$. Величина параметра диссипации β указана справа от рисунка. Время t в орбитальных периодах.

4.3.4 Возможность существования странных аттракторов в динамике спутников планет

Рассмотрим возможность существования странного аттрактора во вращательной динамике естественных спутников планет. Для этого из всех из-

вестных в настоящее время спутников выберем спутники, удовлетворяющие следующим критериям: 1) для спутника известны размеры всех полуосей аппроксимирующего его фигуру трехосного эллипсоида, то есть можно вычислить ω_0 по формуле (2.3) и определить радиус фигуры R , 2) имеется оценка величины массы спутника m , 3) известны величина большой полуоси a и величина эксцентриситета e орбиты спутника. В результате был отобран 21 спутник, для которых в Табл. 4.3 приведены a , e , m , R , ω_0 и значения параметра β , вычисленные по формуле (4.5).

При вычислении β для всех спутников было принято: $GM = 1$, $k_2 = 0.03$ и $Q = 100$ (последние два значения взяты из работы [1]). Для масс планет были приняты следующие значения [122]: Марс — 6.4169×10^{23} кг, Юпитер — 1.8981×10^{27} кг, Сатурн — 5.6832×10^{26} кг, Уран — 8.6810×10^{25} кг, Нептун — 1.0241×10^{26} кг.

У пяти спутников из Табл. 4.3 радиус фигуры $R > 500$ км, это крупные спутники, для них средняя величина параметра $\beta \approx 10^{-6}$. Для малых спутников ($R < 300$ км) величина β на один – два порядка больше. Отметим весьма малые значения β для Гипериона (С7) и Фебы (С9), что связано с их большой, по сравнению с остальными рассмотренными спутниками, удаленностью от планеты и, соответственно, малой величиной приливного момента, так как, согласно (4.3) и (4.5), $\beta \propto T \propto 1/r^6$.

Поскольку значения ω_0 и e у реальных спутников известны с некоторой погрешностью, представляет интерес поиск областей на плоскости (ω_0, e) , в которых возможно существование странного аттрактора (поиск областей, где величина МХПЛ больше нуля), для фиксированной величины β . Посредством вычисления МХПЛ для фиксированных ω_0 и e при изменении величины β возможно определение областей значений β , при которых в фазовом пространстве вращательного движения существует странный аттрактор. Таким образом, можно определить возможность существования странного аттрактора во вращательной динамике известных в настоящее время спутников планет.

На Рис. 4.14 представлена плоскость (ω_0, e) , где выделены области положительных и отрицательных значений МХПЛ, вычисленных для $\beta = 10^{-6}$,

Таблица 4.3. Орбитальные параметры и физические характеристики ряда спутников планет по данным из [122, 159, 164, 186, 188]. Значения параметра β , вычислены по формуле (4.5), где принято $k_2 = 0.03$ и $Q = 100$.

Спутник	$a, 10^3$ км	e	R , км	$m, 10^{15}$ кг	ω_0	$\beta (\times 10^{-6})$
Фобос (М1)	9	0.015	11	11	0.730	120
Деймос(М2)	23	0.0002	6	1	0.782	13
Ио (Ю1)	422	0.0041	1821	89 319 000	0.129	2
Европа (Ю2)	671	0.0094	1562	47 998 000	0.075	1
Амальтея (Ю5)	181	0.003	83	2 068	1.214	100
Мимас (С1)	185	0.0196	198	37 506	0.396	21
Энцелад (С2)	238	0.0047	252	107 945	0.248	7
Тефия (С3)	295	0.0001	533	617 552	0.228	6
Диона (С4)	377	0.0022	562	1 095 700	0.122	2
Рея (С5)	527	0.001	764	2 307 090	0.136	1
Гиперион (С7)	1 481	0.123	135	5 620	0.939	0.1
Феба (С9)	12 870	0.1634	106	8 292	0.157	0.00005
Янус (С10)	151	0.007	89	1 897	0.527	69
Эпиметей(С11)	151	0.009	58	523	0.622	69
Атлас (С15)	138	0.002	15	7	0.650	117
Прометей (С16)	139	0.002	43	159	1.212	119
Пандора (С17)	142	0.004	41	137	0.857	112
Пан (С18)	134	0.000	14	5	0.522	146
Дафнис (С35)	136	0.000	4	0.08	0.378	209
Миранда (У5)	130	0.0013	236	65 941	0.280	9
Протей (Н8)	118	0.0004	208	50 355	0.375	13

10^{-5} , 10^{-4} и 10^{-3} . На Рис. 4.15 представлена плоскость (ω_0, β) , где выделены области положительных и отрицательных значений МХПЛ, вычисленных для $e = 0.1, 0.15, 0.2$ и 0.25 . Белый цвет на Рис. 4.14 и 4.15 соответствует отрицательным значениям МХПЛ, в этих областях странный аттрактор не существует. Области положительных значений МХПЛ, то есть области существования странного аттрактора, отмечены серым тоном.

Значения МХПЛ вычислялись на равномерной сетке 100×100 , наложенной на область $\omega_0 \in (0, \sqrt{3})$, $e \in (0, 0.3]$, при фиксированной величине β (Рис. 4.14), или на область $\omega_0 \in (0, \sqrt{3})$, $\beta \in (0, 0.5]$ при фиксированной величине e (Рис. 4.15).

В качестве начальных условий для интегрирования в каждом узле сетки выбирались предварительно определенные координаты точки, находящейся при $\beta = 0$ на сечении фазового пространства в хаотическом слое, окружающем синхронный резонанс. Когда синхронный резонанс при $\beta = 0$ не существует (см. подробнее раздел 2.4.1), для интегрирования брались следующие начальные условия: $\theta = d\theta/df = 0$. Указанные начальные условия соответствуют хаотическому слою, расположенному на сечении фазового пространства на месте синхронного резонанса (см. Рис. 4.11). Интегрирование выполнялось на промежутке времени $t = 10^5$.

Из диаграмм, представленных на Рис. 4.14 и 4.15 видно, что относительная площадь областей, где МХПЛ больше нуля, сокращается с увеличением β и, напротив, области существования странного аттрактора увеличиваются с увеличением e . Ранее Кхан и др. [125] получили аналитические оценки критической величины параметра β , при превышении которой в рассматриваемой диссипативной системе возможно возникновение хаотического движения. Это было сделано в предположении малости e — в формулу (см. уравнение (16) в [125]) для критической величины параметра диссипации входит лишь ω_0 . Из результатов численного моделирования, представленных на Рис. 4.14 и 4.15, следует, что хаотическое движение возможно при существенно меньших значениях β , чем следует из [125]. Например, согласно Кхану и др. [125], для Гипериона (C7) критическая величина $\beta \approx 0.56$. Из Рис. 4.14 следует, что в случае Гипериона странный аттрактор может существовать и при существенно меньших значениях β .

При $\beta \approx 0.001$ область на плоскости (ω_0, e) , где возможно существование странного аттрактора, приблизительно совпадает с областью, где при плоском вращательном движении спутника в случае отсутствия приливного взаимодействия ($\beta = 0$) синхронный резонанс не существует (см. подробнее раздел 2.4.1). Если спутник расположен в этой области, при $\beta > 0$ вместо за-

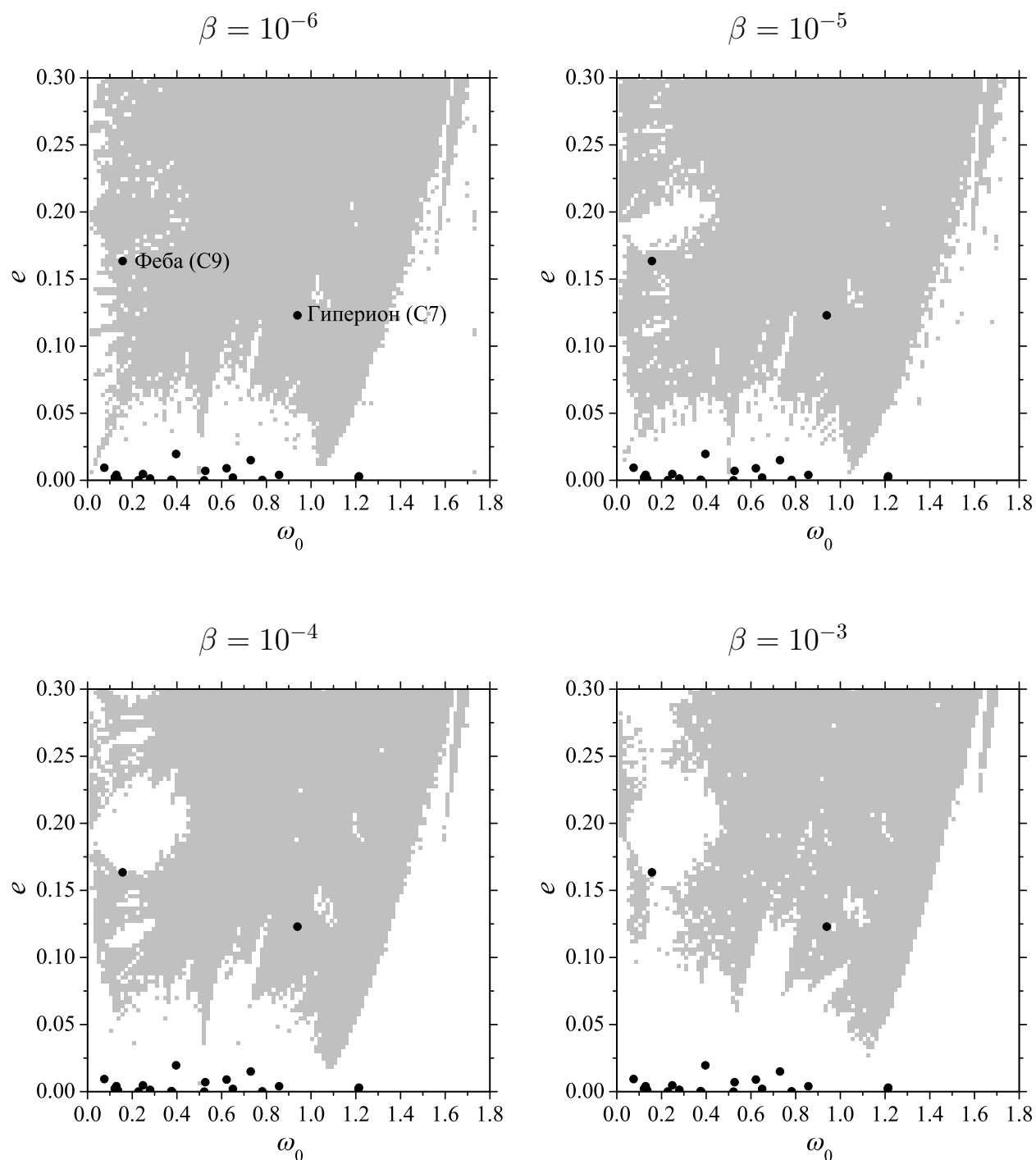


Рис. 4.14. Зависимость величины МХПЛ от параметра диссипации β . Серым тоном выделены области с положительной величиной МХПЛ — области существования странного аттрактора. Белые области соответствуют отрицательным значениям МХПЛ, в этих областях странный аттрактор не существует. Точками отмечены местоположения, согласно Табл. 4.3, ряда спутников планет. Принятое значение параметра β указано над рисунком.

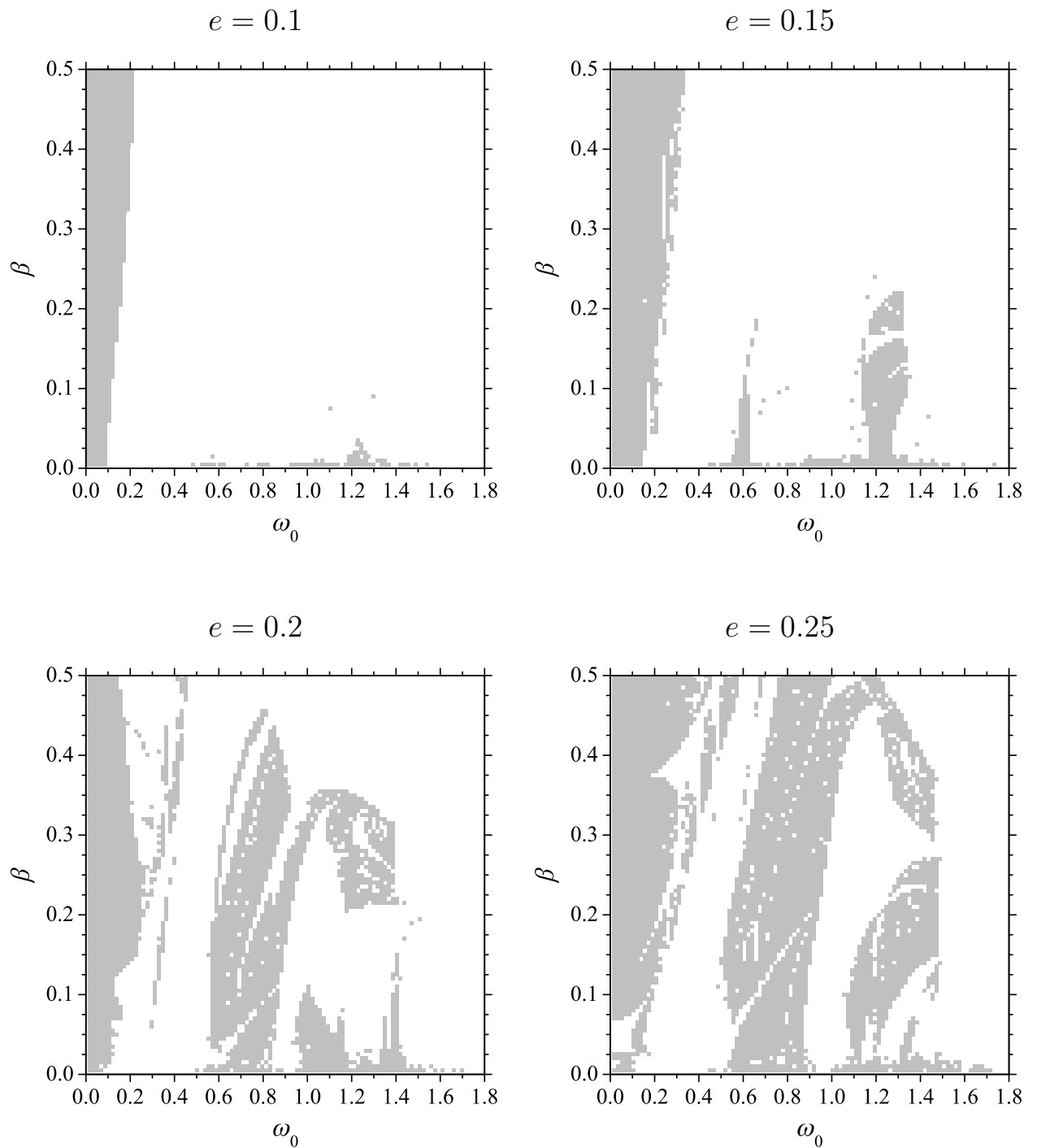


Рис. 4.15. Зависимость величины МХПЛ от эксцентриситета орбиты e . Серым тоном выделены области с положительной величиной МХПЛ — области существования странного аттрактора. Белые области соответствуют отрицательным значениям МХПЛ, в этих областях странный аттрактор не существует. Принятое значение e указано над рисунком.

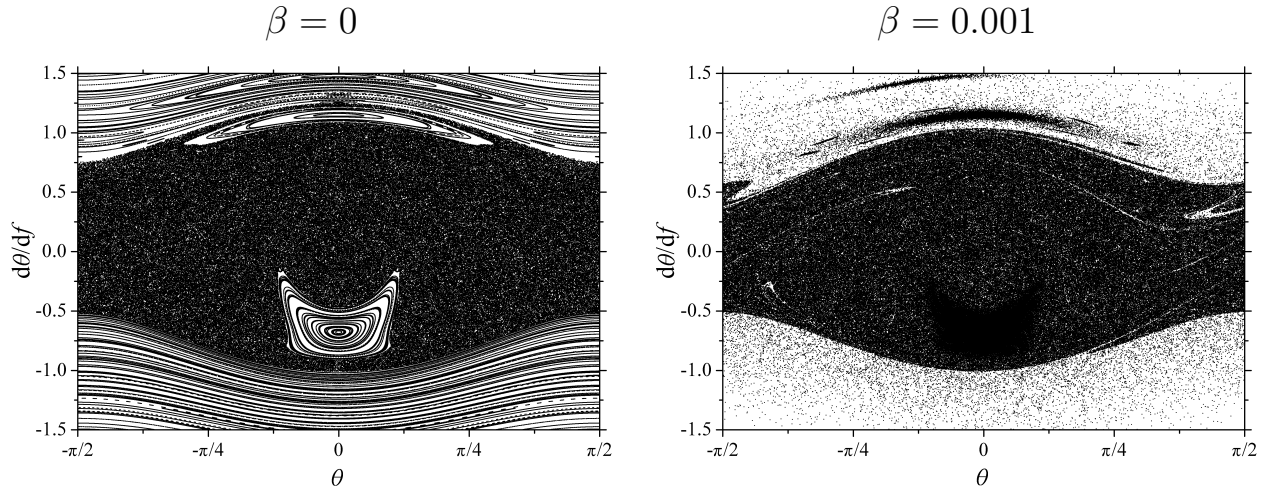


Рис. 4.16. Сечения фазового пространства плоского вращательного движения для разных значений параметра диссипации β ; $e = 0.123$, $\omega_0 = 0.939$ («Гиперион»). Величина параметра β указана над рисунком.

хвата в синхронный резонанс возможно хаотическое вращательное движение на странном аттракторе.

На диаграммах « $\omega_0 - e$ », представленных на Рис. 4.14, указано местоположение ряда спутников планет. Орбитальные параметры и физические характеристики этих спутников приведены в Табл. 4.3. Из Рис. 4.14 видно, что для рассмотренных значений β странный аттрактор может существовать лишь в случае Гипериона (C7) и Фебы (C9). В случае Фебы современная величина β весьма мала (система близка к консервативной), поэтому наличие странного аттрактора в фазовом пространстве маловероятно. Кроме того, быстрое современное вращение Фебы (см. § 3.3) указывает на то, что в фазовом пространстве вращательного движения она находится далеко от синхронного резонанса, в окрестности которого формируется странный аттрактор. Рассмотрим подробно случай Гипериона.

На Рис. 4.16 представлены сечения фазового пространства, построенные в случае Гипериона (принято [122, 186]: $e = 0.123$, $\omega_0 = 0.939$) для $\beta = 0$ (приливное взаимодействие отсутствует) и $\beta = 0.001$. При $\beta = 0$ на сечении присутствует большой хаотический слой, окружающий резонансы 1:1 (внизу) и 3:2 (наверху). Над хаотическим слоем виден резонанс 2:1 и окружающие его либрационные траектории. При $\beta = 0.001$ сечение фазового простран-

ство качественно схоже с сечением, представленным на Рис. 4.11 для $e = 0.2$ и аналогичной величины β .

Вычисление зависимости величины МХПЛ от β , при фиксированных e и ω_0 , для случая Гипериона показало, что МХПЛ является положительным при $\beta \in [0, 0.007]$, то есть в случае $\beta = 0.001$ на Рис. 4.16 присутствует странный аттрактор. В ходе приливной эволюции вращательного движения, когда величина β могла быть больше, чем современная оценка $\beta \approx 10^{-7}$, в фазовом пространстве существовал странный аттрактор. На такую возможность указывает и тот факт, что в настоящее время вращение Гипериона является хаотическим (см. § 4.1).

§ 4.4 Выводы к четвертой главе

В настоящей главе рассмотрено хаотическое вращение Гипериона (С7) и возможный хаос во вращательной динамике двух других спутников Сатурна — Прометея (С16) и Пандоры (С17); изучен вопрос о формировании аттракторов в окрестности сепаратрисы синхронного резонанса вращательного движения спутника при учете приливного взаимодействия спутник — планета. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [15, 16, 35, 36, 48, 50, 144, 146].

В § 4.1 посредством вычисления ХПЛ для начальных условий и значений параметров, полученных в Главе 3 из моделирования наблюдаемых кривых блеска Гипериона, впервые строго установлен хаотический режим его вращения — все ХПЛ отличны от нуля (см. Рис. 3.1). Ляпуновское время для хаотического вращения Гипериона составляет от 38 до 51 суток (см. Табл. 4.1).

В § 4.2 проведено исследование вращательной динамики Прометея и Пандоры. Посредством вычисления мультипликаторов линеаризованной гамильтоновой системы уравнений движения и спектров ХПЛ исследована устойчивость относительно наклона оси вращения к плоскости орбиты для всех возможных режимов плоского синхронного вращения (см. Главу 2) и для движений, близких к этим режимам. Проведенный анализ устойчивости вращения показал, что для Прометея и Пандоры все возможные режи-

мы плоского синхронного вращения являются неустойчивыми или близкими к неустойчивости (см. Рис. 4.6 и 4.7). Следовательно, вращение указанных спутников может являться хаотическим.

Посредством вычисления ХПЛ у обоих спутников в фазовом пространстве вращательного движения выявлены области неустойчивого движения, образующие «барьер», препятствующий захвату спутников в синхронное вращение. На сечениях фазового пространства, определенных в перицентре орбиты, они образуют (см. Рис. 4.8) серию концентрических полос из неустойчивых траекторий вокруг центра главного синхронного резонанса.

Моделирование долговременной хаотической вращательной динамики Прометея и Пандоры впервые показало, что хаотическое вращение этих спутников схоже с обычным синхронным вращением в том отношении, что спутники сохраняют преимущественную ориентацию на длительных интервалах времени — наибольшая ось фигуры спутника направлена преимущественно на Сатурн (см. Рис. 4.9). При хаотическом вращении наибольшая ось фигуры Прометея $\approx 30\%$ времени, а в случае Пандоры $\approx 22\%$ времени, ориентирована по направлению спутник — планета. Обнаруженное явление затрудняет выявление хаотического вращения у малых спутников посредством анализа наблюдательных данных.

В § 4.3 рассмотрена динамика в окрестности сепаратрисы синхронного резонанса плоского вращательного движения спутника планеты при наличии приливной диссипации.

Посредством вычисления ХПЛ найдено, что при определенных значениях эксцентриситета e , параметра ω_0 , характеризующего динамическую асимметрию фигуры спутника, а также параметра β , характеризующего величину приливной диссипации, в фазовом пространстве вращательного движения возможно существование странного аттрактора. Этот вывод подтвержден анализом представительных сечений фазового пространства, построенных для выбранных значений e , ω_0 и β . На сечениях (см. Рис. 4.11) в окрестности синхронного резонанса присутствует структура, характерная для странного аттрактора. Движение на странном аттракторе является хаотическим.

На плоскостях (ω_0, e) и (ω_0, β) для фиксированных значений β и e , соответственно, выделены области где возможно существование странного аттрактора — области, где МХПЛ больше нуля (см. Рис. 4.14 и Рис. 4.15). Установлено, что при увеличении β площадь областей существования странного аттрактора на плоскости (ω_0, e) уменьшается, а при увеличении e площадь таких областей на плоскости (ω_0, β) , наоборот, увеличивается.

Рассмотрена возможность присутствия странного аттрактора во вращательной динамике реальных спутников планет. Для ряда спутников получены оценки характерных значений параметра β (см. Табл. 4.3): они находятся в интервале от 10^{-11} для Фебы (С9) до 10^{-4} для Дафниса (С35). Если разместить известные спутники планет на плоскости (ω_0, e) , где выделены области значений параметров, при которых существует странный аттрактор, то можно убедиться (см. Рис. 4.14), что существование странного аттрактора возможно в случае Гипериона (С7), тем более что в настоящее время, как показано в § 4.1, он находится в режиме хаотического вращения.

Глава 5

Показатели Ляпунова в задачах орбитальной динамики

§ 5.1 Хаотическая динамика спутниковых систем

Захваты спутниковых систем в орбитальные резонансы, соответствующие соизмеримостям средних движений спутников, являются закономерными этапами приливной эволюции этих небесномеханических систем [184]. Захват в орбитальный резонанс может существенным образом повлиять на дальнейшую орбитальную динамику спутников [139, 183] и даже на их внутреннее строение [90]. При захвате в орбитальный резонанс или при выходе из него система пересекает границы хаотического слоя в окрестности сепаратрис резонанса. Внутри слоя система движется хаотическим (непредсказуемым) образом.

Голдрайх и Раппапорт [108] получили численные оценки ляпуновского времени орбитального движения в окрестности орбитального резонанса 121/118 средних движений в системе Прометей (C16) – Пандора (C17). По данным [108], ляпуновское время составляет ≈ 3.3 года, то есть около половины периода возмущения, равного ≈ 6.2 года [108]. Оценки ляпуновского времени для этой системы также путем численного интегрирования получили Купер и Мюррей [87]; их оценки практически совпали с оценками Голдрайха и Раппапорт [108].

Фармер и Голдрайх [101] привели уравнения движения, описывающие динамику системы Прометей – Пандора, к уравнению маятника с периодическим возмущением, что позволило И. И. Шевченко [174] с помощью разра-

ботанного им метода аналитического оценивания МХПЛ (см. раздел 1.3.2) получить теоретическую оценку ляпуновского времени, близкую к численным оценкам Голдрайха и Раппапорт [108] и Купера и Мюррея [87].

Недавно Купер и др. [88] получили численные оценки ляпуновского времени орбитального движения в окрестности орбитального резонанса $54/53$ для системы Атлас (C15) – Прометей (C16), ляпуновское время в этой системе составляет ~ 10 лет.

Рассмотрим хаотические режимы, предположительно имевшие место в истории орбитальной динамики второго и пятого спутников Урана (Умбриэль и Миранда) и первого и третьего спутников Сатурна (Мимас и Тефия). В настоящее время в орбитальном движении спутников Урана не наблюдается резонансных соизмеримостей низкого порядка [138]. В системе спутников Сатурна, напротив, имеются три резонансных соотношения [80], среди них резонанс $2/1$ в системе Мимас – Тефия.

Титтемор и Уиздом [183] установили, что наличие значительной хаотической компоненты в окрестности сепаратрис орбитального резонанса $3/1$ средних движений Миранды (У2) и Умбриэля (У5) могло привести к существенному изменению величин орбитальных элементов этих спутников и к выходу из резонанса в ходе долговременной эволюции орбит. Они также отметили, что прохождение спутников в прошлом через этот резонанс может являться причиной высокого значения наклона орбиты Миранды ($\simeq 4.3^\circ$) в настоящее время.

Мальхотра и Дермотт [139] рассмотрели роль вторичных резонансов в орбитальной эволюции Миранды и Умбриэля. Под вторичными резонансами подразумеваются соизмеримости между частотой колебаний резонансной фазы внутри резонансной области и частотой возмущения. В работе [139] была разработана модель возмущенного маятника, описывающая динамику системы во вторичном орбитальном резонансе. В рамках этой модели было показано, что захват в резонанс $3/1$ средних движений и последовавший затем захват во вторичный резонанс на резонансе $3/1$, с обратным выходом в конечном итоге из главного резонанса, привели к современной аномально высокой величине наклона орбиты Миранды.

Позднее Мальхотра [138] получила аналитические и численные оценки вероятности захвата во вторичный резонанс. Они оказались довольно высокими. Таким образом, система Миранда – Умбриэль могла дважды проходить в течение своей динамической истории через хаотический слой в окрестности сепаратрис орбитального резонанса $3/1$. Поэтому задача о хаотическом движении в этой области фазового пространства представляет значительный интерес для выяснения деталей долговременной эволюции орбит этих спутников.

Шампенуа и Виенн [79, 80] рассмотрели динамику Мимаса (C1) и Тефии (C3), находящихся в настоящее время в орбитальном резонансе типа наклонения, отвечающем соизмеримости $2/1$ средних движений спутников. Как отмечено в работе [79], этот резонанс является уникальным для спутниковых систем в Солнечной системе из-за большой амплитуды ($\simeq 95^\circ$) колебания резонансного аргумента с относительно небольшим периодом (около 70 лет). Шампенуа и Виенн [79, 80] исследовали роль ранее обнаруженных [194] колебаний средней долготы Мимаса с периодом 200 лет в приливной эволюции системы Мимас – Тефия. Они рассмотрели различные сценарии приливной эволюции, в ходе которой система была захвачена в резонанс типа наклонения, и нашли [79] вероятность захвата в этот резонанс в зависимости от величины эксцентриситета орбиты Тефии.

Далее получим численные и аналитические оценки МХПЛ и ляпуновского времени в задаче о движении в окрестности сепаратрис резонанса $3/1$ средних движений Миранды и Умбриэля и резонанса $2/1$ средних движений Мимаса и Тефии.

5.1.1 Система Миранда – Умбриэль

Орбитальный резонанс имеет место, если средние движения спутников соизмеримы, то есть их отношение близко к отношению целых чисел. Из-за прецессии орбит спутников орбитальный резонанс разделяется на несколько субрезонансов. В случае резонанса $3/1$ средних движений, если ограничиться величинами второго порядка малости относительно эксцентриситетов и наклонений, имеем шесть субрезонансов [138, 139]: три субрезонан-

са «типа наклона» и три субрезонанса «типа эксцентриситета». Резонансная динамика в этом приближении может быть рассмотрена отдельно в наклонно-круговой и плоско-эллиптической задачах. Гамильтониан для каждой из этих задач сводится к гамильтониану с двумя степенями свободы. Согласно Мальхотре и Дермотту [139], приближенные уравнения движения в наклонно-круговой и плоско-эллиптической задачах имеют одну и ту же аналитическую структуру. Если пренебречь членами выше второго порядка в наклонении, гамильтониан наклонно-круговой задачи трех тел «планета — два спутника» в окрестности резонанса 3/1 средних движений после осреднения приводится к следующему приближенному виду [138]:

$$H = -\frac{\mathcal{G}I^2}{2} + \mathcal{F} \cos \phi + \varepsilon_1 \sin \left(\frac{\phi}{2} + \tilde{\tau} \right) + \varepsilon_2 \sin \left(\frac{\phi}{2} - \tilde{\tau} \right). \quad (5.1)$$

В уравнении (5.1) $\phi = 3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\Omega_1 - \pi$ является резонансной фазой для так называемого i_1^2 -резонанса типа наклона [138, 139]; $\tilde{\tau} = \tilde{\Omega}t$ — фазовый угол возмущения, $\tilde{\Omega}$ — частота возмущения, равная половине частоты вращения фазового угла $3\lambda_2 - \lambda_1 - 2\Omega_2$ соседнего i_2^2 -резонанса, t — время; λ_1, λ_2 — средние долготы внутреннего и внешнего спутников соответственно; Ω_1, Ω_2 — долготы восходящих узлов; I — сопряженный ϕ импульс. Для параметров $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, ε_1 и ε_2 , согласно Мальхотре [138], имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{3}{m_1 a_1^2} \left(1 + 9\alpha^2 \frac{m_1}{m_2} \right), \quad \mathcal{F} = \frac{Gm_1 m_2}{8a_1} \alpha^2 b_{3/2}^{(2)}(\alpha) (i_1^{\text{res}})^2, \\ \varepsilon_1 &= -\frac{Gm_1 m_2}{4a_1} \alpha^2 b_{3/2}^{(2)}(\alpha) i_1^{\text{res}} i_2, \quad \varepsilon_2 = \frac{Gm_1 m_2}{4a_1} \alpha^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha) i_1^{\text{res}} i_2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь G — гравитационная постоянная, m_1, m_2 — массы внутреннего и внешнего спутников соответственно; i_1^{res} — наклонение орбиты внутреннего спутника при точном резонансе (эта величина приблизительно равна среднему значению i_1 для движения внутри резонансной области), i_2 — наклонение орбиты внешнего спутника, являющееся далее в каждой заданной модели постоянной величиной [138, 139]; $b_{3/2}^{(1)}(\alpha)$, $b_{3/2}^{(2)}(\alpha)$ — коэффициенты Лапласа (коэффициенты в разложении в ряд возмущающей функции, см., например, [52]); $\alpha = a_1/a_2 \approx 0.481$ — отношение больших полуосей орбит внутреннего и внешнего спутников при резонансе 3/1. Из (5.2) следует (см. так-

же [138, 173]), что:

$$\frac{\varepsilon_1}{\mathcal{F}} = -2 \frac{i_2}{i_1^{\text{res}}}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\mathcal{F}} = 2 \frac{i_2}{i_1^{\text{res}}} \frac{b_{3/2}^{(1)}(\alpha)}{b_{3/2}^{(2)}(\alpha)} \simeq -1.718 \frac{\varepsilon_1}{\mathcal{F}}. \quad (5.3)$$

Частота возмущения $\tilde{\Omega}$ определяется в основном динамическим сжатием планеты и находится из следующей формулы [138]:

$$\tilde{\Omega} \simeq -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{GM}{a_1^3}} \left(\alpha^{3/2} \left[-3\mathcal{J}_2 \left(\frac{R}{a_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{M} \alpha b_{3/2}^{(1)}(\alpha) \right] - \left[-3\mathcal{J}_2 \left(\frac{R}{a_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2}{M} \alpha^2 \left(b_{3/2}^{(1)}(\alpha) - \frac{1}{2} b_{3/2}^{(2)}(\alpha) \right) \right] \right), \quad (5.4)$$

где M , R и $\mathcal{J}_2$ — масса, экваториальный радиус и вторая зональная гармоника гравитационного поля планеты, соответственно.

Далее, следуя [138, 139], для случая системы Миранда — Умбриэль полагаем $R = 26\,200$ км, $\mathcal{J}_2 = 3.346 \times 10^{-3}$, $m_1/M = 7.9 \times 10^{-7}$, $m_2/M = 1.45 \times 10^{-5}$, $a_1/R = 4.8626$, $a_2/R = 10.1145$. Согласно формуле (5.4), имеем $\tilde{\Omega} \simeq -0.3251$ год $^{-1}$, либо, согласно формуле (65) из статьи [138], имеем $\tilde{\Omega} \simeq -0.3306$ год $^{-1}$, то есть близкие значения.

Следуя И. И. Шевченко [173], приведем гамильтониан (5.1) к стандартному виду гамильтониана возмущенного маятника. Произведем каноническую замену переменных (с валентностью -1) $I = -p$, $\phi = \phi$, а также выполним замену $\tilde{\Omega} \rightarrow -\tilde{\Omega}$ (чтобы сделать эту частоту положительной величиной) и сдвиг $\tilde{\tau} = \tau + (\pi/2)$. Имеем

$$H = \frac{\mathcal{G}p^2}{2} - \mathcal{F} \cos \phi + a \cos(k\phi - \tau) + b \cos(k\phi + \tau), \quad (5.5)$$

где ϕ — угол отклонения маятника от положения равновесия, p — импульс; $\tau = \tilde{\Omega}t + \tau_0$, где $\tilde{\Omega}$, τ_0 — частота и начальная фаза возмущения, соответственно; $k = 1/2$, $a = -\varepsilon_1$, $b = \varepsilon_2$. Данный гамильтониан аналогичен гамильтониану (1.5), рассмотренному в разделе 1.3.2 при описании метода аналитической оценки МХПЛ для модели нелинейного возмущенного математического маятника.

В настоящее время средние движения Миранды (внутренний спутник) и Умбриэля (внешний спутник) не находятся в каком-либо резонансе низкого

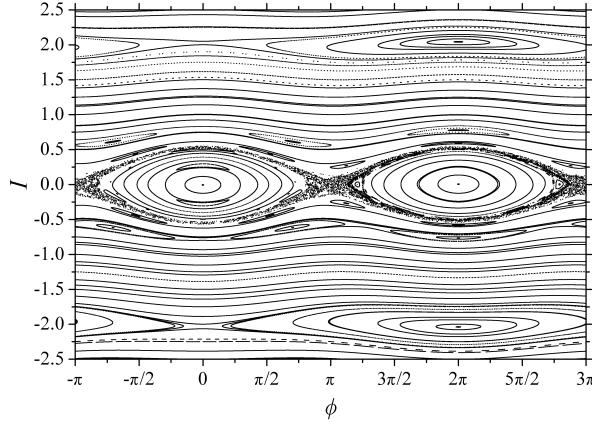
Таблица 5.1. Орбитальные параметры системы Миранда – Умбриэль и параметры гамильтониана (5.1) для четырех эпох динамической эволюции.

Модель	$i_1^{\text{res}}, ^\circ$	$i_2, ^\circ$	$\tilde{\Omega}, \text{год}^{-1}$	$\varepsilon_1/\mathcal{F}$	$\varepsilon_2/\mathcal{F}$
1	2.2	0.20	−0.325	−0.182	0.312
2	2.8	0.20	−0.325	−0.143	0.245
3	4.1	0.20	−0.325	−0.098	0.168
4	5.7	0.15	−0.325	−0.053	0.090

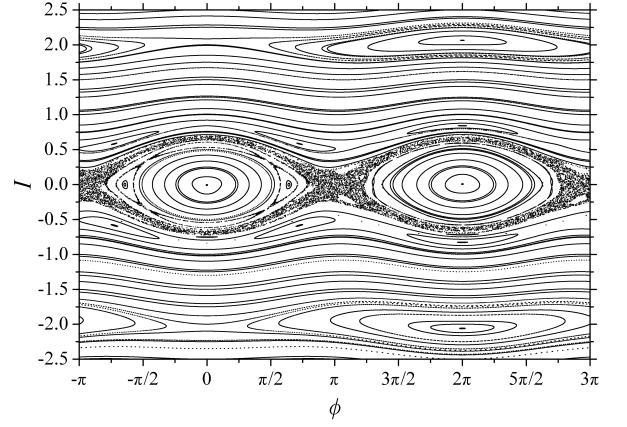
порядка, но они довольно близки к резонансу $3/1$. Спутники должны были пройти через это резонансное состояние в прошлом в ходе динамической эволюции спутниковой системы [138, 139, 184].

Данные о наклонениях орбит Миранды i_1^{res} и Умбриэля i_2 в соответствии с результатами [139] моделирования динамической эволюции этих спутников в прошлом приведены в Табл. 5.1 для четырех эпох динамической эволюции. Наклонения меняются очень медленно со временем в ходе долговременной эволюции системы. Каждой эпохе соответствует своя динамическая модель с фиксированными параметрами. В первой модели динамику системы отличает присутствие вторичного резонанса $4/1$ (резонанса $4/1$ между частотой возмущения и частотой фазовых колебаний на основном резонансе). Во второй и третьей моделях доминируют вторичные резонансы $3/1$ и $2/1$ соответственно. Четвертая модель отвечает моменту выхода системы из резонанса i_1^2 . В работе Мальхотры и Дермотта [139] показано, что при динамической эволюции система последовательно проходит через различные вторичные резонансные состояния, соответствующие моделям, приведенным в Табл. 5.1. При начальной величине $i_1 = 0.1^\circ$ наклонение орбиты Миранды достигает 2.2° (модель 1) через $t \simeq 1.4 \times 10^5$ лет. Модели 2, 3 и 4 отвечают эпохам $t \simeq 2 \times 10^5$, 4×10^5 и 8×10^5 лет соответственно.

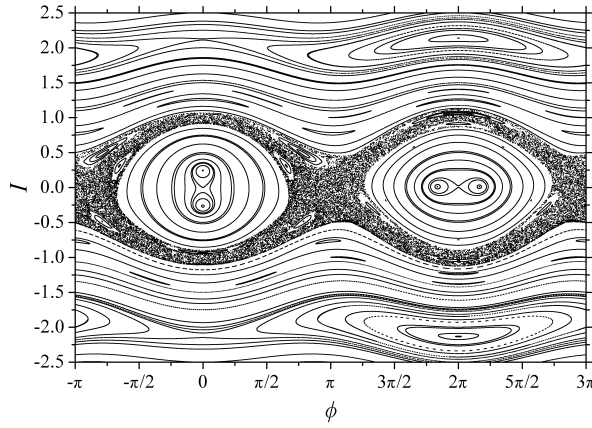
На Рис. 5.1 для всех моделей из Табл. 5.1 представлены сечения фазового пространства гамильтониана (5.1), определенные в $\tau = 0 \pmod{2\pi}$. На сечениях присутствуют две главные резонансные ячейки, расположенные на одной горизонтали и окруженные хаотическим слоем. Сечения построены



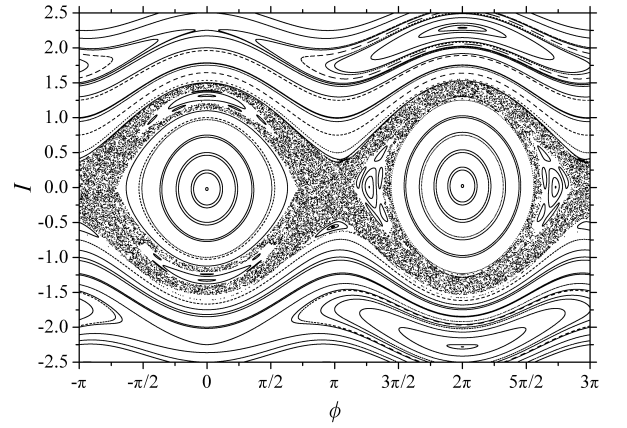
(1)



(2)



(3)



(4)

Рис. 5.1. Сечения фазового пространства, определенные в $\tau = 0 \pmod{2\pi}$, для моделей системы Миранда – Умбриэль, представленных в Табл. 5.1. В круглых скобках под рисунком указан номер модели.

путем численного интегрирования уравнений движения, определяемых гамильтонианом (5.1).

5.1.2 Система Мимас – Тефия

Как и в случае резонанса $3/1$, для резонанса $2/1$ средних движений, если ограничиться величинами второго порядка малости относительно эксцентриситетов и наклонов, также имеем шесть субрезонансов [79, 80]. Согласно Шампенуа и Виенну [79, 80], спутники Сатурна Мимас (внутренний) и Тефия (внешний) в настоящее время находятся в $i_1 i_2$ -резонансе $4/2$ типа наклоне-

ния. Здесь, как и в разделе 5.1.1, индексы 1 и 2 отвечают внутреннему и внешнему спутникам соответственно. Резонансная фаза $\phi = 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \Omega_1 + \Omega_2$ колеблется около 0° с амплитудой $\simeq 95^\circ$ и периодом около 70 лет [79, 80]. Перед тем, как произошел захват в текущий резонанс, Мимас и Тефия были захвачены в i_1^2 -резонанс, который вскоре покинули [80].

Заметим, что в контексте анализа резонансов i_1^2 , $i_1 i_2$ и i_2^2 для них обоснованно обозначение $4/2$, а не $2/1$, поскольку средние долготы Мимаса λ_1 и Тефии λ_2 входят в выражения для резонансной фазы с коэффициентами 2 и 4 (см. подробнее [80]). Когда же речь идет в целом о резонансном мультиплексе, либо просто о наблюдаемой соизмеримости частот обращения по орбитам, говорят о резонансе $2/1$.

Шампенуа и Виенн [80] показали, что на динамику в $i_1 i_2$ -резонансе сильное влияние оказывают резонансы более высокого порядка по степеням наклонов и эксцентриситетов, а именно резонансы $i_1^2 e_2$, $i_1 i_2 e_2$ и $i_2^2 e_2$. Если пренебречь членами выше третьего порядка в наклоне и эксцентриситете, гамильтониан задачи трех тел «планета — два спутника» в окрестности резонанса $2/1$ средних движений записывается в следующем приближенном виде [80]:

$$H = \frac{\mathcal{G}I^2}{2} - \mathcal{F} \cos \phi + \varepsilon_1 \cos \left(\frac{\phi}{2} - \tau \right) + \varepsilon_2 \cos \left(\frac{\phi}{2} + \tau \right) + \varepsilon_3 \cos \left(\frac{3}{2} \phi + \tau \right). \quad (5.6)$$

В уравнении (5.6) $\phi = 2\lambda_1 - 4\lambda_2 + \Omega_1 + \Omega_2$ является резонансной фазой для $i_1 i_2$ -резонанса типа наклона; $\tau = \tilde{\Omega}t + \tau_0$ — фазовый угол возмущения, $\tilde{\Omega}$ — частота возмущения, равная частоте вращения угла $\frac{1}{2}\Omega_1 - \frac{3}{2}\Omega_2 + \varpi_2$, τ_0 — начальная фаза возмущения, t — время; λ_1 , λ_2 — средние долготы спутников; Ω_1 , Ω_2 — долготы восходящих узлов; I — сопряженный ϕ импульс. Для параметров $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, ε_1 , ε_2 и ε_3 , согласно [80], имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= -1, \quad \mathcal{F} = f_0(\alpha)\sigma\gamma_1\gamma_2, \quad \varepsilon_1 = -e_2 f_3(\alpha)\sigma\gamma_2^2, \\ \varepsilon_2 &= -e_2 f_2(\alpha)\sigma\gamma_1\gamma_2, \quad \varepsilon_3 = -e_2 f_1(\alpha)\sigma\gamma_1^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $\sigma = 12n_1^2\alpha m_2 + 48n_2^2 m_1$, $\gamma_1 = \sin(i_1/2)$, $\gamma_2 = \sin(i_2/2)$; n_1 , n_2 — средние движения Мимаса и Тефии; m_1 , m_2 — массы спутников, деленные на массу

Таблица 5.2. Орбитальные параметры системы Мимас – Тетфия и параметры гамильтониана (5.6) для различных эпох динамической эволюции.

Модель	$i_1, ^\circ$	$i_2, ^\circ$	e_2	$\tilde{\Omega}, \text{год}^{-1}$	$\varepsilon_1/\mathcal{F}$	$\varepsilon_2/\mathcal{F}$	$\varepsilon_3/\mathcal{F}$
1	1.62	1.093	0.000235	$2\pi/200$	0.000021	0.001382	0.001105
2	1.62	1.093	0.001	$2\pi/200$	0.000091	0.005881	0.004702
3	0.5	1.093	0.0005	$2\pi/185$	0.000147	0.002940	0.000726
4	0.5	1.093	0.002	$2\pi/185$	0.000588	0.011761	0.002904
5	0.5	1.093	0.0028	$2\pi/185$	0.000823	0.016466	0.004064
6	0.5	1.093	0.009	$2\pi/185$	0.002644	0.052926	0.013063

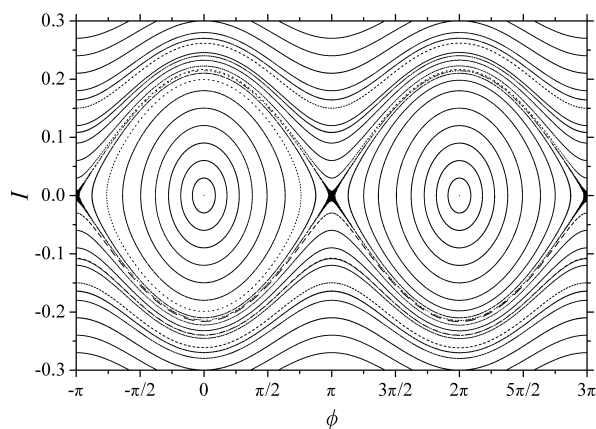
Сатурна; $\alpha = a_1/a_2$ — отношение больших полуосей орбит спутников. Следуя [80], полагаем $n_1 = 2422.44 \text{ год}^{-1}$, $n_2 = 1213.17 \text{ год}^{-1}$, $m_1 = 6.34 \times 10^{-8}$, $m_2 = 1.06 \times 10^{-6}$. Функции $f_k(\alpha)$ выражаются через коэффициенты Лапласа и их производные (подробнее см. [52, 80]). Полагая $\alpha = 0.6306$, находим: $f_0 = -1.6509$, $f_1 = 5.2379$, $f_2 = 9.7082$ и $f_3 = 0.2219$. По аналогии с (5.3) имеем:

$$\frac{\varepsilon_1}{\mathcal{F}} = -e_2 \frac{f_3(\alpha) \gamma_2}{f_0(\alpha) \gamma_1}, \quad \frac{\varepsilon_2}{\mathcal{F}} = -e_2 \frac{f_2(\alpha)}{f_0(\alpha)}, \quad \frac{\varepsilon_3}{\mathcal{F}} = -e_2 \frac{f_1(\alpha) \gamma_1}{f_0(\alpha) \gamma_2}. \quad (5.8)$$

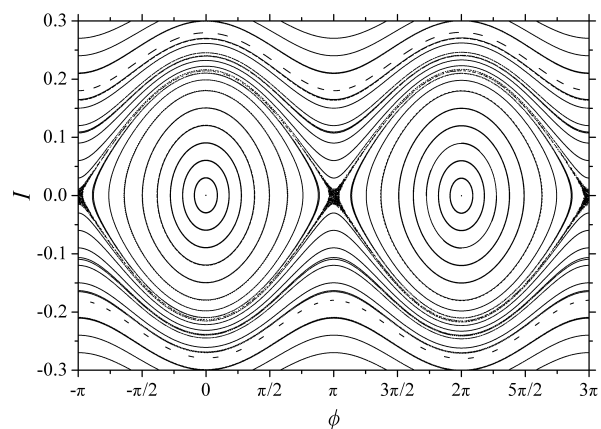
В гамильтониане (5.6) члены с коэффициентами ε_1 и ε_2 отвечают резонансам $i_2^2 e_2$ и $i_1 i_2 e_2$, с ε_3 — резонансу $i_1^2 e_2$. Заметим, что принятый порядок нумерации возмущающих членов в выражении (5.6) для гамильтониана отличается от принятого в работе Шампенуа и Виенна [80].

Численные значения параметров, используемые далее, приведены в Табл. 5.2. Модели 1 и 2 в Табл. 5.2 соответствуют современным [80], в пределах точности наблюдательных данных, значениям орбитальных параметров системы. (Из-за своей малости эксцентриситет орбиты Тетфии известен с низкой точностью. Величина $e_2 = 0.001$ соответствует его наибольшему возможному значению [80].) Модели 3 – 6 соответствуют возможным [80] значениям параметров орбит спутников во время захвата в $i_1 i_2$ -резонанс, произошедшего, согласно [80], $\simeq 2 \times 10^8$ лет назад. Частота возмущения $\tilde{\Omega}$ меняется с течением времени слабо. Закон её изменения приведен в работе [79].

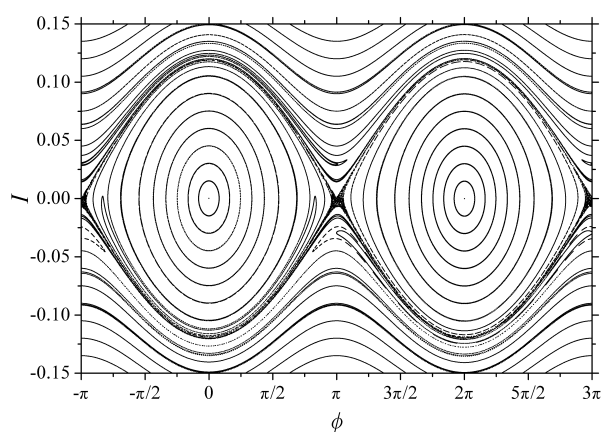
На Рис. 5.2 для всех шести моделей из Табл. 5.2 представлены сечения



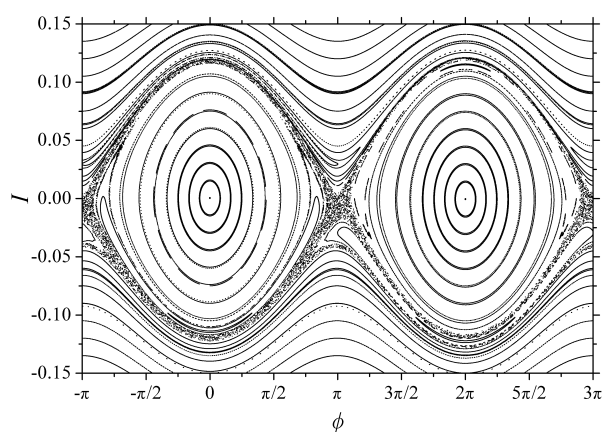
(1)



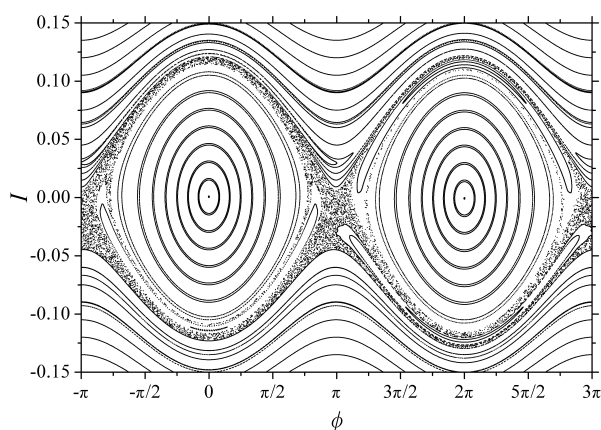
(2)



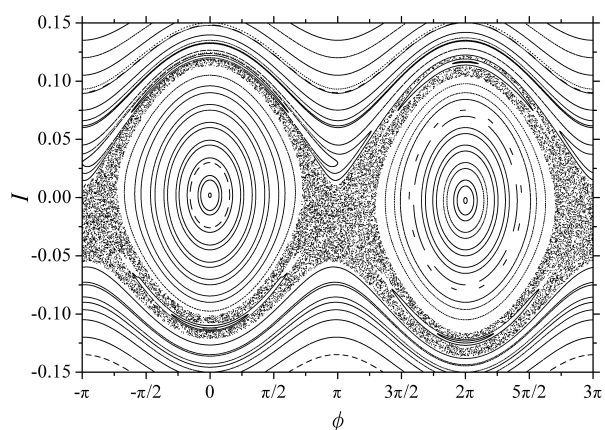
(3)



(4)



(5)



(6)

Рис. 5.2. Сечения фазового пространства, определенные в $\tau = 0 \pmod{2\pi}$, для моделей системы Мимас – Тетия, представленных в Табл. 5.2. В круглых скобках под рисунком указан номер модели.

фазового пространства гамильтониана (5.6), определенные в $\tau = 0 \pmod{2\pi}$. Как и в случае системы Миранда – Умбриэль на сечениях присутствуют две резонансные ячейки, расположенные на одной горизонтали.

5.1.3 Ляпуновские времена спутниковых систем

Для различных наборов значений параметров задачи (каждый набор соответствует модели из Табл. 5.1 или Табл. 5.2) найдем численные и аналитические оценки значений МХПЛ движения в хаотическом слое в окрестности сепаратрис орбитальных резонансов в системах Миранда – Умбриэль и Мимас – Тефия.

Для получения оценок МХПЛ путем прямого численного интегрирования уравнений движения используем HQRV-метод. Полный интервал времени интегрирования составляет 10^7 лет. Чтобы проверить, влияет ли величина шага интегрирования на получаемое значение МХПЛ, вычисления проводим для двух значений максимальной величины шага интегратора DOPRI8 по времени, отличающихся на порядок; локальная точность интегрирования была принята равной 10^{-12} .

Для теоретических оценок МХПЛ используем метод аналитического оценивания МХПЛ для движения в окрестности сепаратрис нелинейного резонанса с периодическими возмущениями в модели возмущенного маятника, предложенный И. И. Шевченко [63, 65]. Краткое описание этого метода дано в разделе 1.3.2.

Система Миранда – Умбриэль

С помощью формул (1.6)–(1.12) из раздела 1.3.2 получим аналитические оценки МХПЛ для системы Миранда – Умбриэль. Положим в гамильтониане (5.5) $k = 1/2$, $a = -\varepsilon_1$, $b = \varepsilon_2$. Найденные значения параметров сепаратрисного отображения приведены в Табл. 5.3.

В Табл. 5.4 приведены результаты численного определения значений МХПЛ L_{num} и теоретические оценки МХПЛ L_{theor} для гамильтониана (5.1) со значениями параметров из Табл. 5.1. Значения частоты возмущения $\tilde{\Omega}$ выражены в годах в степени -1 ; соответственно значения МХПЛ даны в

Таблица 5.3. Параметры сепаратрисного алгоритмического отображения для системы Миранда – Умбриэль.

Модель	λ	W^+	W^-
1	3.717	0.0248	0.0425
2	2.985	0.0493	0.0848
3	2.000	0.1060	0.1820
4	1.372	0.1030	0.1790

Таблица 5.4. Численные и теоретические оценки МХПЛ и ляпуновского времени для системы Миранда – Умбриэль.

Модель	$\lg L_{\text{num}}$		$\lg L_{\text{theor}}$	$T_L^{\text{num}},$ год	$T_L^{\text{theor}},$ год
	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 1.0$			
1	-2.04 ± 0.01	-2.03 ± 0.02	-2.027	110 ± 3	106
2	-1.99 ± 0.01	-1.99 ± 0.02	-1.900	98 ± 2	79
3	-1.92 ± 0.01	-1.92 ± 0.01	-1.740	83 ± 2	55
4	-1.88 ± 0.01	-1.88 ± 0.01	-1.659	76 ± 2	46

расчете на год (включая значения, приведенные на графиках и в таблицах), а ляпуновские времена — в годах. Оценки, приведенные во втором столбце Табл. 5.4, получены при шаге интегрирования Δt , равном 0.1 года, а в третьем столбце — при $\Delta t = 1$ год. В качестве конечной оценки МХПЛ в Табл. 5.4 берется среднее значение текущего значения МХПЛ, полученное путем усреднения текущего значения на промежутке времени $t \in [10^6, 10^7]$ лет. Значения МХПЛ приводятся вместе с его максимальными отклонениями от средней величины на промежутке усреднения.

В Табл. 5.4 для системы Миранда – Умбриэль приведены оценки (численные и теоретические) ляпуновского времени T_L , представляющего собой величину, обратную МХПЛ. В качестве численных оценок ляпуновского времени даны обратные значения L_{num} , полученные при шаге интегрирования 0.1 года.

Система Мимас – Тефия

Получим теперь аналитические оценки МХПЛ для системы Мимас – Тефия. В гамильтониане (5.6) имеются три возмущающих члена, а не два, как в модельном гамильтониане (5.5) и в гамильтониане системы Миранда – Умбриэль (5.1). Получим оценки МХПЛ для системы Мимас – Тефия, во-первых, для суммы всех трех возмущающих членов (вариант “ $i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2$ ”) и, во-вторых, для суммы первых двух возмущающих членов (вариант “ $i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2$ ”).

Первый случай отвечает реальному положению вещей. Второй случай рассмотрим для того, чтобы оценить роль третьего возмущающего члена. Ведущим в обоих случаях является резонанс $i_1 i_2$. Резонансам ε_1 и ε_2 (в наших обозначениях) отвечают резонансы $i_2^2 e_2$ и $i_1 i_2 e_2$, резонансу ε_3 — резонанс $i_1^2 e_2$.

Во втором случае гамильтониан полностью подобен модельному гамильтониану (5.5), поэтому можно оценить величину МХПЛ точно таким же образом, как и для системы Миранда – Умбриэль. При этом имеем $k = 1/2$, $a = \varepsilon_1$, $b = \varepsilon_2$.

В первом случае отдельно оцениваем $W^\pm$ для третьего возмущающего члена и берем алгебраические суммы значений $W^\pm$, полученных для первого варианта (“ $i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2$ ”) и для третьего члена, поскольку именно суммы входят в итоговое сепаратрисное отображение. Для третьего члена имеем $k = 3/2$, $a = 0$, $b = \varepsilon_3$.

Значения параметров сепаратрисного отображения, использовавшиеся для оценки МХПЛ, приведены в Табл. 5.5. В Табл. 5.6 приведены результаты численного определения значений МХПЛ L_{num} и теоретические оценки МХПЛ L_{theor} для гамильтониана (5.6) со значениями параметров из Табл. 5.2. Оценки, приведенные во втором столбце Табл. 5.6, получены при шаге интегрирования Δt , равном 0.1 года, а в третьем столбце — при $\Delta t = 1$ год. В качестве конечной оценки МХПЛ, как и для системы Миранда – Умбриэль, в Табл. 5.6 берется среднее значение текущего значения МХПЛ, полученное путем усреднения текущего значения на промежутке времени $t \in [10^6, 10^7]$ лет.

В Табл. 5.6 приведены численные и теоретические оценки ляпуновского

Таблица 5.5. Параметры сепаратрисного алгоритмического отображения для системы Мимас – Тефия.

Модель	λ	Возмущающие резонансы	W^+	W^-
1	0.293	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-0.000454	0.001266
	0.293	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-0.001461	0.003794
2	0.293	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-0.001934	0.005389
	0.293	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-0.006215	0.016146
3	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-0.000904	0.008014
	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-0.001031	0.008775
4	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-0.003617	0.032055
	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-0.004124	0.035101
5	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-0.005064	0.044878
	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-0.005774	0.049142
6	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-0.016278	0.144250
	0.571	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-0.018560	0.157956

времени T_L для системы Мимас – Тефия. Как и в случае системы Миранда – Умбриэль, в качестве численных оценок ляпуновского времени даны обратные значения L_{num} , полученные при шаге интегрирования 0.1 года.

На Рис. 5.3 и 5.4 для всех рассмотренных моделей приведены зависимости текущего значения МХПЛ от длины интервала времени его вычисления, полученные при величине шага интегрирования 0.1 года.

Из результатов, представленных в Табл. 5.4 и 5.6, а также на Рис. 5.3 и 5.4 видно, что, как в случае системы Миранда – Умбриэль, так и в случае системы Мимас – Тефия численные и аналитические оценки МХПЛ хорошо согласуются. Заметные различия есть лишь для первых двух моделей системы Мимас – Тефия. Они главным образом объясняются тем, что данным моделям отвечают низкие значения параметра λ . Для подобных низких значений λ необходимо специальное развитие метода аналитического оценивания показателей Ляпунова (см. подробнее работы И. И. Шевченко [64, 65, 176]).

Таблица 5.6. Численные и теоретические оценки МХПЛ и ляпуновского времени для системы Мимас – Тетия.

Модель	Возмущающие резонансы	$\lg L_{\text{num}}$		$\lg L_{\text{theor}}$	T_L^{num} , год	T_L^{theor} , год
		$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 1.0$			
1	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-2.78 ± 0.01	-2.78 ± 0.01	-2.608	603 ± 14	406
	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-2.68 ± 0.01	-2.69 ± 0.01	-2.568	478 ± 11	370
2	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-2.65 ± 0.01	-2.66 ± 0.02	-2.556	447 ± 10	360
	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-2.56 ± 0.01	-2.55 ± 0.01	-2.511	363 ± 8	324
3	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-2.64 ± 0.02	-2.65 ± 0.02	-2.630	437 ± 20	427
	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-2.67 ± 0.03	-2.68 ± 0.03	-2.626	468 ± 32	423
4	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-2.65 ± 0.03	-2.70 ± 0.05	-2.570	447 ± 30	372
	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-2.66 ± 0.04	-2.63 ± 0.04	-2.565	457 ± 42	367
5	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-2.64 ± 0.02	-2.70 ± 0.04	-2.554	437 ± 20	358
	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-2.63 ± 0.03	-2.64 ± 0.05	-2.549	427 ± 30	354
6	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2 + i_1^2 e_2"$	-2.54 ± 0.01	-2.55 ± 0.01	-2.493	347 ± 8	311
	$"i_2^2 e_2 + i_1 i_2 e_2"$	-2.56 ± 0.01	-2.56 ± 0.02	-2.488	363 ± 8	307

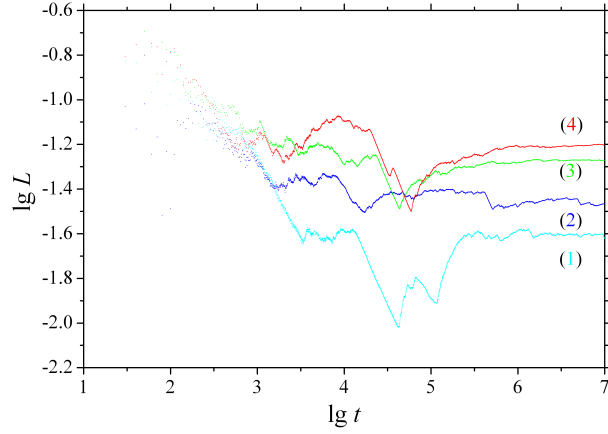


Рис. 5.3. Зависимость текущего значения МХПЛ от времени (в годах) для моделей из Табл. 5.1 (Миранда – Умбриэль). В скобках указаны номера моделей.

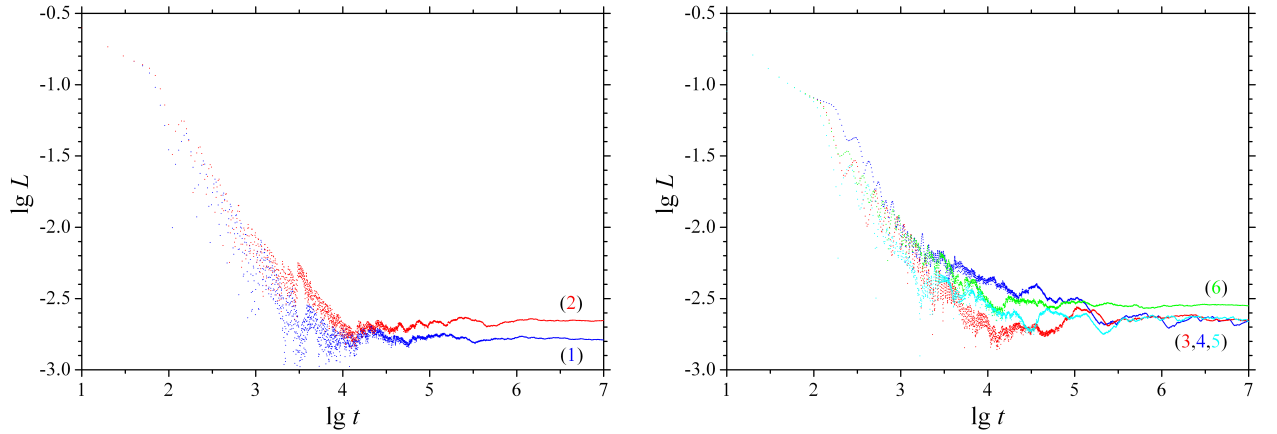


Рис. 5.4. Зависимость текущего значения МХПЛ от времени (в годах) для моделей из Табл. 5.2 (Мимас – Тетфия). В скобках указаны номера моделей.

Период возмущения $2\pi/\tilde{\Omega}$ в случае системы Миранда – Умбриэль, согласно формуле (5.4) (либо формуле (65) из статьи [138]), составляет $\simeq 19$ лет, а в случае системы Мимас – Тетфия, согласно [80], он составляет $\simeq 200$ лет для моделей 1–2 и $\simeq 185$ лет для моделей 3–6. Полученное ляпуновское время для движения в окрестности сепаратрис i_1^2 -резонанса $3/1$ в системе Миранда – Умбриэль составляет 2–6 периодов возмущения, а для движения в окрестности сепаратрис $i_1 i_2$ -резонанса $4/2$ в системе Мимас – Тетфия ляпуновское время составляет 1.5–3 периода возмущения. В первом случае ляпуновское время много меньше времени нахождения системы Ми-

ранда – Умбриэль в i_1^2 -резонансе 3/1 (10^8 – 10^9 лет [90, 184]); во втором случае оно много меньше времени, прошедшего с момента захвата системы Мимас – Тефия в $i_1 i_2$ -резонанс 4/2 ($\simeq 2 \times 10^8$ лет [79]).

Итак, результаты численного интегрирования [87, 101, 108] и аналитические оценки [174] для системы Прометей – Пандора (ляпуновское время ≈ 3 года), численные оценки [88] для системы Атлас – Прометей (~ 10 лет) и полученные здесь численные и аналитические оценки для различных эпох эволюции систем Миранда – Умбриэль и Мимас – Тефия (ляпуновские времена 50–100 и 300–600 лет соответственно) свидетельствуют, что диапазон значений времени предсказуемой динамики в спутниковых системах, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, весьма широк: по порядку величины он составляет от года до тысячи лет для этих четырех систем вблизи рассмотренных резонансов. Оценки ляпуновских времен для спутниковых систем, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, позволяют судить о том, на каких интервалах времени справедливы численные и аналитические теории орбитального движения, построенные для этих спутниковых систем.

§ 5.2 Показатели Ляпунова

в динамике тройных звездных систем

Как отмечалось во Введении, около 15% из кратных звездных систем в Галактике представляют собой тройные звезды [98]. Динамика тройных звездных систем описывается в рамках общей задачи трех тел. Зависимости «ляпуновское время T_L – время распада T_d » системы для различных вариантов общей задачи трех тел построены в работах [149, 192].

Миккола и Таникава [149] исследовали корреляцию ляпуновских времен и времен распада в задаче трех тел равных масс. В массовых численных экспериментах они вычислили T_L и T_d для системы с рандомизированными начальными условиями и показали, что время жизни системы как связанной тройной и ее ляпуновское время коррелируют, причем статистическая зависимость « $T_L - T_d$ » в долговременной динамике близка к линейной.

Урминский и Хегги [192] исследовали корреляцию T_L и T_d в иерархиче-

ской задаче трех тел в постановке, отличной от принятой в [149], и получили схожие результаты. А именно, они рассмотрели задачу Ситникова [57, 179] и в итоге массовых численных экспериментов получили двухкомпонентную степенную зависимость, где вторая компонента («хвост») близка к линейному закону, аналогично результату, полученному в работе Микколы и Таникавы [149].

Если взглянуть на зависимости « $T_L - T_d$ », построенные в работах [149, 192], то можно заметить, что в области больших T_d в них присутствуют две компоненты: на Рис. 3 в [149] и Рис. 3 в [192] видно наличие двух «рукавов» — своеобразной « V -структуры». Один из рукавов приблизительно следует линейной зависимости, другой — квадратичной, что четко видно в логарифмических координатах по обеим осям. Наличие V -структуры согласуется с теорией (см., например, [169, 171, 175]): действительно, теоретическая зависимость « $T_L - T_d$ » для 1-го типа гамильтоновой перемежаемости (определяемой движением вблизи сепаратрисы, разделяющей связанные и неограниченные движения) должна быть линейной, а для 2-го типа (соответствующей эффекту прилипания траекторий к границе области хаоса) — квадратичной.

В работе А. И. Мартыновой и др. [32] было проведено исследование динамики тройных систем с компонентами равных масс с начальными условиями в окрестности резонанса 2:1. Резонанс 2:1 означает, что отношение периодов невозмущенных орбит внешней и внутренней пар равно 2:1. Были выявлены области устойчивых и неустойчивых движений, а также рассмотрена динамика различных устойчивых конфигураций системы.

Рассмотрим слабо-иерархические тройные системы с компонентами равных масс и вычислим полные спектры ХПЛ. Начальные условия будут находиться в окрестности резонанса 2:1. Посредством численного моделирования динамики тройных систем, изучим распределения времен распада при данной околорезонансной постановке задачи и рассмотрим характер зависимостей « $T_L - T_d$ », обобщенных для всех элементов ляпуновского спектра.

5.2.1 Уравнения движения

Уравнения движения имеют вид

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.9)$$

где m_i — массы тел, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — вектор положения i -го тела, t — время, U — потенциал:

$$U = G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right),$$

где $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ — расстояние между телами i и j , G — гравитационная постоянная.

Далее полагаем, что $G = 1$, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, первоначальный радиус круговой орбиты внутренней пары относительно своего барицентра равен единице. Используется прямоугольная система координат XYZ с началом в центре масс тройной системы. На Рис. 5.5 представлена начальная конфигурация системы, аналогичная принятой в работе А. И. Мартыновой и др. [32]. Точка A — положение центра масс системы, состоящей из m_1 и m_2 , то есть внутренней двойной, в начальный момент времени.

Будем рассматривать орбиты внешнего тела m_3 , обратные относительно обращения внутренней пары. Начальные значения координат и скоростей тел в окрестности резонанса 2:1, согласно [32], записываем в виде

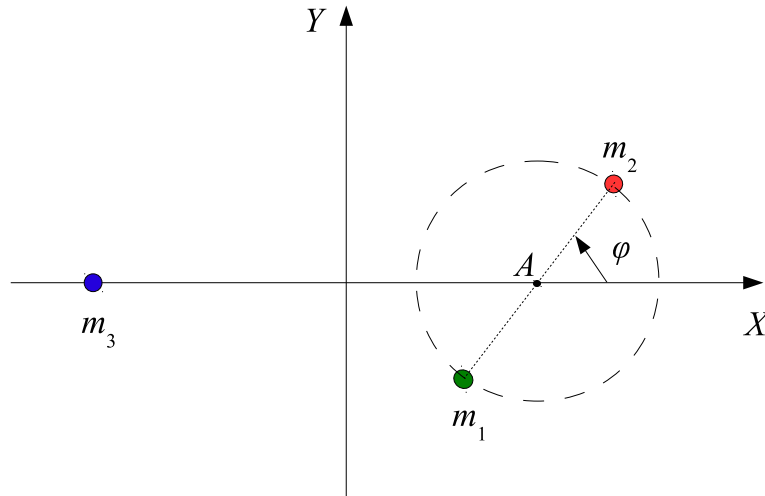


Рис. 5.5. Начальная конфигурация тройной системы.

$$\begin{cases} x_1 = x_A - \cos \varphi, & y_1 = -\sin \varphi, \\ x_2 = x_A + \cos \varphi, & y_2 = \sin \varphi, \\ x_3 = x_A - 2 \times 6^{1/3} + \Delta x, & y_3 = 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2} \sin \varphi, & \dot{y}_1 = \frac{1}{2} \cos \varphi + 6^{-2/3}, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2} \sin \varphi, & \dot{y}_2 = -\frac{1}{2} \cos \varphi + 6^{-2/3}, \\ \dot{x}_3 = 0, & \dot{y}_3 = -2 \times 6^{-2/3}, \end{cases} \quad (5.11)$$

где угол φ показан на Рис. 5.5, $x_A = (16/9)^{1/3}$ — координата точки A по оси X , а параметр Δx в случае точного резонанса 2:1 для невозмущенных кеплеровых орбит внешней и внутренней двойных равен нулю. При этом полагаем, что $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 0$, то есть тела движутся в плоскости XY .

Как и в работе А. И. Мартыновой и др. [32], момент распада тройной системы фиксируется, когда выполняется условие

$$r_{\max} \geq 5d,$$

где $r_{\max}$ — максимальное расстояние между любыми двумя из тел, а

$$d = \frac{G}{|E|}(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3),$$

где полная энергия тройной системы

$$E = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i v_i^2}{2} - G \sum_{i,j=1, i < j}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}} = K - U, \quad (5.12)$$

где K и $-U$ — соответственно кинетическая и потенциальная энергии системы, $v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2$. Величина d представляет собой средний размер тройной системы, согласно определению, принятому в [70].

Массив начальных условий для интегрирования уравнений движения и вычисления ХПЛ определялся путем вариации величины $\Delta x = 0, \dots, 1$ шагом 10^{-6} (то есть массив содержит 10^6 точек); при этом в (5.10) и (5.11) полагаем угол $\varphi = \pi/2$. Данное значение угла φ при резонансе 2:1 соответствует

устойчивой, согласно [32], по Лагранжу системе в случае обратных орбит m_3 , когда движение происходит в точном начальном резонансе для невозмущенных движений. Изменение величины Δx позволяет варьировать начальное расстояние между центром масс внутренней двойной системы (точкой A) и третьим телом m_3 . При изменении данного расстояния система покидает состояние точного резонанса и возникает возможность ее распада.

Поскольку у системы (5.9) число степеней свободы $N = 9$, она имеет 18 ХПЛ, которые в силу гамильтоновости системы распадаются на пары: $L_i = -L_{i+N}$, $i = 1, \dots, N$. Кроме того, поскольку задача плоская, то 6 показателей из 18 равны нулю. Далее будем рассматривать только положительные ХПЛ. Заметим, что вычисление точных значений младших ($i = 4, 5, 6$) показателей требует существенного увеличения времени интегрирования (на 2–3 порядка по сравнению со случаем $i \leq 3$). На малых временах интегрирования значения младших показателей определяются со значительной погрешностью. Вычисление ХПЛ проводилось при помощи HQRВ-метода.

Изучение динамики рассматриваемой системы проводилось на интервале $t \in [0, 10^5]$ принятых единиц времени (первоначальный период обращения внутренней невозмущенной двойной в этих единицах равен $2\pi/\sqrt{2} \simeq 4.44$). При интегрировании контролировалось сохранение полной энергии системы. Ее относительное изменение $|\Delta E| < 10^{-10}$ при интегрировании на интервале $t \in [0, 10^4]$ и $|\Delta E| < 10^{-9}$ при интегрировании на интервале $t \in [0, 10^5]$.

5.2.2 Ляпуновские спектры и времена распада

На Рис. 5.6 приведены текущие значения трех наибольших в спектре ХПЛ $L_1 > L_2 > L_3$ в зависимости от длины интервала времени, на котором они вычислялись. Рис. 5.6а соответствует устойчивому движению ($\Delta x = 0$), Рис. 5.6б — неустойчивому движению ($\Delta x = 0.18$). В последнем случае при $t = 35\,586$ происходит распад системы (тело 2 покидает ее, остается двойная из тел 1 и 3), при этом вычисление ХПЛ автоматически останавливается. В устойчивой системе (Рис. 5.6а) наблюдаются колебания текущих значений L_i , накладывающиеся на общее убывание к нулю. В неустойчивой систе-

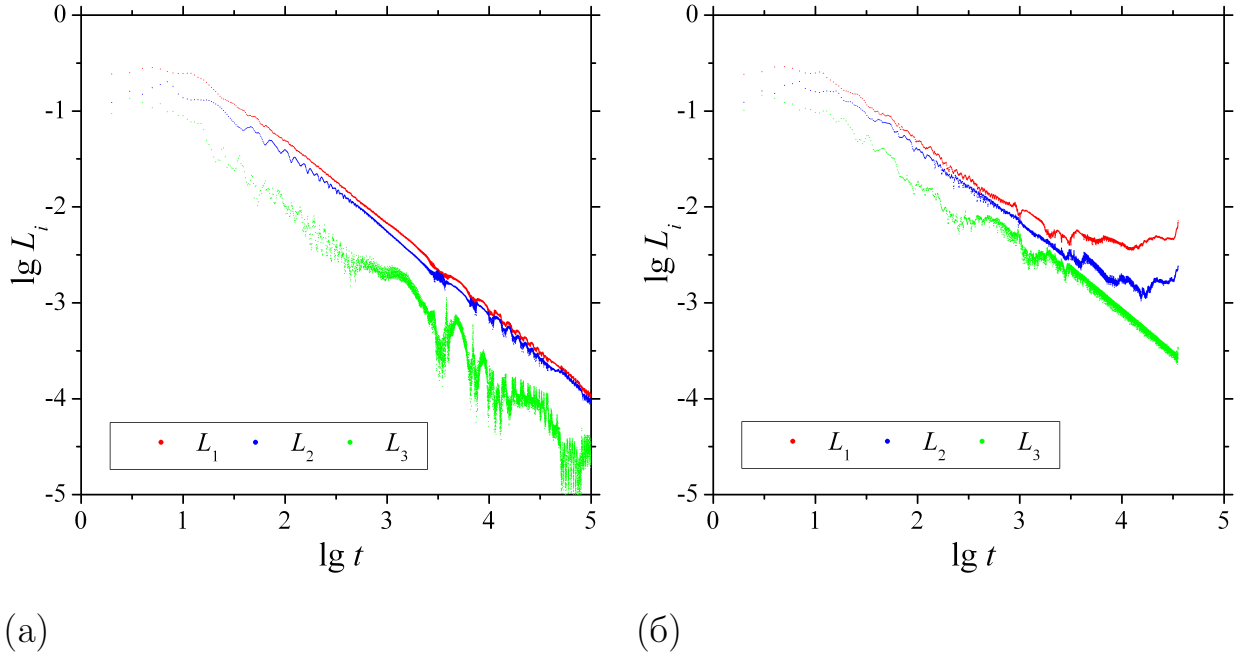


Рис. 5.6. Текущие значения показателей Ляпунова (L_i , $i = 1, 2, 3$) в зависимости от времени для (а) устойчивой системы ($\Delta x = 0$) и (б) неустойчивой системы ($\Delta x = 0.18$).

ме (Рис. 5.6б) МХПЛ L_1 через $\approx 5\,000$ единиц времени (около 1 000 начальных периодов внутренней двойной) становится приблизительно постоянным.

На Рис. 5.7 приведены зависимости положительных ненулевых ХПЛ L_i ($i = 1, \dots, 6$; $L_i > L_{i+1}$) от Δx , полученные посредством интегрирования на интервале времени 10^5 единиц. Напомним, что резонансу 2:1 соответствует $\Delta x = 0$. Из Рис. 5.7 видно, что для Δx от 0 до ≈ 0.17 движение является устойчивым (все ХПЛ равны нулю). При $\Delta x > 0.17$ движение неустойчиво: все L_i ($i = 1, \dots, 6$) отличны от нуля. В зависимостях L_i от Δx наблюдается присутствие узких (по Δx) зон («люков») с относительно большими значениями L_i ; положения этих зон по Δx для разных i одни и те же. Очевидно, что сильная стохастичность движений (большие значения L_i) в этих люках приводит рассматриваемую тройную систему к быстрому распаду.

Зависимость времени распада тройной системы T_d от Δx представлена на Рис. 5.8. Наблюдается корреляция между «люками» на Рис. 5.8 — зонами быстрых уходов, где одно из тел покидает тройную систему на небольших временах эволюции, и «люками» на Рис. 5.7.

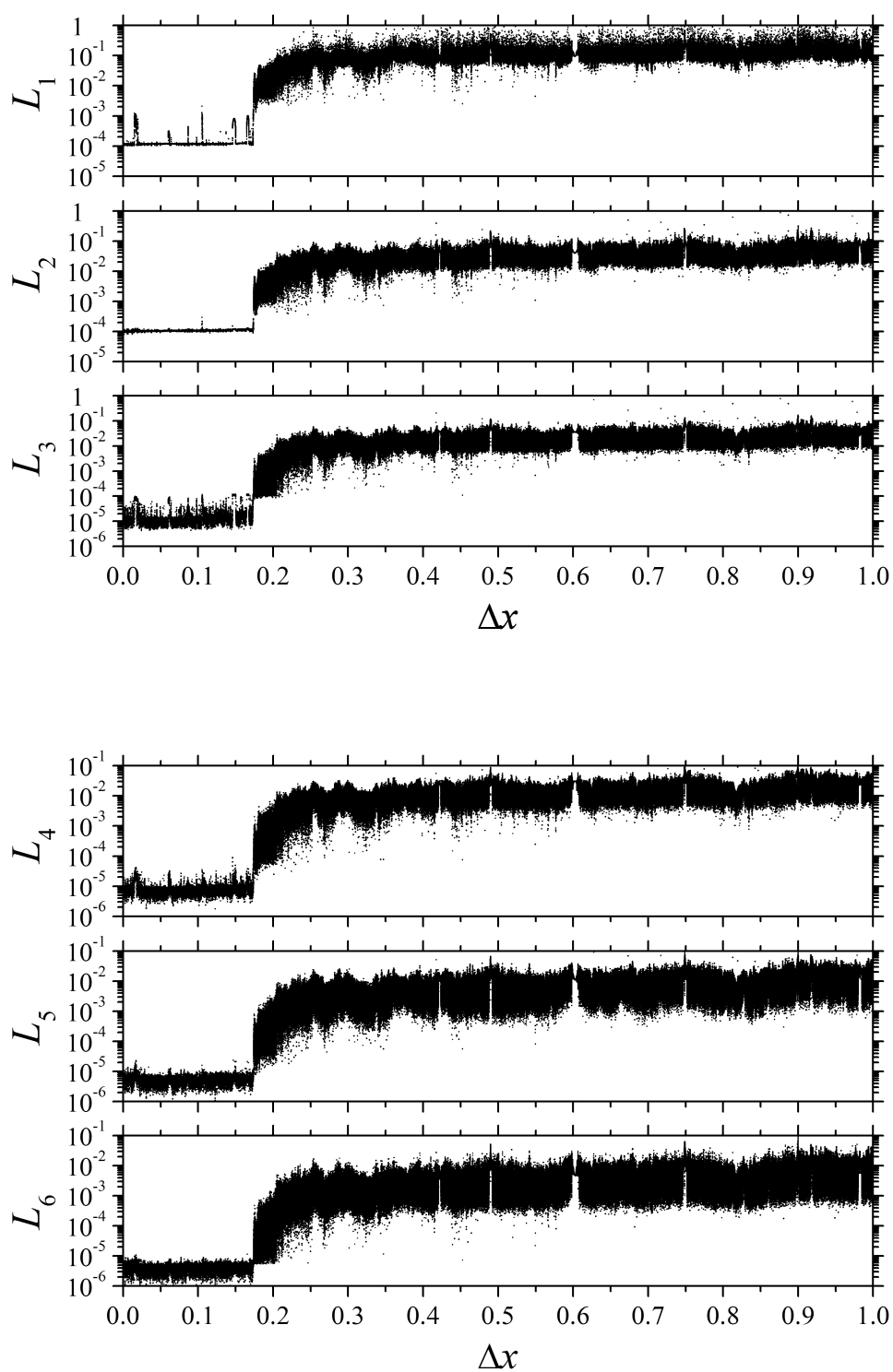


Рис. 5.7. Показатели Ляпунова (L_i , $i = 1, \dots, 6$) в зависимости от начального смещения по оси X от положения точного резонанса 2:1 для невозмущенных движений. Резонансу 2:1 соответствует $\Delta x = 0$.

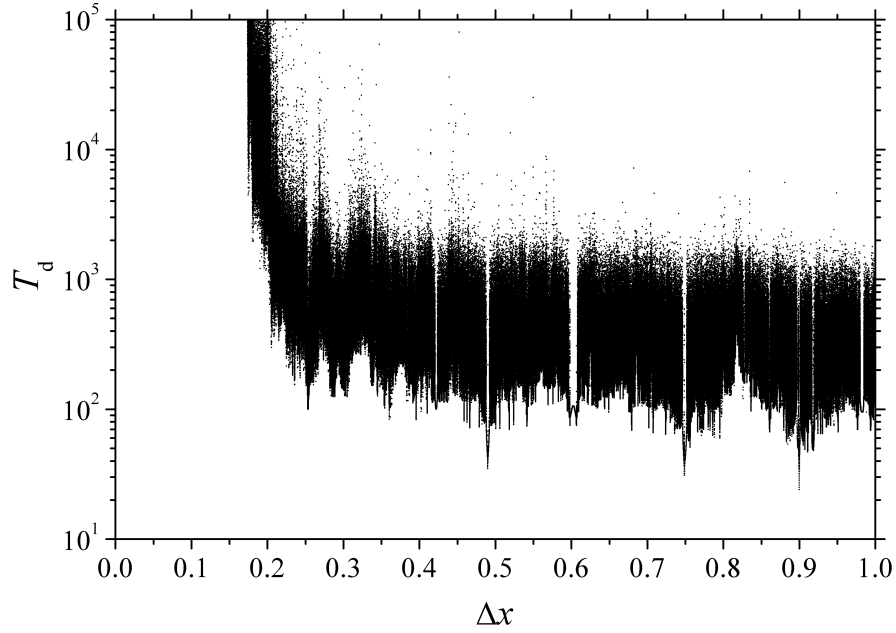


Рис. 5.8. Зависимость времени распада тройной системы от начального смещения по оси X от положения точного резонанса 2:1 для невозмущенных движений. Резонансу 2:1 соответствует $\Delta x = 0$.

На Рис. 5.9 представлены траектории движения тел, вычисленные на интервале $t = 100$, для избранных значений Δx , соответствующих люкам на Рис. 5.7 и 5.8. Траектории системы вычислены для $\Delta x = 0$ (что соответствует точному резонансу невозмущенных движений в начальный момент времени) и $\Delta x = 0.422, 0.490, 0.602, 0.748, 0.982$ (что приблизительно соответствует центрам наиболее широких люков на Рис. 5.7 и 5.8).

Согласно выводам [74, 151, 153, 175], начальное распределение времен распада тройных систем имеет экспоненциальный характер, а распределение в «хвосте» является степенным. В частности, в работе В.В. Орлова и др. [151] для степенной аппроксимации «хвостов» интегральных распределений времен распада тройных систем с компонентами равных масс и с различными начальными конфигурациями получены значения показателя степени $\alpha \in (-0.71, -0.42)$. Поэтому начальный участок и хвост распределения вычисленных значений времен распада рассматривались отдельно. На Рис. 5.10 представлены нормированные дифференциальные распределения времен распада на интервале $T_d \in [0, 10^4]$ (Рис. 5.10а) и на интервале $T_d \in [10^4, 10^5]$ (Рис. 5.10б и 5.10в).

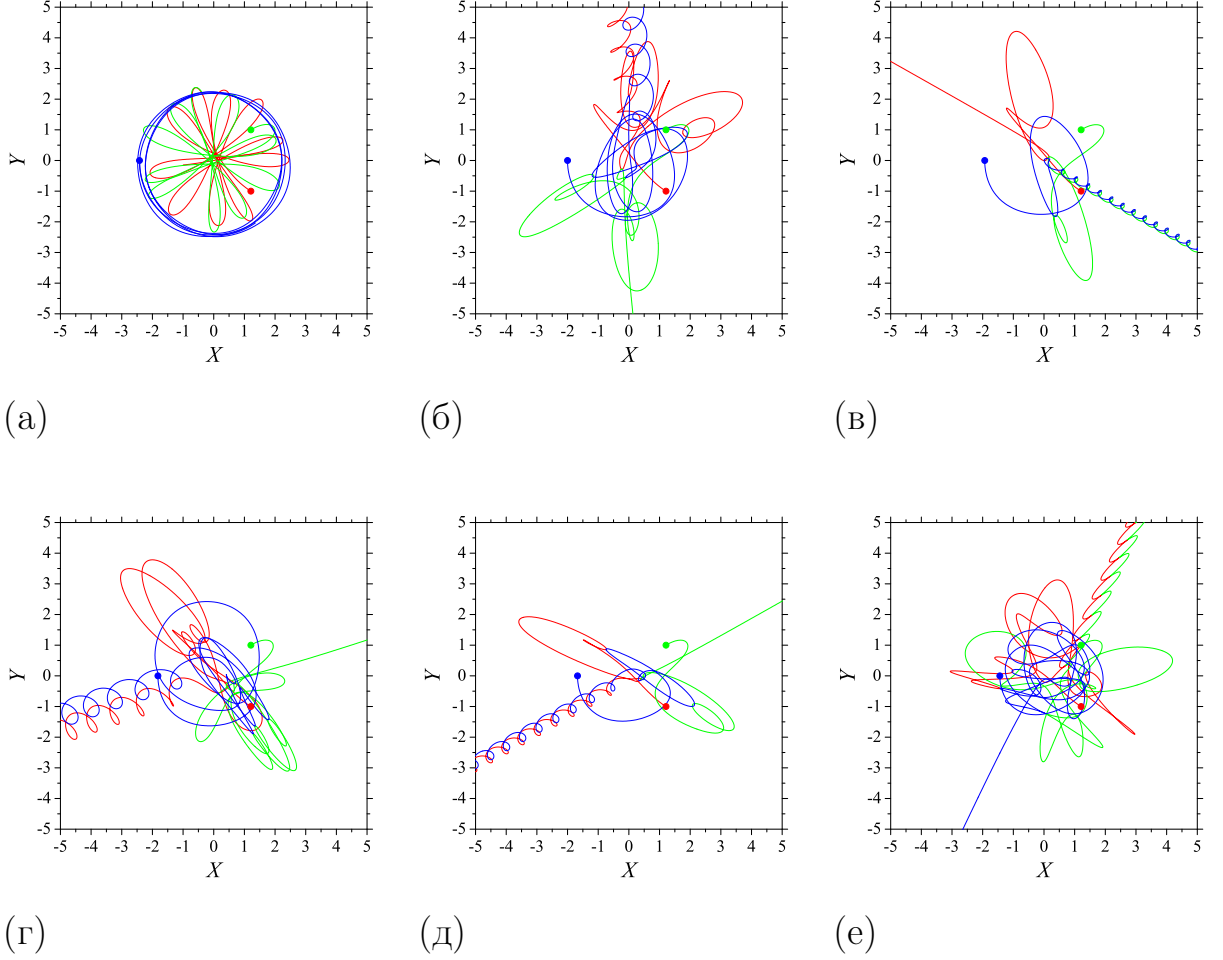


Рис. 5.9. Динамика системы (на промежутке времени $t = 100$) для значений Δx , соответствующих «люкам» на графиках « $L_i - \Delta x$ »: (а) $\Delta x = 0$, (б) $\Delta x = 0.422$, (в) $\Delta x = 0.490$, (г) $\Delta x = 0.602$, (д) $\Delta x = 0.748$, (е) $\Delta x = 0.982$. Кружками отмечены начальные положения тел.

Построенное (Рис. 5.10а) дифференциальное распределение при $T_d \in [0, 10^4]$ хорошо аппроксимируется экспоненциальной функцией $Ae^{\sigma T_d}$, где A — нормирующий множитель, $\sigma = -(0.00278 \pm 0.00001) \simeq -1/360$. Квадрат коэффициента корреляции распределения и аппроксимирующей функции $\mathcal{R}^2 = 0.997$. Отметим, что Миккола и Таникава [149] в задаче с тремя телами равных масс на интервале $T_d \in [0, 500]$ получили $\sigma = -1/250$ (заметим, что набор начальных данных у них отличен от используемого здесь, а единица времени та же).

Наилучшее приближение распределения для $\Delta x \leq 0.2$ на интервале $5 \times 10^4 \leq T_d \leq 10^5$ (Рис. 5.10б) степенной функцией BT_d^β (где B — нормирующий

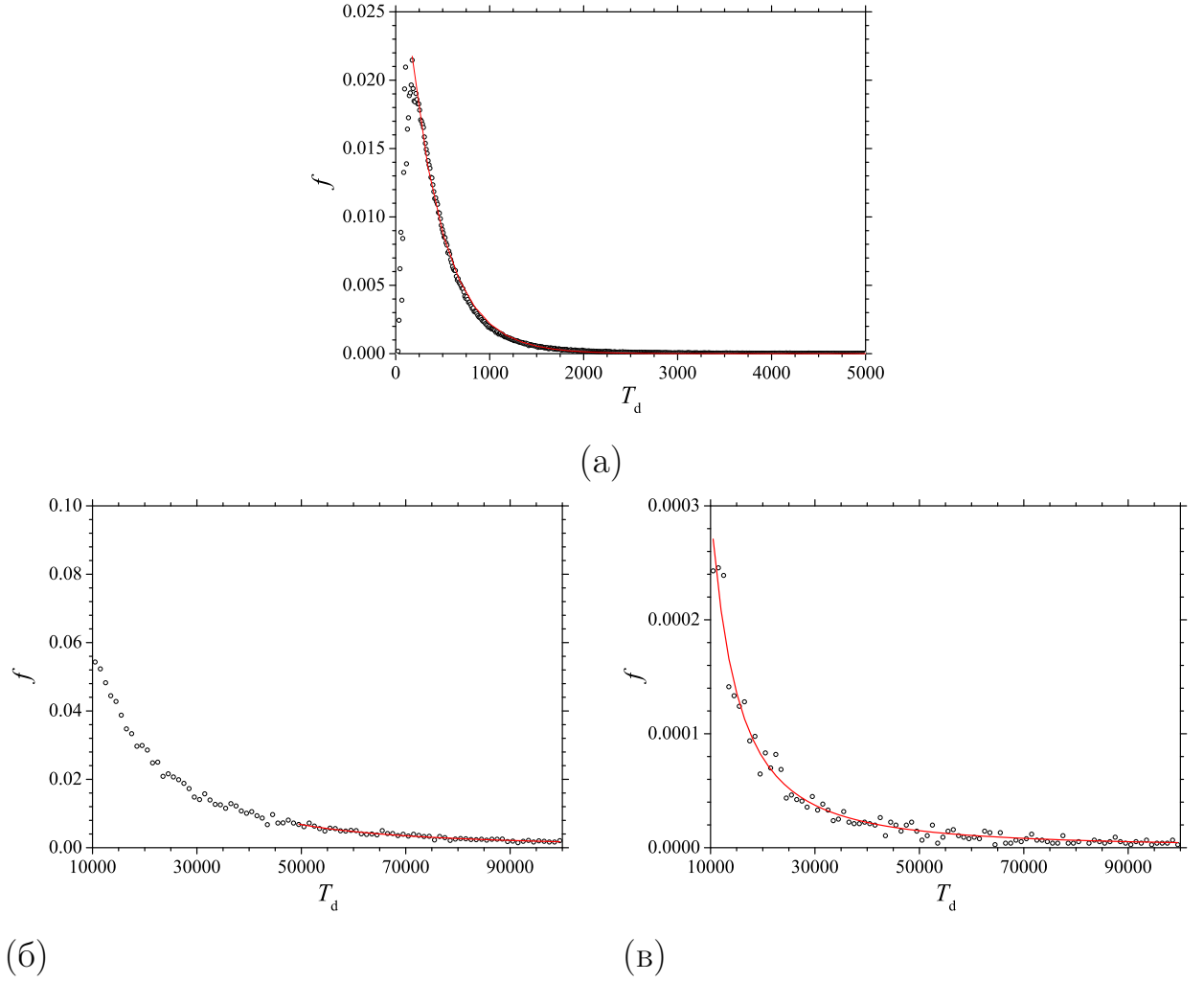


Рис. 5.10. Дифференциальное нормированное распределение времени распада (кружки): (а) при $0 < T_d < 10^4$ (показаны $T_d < 5000$); (б) $10^4 \leq T_d \leq 10^5$, $\Delta x \in [0, 0.2]$; (в) $10^4 \leq T_d \leq 10^5$, $\Delta x \in (0.2, 1]$. Сплошные кривые — экспоненциальная (а) и степенная (б), (в) аппроксимации (см. подробнее в тексте) наблюдаемых распределений.

множитель) имеет показатель степени $\beta = (-1.966 \pm 0.075)$; $\mathcal{R}^2 = 0.939$. Аппроксимация распределения для $\Delta x \leq 0.2$ на интервале $10^4 < T_d < 5 \times 10^4$ степенной функцией имеет существенно меньший коэффициент корреляции $\mathcal{R}^2 = 0.782$. Найденное значение $\beta \approx -2$ довольно близко к ожидаемому в случае наличия эффекта прилипания траекторий к границе хаоса ($\beta \approx -2.5$, см. [175]). Вблизи резонанса ($\Delta x \leq 0.2$) естественно ожидать наличия данного эффекта.

Аппроксимация распределения для $\Delta x > 0.2$ на интервале $10^4 \leq T_d \leq 10^5$ (см. Рис. 5.10в) выполнена с использованием подхода, предложенного С. А. Павлюченко [153]: в качестве аппроксимирующей берем сумму двух функций, соответствующих, согласно [175], двум типам гамильтоновой перемежаемости, а именно сумму $CT_d^{-5/3} + DT_d^{-5/2}$. Получено $C = 879 \pm 75$ и $D = (1.09 \pm 0.21) \times 10^6$; $\mathcal{R}^2 = 0.972$. Член $CT_d^{-5/3}$ является преобладающим на всем интервале $10^4 \leq T_d \leq 10^5$: на левой границе в ≈ 1.7 раз, а на правой — в ≈ 12 раз. Отметим, что в начале данного интервала вклад второго члена, соответствующего гамильтоновой перемежаемости 2-го типа, является существенным и сопоставимым с вкладом первого члена, соответствующего гамильтоновой перемежаемости 1-го типа.

Таким образом, из проведенного анализа «хвостов» распределений времен распада с начальными условиями вблизи резонанса ($\Delta x \leq 0.2$) и вдали от него ($\Delta x > 0.2$) следует, что вблизи резонанса преобладающей является гамильтонова перемежаемость 2-го типа, а вдали от резонанса преобладает гамильтонова перемежаемость 1-го типа.

5.2.3 Зависимости «ляпуновское время – время распада»

На Рис. 5.11а–в в логарифмическом масштабе представлены полученные численно-экспериментальные зависимости « $T_{L_i} - T_d$ », где формально определено $T_{L_i} = 1/L_i$ (представлены данные только для $i = 1, 2, 3$). Эти зависимости построены путем вычисления положительных ХПЛ L_i на интервалах времени T_d до распада системы. Зависимости для $i = 4, 5$ и 6 имеют схожий характер, поэтому здесь не приводятся.

На Рис. 5.11г приведены сглаженные нормированные дифференциальные распределения значений ляпуновских времен T_{L_i} для $i = 1, 2$ и 3 . Распределения строились посредством подсчета количества траекторий с T_{L_i} , попадающих в интервал $(T_{L_i}, T_{L_i} + \delta T_L)$, где $\delta T_L = 10$ для всех i . Затем количество траекторий, попавших в каждый интервал, нормировалось на количество всех вычисленных траекторий (то есть на 10^6). Как видим, распределения являются одновёршинными. Чем больше порядок i элемента ляпуновского спектра, тем при большем значении T_{L_i} достигается максимум в

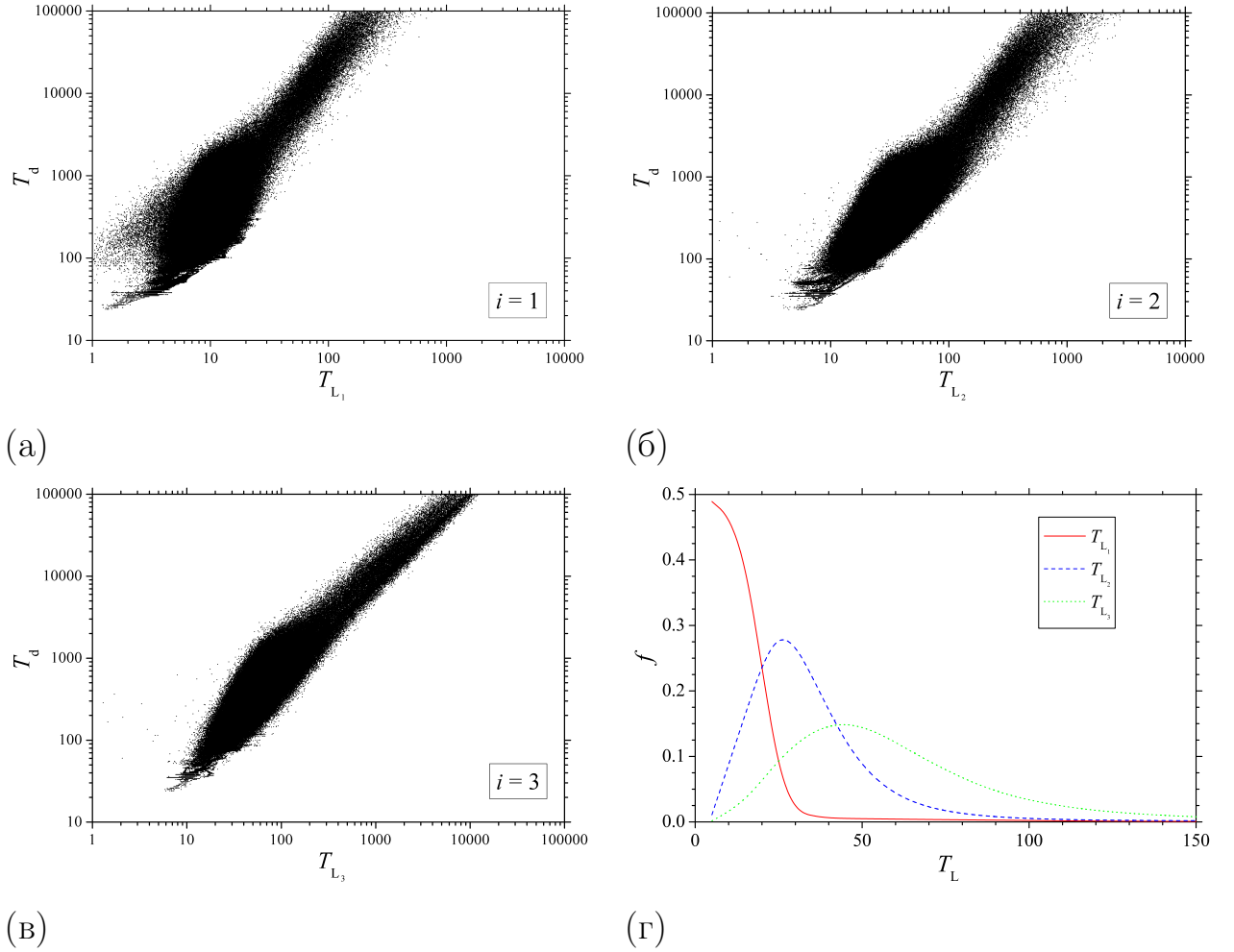


Рис. 5.11. (а)–(в) Зависимости « $T_{L_i} - T_d$ ». (г) Дифференциальные нормированные распределения значений ляпуновских времен T_{L_i} ; $i = 1, 2, 3$.

распределении. Возрастание характерной ширины распределения T_{L_i} с ростом i отчасти может быть вызвано возрастанием ошибок при численном определении L_i , поскольку на одном и том же интервале времени интегрирования старшие элементы в ляпуновском спектре определяются с существенно меньшими погрешностями, чем младшие элементы.

Проведем подробный анализ зависимости « $T_L - T_d$ », построенной для МХПЛ (для $i = 1$). На Рис. 5.12 в логарифмическом масштабе зависимость « $T_{L_1} - T_d$ » представлена в виде графиков плотности точек (T_{L_1}, T_d) . Графики плотности строились посредством подсчета количества точек, попавших в ячейки сетки, наложенной на плоскость (T_{L_1}, T_d) . Размеры ячеек сетки определялись следующим образом: интервалы $T_{L_1} \in [0, 10^3]$ и $T_d \in [0, 10^5]$ в логарифмической шкале были разбиты на 100 отрезков. На Рис. 5.12а при-

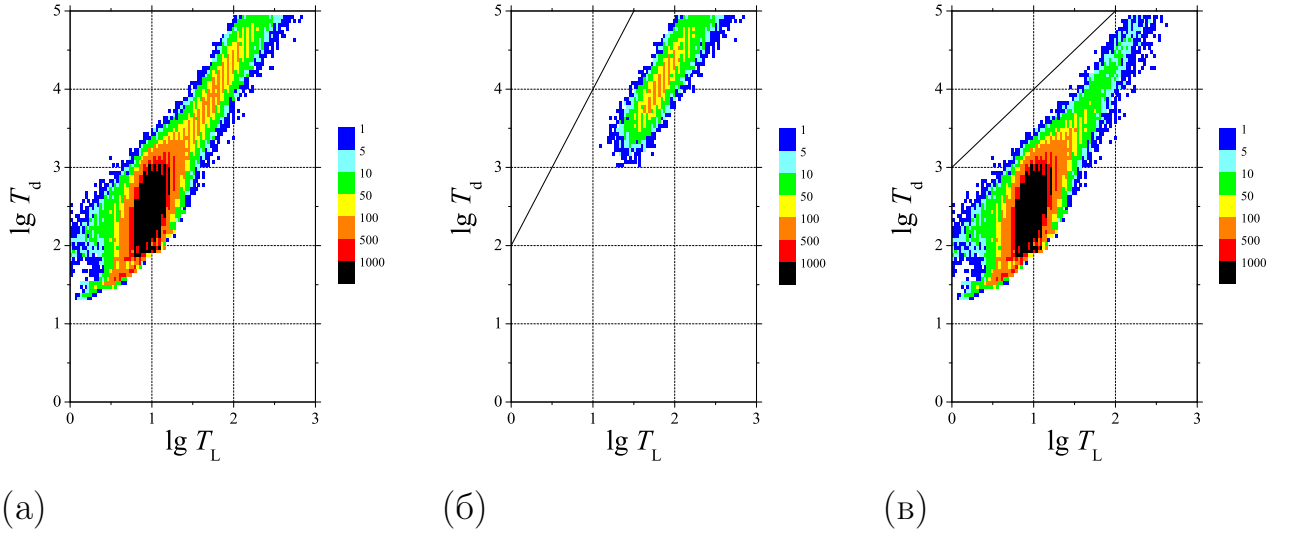


Рис. 5.12. График плотности для зависимости « $T_{L_1} - T_d$ » при $\Delta x \in [0, 1]$ (а), $\Delta x \in [0, 0.2]$ (б) и $\Delta x \in (0.2, 1]$ (в). На панели (б) линией нанесена квадратичная функция, на (в) — линейная.

веден график плотности точек (T_{L_1}, T_d) для всех $\Delta x \in [0, 1]$, на Рис. 5.12б — для $\Delta x \in [0, 0.2]$ (начальные данные вблизи резонанса 2:1), на Рис. 5.12в — для $\Delta x \in (0.2, 1]$ (начальные данные вдали от резонанса 2:1).

Для ориентации на Рис. 5.12б нанесена прямая с наклоном, соответствующим квадратичному закону $T_d \propto T_{L_1}^2$, а на Рис. 5.12в — линейному закону $T_d \propto T_{L_1}$. Видно, что на обоих рисунках верхние грани наблюдаемых зависимостей примерно следуют наклону нанесенных прямых. Таким образом, вблизи резонанса имеется квадратичная зависимость, соответствующая гамильтоновой перемежаемости 2-го типа, а вдали от него — линейная зависимость, соответствующая гамильтоновой перемежаемости 1-го типа. Заметим, что соответствующее различие имеет место (см. раздел 5.2.2) и для показателей степенных распределений времен распада вблизи и вдали от резонанса.

Рассмотрим поведение младших ХПЛ ($i \geq 2$), уже отчасти представленное на Рис. 5.11б и Рис. 5.11в. Аналогично подходу в случае МХПЛ, аппроксимируем зависимости « $T_{L_i} - T_d$ » при $i \geq 2$ степенными функциями $T_d \propto T_{L_i}^{\gamma_i}$. Полученные значения параметров аппроксимирующей функции приведены в Табл. 5.7 на интервале $T_d \in [2 \times 10^3, 10^5]$ и для всех $\Delta x \in [0, 1]$. Также указаны значения квадрата коэффициента корреляции $\mathcal{R}^2$ между ло-

Таблица 5.7. Параметры аппроксимации $T_d = CT_{L_i}^{\gamma_i}$ на интервале $T_d \in [2 \times 10^3, 10^5]$ для всех $\Delta x \in [0, 1]$.

i	γ_i	C	$\mathcal{R}^2$
1	1.71 ± 0.03	10.8 ± 1.7	0.881
2	1.42 ± 0.03	6.5 ± 1.1	0.833
3	1.10 ± 0.02	5.3 ± 0.7	0.934
4	1.09 ± 0.02	3.1 ± 0.5	0.906
5	1.06 ± 0.02	2.4 ± 0.4	0.898
6	1.02 ± 0.02	1.0 ± 0.2	0.888

кально осредненной зависимостью и аппроксимирующей функцией.

Осреднение проводится локально по T_{L_i} посредством вычисления средних значений T_{L_i} на отрезках $(T_d, T_d + \delta T_d)$. Ширина ячейки осреднения $\delta T_d = 100$ для всех i . Аппроксимация зависимостей для $i = 7, 8, 9$ не проводилась, так как в случае плоской задачи соответствующие ХПЛ равны нулю (обобщенные ляпуновские времена равны бесконечности). Для полноты приведены данные для $i = 1$.

В случае максимального показателя ($i = 1$) $\gamma_1 = 1.71$, что характеризует поведение зависимости «в целом». При предполагаемом наличии скрытой « V -структуры» это значение дает лишь весьма приблизительное представление о характере реальной зависимости. Чем выше порядок элемента ляпуновского спектра (чем больше i), тем ближе зависимость « $T_{L_i} - T_d$ » к линейной: $\gamma_i \rightarrow 1$ (см. Табл. 5.7). Какая-либо теория поведения младших ХПЛ в рассмотренной задаче пока отсутствует.

Таким образом, впервые для всех элементов ляпуновского спектра установлено существование степенных зависимостей «ляпуновское время – время распада» системы с показателями степени, стремящимися к единице при увеличении порядка элемента в спектре. Показано, что для МХПЛ данная зависимость вблизи резонанса 2:1 имеет квадратичный характер, а вдали от него — линейный.

§ 5.3 Устойчивость кратной звездной системы ι UMa

Исследование кратных звезд со слабой иерархией на предмет их устойчивости, проведенное Р. Я. Жучковым и В. В. Орловым [20, 53], выявило вероятных кандидатов в неустойчивые системы, среди них оказалась система Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114 = HIP 44127). Моделирование динамической эволюции системы ι UMa посредством численного интегрирования и использование теоретических критериев устойчивости в рамках задачи трех тел, проведенное в работах Р. Я. Жучкова и др. [19, 21], показало вероятную неустойчивость системы ι UMa. Далее подробно исследуем устойчивость системы ι UMa.

Система ι UMa изучается уже на протяжении двух веков. История исследования этой системы описана в работе [19]. Система является иерархической четверной, она состоит из двух двойных Aa и BC. Пару Aa составляют яркая компонента A с видимой величиной $V \approx 3.1^m$ и спектральным типом F0 V–IV; спутник a, вероятно, является белым карликом; компоненты B и C с видимыми величинами $V \approx 10.8^m$ и $V \approx 11.1^m$ имеют спектральные классы M3 V и M4 V.

Эгген [96] определил орбиту внутренней подсистемы BC; согласно его данным, период обращения составляет $P_{\text{in}} = 39.69 \pm 0.53$ лет. Элементы орбиты внешней подсистемы A–BC были определены Хопманном [118]; оказалось, что ее период составляет $P_{\text{out}} = 818$ лет. Последнее уточнение орбитальных параметров системы ι UMa проведено Р. Я. Жучковым и др. [19], где посредством метода параметров видимого движения (описание метода см., например, в монографии А. А. Киселева [25]) период определен как $P_{\text{out}} = 2084 \pm 649$ лет. Таким образом, степень иерархии системы оказалась значительно сильнее, чем считалось ранее, поскольку отношение $P_{\text{out}}/P_{\text{in}} \approx 20$ оказалось бóльшим в 2.5 раза. В работе [19] были определены и орбитальные параметры тесной подсистемы Aa, период которой составляет 12.2 ± 1.0 лет.

Далее будем рассматривать одну из подсистем (а именно, Aa) как одно тело (как и в [19, 21]). Это вполне приемлемое упрощение, поскольку пара Aa является тесной по сравнению с подсистемами Aa–BC и BC. Кроме того, суммарная масса пары Aa — $(2.7 \pm 0.4)M_{\odot}$, где $M_{\odot}$ — масса Солнца,

существенно больше, чем массы компонент В ($0.35M_{\odot}$) и С ($0.3M_{\odot}$). Таким образом, исследование устойчивости системы ι UMa проведено для случая пространственного движения системы из трех тел.

Под устойчивостью кратной системы подразумевается ее устойчивость по Лагранжу: система устойчива, если все движения компонент системы на неограниченных интервалах времени происходят в ограниченной области пространства. Неустойчивости кратной системы по Лагранжу практически равнозначна ее хаотичность, то есть отличие от нуля МХПЛ: хаотичность движения обычно приводит к распаду системы, то есть означает неустойчивость по Лагранжу.

Для изучения устойчивости системы ι UMa на представительных множествах начальных значений орбитальных параметров системы найдем области, в которых тройная система является неустойчивой. На этих же множествах вычислим ХПЛ и построим зависимость «ляпуновское время – время распада» системы.

5.3.1 Параметры системы ι UMa

Уравнения движения имеют вид (5.9), где полагаем $G = 4\pi^2$, массы компонент m_i выражены в массах Солнца $M_{\odot}$, все расстояния выражены в астрономических единицах, время — в годах. Используется барицентрическая прямоугольная система координат XYZ , основная плоскость XY проходит через центр масс кратной системы ортогонально лучу зрения. Для масс звезд берем значения $m_1 = 2.7M_{\odot}$ (суммарная масса пары Aa); $m_2 = 0.35M_{\odot}$, $m_3 = 0.3M_{\odot}$ (массы компонент В и С).

Начальные условия для интегрирования приведены в Табл. 5.8. Подсистеме ВС далее соответствует нижний индекс «in», а подсистеме Aa–BC — индекс «out». В начальный момент времени положения компонент на орбитах задаются значениями истинных аномалий $f = 349^\circ$ для внешней подсистемы Aa–BC и $f = 172^\circ$ для внутренней подсистемы ВС (на эпоху 2014.0).

В качестве аналитического критерия распада используется критерий, предложенный Стэндишем [181]. А именно, считается, что тройная система (тела m_a , m_b и m_c) распадается (то есть тело m_c покидает ее), если выпол-

Таблица 5.8. Наблюдаемые орбитальные параметры подсистем Aa–BC и BC. P — период обращения, e — эксцентриситет, i — наклон орбиты к картинной плоскости, Ω — долгота восходящего узла, ω — аргумент перицентра, T — эпоха прохождения перицентра.

	Aa–BC	BC
P , годы	2084 ± 649	39.69 ± 0.53
e	0.90 ± 0.02	0.32 ± 0.02
$i,^\circ$	54 ± 5	108 ± 1
$\Omega,^\circ$	133 ± 5	21
$\omega,^\circ$	24 ± 6	334
T , год	2028 ± 643	1918.58 ± 0.66
Источник	[19]	[96]

няются следующие условия:

$$\rho > r_*, \quad \frac{d\rho}{dt} > 0, \quad \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 \geq 2GM \left[\frac{1}{\rho} + \frac{m_a m_b}{(m_a + m_b)^2} \frac{r_*^2}{\rho^2 (\rho - r_*)} \right], \quad (5.13)$$

где ρ — расстояние между центром масс пары m_a – m_b и телом m_c ; $M = m_a + m_b + m_c$, $r_* = G(m_a m_b + m_a m_c + m_b m_c)/|E|$; E — полная энергия тройной системы (см. (5.12)); индексы a, b, c отличны друг от друга и могут принимать значения 1, 2 и 3.

При численном интегрировании уравнений движения (5.9) были приняты следующие параметры интегратора DOPRI8: максимальная длина шага интегрирования полагалась равной одному году, а локальная точность интегрирования — равной 10^{-12} . Интегрирование уравнений движения проводилось на промежутке времени $t = 10^6$ лет $\simeq 500P_{\text{out}}$ и завершалось либо при распаде системы (то есть при выполнении условий (5.13)), либо при далеком выбросе, когда расстояние от одной из звезд до любой из оставшихся двух превышало величину $10 a_{\text{out}}$, где в качестве a_{out} принята первоначальная величина большой полуоси орбиты внешней подсистемы. Практически такой выброс эквивалентен распаду системы.

При интегрировании контролировалось сохранение полной энергии системы. Полная энергия тройной системы (5.12) отрицательна, и в начале эво-

люции система связана. Относительное изменение энергии ΔE как в случаях, когда тройная система устойчива (то есть не распадается за все время интегрирования $t = 10^6$ лет), так и в случаях, когда система неустойчива (то есть имеет место распад при $t < 10^6$ лет), лежит в интервале $|\Delta E| \in [10^{-12}, 10^{-8}]$. В случае тесных сближений (столкновений) предусмотрена остановка интегрирования, однако тесных сближений в численных экспериментах не наблюдалось для всех рассмотренных начальных конфигураций системы.

5.3.2 Устойчивость системы ι UMa

Тогда как орбита подсистемы ВС хорошо определена [96], орбита подсистемы Аa–ВС известна [19] с довольно большой ошибкой (прежде всего в величине P), поскольку наблюдательными данными охвачена лишь небольшая часть ее орбитального периода. Поэтому устойчивость системы ι UMa исследовалась посредством варьирования P_{out} и e_{out} — начальных условий для широкой подсистемы Аa–ВС, полагая орбиту подсистемы ВС фиксированной.

Прежде всего посредством численного интегрирования уравнений движения (5.9) на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$ найдем границы областей устойчивости и сопоставим их с границами, найденными на основе различных теоретических критериев устойчивости [70, 193] и эмпирического критерия устойчивости [191]. Необходимо пояснить, что используемые теоретические критерии устойчивости [70, 193] получены на основе некоторых предположений и численных экспериментов, поэтому они являются скорее оценочными — позволяющими лишь грубо оценить границы областей устойчивости и таким образом прогнозировать возможность распада тройной системы.

Значения P_{out} берем на интервале от 1300 до 3400 лет, а e_{out} — от 0.56 до 0.96. Такой выбор начальных значений P_{out} и e_{out} обусловлен необходимостью предварительного определения границ областей устойчивых и неустойчивых движений. В качестве остальных начальных условий для интегрирования используем орбитальные параметры, приведенные в Табл. 5.8. Начальные значения орбитальных параметров задаем в узлах регулярной сетки 20×20 на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$. Устойчивыми системами будем считать системы, не распавшиеся за полное время интегрирования ($t = 10^6$ лет).

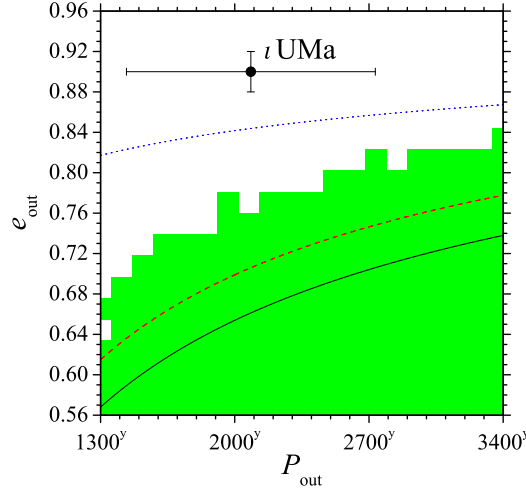


Рис. 5.13. Области устойчивости (зеленый цвет) и неустойчивости (белый цвет) на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$. Нанесены теоретические границы области устойчивости согласно критерию (5.14) (сплошная кривая) и критерию (5.15) (прерывистая кривая). Пунктиром отмечена граница области устойчивости согласно эмпирическому критерию (5.17). Точкой с барами, согласно Табл. 5.8, указано положение системы ι UMa. Период P_{out} в годах.

Результаты численного исследования устойчивости представлены на Рис. 5.13. Области устойчивости и неустойчивости отмечены разными цветами. На Рис. 5.13 нанесены теоретические границы области устойчивости, построенные согласно критерию Аарсета [70]:

$$\frac{a_{\text{out}}(1 - e_{\text{out}})}{a_{\text{in}}} > 2.8 \left[\left(1 + \frac{m_c}{(m_a + m_b)} \right) \frac{1 + e_{\text{out}}}{(1 - e_{\text{out}})^{1/2}} \right]^{2/5}, \quad (5.14)$$

а также критерию Валтонена и др. [193]:

$$\frac{a_{\text{out}}(1 - e_{\text{out}})}{a_{\text{in}}} > 3 \left(1 + \frac{m_c}{(m_a + m_b)} \right)^{1/3} \times \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2} \cos i - \cos^2 i \right)^{1/3} (1 - e_{\text{out}})^{-1/6}, \quad (5.15)$$

где i — угол между векторами угловых моментов внутренней и внешней подсистем, определяемый из формулы [10]:

$$\cos i = \cos i_{\text{in}} \cos i_{\text{out}} + \sin i_{\text{in}} \sin i_{\text{out}} \cos(\Omega_{\text{out}} - \Omega_{\text{in}}). \quad (5.16)$$

В соотношениях (5.14) и (5.15) массы m_a и m_b соответствуют компонентам внутренней тесной пары, а m_c — масса третьей удаленной компоненты трой-

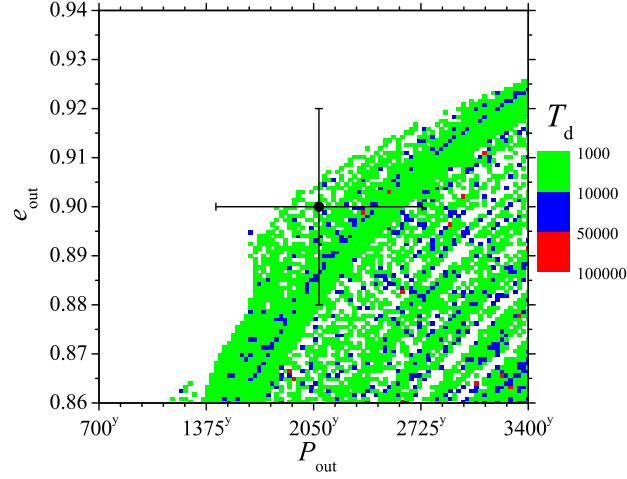


Рис. 5.14. Времена распада тройных систем на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$. Белый цвет соответствует системам, распадающимся на временах $T_d < 1\,000$ лет. Точкой с барами указано положение системы ι UMa. Время T_d и период P_{out} в годах.

ной системы. Система теоретически устойчива, если выполняется либо условие (5.14), либо условие (5.15). Из Рис. 5.13 видно, что критерий (5.15) лучше согласуется с результатами численного исследования (области с устойчивыми тройными системами на Рис. 5.13 расположены ниже кривых). По всей видимости, данное преимущество вызвано тем, что в критерии (5.15) учитывается наклон плоскости орбиты внутренней подсистемы к плоскости орбиты внешней подсистемы.

На Рис. 5.13 также нанесена граница области устойчивости согласно эмпирическому критерию Токовина [191]:

$$\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}(1 - e_{\text{out}})^3 > 5. \quad (5.17)$$

Из Рис. 5.13 следует, что эмпирический критерий (5.17) дает в данном случае завышенную (по эксцентриситету) границу устойчивости.

На Рис. 5.13 указано местоположение системы ι UMa с барами ошибок параметров P_{out} и e_{out} . Видно, что, согласно как примененным критериям устойчивости (5.14), (5.15) и (5.17), так и результатам численного исследования, система ι UMa расположена в зоне неустойчивости вдали от ее границ.

На Рис. 5.14 представлены вычисленные значения времен распада T_d тройных систем на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$. Указано местоположение системы

ι UMa с барями ошибок значений орбитальных параметров системы. Вычисления времен распада проведены для значений орбитальных параметров в узлах регулярной сетки 100×100 , наложенной на плоскость $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$. Области рассмотренных значений $P_{\text{out}} \in [700, 3400]$ лет и $e_{\text{out}} \in [0.86, 0.94]$ соответствуют удвоенным статистическим ошибкам $\pm 2\sigma$ значений этих орбитальных параметров у системы ι UMa (см. Табл. 5.8). При выбранном разрешении на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$ все системы распадаются на временах менее 10^5 лет, и в интервалы ошибок $\pm 2\sigma$ орбитальных параметров ι UMa устойчивые на больших промежутках времени тройные системы не попадают.

Рассмотрим теперь устойчивость тройной системы при разных углах наклона орбитальной плоскости i_{out} внешней двойной, когда значения P_{out} или e_{out} фиксированы. Орбитальные параметры варьируются в следующих пределах: $i_{\text{out}} \in [0^\circ, 180^\circ]$, $P_{\text{out}} \in [700, 3400]$ лет, $e_{\text{out}} \in [0.86, 0.94]$. Вычисления времен распада проведены для начальных условий в узлах регулярных сеток 100×100 , наложенных на плоскость $(P_{\text{out}}, i_{\text{out}})$ и на плоскость $(e_{\text{out}}, i_{\text{out}})$. Отметим, что под i_{out} подразумевается наклон орбиты внешней двойной к картинной плоскости, другая важная для динамики системы величина i — угол между плоскостями орбит внешней и внутренней систем, определяется по формуле (5.16).

На Рис. 5.15 представлены вычисленные значения времен распада тройных систем на плоскости $(P_{\text{out}}, i_{\text{out}})$ и на плоскости $(e_{\text{out}}, i_{\text{out}})$. Численное интегрирование показывает, что в обоих случаях все рассмотренные системы распадаются на временах менее 5×10^4 лет. Отметим, что система ι UMa располагается в областях, где $T_d \in [10^3, 10^4]$ лет, а не в обширных областях, где $T_d < 1000$ лет. То есть исходная система распадается, но распадается за умеренное не слишком короткое время. Этот факт может служить косвенным свидетельством в пользу достоверности принятого значения i_{out} .

Как показывает применение критерия устойчивости (5.15), и при фиксированном $e_{\text{out}} = 0.9$, и при фиксированном $P_{\text{out}} = 2084$ лет, этот критерий, учитывающий взаимное наклонение орбит подсистем, не выполняется как на плоскости $(P_{\text{out}}, i_{\text{out}})$, так и на плоскости $(e_{\text{out}}, i_{\text{out}})$, для рассматриваемых интервалов варьирования значений этих орбитальных параметров.

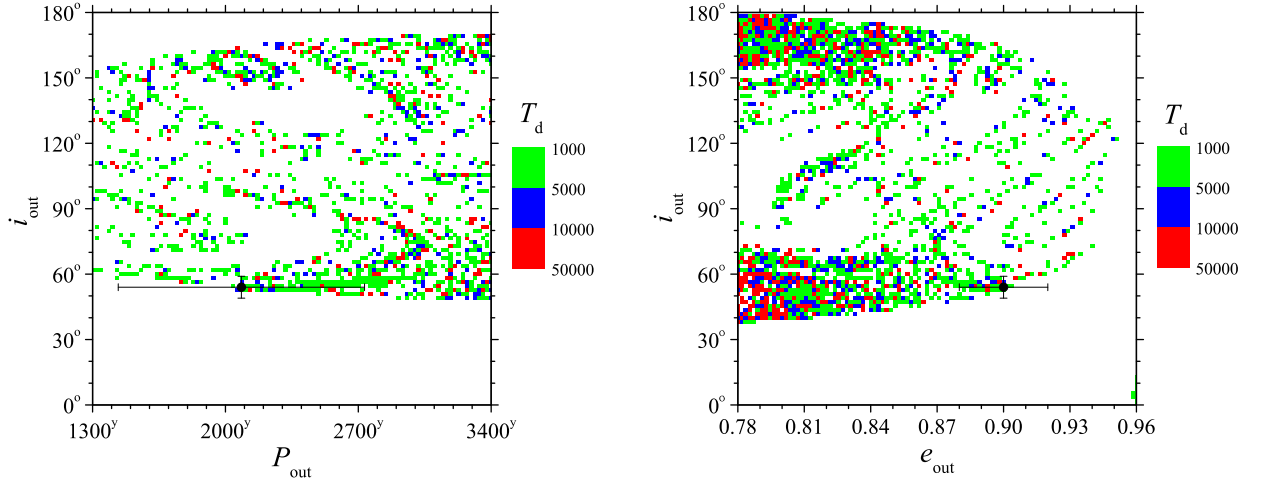


Рис. 5.15. Времена распада тройных систем на плоскости $(P_{\text{out}}, i_{\text{out}})$ при $e_{\text{out}} = 0.9$, а также на плоскости $(e_{\text{out}}, i_{\text{out}})$ при $P_{\text{out}} = 2084$ лет. Белый цвет соответствует системам, распадающимся за время $T_d < 1000$ лет. Точкой с барами указано положение системы ι UMa. Время T_d и период P_{out} в годах.

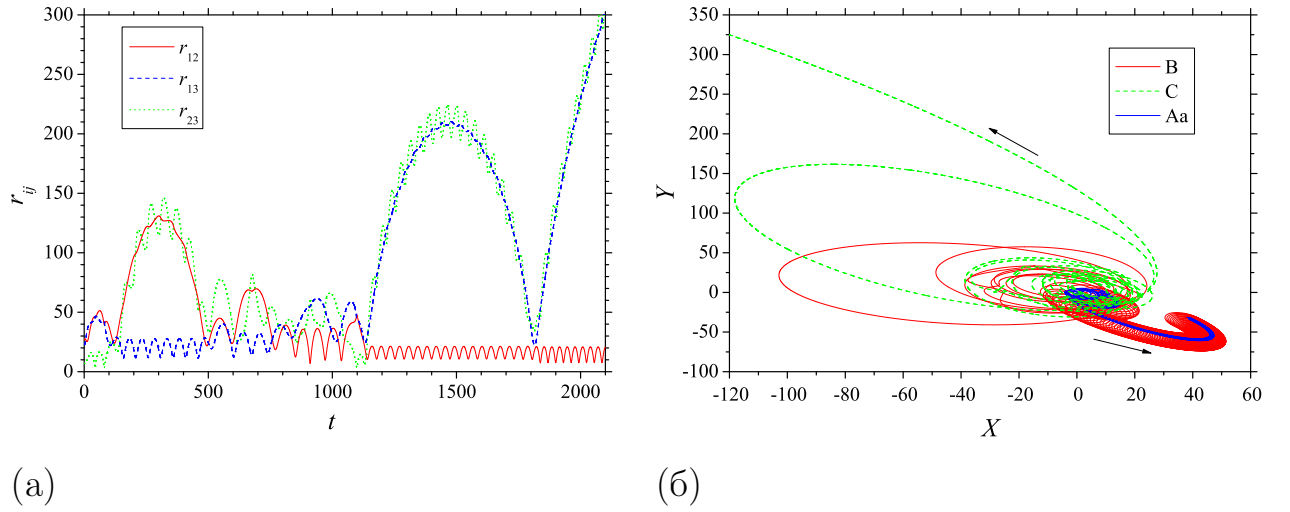


Рис. 5.16. Орбитальная эволюция системы ι UMa. (а) Зависимости от времени взаимных расстояний (выраженных в а.е.) между компонентами: r_{12} — расстояние между Aa и B, r_{13} — расстояние между Aa и C, r_{23} — расстояние между B и C. Время в годах. (б) Проекция траекторий компонент системы Aa–BC на плоскость XY в барицентрической системе координат XYZ . Стрелками обозначено направление эволюции системы.

На Рис. 5.16 представлены результаты численного моделирования орбитальной динамики системы ι UMa для начальных значений параметров,

приведенных в Табл. 5.8. Интервал времени интегрирования равен 3 000 лет. На Рис. 5.16а представлены (на интервале времени 2 100 лет, немного превышающем время связанного состояния системы) зависимости взаимных расстояний (выраженных в а.е.) между компонентами системы: r_{12} — расстояние между Aa (напомним, что эта пара рассматривается как одно тело) и B , r_{13} — расстояние между Aa и C , и r_{23} — расстояние между B и C . При $t \approx 120$ лет происходит обмен компонентами во внутренней подсистеме: имеет место короткий выброс компоненты B , с образованием внутренней двойной подсистемы $Aa-C$. Далее, на интервале времени $t = 500-1150$ лет имеют место еще несколько последовательных коротких выбросов компонент B и C , а при $t \approx 1150$ лет происходит длинный выброс компоненты C . При $t \approx 1800$ лет происходит сближение компоненты C с парой $Aa-B$, после чего система $Aa-BC$ распадается с уходом компоненты C . На Рис. 5.16б представлены проекции траекторий компонент на плоскость XY барицентрической системы координат XYZ . Виден распад системы с образованием тесной финальной двойной $Aa-B$ и уходом компоненты C .

5.3.3 Ляпуновское время системы ι UMa

Представленные на Рис. 5.13–5.16 результаты расчетов позволяют сделать вывод о неустойчивом характере движения системы ι UMa. Оценим величину ляпуновского времени системы ι UMa. Для этого вычислим ХПЛ при помощи HQRV-метода. Как и в § 5.2 вычислялся весь спектр ХПЛ, но для дальнейшего анализа были использованы лишь максимальные ХПЛ, то есть значения L_1 . Ляпуновское время определяется как величина, обратная максимальному ХПЛ: $T_L = 1/L_1$.

Вычисление ХПЛ проводилось одновременно с определением значений времен распада T_d для тех же самых начальных условий, что и на Рис. 5.14. На Рис. 5.17 представлены вычисленные на плоскости (P_{out}, e_{out}) значения ляпуновских времен тройных систем. На рисунке указано местоположение системы ι UMa с барами наблюдательных ошибок его определения на данной плоскости. Ляпуновское время системы ι UMa оказывается весьма малым: в прямоугольник ошибок $\pm 2\sigma$ значений орбитальных параметров попадают

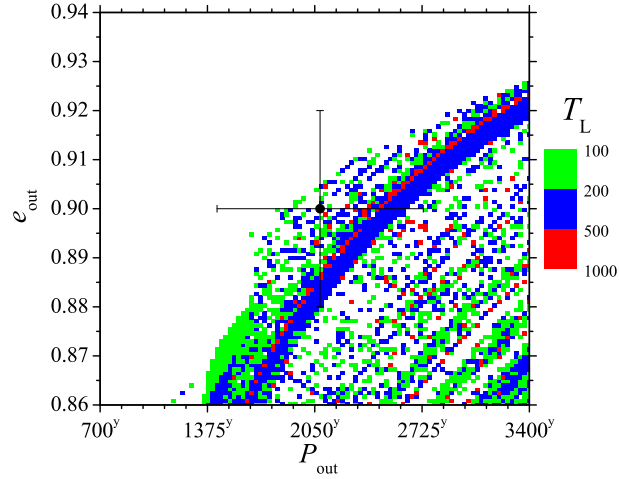


Рис. 5.17. Ляпуновские времена тройных систем на плоскости $(P_{\text{out}}, e_{\text{out}})$. Белый цвет соответствует системам с ляпуновским временем $T_L < 100$ лет. Точкой с барами указано положение системы ι UMa. Время T_L и период P_{out} в годах.

только системы с ляпуновским временем менее 1 000 лет. Отметим, что это значение составляет $\simeq P_{\text{out}}/2$.

Проведенное в § 5.2 исследование динамики тройных систем показало наличие в зависимости « $T_L - T_d$ » двух компонент разной природы (см. [169, 171, 175]), а именно, данная зависимость имеет линейную и квадратичную компоненты. Определим характер зависимости « $T_L - T_d$ » для системы ι UMa.

На Рис. 5.18а представлена статистическая зависимость « $T_L - T_d$ », построенная на основе данных Рис. 5.14 и 5.17, и эти же данные представлены на Рис. 5.18б в виде графика плотности точек (T_L, T_d) . График плотности строился посредством подсчета количества точек, попавших в ячейки сетки, наложенной на плоскость (T_L, T_d) . Сетка задана путем разбиения интервалов $T_L \in [0, 10^4]$ лет и $T_d \in [0, 10^5]$ лет в логарифмической шкале на 100 равных отрезков каждый.

В логарифмических шкалах на Рис. 5.18 нанесены линейная и квадратичная функции (две штриховые прямые линии разного наклона). Как видим, полученная статистическая зависимость « $T_L - T_d$ » ограничена снизу и сверху этими прямыми. Таким образом, в согласии с результатами, полученными в § 5.2, можно сделать вывод о наличии в полученной зависимости двух компонент, причем квадратичная составляющая заметно доминирует.

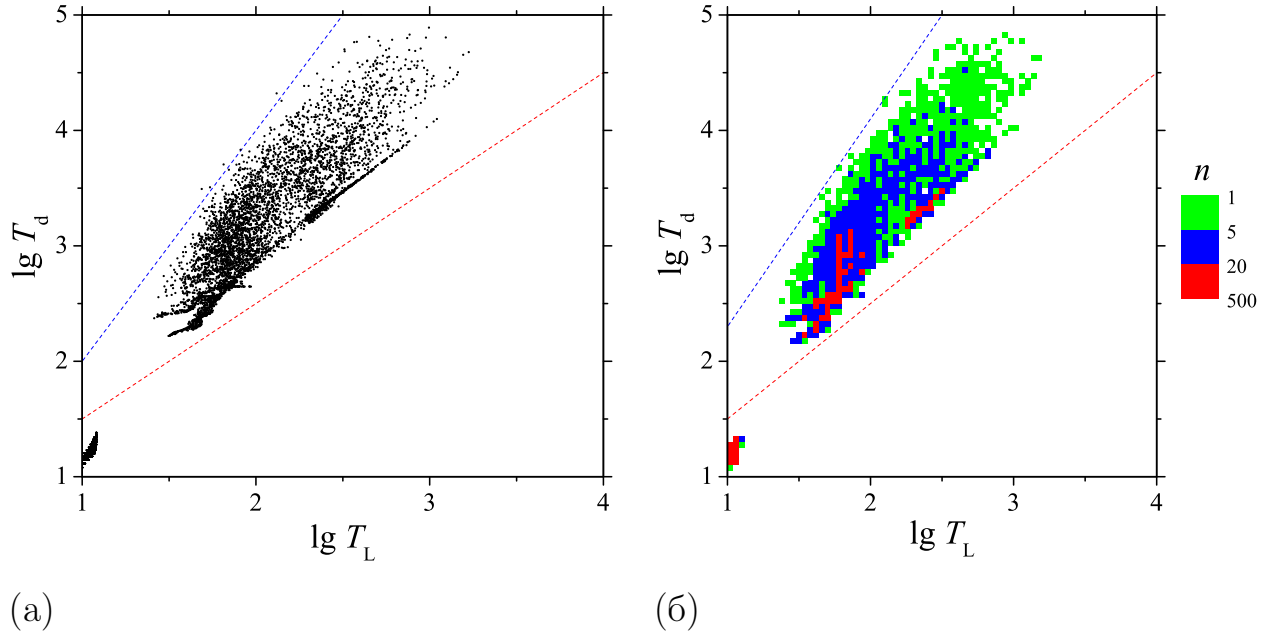


Рис. 5.18. (а) Зависимость «ляпуновское время – время распада» для системы ι UMa. (б) График плотности этой зависимости. Нанесены линейная (красная линия) и квадратичная (синяя линия) функции. Времена T_L и T_d в годах.

§ 5.4 Вековая динамика планеты в системе 16 Cyg

Рассмотрим динамический хаос в орбитальной динамике планет в кратных звездных системах. Для этого подробно изучим вековую орбитальную динамику планеты в системе 16 Cyg (16 Лебедя).

Широкая визуально-двойная звездная система 16 Cyg состоит из компонент 16 Cyg A (HD 186408) и 16 Cyg B (HD 186427) спектральных классов G2V и G5V с массами [115]: $(1.046 \pm 0.014)M_\odot$ и $(0.992 \pm 0.012)M_\odot$, соответственно, где $M_\odot$ — масса Солнца. Обе звезды являются относительно яркими $V \sim 6^m$ и расположены от нас на расстоянии ≈ 21 пк. Орбита системы 16 Cyg AB была подробно рассмотрена в работах А. А. Киселева и Л. Г. Романенко [26] и Хаузера и Марси [115]. Согласно [115] орбитальный период системы 16 Cyg и эксцентриситет ее орбиты составляют: $P = 18\,212$ лет и $e = 0.862$.

Хаузер и Марси [115] указали на возможность существования тесной пары из компоненты А и красного карлика спектрального класса М с массой $\approx 0.4M_\odot$ — компоненты С. На наличие в системе 16 Cyg третьей компоненты

указано в работах [152, 157]. Так как влияние компоненты С на динамику пары А–В весьма мало из-за большой величины орбитального периода двойной, будем рассматривать далее систему 16 Cyg как двойную звездную систему.

5.4.1 Планетная система 16 Cyg

Орбита планеты в системе 16 Cyg

В 1997 г. Кочран и др. [83] обнаружили у компоненты 16 Cyg В планету с наибольшей известной на тот момент величиной эксцентриситета орбиты $e_p = 0.634 \pm 0.082$. Установленный [83] орбитальный период планеты 16 Cyg Вb составляет $P_p = 800.8 \pm 11.7$ суток, а масса $m_p = 1.5m_J / \sin i_p$, где m_J — масса Юпитера, i_p — наклонение орбиты планеты. Сразу же встал вопрос о причине значительной величины эксцентриситета орбиты планеты.

Численное моделирование, проведенное Мазехом и др. [143], показало наличие долгопериодических (с периодом в несколько десятков миллионов лет) колебаний величины эксцентриситета орбиты 16 Cyg Вb с амплитудой около 0.8 из-за возмущений со стороны удаленной компоненты 16 Cyg А. Также было установлено, что амплитуда этих колебаний существенно зависит от величины угла между плоскостью орбиты планеты и плоскостью орбиты звездной системы.

Сделанные в [143] выводы указывают на то, что в случае планетной системы 16 Cyg имеет место резонанс Лидова–Козаи [28, 130], что отметили Хольман и др. [117]. Благодаря действию резонансного механизма Лидова–Козаи, первоначально малая величина e_p может достигать больших значений, при этом наблюдаются колебания e_p со временем с большой амплитудой.

Предполагая, что параметры планетной системы 16 Cyg таковы, что в фазовом пространстве она расположена в окрестности сепаратрисы резонанса Лидова–Козаи, Хольман и др. [117] указали на возможность перехода от либрационного движения на резонансе к вращательному движению и наоборот с периодичностью около 100 миллионов лет. При таком переходе траектория фазового пространства пересекает сепаратрису резонанса Лидова–Козаи, движение в окрестности сепаратрисы является хаотическим. Поэтому Хольман и др. [117] предположили наличие хаоса в орбитальном

движении планеты, с величиной ляпуновского времени (времени предсказуемой динамики системы) около 100 миллионов лет. Отметим, что для точного определения характера орбитальной динамики (хаотическая/регулярная) планеты необходимо использовать соответствующие методы, позволяющие выявлять хаотическое поведение в динамических системах, например, вычисление ХПЛ.

Исследование орбитальной динамики планеты 16 Cyg Bb недавно было проведено Плаваловой и Соловой [157]. Посредством использования теоретического критерия устойчивости планетной орбиты на основе предела Роша [97], были определены области возможных значений долготы восходящего узла Ω_p орбиты планеты. Теоретические выводы были подтверждены посредством численного интегрирования уравнений движения. Ранее в работе [117] было предположено, что $i_p = 45^\circ\text{--}135^\circ$. Плавалова и Соловая [157] показали, что для 16 Cyg Bb при $i_p = 45^\circ$ для устойчивой планетной орбиты $\Omega_p \in [14^\circ, 249^\circ]$, а при $i_p = 135^\circ$ — орбита планеты устойчива для $\Omega_p \in [0^\circ, 74^\circ]$ или $\Omega_p \in [198^\circ, 360^\circ]$. Также в работе [157], в соответствии с принятой величиной $i_p = 45^\circ$, были определены масса и большая полуось орбиты планеты: $m_p = (2.38 \pm 0.04)m_J$, $a_p = 1.693$ а.е.

В работах Ли и др. [134] и Литвика и Наоц [136] была рассмотрена задача о динамике тел в иерархической тройной системе. С точностью до третьего порядка величины в разложении гравитационного потенциала по степеням $\alpha = a_p/a$, где a и a_p — большие полуоси орбит внешней (звездной) и внутренней (планетной) подсистем, был выведен дважды осредненный гамильтониан ограниченной ($m_p \rightarrow 0$) задачи трех тел в канонических элементах. Кроме того, в работах [134, 136] были построены представительные сечения фазового пространства для динамики тройной системы и изучены основные особенности, наблюдаемые на сечениях при разных значениях параметров системы. Поскольку ранее Хольман и др. [117] предполагали близость планетной системы 16 Cyg к сепаратрисе резонанса Лидова–Козаи, то, построив сечения фазового пространства для этой системы и определив ее положение по отношению к сепаратрисе резонанса Лидова–Козаи, можно оценить возможность существования хаотического движения в вековой орбитальной

динамике планеты 16 Cyg Bb.

Далее подробно рассмотрим долговременную орбитальную динамику планетной системы 16 Cyg. На представительных множествах значений орбитальных параметров планетной системы вычислим ХПЛ и получим оценки ляпуновского времени. Подробно рассмотрим орбитальную динамику для нескольких возможных моделей орбиты планетной системы. Для этих моделей построим и проведем анализ представительных сечений фазового пространства системы.

Численное интегрирование уравнений движения

Рассмотрим динамику тройной системы, состоящей из двух звезд — 16 Cyg A, 16 Cyg B и планеты — 16 Cyg Bb. Уравнения движения имеют вид (5.9), где принято $G = 4\pi^2$. Массы звезд выражены в массах Солнца $M_\odot$, масса планеты выражена в массах Юпитера m_J , время t — в годах, расстояния в астрономических единицах. Обозначим через m_A и m_B массы 16 Cyg A и 16 Cyg B, соответственно, а через m_p — массу 16 Cyg Bb. Примем [115]: $m_A = 1.046M_\odot$, $m_B = 0.992M_\odot$ и [157]: $m_p = 2.38m_J$.

При численном интегрировании были приняты следующие параметры интегратора DOPRI8: максимальная величина шага интегрирования по времени была положена равной одному году (половине орбитального периода планеты), а локальная точность интегрирования — равной 10^{-12} .

Численное интегрирование продолжалось либо до конца заданного промежутка времени, либо до распада системы. В качестве критерия распада тройной системы использовался аналитический критерий (5.13), использовавшийся в § 5.3 при исследовании устойчивости системы ι UMa.

При интегрировании уравнений движения контролировалось расстояние r от планеты до звезды, вокруг которой она обращается (до компоненты 16 Cyg B). Если это расстояние в перицентре орбиты было меньше чем радиус сферы Роша [97, 157]:

$$r_R = \frac{0.49\nu^{2/3}}{0.6\nu^{2/3} + \ln(1 + \nu)},$$

где $\nu = m_p/m_B \approx 0.00229$, то интегрирование останавливалось — считалось,

что планета разрушается под действием приливных сил со стороны компоненты 16 Cyg B. Для принятых значений параметров системы $r_R \approx 0.0634$ а.е.

Интегрирование также останавливалось, если расстояние r было больше радиуса сферы Хилла компоненты 16 Cyg B, величина которого оценивалась по формуле [18]:

$$r_H = a(1 - e) \left(\mu^{1/3} - \frac{1}{3}\mu^{2/3} - \frac{1}{9}\mu \right),$$

здесь a , e — большая полуось и эксцентриситет орбиты звездной системы, $\mu = m_B/m_A \approx 0.948$. Предполагалось, что при $r > r_H$ планетная орбита является неустойчивой. Для принятых значений параметров системы $r_H \approx 59.08$ а.е.

При численном интегрировании контролировалось сохранение полной энергии (5.12) тройной системы. Относительное изменение энергии $|\Delta E| \in [10^{-11}, 10^{-8}]$ при интегрировании на интервале $t = 10^6$ лет. Контроль изменения величины энергии системы позволял фиксировать наличие тесных сближений (столкновений) тел. Критерием наличия тесного сближения являлось значительное возрастание величины $|\Delta E|$, при этом интегратор DOPRI8 автоматически уменьшал шаг интегрирования, что приводило к существенному увеличению времени интегрирования. Поэтому интегрирование останавливалось при достижении $|\Delta E| = 10^{-5}$ (данное значение определено экспериментально) и фиксировалось наличие тесного сближения.

5.4.2 Ляпуновское время планетной системы 16 Cyg

Посредством вычисления ХПЛ на множестве начальных значений параметров, задающих орбиту планеты 16 Cyg Bb, определим характер ее орбитальной динамики — является она регулярной или хаотической. Оценим величину ляпуновского времени для планетной системы 16 Cyg. Как обычно, ляпуновское время определяем как величину, обратную максимальному ХПЛ — $T_L = 1/L_1$.

Орбиту звездной системы 16 Cyg AB будем предполагать фиксированной, принятые начальные значения ее параметров указаны в Табл. 5.9. Так как орбитальный период планеты 16 Cyg Bb на четыре порядка меньше пери-

Таблица 5.9. Принятые, согласно [115, 157], орбитальные параметры системы 16 Cyg. P — орбитальный период, a , e , i — большая полуось, эксцентриситет и наклонение орбиты, Ω — долгота восходящего узла, ϖ — аргумент перицентра, T — эпоха прохождения перицентра.

Подсистема	P , в годах	a , а.е.	e	i , $^\circ$	Ω , $^\circ$	ϖ , $^\circ$	T , год
A–B	18 212.2	877.62	0.862	135.44	313.44	31.721	43.64
B–Bb	2.189	1.693	0.689	45	20	83.4	2015.0

ода звездной системы, при интегрировании полагалось, что движение планеты начинается в перицентре ее орбиты — в начальный момент времени истинная аномалия $f_p = 0^\circ$, а эпоха прохождения перицентра была положена равной $T = 2015.0$ год. (Точное значение T для планетной орбиты приведено в [83]). Используя элементы орбиты звездной системы, приведенные Табл. 5.9, получим, что величина истинной аномалии для звездной орбиты на эпоху 2015.0 год равна $f = 39^\circ$.

Величины ХПЛ и значения ляпуновских времен для планетной системы 16 Cyg определим на плоскостях начальных значений орбитальных параметров планеты: (a_p, e_p) , (i_p, e_p) , (Ω_p, e_p) и (Ω_p, i_p) . Значения a_p берем на интервале от 1 до 5 а.е, e_p — от 0 до 0.9, i_p — от 0° до 180° , Ω_p — от 0° до 360° . При варьировании начальных значений параметров орбиты планеты на указанных плоскостях остальные элементы орбиты были фиксированы, их начальные значения приведены в Табл. 5.9. В случае, когда i_p или Ω_p фиксированы, для них были приняты начальные значения: $i_p = 45^\circ$ и $\Omega_p = 20^\circ$, соответствующие устойчивой, согласно [157], орбите планетной системы.

Начальные значения варьируемых орбитальных параметров планеты задаем в узлах регулярной сетки 10×10 на всех рассмотренных плоскостях. Интегрирование уравнений движения и вычисление ХПЛ проводилось на интервале времени в 10^6 лет ($\approx 450\,000$ орбитальных периодов планеты). На указанном интервале времени для всех рассмотренных начальных значений орбитальных параметров планетной системы случаев распада тройной системы и столкновений/тесных сближений компонент системы не наблюда-

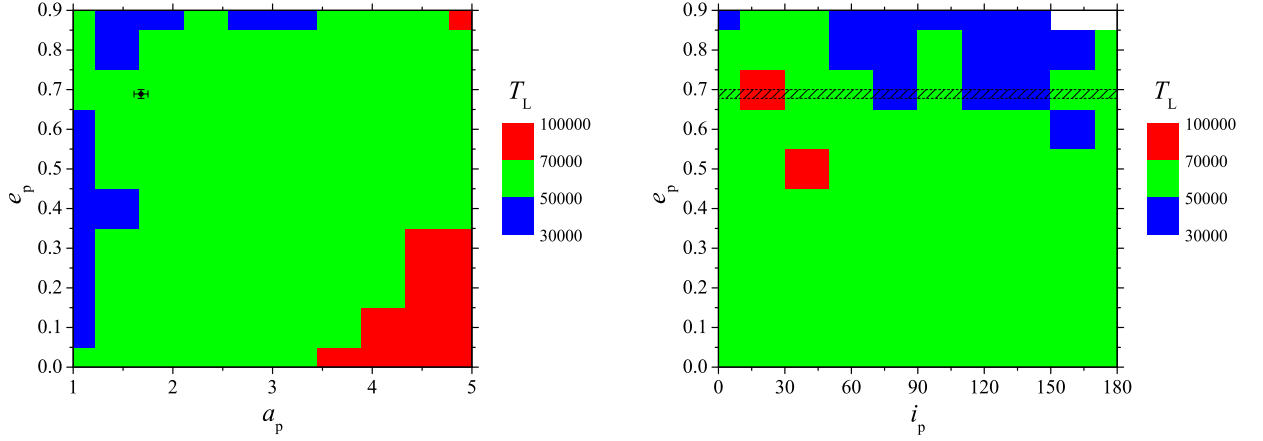


Рис. 5.19. Ляпуновские времена (в годах) планетной системы 16 Cyg. Указано, согласно [115, 157], положение планеты 16 Cyg Bb (слева — точка с ба-рами, справа — заштрихованная полоса) с учетом ошибок определения ее орбитальных параметров. Белый цвет соответствует $T_L < 30\,000$ лет.

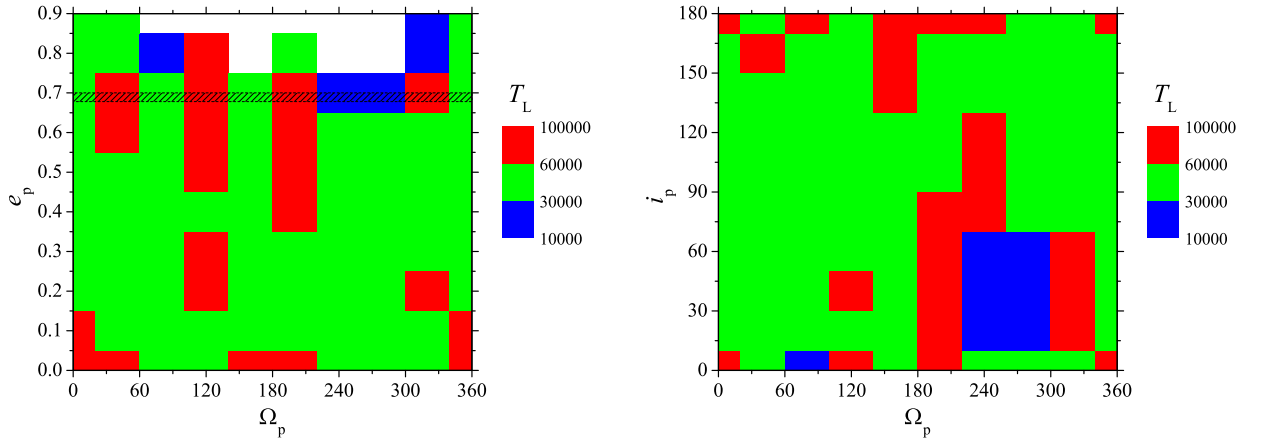


Рис. 5.20. Ляпуновские времена (в годах) планетной системы 16 Cyg. На ле-вом рисунке указано, согласно [115, 157], положение планеты 16 Cyg Bb (за-штрихованная полоса) с учетом ошибок определения ее орбитальных пара-метров. Белый цвет соответствует $T_L < 10\,000$ лет.

лось. Вычисление ХПЛ проводилось при помощи HQRV-метода. Вычислялся весь спектр ХПЛ, но для дальнейшего анализа использовались лишь значе-ния максимального ХПЛ, то есть значения L_1 . Значения остальных ХПЛ использовались для контроля точности вычислений.

Вычисление ХПЛ для всех рассмотренных множеств начальных зна-чений орбитальных параметров планеты показало, что динамика планетной

системы 16 Cyg является регулярной (величина МХПЛ убывает с увеличением интервала времени на котором он вычисляется), по крайней мере на промежутке времени в 10^6 лет.

На Рис. 5.19 и 5.20 представлены вычисленные величины ляпуновских времен. Из Рис. 5.19 видно, что на плоскостях (a_p, e_p) и (i_p, e_p) ляпуновское время планетной системы 16 Cyg составляет более 30 000 лет. Из Рис. 5.20 следует, что на плоскости (Ω_p, e_p) планетная система 16 Cyg может находиться в области где $10^4 \leq T_L \leq 3 \times 10^4$ лет. На плоскости (Ω_p, i_p) также имеются области с относительно малыми ляпуновскими временами (10 000–30 000 лет). Тем не менее из анализа Рис. 5.19 и 5.20 можно сделать вывод, что для большинства возможных значений орбитальных параметров планетной системы 16 Cyg ляпуновское время составляет 30 000–100 000 лет.

Отметим, что массовое вычисление ХПЛ на множестве допустимых орбитальных параметров планеты проводилось на интервале времени $t = 10^6$ лет. Вычисление ХПЛ на большем интервале времени требует значительно больших вычислительных ресурсов, чем было доступно. Поэтому, полученные оценки ляпуновского времени представляют собой нижнюю границу его возможной величины.

5.4.3 Модели планетной системы 16 Cyg

Поскольку значения параметров орбиты планеты i_p и Ω_p неизвестны, были рассмотрены четыре модели, соответствующие различным возможным значениям этих параметров. Хольман и др. [117] предположили, что для орбиты 16 Cyg Bb величина $i_p = 45^\circ$ – 135° . Поэтому как и в работе Плаваловой и Соловой [157] было принято $i_p = 45^\circ, 135^\circ$. Положим $\Omega_p = 0^\circ, 20^\circ$, аналогичные значения этой величины использовались в работе [157]. Согласно [157], орбита планеты при $i_p = 45^\circ$ и $\Omega_p = 0^\circ$ является неустойчивой, а для оставшихся трех случаев — устойчивой.

Далее для всех четырех моделей построим зависимости величин ХПЛ от времени их вычисления и рассмотрим динамику орбитальных элементов планеты на длительном интервале времени интегрирования. Интегрирование уравнений движения проведем на максимально возможном интервале време-

Таблица 5.10. Значения угла i между векторами угловых моментов планетной и звездной систем, вычисленные по формуле (5.16). i_p , Ω_p — наклонение и долгота восходящего узла орбиты планетной системы к картинной плоскости. Для звездной системы принято: $i_* = 135.44^\circ$, $\Omega_* = 313.44^\circ$.

Модель	$i_p, ^\circ$	$\Omega_p, ^\circ$	$i, ^\circ$
1	45	0	99.36
2	45	20	107.84
3	135	0	32.33
4	135	20	45.48

ни до момента тесного сближения тел или распада системы (см. критерии остановки интегрирования в разделе 5.4.1).

Важной величиной, характеризующей динамику тройной системы, является угол i между плоскостями орбит (или векторами угловых моментов) ее подсистем (в данном случае между орбитами планетной и звездной подсистем), определяемый из формулы (5.16), где принято: $i_{\text{in}} \equiv i_p$, $i_{\text{out}} \equiv i_*$, $\Omega_{\text{in}} \equiv \Omega_p$ и $\Omega_{\text{out}} \equiv \Omega_*$. Под i_p и i_* подразумеваются наклонения орбит планетной и звездной систем к картинной плоскости (плоскости, ортогональной лучу зрения), а Ω_p и Ω_* соответствуют долготам восходящих узлов орбит для указанных систем. Значения этих параметров, принятые для звездной системы, приведены в Табл. 5.9. Вычисленные по формуле (5.16) значения i для всех четырех рассмотренных моделей приведены в Табл. 5.10. Видно, что модели (1) и (2) соответствуют обратной орбите планеты (по отношению к орбите звездной системы), а модели (3) и (4) — прямой орбите.

На Рис. 5.21 представлены полученные зависимости текущих значений трех максимальных в спектре ХПЛ $L_1 > L_2 > L_3$ от времени на котором они вычисляются. На Рис. 5.22 приведены зависимости элементов орбиты планеты, построенные для тех же самых начальных значений, для которых вычислялись ХПЛ. На Рис. 5.21 и 5.22 представлены зависимости только для моделей (1) и (4), поскольку характер зависимостей для модели (2) схож с

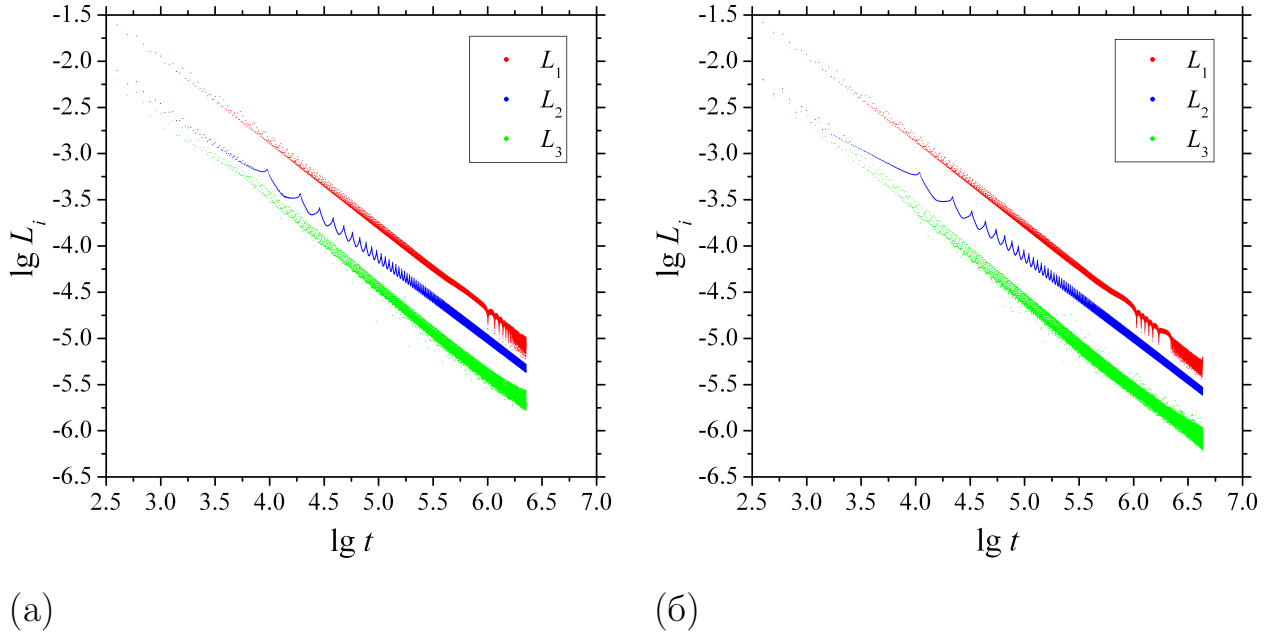


Рис. 5.21. Зависимость текущих значений трех максимальных в спектре ХПЛ $L_1 > L_2 > L_3$ от времени на котором они вычисляются для планетной системы 16 Cyg. (а) Модель (1): $i_p = 45^\circ$, $\Omega_p = 0^\circ$. (б) Модель (4): $i_p = 135^\circ$, $\Omega_p = 20^\circ$. Время в годах.

характером зависимостей для модели (4), а для модели (3) — с моделью (1). На графиках с зависимостями от времени величины i_p — оскулирующего наклона орбиты планеты к картинной плоскости также нанесены зависимости от времени угла i между плоскостями орбит звездной и планетной систем, вычисленные по формуле (5.16).

В случаях моделей (1) и (3) при $t \approx 2 \times 10^6$ лет, а для моделей (2) и (4) при $t \approx 4 \times 10^6$ лет интегрирование останавливалось из-за тесного сближения между телами. Для всех моделей характер зависимостей ХПЛ от времени на котором они вычисляются (в логарифмических координатах они представляют собой в среднем линейно убывающие функции) указывает на регулярный характер движения, по крайней мере до момента тесного сближения тел.

Отметим основные особенности в поведении величин оскулирующих элементов планетной орбиты (см. Рис. 5.22) на рассмотренном интервале времени интегрирования. С течением времени величина a_p остается в среднем постоянной. Ближе к концу интервала интегрирования наблюдаются «выбросы» величины a_p относительно ее среднего значения. Амплитуда выбро-

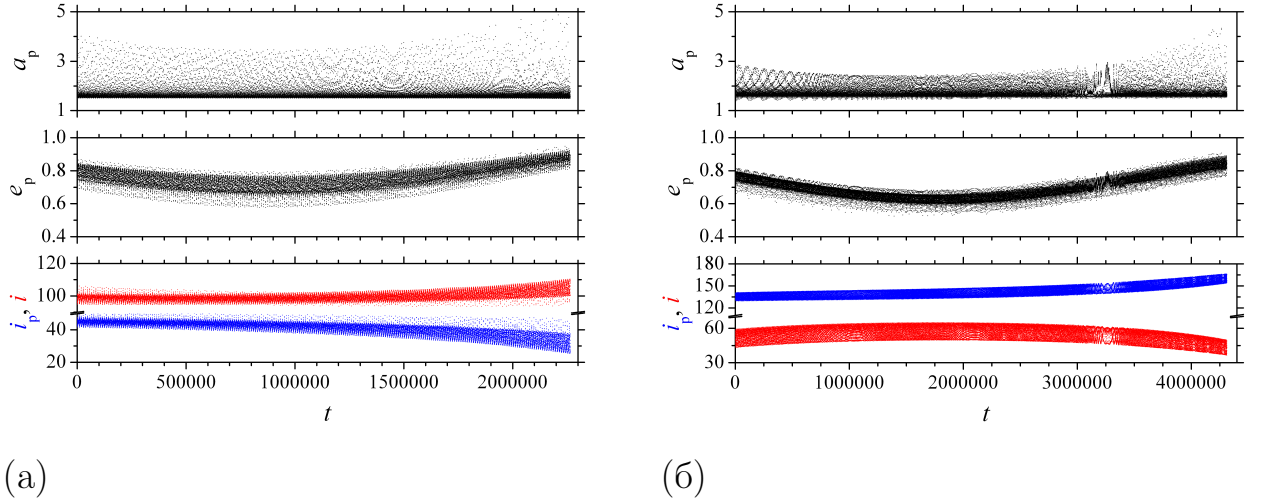


Рис. 5.22. Зависимости элементов орбиты планеты 16 Cyg Bb от времени. (а) Модель (1): начальные значения $i_p = 45^\circ$, $\Omega_p = 0^\circ$. (б) Модель (4): начальные значения $i_p = 135^\circ$, $\Omega_p = 20^\circ$. Время в годах. Величина большой полуоси орбиты в а.е. Наклонение орбиты в градусах. На графике наклона синий цвет соответствует — i_p , красный цвет — i .

сов увеличивается с приближением к моменту времени, когда произошла остановка интегрирования из-за фиксации тесного сближения тел системы. Величина e_p сначала убывает, затем возрастает, при этом в ее поведении видимо присутствует долговременная периодическая компонента, в чем можно было бы убедиться, выполнив интегрирование на периоде циркуляции ϖ_p (о периоде циркуляции долготы перигенция см., например, работу [130]).

В поведении величины i_p со временем для моделей (1) и (2) наблюдается ее убывание, а для моделей (3) и (4) — возрастание. Поведение величины i в этих моделях тоже различно, в моделях (1) и (2) наклонение орбиты планеты к плоскости звездной системы в среднем возрастает, а в моделях (3) и (4) — убывает. Из результатов, представленных на Рис. 5.22 можно сделать предположение о наличии в модели (1) колебаний величин e_p и i с периодом $\sim 3 \times 10^6$ лет, а в модели (4) с периодом $\sim 6 \times 10^6$ лет. Отметим, что в случае нахождения системы в резонансе Лидова–Козаи должны наблюдаться периодические колебания e_p и i в противофазе для прямой орбиты и синфазные колебания для обратной орбиты планеты.

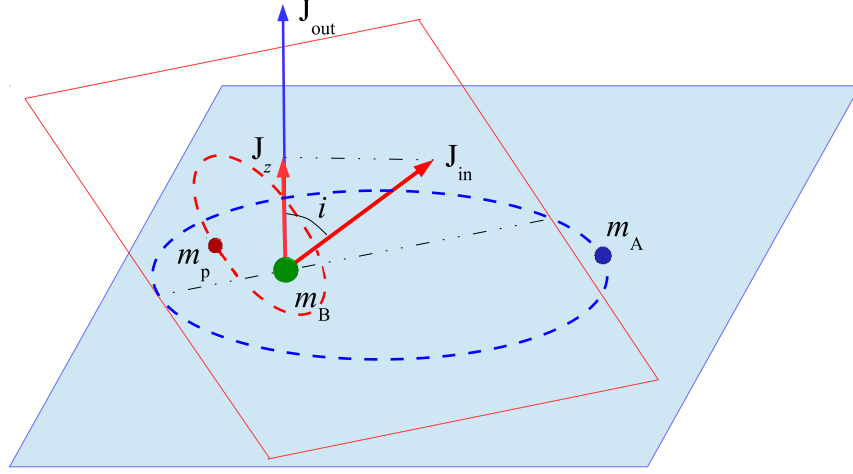


Рис. 5.23. Конфигурация тройной системы. m_A , m_B — звезды, m_p — планета. $\mathbf{J}_{in}$, $\mathbf{J}_{out}$ — вектора угловых моментов планетной и звездной подсистем. J_z — проекция $\mathbf{J}_{in}$ на ось Oz параллельную $\mathbf{J}_{out}$. i — угол между $\mathbf{J}_{in}$ и $\mathbf{J}_{out}$.

5.4.4 Сечения фазового пространства

Построим сечения фазового пространства для планетной системы 16 Суг. Для этого воспользуемся записанным в канонических элементах дважды осредненным гамильтонианом ограниченной задачи трех тел, выведенным в работах Ли и др. [134] и Литвика и Наоц [136]. Под тройной системой далее подразумевается система из двух звезд и планеты, обращающейся вокруг одной из звезд.

Схематичное изображение тройной системы представлено на Рис. 5.23. Символами $\mathbf{J}_{in}$ и $\mathbf{J}_{out}$ на рисунке обозначены вектора угловых моментов внутренней (планетной) и внешней (звездной) подсистем. Величина J_z представляет собой проекцию $\mathbf{J}_{in}$ на ось Oz параллельную $\mathbf{J}_{out}$. Под углом i подразумевается угол между $\mathbf{J}_{in}$ и $\mathbf{J}_{out}$, он определяется по формуле (5.16).

Согласно Ли и др. [134] дважды осредненный гамильтониан ограниченной (принято $m_p \rightarrow 0$) задачи трех тел можно записать в виде

$$H = -H_{\text{quad}} - \epsilon H_{\text{oct}},$$

где $\epsilon = \alpha e / (1 - e^2)$. Квадрупольная часть гамильтониана H_{quad} содержит члены разложения до второй степени малости по $\alpha = a_p / a$ включительно, а октупольная часть гамильтониана H_{oct} — до третьей степени α . Выражения

для этих частей гамильтониана имеют вид [135]:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{quad}} &= \frac{1}{2}(-1 + J^2) + \frac{J_z^2}{J^2} + \frac{3(1 - J^2)J_z^2}{2J^2} + \\
 &\quad \frac{5}{2}(1 - J^2) \left(1 - \frac{J_z^2}{J^2}\right) \cos(2\omega), \\
 H_{\text{oct}} &= \frac{5}{16} \left(\sqrt{1 - J^2} + \frac{3}{4}(1 - J^2)^{3/2} \right) \times \\
 &\quad \left[\left(1 - \frac{11J_z}{J} - \frac{5J_z^2}{J^2} + \frac{15J_z^3}{J^3}\right) \cos(\omega - \Omega) + \right. \\
 &\quad \left. \left(1 + \frac{11J_z}{J} - \frac{5J_z^2}{J^2} - \frac{15J_z^3}{J^3}\right) \cos(\omega + \Omega) \right] - \frac{175}{64} (1 - J^2)^{3/2},
 \end{aligned}$$

где $\omega = \varpi_p - \Omega_p$ и $\Omega \equiv \Omega_p$ — канонические координаты, а $J = (1 - e_p^2)^{1/2}$ и $J_z = (1 - e_p^2)^{1/2} \cos i$ — сопряженные им импульсы.

Гамильтониан H нормирован на величину $m_p P_{\text{LK}} \sqrt{G m_B a}$, где [134, 136]

$$P_{\text{LK}} = \frac{8}{3} P \frac{\mu}{\alpha^3} (1 - e^2)^{3/2},$$

здесь P — орбитальный период планетной системы, $\mu = m_B/m_A$. Реальное время исходной системы t можно записать как $t = t' P_{\text{LK}}$, где t' — время в системе с приведенным выше гамильтонианом. Величина P_{LK} представляет собой характерный период колебаний на резонансе Лидова–Козаи. Для принятых значений параметров планетной системы 16 Cyg (см. Табл. 5.9): $\epsilon = 0.00652$, $\alpha = 0.00193$, $P_{\text{LK}} = 12\,886\,000$.

Сечения фазового пространства построим для четырех моделей планетной системы 16 Cyg, рассмотренных в разделе 5.4.3. Как и в работе Ли и др. [134] сечения построим на плоскостях (ω, J) и (Ω, J_z) . В первом случае плоскость в фазовом пространстве определена условием $\Omega = 0$, фиксировалось пересечение данной плоскости фазовыми траекториями с $d\Omega/dt > 0$. Во втором случае плоскость определена условием $\omega = 0$, фиксировалось пересечение данной плоскости фазовыми траекториями с $d\omega/dt > 0$.

Сечения строились следующим образом. Сначала, для указанных в Табл. 5.9 и 5.10 значений орбитальных параметров планетной системы 16 Cyg вычислялись начальные значения J и J_z . Для всех моделей начальные значе-

Таблица 5.11. Начальные значения J_z и соответствующая им величина гамильтониана, принятая при построении сечений фазового пространства. Для всех моделей планетной системы 16 Cyg приняты следующие начальные значения канонических переменных: $\omega = \Omega = 0$ и $J = 0.72476$.

Модель	J_z	H
1	−0.11787	−0.95528
2	−0.22204	−0.99019
3	0.61241	−1.31136
4	0.50817	−1.19620

ния аргумента перицентра и долготы восходящего узла орбиты планеты относительно плоскости звездной подсистемы были положены равными нулю, то есть $\omega = \Omega = 0$. Начальная величина $J = 0.72476$ одинакова для всех моделей, так как зависит только от e_p . Затем, для принятых начальных значений канонических элементов, вычислялась величина H . Начальные значения J_z и соответствующая им величина гамильтониана, для которой строились сечения фазового пространства, приведены в Табл. 5.11.

Посредством интегрирования гамильтоновых уравнений движения для траекторий, заданных на множестве начальных значений ω и J , соответствующих вычисленной исходной величине H (см. Табл. 5.11) при $\Omega = 0$, строилось сечение фазового пространства системы на плоскости (ω, J) . На множестве начальных значений Ω и J_z , соответствующих вычисленной исходной величине H при $\omega = 0$, строилось сечение фазового пространства системы на плоскости $\Omega - J_z$.

На Рис. 5.24 представлены сечения фазового пространства, построенные для моделей (1) и (4), в случае модели (2) сечение качественно схоже с сечением для модели (1), в случае модели (3) — с сечением для модели (4). На всех рисунках указано местоположение планетной системы 16 Cyg, согласно принятым начальным условиям (см. Табл. 5.9–5.11).

Рассмотрим основные особенности, наблюдаемые на сечениях фазово-

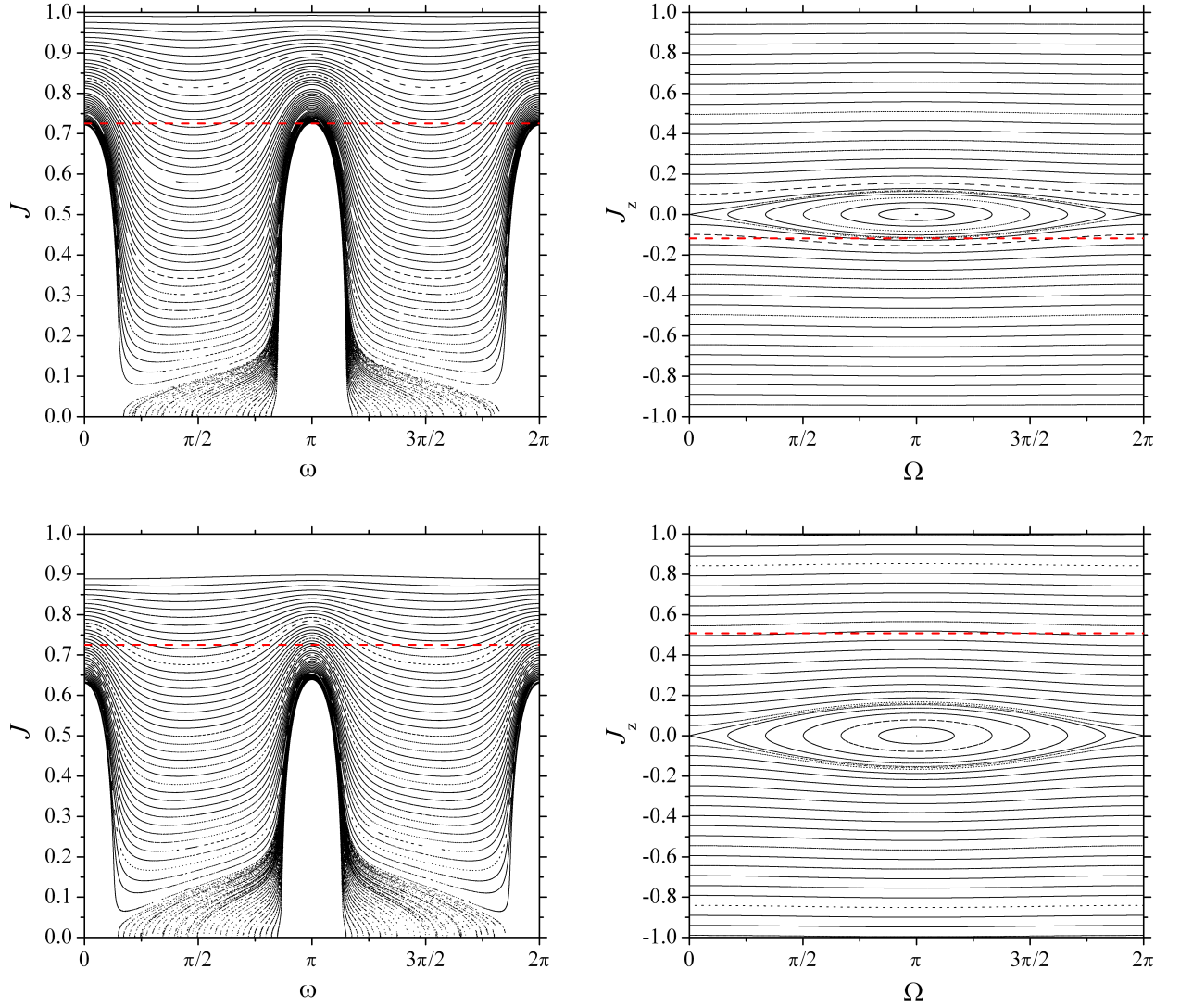


Рис. 5.24. Сечения фазового пространства планетной системы 16 Cyg, определенные при $\Omega = 0$, $d\Omega/dt > 0$ (слева) и $\omega = 0$, $d\omega/dt > 0$ (справа). Верхний ряд соответствует модели (1), нижний — модели (4). Штриховой горизонтальной линией, согласно [115, 157], отмечено местоположение планетной системы 16 Cyg.

го пространства. Прежде всего отметим, что фазовое пространство рассматриваемой системы ограничено (области возможных значений канонических элементов ограничены принятой начальной величиной H), движение невозможно в белых областях, расположенных на сечениях вне областей, занятых непрерывными кривыми, соответствующими множествам либрационных и циркулирующих траекторий (см. также сечения в работе Ли и др. [134]).

На плоскости (ω, J) для всех моделей присутствуют циркулирующие траектории вокруг резонансных областей $\omega = \pi/2$ и $\omega = 3\pi/2$, соответствующих резонансу Лидова–Козаи в квадрупольном приближении (когда $\epsilon = 0$). Либрационные траектории резонанса Лидова–Козаи при этом не видны, так как они не существуют для принятых параметров системы (для соответствующих им значений J_z , см. Табл. 5.11). Примеры сечений фазового пространства на плоскости (ω, J) для различных значений H и ϵ , где можно видеть либрационные и циркулирующие траектории, а также сепаратрису (хаотический слой в ее окрестности) резонанса Лидова–Козаи, приведены в работе Ли и др. [134]. Сепаратрису резонанса Лидова–Козаи на плоскости (ω, J) будем называть ω -сепаратрисой.

На плоскости (Ω, J_z) у всех рассмотренных моделей присутствует одна резонансная ячейка с центром $\Omega = \pi$, $J_z = 0$ (для других значений H и ϵ возможно существование нескольких резонансных ячеек, см. примеры сечений в работе [134]). Сепаратрису вокруг данной резонансной ячейки будем называть далее Ω -сепаратрисой, по аналогии с ω -сепаратрисой вокруг резонанса Лидова–Козаи на плоскости (ω, J) .

В случае модели (1) видно, что допустимые начальные значения Ω и J_z для планетной системы 16 Cyg на плоскости сечения (Ω, J_z) расположены рядом с Ω -сепаратрисой, но не пересекают ее. Хаотический слой, существующий в окрестности сепаратрисы, слишком узок, чтобы быть различимым на Рис. 5.24. Если бы начальные значения Ω и J_z для планетной системы 16 Cyg находились в хаотическом слое в окрестности Ω -сепаратрисы, то тогда в системе действительно была бы возможна хаотическая динамика. Для моделей (2), (3) и (4) допустимые начальные значения Ω и J_z для планетной системы 16 Cyg расположены существенно дальше от Ω -сепаратрисы (см. сечение для модели (4), представленное на Рис. 5.24). Хаотический слой в окрестности сепаратрисы для этих моделей тоже весьма узкий. Поэтому хаотическая орбитальная динамика планеты 16 Cyg Bb при современных значениях орбитальных параметров маловероятна, по крайней мере для рассмотренных моделей ее орбиты.

§ 5.5 Выводы к пятой главе

В настоящей главе проведено исследование хаотической динамики в орбитальном движении небесных тел. Для двух спутниковых систем сделаны оценки ляпуновского времени орбитального движения; изучен характер зависимости «ляпуновское время – время распада» системы для слабо-иерархических тройных звездных систем и исследована устойчивость кратной звездной системы ι UMa. Рассмотрена вековая орбитальная динамика планеты в кратной звездной системе 16 Cyg. Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [37, 38, 39, 40, 41, 46, 47, 50].

В § 5.1 рассмотрена хаотическая динамика в окрестности сепаратрис резонансных мультиплетов, отвечающих соизмеримости $3/1$ средних движений спутников Урана Миранды (У2) и Умбриэля (У5), и мультиплетов, отвечающих соизмеримости $2/1$ средних движений спутников Сатурна Мимаса (С1) и Тефии (С3). Для указанных спутниковых систем впервые получены численные и теоретические оценки ляпуновского времени (см. Табл. 5.4 и 5.6) в моделях, отвечающих разным эпохам динамической эволюции систем. Сопоставление теоретических оценок ляпуновского времени с оценками, полученными путем прямого численного интегрирования, показало их хорошее согласие. Для различных эпох эволюции систем Миранда – Умбриэль и Мимас – Тефия ляпуновские времена составляют 50–100 и 300–600 лет, соответственно. В целом численные и теоретические оценки ляпуновского времени для спутниковых систем свидетельствуют, что диапазон значений времени предсказуемой динамики в спутниковых системах, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, весьма широк: по порядку величины он составляет от года [88, 108, 174] до тысячи лет.

В § 5.2 рассмотрена динамика слабо-иерархических тройных звездных систем. Путем численного интегрирования орбит найдены полные спектры ХПЛ (L_i , $i = 1, \dots, 18$) для различных исходных конфигураций системы из трех тел равных масс в плоской задаче (движение всех тел происходит в одной плоскости) с начальными условиями в окрестности резонанса $2:1$ (начальное отношение периодов обращения внешней и внутренней невозмущенных двойных близко к $2:1$). Впервые построены (Рис. 5.11) обобщенные

для всех элементов ляпуновского спектра зависимости «ляпуновское время T_{L_i} – время распада T_d » системы, где под ляпуновским временем понималась величина $T_{L_i} = 1/L_i$, обратная элементу ляпуновского спектра. Для $i = 1$, что соответствует максимальному ХПЛ, показано, что вблизи резонанса и вдали от него характер этой зависимости разный (см. Рис. 5.12): вблизи резонанса присутствует квадратичная зависимость, а вдали от него присутствует линейная зависимость. Из анализа вычисленных значений остальных элементов ляпуновского спектра впервые установлено (см. Табл. 5.7) существование степенных зависимостей $T_d \propto T_{L_i}^{\gamma_i}$ для $i \geq 2$: при увеличении i показатели степени $\gamma_i \rightarrow 1$ ($\gamma_1 \approx 1.71$, $\gamma_2 \approx 1.42$, $\gamma_3 \approx 1.10, \dots$).

В § 5.3 рассмотрена устойчивость звездной системы ι UMa (HD 76644 = ADS 7114). Система является иерархической четверной, она состоит из двух двойных Aa и BC. Исследование устойчивости системы ι UMa проведено посредством вычисления ХПЛ на множествах допустимых значений орбитальных параметров широкой подсистемы Aa–BC, при этом тесная пара Aa рассматривалась как одно тело. Проведено сопоставление (Рис. 5.13) выводов о характере устойчивости системы ι UMa, полученных на основе теоретических критериев устойчивости тройных систем, и на основе численного моделирования орбитальной динамики системы. Впервые неустойчивость системы ι UMa подтверждена строгим образом на основе массовых вычислений ХПЛ. Характерные значения (см. Рис. 5.14 и 5.15) для времени распада системы ι UMa согласно полученным оценкам составляют менее 10^4 лет, для ляпуновского времени (Рис. 5.17) — менее 10^3 лет. По-видимому, ι UMa — единственная известная кратная система, для которой неустойчивость строго установлена.

В § 5.4 рассмотрена вековая орбитальная динамика планеты в широкой визуально-двойной звездной системе 16 Cyg. Единственная известная в данной системе планета 16 Cyg Bb имеет существенный эксцентриситет орбиты $e = 0.69$. Ранее Хольман и др. [117] указали на возможность наличия хаоса в орбитальной динамике планеты из-за близости системы 16 Cyg к сепаратрисе резонанса Лидова–Козаи. Проведено массовое вычисление ХПЛ на множестве возможных значений орбитальных параметров планеты (см. Рис. 5.19

и 5.20). Во всех случаях динамика планетной системы 16 Суг является регулярной с ляпуновским временем $T_L > 30\,000$ лет.

Для нескольких возможных моделей планетной орбиты построены зависимости (Рис. 5.21) величин ХПЛ от времени их вычисления и зависимости (Рис. 5.22) оскулирующих элементов орбиты планеты от времени. Для всех моделей, с использованием дважды осредненного гамильтониана ограниченной задачи трех тел, были построены сечения (Рис. 5.24) фазового пространства планетной системы 16 Суг в окрестности резонанса Лидова–Козаи. Показано, что в отличие от выводов, сделанных в работе [117], хаотическое поведение в орбитальном движении планеты в системе 16 Суг маловероятно, поскольку при допустимых значениях орбитальных параметров планетная система 16 Суг в фазовом пространстве находится вдали от сепаратрисы резонанса Лидова–Козаи (см. Рис. 5.24), причем хаотический слой в окрестности сепаратрисы весьма узок.

Заключение

Приведем основные результаты, полученные в диссертационной работе, и укажем перспективные направления дальнейших исследований рассмотренных в диссертации небесномеханических систем.

Основными объектами, динамика которых изучалась в настоящем диссертационном исследовании, являются малые спутники планет Солнечной системы. В Главе 2 впервые установлено, что для ряда малых спутников планет возможно существование до трех режимов плоского (в плоскости орбиты) вращения синхронного с движением по орбите, в один из которых спутник может быть захвачен (если вращение в нем устойчиво) в ходе приливной эволюции вращательного движения.

Проведено исследование характера устойчивости плоского синхронного спин-орбитального резонанса и близких к нему других резонансных состояний относительно наклона оси вращения для избранных малых спутников. Результаты исследования устойчивости вращения позволяют наложить ограничения на возможные значения инерционных параметров рассмотренных спутников, а также определить резонансные вращательные состояния, в которых эти спутники могут находиться в ходе долговременной динамической эволюции. В частности показано, что плоское вращение Гипериона (C7) в единственном возможном для него режиме синхронного вращения является неустойчивым относительно наклона оси вращения. Впервые установлено, что вращение Амальтеи (Ю5) в одном из двух возможных для нее режимов синхронного вращения является неустойчивым, а в другом — устойчивым. Поскольку вид зависимости ориентации фигуры спутника относительно направления на планету от времени определяется режимом синхронного вращения, отождествление типа данного режима для Амальтеи может быть осуществлено из наблюдений особенностей (если они будут выявлены) ее вра-

щательной динамики.

Одним из важных режимов плоского синхронного вращения, рассмотренных в Главе 2, является бифуркационная мода синхронного резонанса. В этом режиме вращения, соответствующем параметрическому резонансу во вращательном движении спутника, колебания ориентации фигуры спутника относительно направления на планету могут достигать значительной величины (десятков градусов). Выведенные в диссертации уравнения позволяют оценить величину амплитуды бифуркационных колебаний и, таким образом, прогнозировать возможность наблюдения бифуркационного режима у реальных спутников. Впервые установлено, что бифуркационный режим синхронного вращения возможен у 22 известных спутников планет. В дальнейшем следует уделить особое внимание анализу наблюдательных данных, позволяющих получить информацию о вращательной динамике этих спутников. Вследствие чувствительности величины амплитуды бифуркационных колебаний спутника к величине параметра, характеризующего динамическую асимметрию фигуры спутника (определяемую моментами инерции спутника), выявление посредством наблюдений бифуркационного режима у реального спутника позволило бы наложить жесткие ограничения на значение этого важного динамического параметра у наблюдаемого спутника.

Впервые показано, что спутники с еще не определенными состояниями вращения, как и еще не открытые малые спутники, в подавляющем большинстве не могут вращаться синхронно с орбитальным движением. Они вращаются либо намного быстрее, чем синхронно, либо, что гораздо менее вероятно, хаотично. Вывод о быстром современном вращении у значительной части известных малых спутников сделан с точки зрения динамической устойчивости синхронного вращения для этих спутников. А именно, в Главе 2 показано, что для значительной части малых спутников синхронный резонанс плоского вращательного движения либо не существует, либо плоское вращательное движения спутника в синхронном резонансе является неустойчивым относительно наклона оси вращения, то есть спутник в ходе долговременной вращательной эволюции не может быть захвачен в синхронный спин-орбитальный резонанс. Использованный метод определения возможного финального ре-

жима вращения спутника дает однозначный ответ на вопрос о возможности нахождения спутника в данном режиме резонансного вращения, основываясь на данных о параметрах фигуры (размеры/радиус) спутника и величине эксцентриситета его орбиты.

Информацию о вращательной динамике и физических свойствах спутников планет получают из анализа и моделирования их наблюдаемых кривых блеска и из анализа наблюдений, полученных с КА. Разработанные алгоритмическое и программное обеспечение для построения теоретических кривых блеска спутников планет позволяют посредством моделирование кривых блеска изучать вращательную динамику этих объектов, а также их физические свойства. В Главе 3 посредством моделирования кривых блеска Гипериона (С7) и Фебы (С9), как прототипов хаотического и регулярного вращения, определены значения их инерционных и физических параметров — получены оценки моментов инерции и параметров, характеризующих отражательные свойства поверхности спутников. Установлен хаотический характер вращения Гипериона, подтверждено быстрое (по сравнению с синхронным) регулярное вращение Фебы.

Информация, полученная из моделирования кривых блеска спутников, позволяет детально планировать космические миссии к спутникам планет, например, определять периодичность получения снимков спутника с борта КА и выделять на поверхности спутника участки, снимки которых необходимо получить с высоким пространственным разрешением. Предварительное определение из моделирования кривых блеска динамических параметров спутника позволяет точнее рассчитать траекторию КА на участке его сближения со спутником и на орбите вокруг него.

Разработанный алгоритм может применяться для моделирования кривых блеска АСЗ (астероидов сближающихся с Землей) на отрезке траектории их тесного сближения с Землей. Например, моделирование наблюдаемой кривой блеска астероида (367943) Дуэнде, проведенное [17, 91] при помощи описанного в Главе 3 метода, позволило определить параметры вращения указанного АСЗ и получить оценки размеров. Дальнейшее развитие методики моделирования кривых блеска АСЗ является весьма перспективным.

Впервые строго установлен хаотический характер вращения Гипериона (С7). А именно, посредством проведенного в Главе 3 моделирования наблюдаемых кривых блеска Гипериона были получены значения начальных условий и параметров, задающих его вращательное состояние на момент проведения наблюдений. В Главе 4 для этих значений начальных условий и параметров были вычислены ХПЛ вращательной динамики Гипериона. Вычисление ХПЛ строго показало, что вращение Гипериона является хаотичным — все ХПЛ отличны от нуля. Ляпуновское время для вращательной динамики Гипериона оказалось весьма малым и составляет 40–50 суток, поэтому хаос во вращении Гипериона можно обнаружить как посредством наземных наблюдений, так и посредством анализа наблюдений с КА. Дальнейшее моделирование и анализ наблюдаемых кривых блеска и анализ наблюдений с КА позволят уточнить параметры хаотического вращения Гипериона и величину ляпуновского времени.

Подробно рассмотрен хаотический режим вращения малых спутников планет. Проведенное в Главе 4 моделирование хаотического вращения на длительном интервале времени Прометея (С16) и Пандоры (С16) выявило эффект наличия в их вращательной динамике преимущественной ориентации наибольшей оси фигур спутников по направлению на планету. Таким образом, показано, что хаотическое вращение малых спутников в данном отношении схоже с обычным синхронным вращением, при котором фигура спутника ориентирована на планету одной и той же стороной. При анализе данных наблюдений малых спутников с целью установления режима их вращения необходимо привлекать дополнительные методы, если имеются указания на возможное хаотическое вращение спутника.

Показано, что хаотическая динамика может присутствовать в задаче о вращательной динамике спутника при учете приливного взаимодействия с планетой. В Главе 4 установлено, что при наличии приливной диссипации в окрестности сепаратрисы синхронного спин-орбитального резонанса возможно существование странного аттрактора. Вращательное движение спутника на странном аттракторе является хаотическим. Впервые были выделены области значений параметров задачи (эксцентриситет орбиты; параметр,

характеризующий динамическую асимметрию фигуры спутника; параметр, характеризующий величину приливного взаимодействия) при которых существует странный аттрактор и показано, что странный аттрактор может существовать в ходе приливной эволюции вращательного движения Гипериона (C7).

Помимо вращательной динамики спутников в диссертации рассмотрена их орбитальная динамика. Хаотическая динамика может иметь место или могла присутствовать в истории орбитальной эволюции любой спутниковой системы, находящейся в орбитальном резонансе или вблизи него. В Главе 5 впервые были получены оценки ляпуновского времени в задаче о хаотической орбитальной динамике двух спутниковых систем: Миранда (У2) – Умбриэль (У5) в окрестности резонанса средних движений 3:1 и Мимас (С1) – Тефия (С3) в окрестности резонанса средних движений 2:1.

Показано, что возможный диапазон значений ляпуновских времен в спутниковых системах, находящихся в околорезонансных хаотических режимах движения, весьма широк: по порядку величины он составляет от года до тысячи лет. Например, для различных эпох эволюции систем Миранда – Умбриэль и Мимас – Тефия ляпуновские времена составляют 50–100 и 300–600 лет, соответственно. Поскольку ляпуновское время в спутниковых системах может быть малым, хаос в орбитальном движении спутниковых систем можно выявить из наблюдений. Знание ляпуновского времени для спутниковой системы позволяет судить о том, на каких интервалах времени справедливы численные и аналитические теории ее орбитального движения.

В рамках общей задачи трех тел была рассмотрена динамика кратных звездных систем и экзопланетных систем. В Главе 5 для слабо-иерархических тройных звезд равных масс впервые построены зависимости «ляпуновское время – время распада» системы для всех элементов ляпуновского спектра и изучен характер полученных зависимостей. Каждому из элементов ляпуновского спектра формально соответствует свое ляпуновское время, представляющее из себя величину, обратную показателю Ляпунова. Анализ зависимостей «ляпуновское время – время распада» системы важен в рамках фундаментальной задачи определения времен распада тройных систем. По-

казано, что для МХПЛ данная зависимость вблизи резонанса 2:1 (начальное отношение периодов обращения внешней и внутренней невозмущенных двойных близко к 2:1), имеет квадратичный характер, а вдали от него — линейный. Установленный характер зависимости «ляпуновское время — время распада» соответствует различным типам гамильтоновой перемежаемости. Для остальных элементов ляпуновского спектра впервые установлено существование степенных зависимостей «ляпуновское время — время распада» с показателями степени, стремящимися к единице при увеличении порядка элемента в спектре. Для обоснования наблюдаемых зависимостей необходимо дальнейшее развитие теоретических представлений о хаотической динамике в гамильтоновых системах.

В проведенном в Главе 5 исследовании динамики слабо-иерархических звездных систем, впервые строго (посредством вычисления ХПЛ) установлено существование неустойчивой кратной звездной системы — а именно системы Йота Большой Медведицы (ι UMa = HD 76644 = ADS 7114). Характерные значения для времени распада системы ι UMa составляют менее 10 000 лет, для ляпуновского времени — менее 1 000 лет. Выявленная неустойчивость системы ι UMa подтверждает возможность существования неустойчивых кратных звездных систем и указывает на необходимость дальнейшего изучения движений в слабо-иерархических звездных системах с целью исследования их устойчивости и определения величин ляпуновских времен.

В Главе 5 на примере вековой динамики планеты в системе 16 Cyg рассмотрена возможность существования хаоса в динамике планет в кратных звездных системах из-за наличия эффекта Лидова–Козаи. Посредством вычисления ХПЛ на множестве допустимых значений орбитальных параметров планеты установлено, что хаотическое поведение в планетой системе 16 Cyg маловероятно. Построенные представительные сечения фазового пространства задачи трех тел показали, что планетная система 16 Cyg в фазовом пространстве находится вдали от сепаратрисы резонанса Лидова–Козаи, причем хаотический слой в окрестности сепаратрисы весьма узок. В настоящее время в кратных звездных системах обнаружено уже несколько десятков экзопланет с большими (> 0.2) эксцентриситетами орбит. Большая величина

эксцентриситета планетной орбиты может быть вызвана эффектом Лидова–Козаи. Поэтому для исследования вековой орбитальной динамики и изучения возможности хаотического движения планет в кратных звездных системах необходимо проводить вычисление ХПЛ на множестве допустимых значений параметров планетной орбиты, а также анализ представительных сечений фазового пространства задачи.

Литература

1. Алешкина, Е. Ю. Захват в синхронный спин-орбитальный резонанс крупных спутников планет // Астрономический вестник. — 2009. — Т. 43. — № 1. — С. 75.
2. Аллен, К. У. Астрофизические величины / К. У. Аллен. — М.: Мир, 1977. — 446 с.
3. Белецкий, В. В. О либрации спутника // Искусственные спутники Земли / М.: Изд-во АН СССР, 1959. — Вып. 3. — С. 13.
4. Белецкий, В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс / В. В. Белецкий. — М.: Наука, 1965. — 416 с.
5. Белецкий, В. В. Регулярные и хаотические движения твердых тел / В. В. Белецкий. — М. — Ижевск: ИКМ, 2007. — 132 с.
6. Белецкий, В. В., Хентов, А. А. Резонансные вращения небесных тел / В. В. Белецкий, А. А. Хентов. — Нижний Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 1995. — 430 с.
7. Берже, П., Помо, И., Видаль, К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. — М.: Мир, 1991. — 368 с.
8. Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М.: Наука, 1974. — 504 с.
9. Борисов, А. В., Симаков, Н. Н. Бифуркации удвоения периода в динамике твердого тела // Регулярная и хаотическая динамика. — 1997. — Т. 2. — С. 64.

10. Бэттен, А. Г. Двойные и кратные звезды / А. Г. Бэттен. — М.: Мир, 1976. — 323 с.
11. Гуляев, В. И., Зубрицкая, А. Л., Кошкин, В. Л. Универсальная последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний спутника на эллиптической орбите // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1989. — № 3. — С. 3.
12. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Грицук, А. Н., Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Наблюдения и теоретический анализ вращательной динамики Гипериона // Препринт Лаборатории фотометрии ГАО РАН. — С.-Петербург: ГАО РАН, 1999. — № 17. — 40 с.
13. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Грицук, А. Н., Мельников, А. В., Сидоров, М. Ю., Шевченко, И. И. Наблюдения и теоретический анализ вращательной динамики Гипериона. II // Препринт Лаборатории фотометрии ГАО РАН. — С.-Петербург: ГАО РАН, 2000. — № 18. — 28 с.
14. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Грицук, А. Н., Мельников, А. В., Сидоров М. Ю., Шевченко, И. И. Наблюдения и теоретический анализ кривых блеска естественных спутников планет // Астрономический вестник. — 2002. — Т. 36. — № 3. — С. 269.
15. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Куприянов, В. В., Мельников, А. В., Шевченко И. И. Наблюдения и анализ кривых блеска трех спутников Сатурна // Известия ГАО. — 2004. — № 217. — С. 229.
16. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Куприянов, В. В., Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Наблюдения кривых блеска и анализ вращательной динамики Гипериона, Япета и Фебы // Труды ГАИШ. — 2005. — Т. 78. — С. 24.
17. Девяткин, А. В., Горшанов, Д. Л., Наумов, К. Н., Петрова, С. Н., Мартюшева, А. А., Львов, В. Н., Цекмейстер, С. Д., Мельников, А. В. Астрометрия и фотометрия астероида (367943) 2012 DA14 на телескопах ГАО РАН // Экологический вестник научных центров ЧЭС. — 2013. — № 4. — Вып. 2. — С. 37.

18. Дубошин, Г. Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Г. Н. Дубошин. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976. — 864 с.
19. Жучков, Р. Я., Малоголовец, Е. В., Кияева, О. В. и др. Физические параметры и динамические свойства кратной системы ι UMa (ADS 7114) // Астрономический журнал. — 2012. — Т. 89. — № 7. — С. 568.
20. Жучков, Р. Я., Орлов, В. В. Анализ динамической неустойчивости некоторых кратных звезд со слабой иерархией // Астрономический журнал. — 2005. — Т. 82. — № 4. — С. 308.
21. Жучков, Р. Я., Орлов, В. В., Рубинов, А. В. Анализ динамической устойчивости четверных систем HD 68255/6/7 и HD 76644 // Астрономический журнал. — 2006. — Т. 83. — № 1. — С. 70.
22. Заславский, Г. М., Сагдеев, Р. М., Усиков, Д. А., Черников, А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры / Г. М. Заславский, Р. М. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников. — М.: Наука, 1991. — 235 с.
23. Златоустов, В. А., Охоцимский, Д. Е., Сарычев, В. А., Торжевский, А. П. Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // Космические исследования. — 1964. — Т. 2. — Вып. 5. — С. 657.
24. Кинг, А. Введение в классическую звездную динамику / А. Кинг. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — 288 с.
25. Киселев, А. А. Теоретические основания фотографической астрометрии / А. А. Киселев. — М.: Наука, 1989. — 264 с.
26. Киселев, А. А., Романенко, Л. Г. Динамическое исследование широкой визуально-двойной звезды ADS 12815 (16 Cyg) // Астрономический журнал. — 2011. — Т. 88. — № 6. — С. 530.
27. Куприянов, В. В., Шевченко, И. И. О форме и вращательной динамике малых спутников планет // Астрономический вестник. — 2006. — Т. 40. — № 5. — С. 428.

28. Лидов, М. Л. Эволюция орбит искусственных спутников под воздействием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. — 1961. — Т. 8. — С. 5.
29. Лихтенберг, А., Либерман, М. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. — М.: Мир, 1984. — 528 с.
30. Лоскутов, А. Ю. Очарование хаоса // Успехи физических наук. — 2010. — Т. 180. — № 12. — С. 1305.
31. Маркеев, А. П. Теоретическая механика / А. П. Маркеев. — М.: Наука, 1990. — 416 с.
32. Мартынова, А. И., Орлов, В. В., Соколов, Л. Л. Исследование окрестности резонанса 2:1 в задаче трех тел равных масс // Письма в Астрономический журнал. — 2005. — Т. 31. — № 3. — С. 234.
33. Мельников, А. В. О последовательности бифуркаций удвоения периода относительного движения несферического спутника в синхронном резонансе // Известия ГАО. — 2000. — № 214. — С. 161.
34. Мельников, А. В. Бифуркационный режим синхронного резонанса в поступательно-вращательном движении несферических естественных спутников планет // Космические исследования. — 2001. — Т. 39. — № 1. — С. 74.
35. Мельников, А. В. О возможности существования странных аттракторов во вращательной динамике малых спутников планет // Известия ГАО. — 2013. — № 220. — С. 265.
36. Мельников, А. В. Условия возникновения странных аттракторов во вращательной динамике малых спутников планет // Космические исследования. — 2014. — Т. 52. — № 6. — С. 500.
37. Мельников, А. В. Вековая динамика планеты в системе 16 Cyg // Известия ГАО. — 2016. — № 223. — С. 225–228.

38. Мельников, А. В. О хаотической орбитальной динамике планеты в системе 16 Cyg // Письма в Астрономический журнал. — 2016. — Т. 42. — № 2. — С. 136–147.
39. Мельников, А. В., Орлов, В. В., Шевченко, И. И. Показатели Ляпунова в динамике тройных звездных систем // Астрономический журнал. — 2013. — Т. 90. — № 6. — С. 472.
40. Мельников, А. В., Орлов, В. В., Шевченко, И. И. Динамика тройных звездных систем в окрестности резонанса 2:1 // Известия ГАО. — 2013. — № 220. — С. 417.
41. Мельников, А. В., Орлов, В. В., Шевченко, И. И. Об устойчивости кратной звездной системы ι UMa (ADS 7114) // Астрономический журнал. — 2014. — Т. 91. — № 9. — С. 735.
42. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Вращательная динамика несимметричных естественных спутников / А. В. Мельников, И. И. Шевченко. С.-Петербург: ИТА РАН, 1997. — Препринт № 69. — 56 с.
43. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Об устойчивости вращательного движения несферических естественных спутников относительно наклона оси вращения // Астрономический вестник. — 1998. — Т. 32. — № 6. — С. 548.
44. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Об устойчивости вращения несферических естественных спутников в синхронном резонансе // Астрономический вестник. — 2000. — Т. 34. — № 5. — С. 476.
45. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Максимальный показатель Ляпунова движения звезды в потенциале Хенона–Хейлеса // Известия ГАО. — 2002. — № 216. — С. 223.
46. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. О хаотической динамике спутниковых систем // Труды ГАИШ. — 2004. — Т. 75. — С. 232.

47. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. О хаотической динамике спутниковых систем // *Астрономический Вестник*. — 2005. — Т. 39. — № 4. — С. 364.
48. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. О вращательной динамике двух спутников Сатурна — Прометея и Пандоры // *Известия ГАО*. — 2006. — № 218. — С. 117.
49. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Необычные режимы вращения малых спутников планет // *Астрономический вестник*. — 2007. — Т. 41. — № 6. — С. 521.
50. Мельников, А. В., Шевченко, И. И. Резонансная и хаотическая динамика спутников и спутниковых систем // *Астрономические исследования в Пулковке сегодня* / Под. ред. А. В. Степанова. СПб: ВВМ, 2009. — С. 334.
51. Морбиделли, А. Современная небесная механика. Аспекты динамики Солнечной системы / А. Морбиделли. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. — 432 с.
52. Мюррей, К., Дермотт, С. Динамика Солнечной системы / К. Мюррей, С. Дермотт. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 588 с.
53. Орлов, В. В., Жучков, Р. Я. Анализ динамической устойчивости избранных кратных звезд со слабой иерархией // *Астрономический журнал*. — 2005. — Т. 82. — № 3. — С. 231.
54. Раушенбах, Б. В., Овчинников, М. Ю. Лекции по динамике космического полета / Б. В. Раушенбах, М. Ю. Овчинников. — М.: МФТИ, 1997. — 188 с.
55. Хайрер, Э., Нерсетт, С., Ваннер, Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
56. Холостова, О. В. О плоских квазистатических движениях вязкоупругого тела в гравитационном поле // *Космические исследования*. — 1991. — Т. 29. — Вып. 2. — С. 183.

57. Ситников, К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Доклады Академии Наук СССР. — 1960. — Т. 33. — № 2. — С. 303.
58. Уральская, В. С. Естественные спутники планет (информационный справочник).
Режим доступа: <http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/index.htm>, свободный. (Данные по ссылке актуальны на 2015 г.)
59. Тублина, О. К., Холшевников, К. В. Сечения и мидели эллипсоида // Вестник ЛГУ. Сер. 1. — 1991. — Вып. 4. С. 38
60. Торжевский, А. П. Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Космические исследования. — 1964. — Т. 2. — Вып. 5. — С. 667.
61. Чириков, Б. В. Нелинейный резонанс. Учебное пособие / Б. В. Чириков. — Новосибирск: Издательство НГУ, 1977. — 82 с.
62. Чириков, Б. В. Взаимодействие нелинейных резонансов / Б. В. Чириков. — Новосибирск: Издательство НГУ, 1978. — 80 с.
63. Шевченко, И. И. О динамической энтропии вращения Гипериона // Известия ГАО. Астрометрия и небесная механика. — 2000. — № 214. — С. 153.
64. Шевченко, И. И. О геометрии хаотического слоя // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2000. — Т. 118. — Вып. 3 (9). — С. 707.
65. Шевченко, И. И. О максимальных показателях Ляпунова хаотического вращения естественных спутников планет // Космические исследования. — 2002. — Т. 40. — № 3. — С. 317.
66. Шевченко, И. И. On the maximum Lyapunov exponent of the motion in a chaotic layer // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2004. — Т. 79. — С. 651.

67. Шевченко, И. И., Куприянов, В. В., Мельников, А. В. Хаотическая динамика астероидов и максимальные показатели Ляпунова // *Астрономический вестник*. — 2003. — Т. 37. — № 1. — С. 80.
68. Шевченко, И. И., Мельников, А. В. О хаотической динамике в системе Миранда–Умбриэль // *Известия ГАО*. — 2002. — № 216. — С. 371.
69. Шевченко, И. И., Мельников, А. В. Показатели Ляпунова в задаче Хенона–Хейлеса // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2003. — Т. 77. — Вып. 12. — С. 772.
70. Aarseth, S. J. Gravitational N-body simulations: Tools and algorithms / S. J. Aarseth. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — 430 p.
71. Andersson, L. Photometry of Jupiter VI and Phoebe (Saturn IX) // *Bulletin of the American Astronomical Society*. — 1972. — V. 4. — P. 313.
72. Bauer, J. M., Buratti, B. J., Simonelli, D. P., Owen, W. M. Jr. Recovering the rotational light curve of Phoebe // *Astrophysical Journal*. — 2004. — V. 610. — P. L57.
73. Black, G. J., Nicholson, P. D., Thomas, P. C. Hyperion: rotational dynamics // *Icarus*. — 1995. — V. 117. — № 1. P. 149.
74. Bogomolov, A. V., Pavluchenko, S. A., Toporensky, A. V. Power-law tails in triple system decay statistics // *arXiv:1101.0399*. — 2011. — 4 p.
Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/1101.0399>, свободный.
75. Bowell, E., Hapke, B., Domingue, D. et al. Application of photometric models to asteroids // *Proceedings of the Conference “Asteroids II”* / Eds. Binzel, R. P., Gehrels, T., Matthews, M. S. — Tucson: University of Arizona Press, 1989. — P. 524.
76. von Bremen, H. F., Udvardi, F. E., Proskurowski, W. An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents // *Physica D*. — 1997. — V. 101. — P. 1.

77. Castillo-Rogez, J. C., Matson, D. L., Sotin, C. et al. Iapetus' geophysics: Rotation rate, shape, and equatorial ridge // *Icarus*. — 2007. — V. 190. — P. 179.
78. Castillo-Rogez, J. C., Efroimsky, M., Lainey, V. The tidal history of Iapetus: Spin dynamics in the light of a refined dissipation model // *Journal of Geophysical Research*. — 2011. — V. 116. — № E9. — P. E09008.
79. Champenois, S., Vienne, A. The role of secondary resonances in the evolution of the Mimas–Tethys system // *Icarus*. — 1999. — V. 140. — P. 106.
80. Champenois, S., Vienne, A. Chaos and secondary resonances in the Mimas–Tethys system // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 1999. — V. 74. — P. 111.
81. Chirikov, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // *Physics Reports*. — 1979. — V. 52. — № 5. — P. 263.
82. Cincotta, P. M., Simó, C. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials – I // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. — 2000. — V. 147. — P. 205.
83. Cochran, W. D., Hatzes, A. P., Butler, R. P., Marcy, G. W. The discovery of a planetary companion to 16 Cygni B // *Astrophysical Journal*. — 1997. — V. 483. — P. 457.
84. Colombo, G. Cassini's second and third laws // *Astrophysical Journal*. — 1966. — V. 71. — P. 891.
85. Colwell, J. E. The disruption of planetary satellites and the creation of planetary rings // *Planetary and Space Science*. — 1994. — V. 42. — P. 1139.
86. Correia, A. C. M. Secular evolution of a satellite by tidal effect: Application to Triton // *Astrophysical Journal*. — 2009. — V. 704. — P. L1.
87. Cooper, N. J., Murray, C. D. Dynamical influences on the orbits of Prometheus and Pandora // *Astronomical Journal*. — 2004. — V. 127. — P. 1204.

88. Cooper, N. J., Renner, S., Murray, C. D., Evans, M. W. Saturn's inner satellites: orbits, masses, and the chaotic motion of Atlas from new Cassini imaging observations // *Astrophysical Journal*. — 2015. — V. 149. — № 1. — id. 27. — 18 pp.
89. Cottereau, L., Aleshkina, E., Souchay, J. A precise modeling of Phoebe's rotation // *Astronomy and Astrophysics*. — 2010. — V. 523. — id. A87. — 9 pp.
90. Dermott, S. F., Malhotra, R., Murray, C. D. Dynamics of the Uranian and the Saturnian satellite systems: a chaotic route to melting Miranda? // *Icarus*. — 1988. — V. 76. — P. 295.
91. Devyatkin, A. V., Gorshanov, D. L., Yershov, V. N., Melnikov, A. V., et al. A study of the asteroid (367943) Duende at Pulkovo Observatory // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — V. 459. — № 4. — P. 3986.
92. Dobrovolskis, A. R. Chaotic rotation of Nereid? // *Icarus*. — 1995. — V. 118. — P. 181.
93. Dobrovolskis, A. R. Spin states and climates of eccentric exoplanets // *Icarus*. — 2007. — V. 192. — P. 1.
94. Dormand, J. R., Prince, P. J. A family of embedded Runge–Kutta formulae // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 1980. — V. 6. — № 1. — P. 19.
95. Efroimsky, M., Williams, J. G. Tidal torques: a critical review of some techniques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2009. — V. 104. — P. 257.
96. Eggen, O. J. Masses of visual binary stars // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. — 1967. — V. 5. — P. 105.
97. Eggleton, P. P. Approximations to the radii of Roche lobes // *Astrophysical Journal*. — 1983. — V. 268. — P. 368.

98. Eggleton, P. P., Tokovinin, A. A. A catalogue of multiplicity among bright stellar systems // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2008. — V. 389. — № 2. — P. 869.
99. *Éphémérides Astronomiques 1995* (Annuaire du Bureau des Longitudes). Paris: Masson, 1994. — 308 p.
100. *Éphémérides Astronomiques 1999* (Annuaire du Bureau des Longitudes). Paris: Masson, 1999. — 356 p.
101. Farmer, A. J., Goldreich, P. Understanding the behavior of Prometheus and Pandora // *Icarus*. — 2006. — V. 180. — P. 403.
102. Feigenbaum, M. J. Quantative universality for a class of non-linear transformation // *Journal of Statistical Physics*. — 1978. — V. 19. — P. 25.
103. French, R. G., McGhee, C. A., Dones, L., Lissauer, J. J. Saturn's wayward shepherds: the peregrinations of Prometheus and Pandora // *Icarus*. — 2003. — V. 162. — P. 143.
104. Froeschlé, Cl., Gonczi, R., Lega, E. The fast Lyapunov indicator: a simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt // *Planetary and Space Science*. — 1997. — V. 45. — № 7. — P. 881.
105. Froeschlé, Cl., Lega, E., Gonczi, R. Fast Lyapunov indicators. Application to asteroidal motion // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 1997. — V. 67. — № 1. — P. 41.
106. Goldreich, P. Final spin states of planets and satellites // *Astronomical Journal*. — 1966. — V. 71. — № 1. — P. 1.
107. Goldreich, P., Peale, S. Spin-orbit coupling in the Solar system // *Astronomical Journal*. — 1966. — V. 71. — № 6. — P. 425.
108. Goldreich, P., Rappaport, N. Chaotic motions of Prometheus and Pandora // *Icarus*. — 2003. — V. 162. — P. 391.

109. Goździewski, K. Rotational dynamics of Janus and Epimetheus // Dynamics and astrometry of natural and artificial celestial bodies / Ed. by Wytrzyszczak, I. M. et al. — Dordrecht: Kluwer, 1997. — P. 269.
110. Goździewski, K., Maciejewsky, A. J. On the gravitational fields of Pandora and Prometheus // Earth, Moon and Planets. — 1995. — V. 69. — № 1. — P. 25.
111. Grav, T., Holman, M. J., Kavelaars, J. J. The short rotation period of Nereid // Astrophysical Journal. — 2003. — V. 591. — P. L71.
112. Greenberg, R. Frequency dependence of tidal Q // Astronomical Journal. — 2009. — V. 698. — P. L42.
113. Harbison, R. A., Thomas, P. C., Nicholson, P. C. Rotational modeling of Hyperion // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2011. — V. 110. — P. 1.
114. Harris, A. W., Pravec, P. Rotational properties of asteroids, comets and TNOs // Proceedings IAU Symp. № 229 “Asteroids, Comets, Meteors” / Eds. Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S. and Fernández, J. A. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006. — P. 439.
115. Hauser, H. M., Marcy, G. W. The orbit of 16 Cygni AB // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 1999. — V. 111. — № 757. — P. 321.
116. Holman, M. J., Murray, N. W. Chaos in high-order mean motion resonances in the outer asteroid belt // Astronomical Journal. — 1996. — V. 112. — № 3. — P. 1278.
117. Holman, M., Touma, J., Tremaine, S. Chaotic variations in the eccentricity of the planet orbiting 16 Cygni B // Nature. — 1997. — V. 386. — P. 254.
118. Hopmann, J. Drei bemerkenswerte visuelle Mehrfachsterne // Astronomische Mitteilungen Wien. — 1973. — № 14. — P. 9.

119. Jacobson, R. A. The orbit of Phoebe from earthbased and Voyager observations // *Astronomy and Astrophysics Supplement*. — 1998. — V. 128. — P. 7.
120. Jewitt, D. Six hot topics in planetary astronomy // *Lecture Notes Physics*. — 2009. — V. 758. — P. 259.
121. Jewitt, D., Haghighipour, N. Irregular satellites of the planets: products of capture in the early Solar system // *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*. — 2007. — V. 45. — P. 261.
122. JPL Solar System Dynamics. Режим доступа: <http://ssd.jpl.nasa.gov/>, свободный. (Site manager: Park, R. S. Данные по ссылке актуальны на 2015 г.)
123. Karasopoulos, H. A. Nonlinear dynamics of the planar pitch attitude motion for a gravity-gradient satellite / H. A. Karasopoulos. — Technical report. — Wright Lab., Wright-Patterson AFB, 1994. — 227 p.
124. Karkoschka, E. Sizes, shapes, and albedos of the inner satellites of Neptune // *Icarus*. — 2003. — V. 162. — P. 400.
125. Khan, A., Sharma, R., Saha, L. M. Chaotic motion of an ellipsoidal satellite. I. // *Astronomical Journal*. — 1998. — V. 116. — № 4. — P. 2058.
126. Klavetter, J. J. Rotation of Hyperion. 1. Observations // *Astronomical Journal*. — 1989. — V. 97. — № 2. P. 570.
127. Klavetter, J. J. Rotation of Hyperion. 2. Dynamics // *Astronomical Journal*. — 1989. — V. 98. — № 5. — P. 1855.
128. Kouprianov, V. V., Shevchenko, I. I. On the chaotic rotation of planetary satellites: The Lyapunov exponents and the energy // *Astronomy and Astrophysics*. — 2003. — V. 410. — P. 749.
129. Kouprianov, V. V., Shevchenko, I. I. Rotational dynamics of planetary satellites: A survey of regular and chaotic behavior // *Icarus*. — 2005. — V. 176. — P. 224.

130. Kozai, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astronomical Journal*. — 1962. — V. 67. — № 9. — P. 591.
131. Kruse, S., Klavetter, J. J., Dunham, E. W. Photometry of Phoebe // *Icarus*. — 1986. — V. 68. — P. 167.
132. Lacerda, P., Jewitt, D. Densities of Solar System objects from their rotational light curves // *Astronomical Journal*. — 2007. — V. 133. — P. 1393.
133. Lacerda, P., Luu, J. On the detectability of lightcurves of Kuiper belt objects // *Icarus*. — 2003. — V. 161. — P. 174.
134. Li, G., Naoz, S., Holman, M., Loeb, A. Chaos in the test particle eccentric Kozai–Lidov mechanism // *Astrophysical Journal*. — 2014. — V. 791. — № 2. — id. 86. — 10 pp.
135. Li, G., Naoz, S., Holman, M., Loeb, A. Erratum: “Chaos in the test particle eccentric Kozai–Lidov mechanism” // *Astrophysical Journal*. — 2015. — V. 802. — № 1. — id. 71. — 1 pp.
136. Lithwick, Y., Naoz, S. The eccentric Kozai mechanism for a test particle // *Astrophysical Journal*. — 2011. — V. 742. — № 2. — id. 94. — 8 pp.
137. Maffione, N. P., Darriba, L. A., Cincotta, P. M. and Giordano, C. M. Chaos detection tools: application to a self-consistent triaxial model // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — V. 429. — № 3. — P. 2700.
138. Malhotra, R. Capture probabilities for secondary resonances // *Icarus*. — 1990. — V. 87. — P. 249.
139. Malhotra, R., Dermott, S. F. The role of secondary resonances in the orbital history of Miranda // *Icarus*. — 1990. — V. 85. — P. 444.
140. Maris, M., Carraro, G., Cremonese, G., Fulle, M. Multicolor photometry of the Uranus irregular satellites Sycorax and Caliban // *Astronomical Journal*. — 2001. — V. 121. — № 5. — P. 2800.

141. Maris, M., Carraro, G., Parisi, M. G. Light curves and colours of the faint Uranian irregular satellites Sycorax, Prospero, Stephano, Setebos, and Trinculo // *Astronomy and Astrophysics*. — 2007. — V. 472. — P. 311.
142. Masiero, J., Jedicke, R., Ďurech, J. et al. The thousand asteroid light curve survey // *Icarus*. — 2009. — V. 204. — P. 145.
143. Mazeh, T., Krymolowski, Y., Rosenfeld, G. The high eccentricity of the planet orbiting 16 Cygni B // *Astrophysical Journal*. — 1997. — V. 477. — № 2. — P. L103.
144. Melnikov, A. V. Modelling of lightcurves of minor planetary satellites // *IAA Transactions*. — 2002. — № 8. — P. 131.
145. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. The maximum Lyapunov exponent of the chaotic motion in the Hénon–Heiles problem // *Order and chaos in stellar and planetary systems / ASP Conference Series*. Eds. Byrd, G., Kholshevnikov, K., Myllari, A., Nikiforov, I., and Orlov, V. — 2004. — V. 316. — P. 34.
146. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. On the rotational dynamics of Prometheus and Pandora // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2008. — V. 101. — № 1–2. — P. 31.
147. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. The rotation states predominant among the planetary satellites // *Icarus*. — 2010. — V. 209. — № 2. — P. 786.
148. Melnikov, A. V., Shevchenko, I. I. How do the small planetary satellites rotate? // *Proceedings IAU Symp. № 263 “Icy Bodies of the Solar System” / Ed. by Montmerle, T.* — 2010. — V. 5. — P. 167.
149. Mikkola, S., Tanikawa, K. Correlation of macroscopic instability and Lyapunov times in the general three-body problem // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2007. — V. 379. — № 1. — P. L21.
150. Murray, N. W., Holman, M. J. Diffusive chaos in the outer asteroid belt // *Astronomical Journal*. — 1997. — V. 114. — № 3. — P. 1246.

151. Orlov, V. V., Rubinov, A. V., Shevchenko, I. I. The disruption of three-body gravitational systems: lifetime statistics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2010. — V. 408. — № 3. — P. 1623.
152. Patience, J., White, R. J., Ghez, A. M. et al. Stellar companions to stars with planets // *Astrophysical Journal*. — 2002. — V. 581. — № 1. — P. 654.
153. Pavluchenko, S. A. On Hamiltonian intermittency in equal mass three-body problem // *arXiv:1103.0458*. — 2011. — 5 p.
Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/1103.0458>, свободный.
154. Peale, S. J. Generalized Cassini's laws // *Astrophysical Journal*. — 1969. — V. 74. — P. 483.
155. Peale, S. J. Rotation histories of the natural satellites // *Planetary Satellites* / Ed. by Burns, J. A. — Tucson: Univ. of Arizona Press, 1977. — P. 87.
156. Peale, S. J. Origin and evolution of the natural satellites // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. — 1999. — V. 37. — P. 533.
157. Plávalová, E., Solovaya, N. A. Analysis of the motion of an extrasolar planet in a binary system // *Astronomical Journal*. — 2013. — V. 146. — № 5. — id. 108. — 8 pp.
158. Porco, C. C., Baker, E., Barbara, J. et al. Cassini Imaging Science: Initial results on Phoebe and Iapetus // *Science*. — 2005. — V. 307. — P. 1237.
159. Porco, C. C., Thomas, P. C., Weiss, J. W., Richardson, D. C. Saturn's small inner satellites: Clues to their origins // *Science*. — 2007. — V. 318. — P. 1602.
160. Pravec, P., Harris, A. W. Fast and slow rotation of asteroids // *Icarus*. — 2000. — V. 148. — P. 12.
161. Pravec, P., Harris, A. W., Vokrouhlický, D., et al. Spin rate distribution of small asteroids // *Icarus*. — 2008. — V. 197. — P. 497.
162. Seidelmann, P. K., Abalakin, V. K., Bursa, M. et al. Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of

- the Planets and Satellites: 2000 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2002. — V. 82. — P. 83.
163. Seidelmann, P. K., Archinal, B. A., A'Hearn, M. F. et al. Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2003 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2005. — V. 91. — P. 203.
 164. Seidelmann, P. K., Archinal, B. A., A'Hearn, M. F. et al. Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2006 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2007. — V. 98. — P. 155.
 165. Sheppard, S. S. Outer irregular satellites of the planets and their relationship with asteroids, comets and Kuiper Belt objects // *Proceedings IAU Symp.* № 229 “Asteroids, Comets, Meteors” / Eds. Lazzaro, D., Ferraz-Mello, S. and Fernández, J. A. — Cambridge: Cambridge University Press, 2006. — P. 319.
 166. Sheppard, S. S., Jewitt, D. C. An abundant population of small irregular satellites around Jupiter // *Nature*. — 2003. — V. 423. — P. 261.
 167. Sheppard, S. S., Jewitt, D., Kleyna, J. An ultradeep survey for irregular satellites of Uranus: Limits to completeness // *Astronomical Journal*. — 2005. — V. 129. — P. 518.
 168. Sheppard, S. S., Jewitt, D., Kleyna, J. A survey for “Normal” irregular satellites around Neptune: Limits to completeness // *Astronomical Journal*. — 2006. — V. 132. — P. 171.
 169. Shevchenko, I. I. On the recurrence and Lyapunov time scales of the motion near the chaos border // *Physics Letters A*. — 1998. — V. 241. — № 1–2. — P. 53.
 170. Shevchenko, I. I. Marginal resonances and intermittent behaviour in the motion in the vicinity of a separatrix // *Physica Scripta*. — 1998. — V. 57. — № 2. — P. 185.

171. Shevchenko, I. I. On the critical phenomena in the dynamics of asteroids // Impact of modern dynamics in astronomy / Eds. Henrard, J., Ferraz-Mello, S. — Dordrecht: Kluwer, 1999. — P. 383.
172. Shevchenko, I. I. The separatrix algorithmic map: Application to the spin-orbit motion // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 1999. — V. 73. — № 1–4. — P. 259.
173. Shevchenko, I. I. Orbital resonances and the separatrix algorithmic map // The chaotic Universe / Eds. Gurzadyan, V. G., Ruffini, R. — London: World Scientific, 2000. — P. 599.
174. Shevchenko, I. I. Adiabatic chaos in the Prometheus–Pandora system // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2008. — V. 384. — № 3. — P. 1211.
175. Shevchenko, I. I. Hamiltonian intermittency and Lévy flights in the three-body problem // Physical Review E. — 2010. — V. 81. — № 6. — id. 066216.
176. Shevchenko, I. I. Lyapunov exponents in resonance multiplets // Physics Letters A. — 2014. — V. 378. — № 1–2. — P. 34.
177. Shevchenko, I. I., Kouprianov, V. V. On the chaotic rotation of planetary satellites: the Lyapunov spectra and the maximum Lyapunov exponents // Astronomy and Astrophysics. — 2002. — V. 394. — P. 663.
178. Shevchenko, I. I., Sokolsky, A. G. Hyperboloidal precession of a dynamically symmetric satellite. Construction of normal forms of the Hamiltonian // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 1995. — V. 62. — № 4. — P. 289.
179. Sidorenko, V. V. On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability in the family of vertical motions // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2014. — V. 109. — № 4. — P. 367.
180. Simonelli, D. P., Kay, J., Adinolfi, D., et al. Phoebe: albedo map and photometric properties // Icarus. — 1999. — V. 138. — P. 249.

181. Standish, E. M. Sufficient conditions for escape in the three-body problem // *Celestial Mechanics*. — 1971. — V. 4. — № 1. — P. 44.
182. Stooke, P. J. The shapes and surface features of Prometheus and Pandora // *Earth, Moon and Planets*. — 1993. — V. 62. — P. 199.
183. Tittlemore, W., Wisdom, J. Tidal evolution of the Uranian satellites. II. An explanation for the anomalously high orbital inclination of Miranda // *Icarus*. — 1989. — V. 78. — P. 63.
184. Tittlemore, W., Wisdom, J. Tidal evolution of the Uranian satellites. III. Evolution through the Miranda–Umbriel 3:1, Miranda–Ariel 5:3, and Ariel–Umbriel 2:1 mean-motion commensurabilities // *Icarus*. — 1990. — V. 85. — P. 394.
185. Thomas, P. C. The shapes of small satellites // *Icarus*. — 1989. — V. 77. — P. 248.
186. Thomas, P. C. Sizes, shapes, and derived properties of the Saturnian satellites after the Cassini nominal mission // *Icarus*. — 2010. — V. 208. — P. 395.
187. Thomas, P. C., Black, G. J., Nicholson, P. D. Hyperion: rotation, shape and geology from Voyager images // *Icarus*. — 1995. — V. 117. — № 1. — P. 128.
188. Thomas, P. C., Burns, J. A., Helfenstein, P. et al. Shapes of the saturnian icy satellites and their significance // *Icarus*. — 2007. — V. 190. — P. 573.
189. Thomas, P., Veverka, J. Hyperion — analysis of Voyager observations // *Icarus*. — 1985. — V. 64. — № 12. — P. 414.
190. Thomas, P., Veverka, J., Morrison, D. et al. Phoebe — Voyager 2 observations // *Journal of Geophysical Research*. — 1983. — V. 88. — P. 8736.
191. Tokovinin, A. Statistics of multiple stars // *The environment and evolution of double and multiple stars* / *Proceedings of IAU Colloquium 191*. Eds. Allen, C. and Scarfe, C. — *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica* (Serie de Conferencias). — 2004. — V. 21. — P. 7.

192. Urminsky, D. J., Heggie, D. C. On the relationship between instability and Lyapunov times for the three-body problem // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2009. — V. 392. — № 3. — P. 1051.
193. Valtonen, M., Mylläri, A., Orlov, V., Rubinov, A. The problem of three stars: stability limit // Dynamical Evolution of Dense Stellar Systems / Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium. — 2008. — V. 246. — P. 209.
194. Vienne, A., Duriez, L. A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn // Astronomy and Astrophysics. — 1992. — V. 257. — P. 331.
195. Warner, B. D., Harris, A. W., Pravec, P. The asteroid lightcurve database // Icarus. — 2009. — V. 202. — № 1. — 134. Режим доступа: <http://www.MinorPlanet.info/lightcurvedatabase.html>, свободный. (Данные по ссылке актуальны на 21 апреля 2009 г.)
196. Weaver, H. A., Buie, M. W., Buratti, B. J. et al. The small satellites of Pluto as observed by New Horizons // Science. — 2016. — V. 351. — № 6279. — id. aae0030.
197. Wisdom, J. Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap // Icarus. — 1983. — V. 56. — № 1. — P. 51
198. Wisdom, J. Rotation dynamics of irregularly shaped natural satellites // Astronomical Journal. — 1987. — V. 94. — № 5. — P. 1350.
199. Wisdom, J., Peale, S. J., Mignard, F. The chaotic rotation of Hyperion // Icarus. — 1984. — V. 58. — № 2. — P. 137.