

На правах рукописи



Смирнов Антон Александрович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ
ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ БАРОВ
В ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЯХ ДИСКОВЫХ ГАЛАКТИК**

Специальность 01.03.02 —
«Астрофизика и звездная астрономия»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:

Сотникова Наталья Яковлевна,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры небесной механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

Официальные оппоненты:

Васильев Евгений Олегович,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Астрокосмического центра Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук» (АКЦ ФИАН)

Хоперсков Александр Валентинович,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой Информационных систем и компьютерного моделирования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Волгоградский государственный университет» (ВолГУ)

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет» (ЮФУ)

Защита состоится 17 июня 2022 г. в 11 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.120.01 при Главной (Пулковской) астрономической обсерватории Российской академии наук по адресу: 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, д. 65, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ГАО РАН (http://www.gaoran.ru/wp-content/uploads/2022/03/Smirnov_dissertation.pdf).

Автореферат разослан «17» мая 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.120.01
кандидат физико-математических наук



А. А. Осипова

Общая характеристика работы

В центральных областях многих галактик, видимых с ребра, часто можно заметить характерные уярчения, имеющие форму ящика или арахиса [1]. Такие объекты принято называть ящикоподобными или арахисообразными балджами (англ. “boxy/peanut-shaped bulges” или “B/PS bulges”). Как правило, у таких балджей можно заметить четыре луча, выделяющиеся на фоне всего остального “арахиса”. Эти лучи практически симметричны относительно плоскости диска и исходят из самой центральной области галактики. Если в B/PS балдже наблюдаются такие лучи, то принято говорить, что в галактике есть X-структура.

Доля дисковых галактик с B/PS балджами в локальной Вселенной весьма значительна [1–3]. Для различных выборок их количество варьируется от 20%-25% [2] до 40% [1]. В работе [3] авторы показали, что если учесть эффекты, связанные с наблюдательной селекцией, то B/PS балджи должны существовать примерно в 70% дисковых галактик на эпоху $z = 0$, то есть являются весьма часто встречающимися объектами.

Что касается физической природы B/PS балджей, то в работе Комбс и Сандерса [4] было напрямую показано, что такие балджи могут быть связаны с барами, также весьма часто встречающимися в дисковых галактиках [5]. Комбс и Сандерс [4] рассмотрели типичную численную модель галактики с баром и нашли, что бары со временем естественным образом утолщаются в вертикальном направлении, приобретая форму ящика или арахиса, если смотреть на галактику с ребра. Конкретный вид (“ящик” или “арахис”) при этом определяется углом между большой осью бара и лучом зрения. “Арахис” наблюдается том случае, когда большая ось бара повернута к лучу зрения перпендикулярно, а для углов поворота бара к лучу зрения меньше примерно 50° B/PS балдж в большей степени напоминает ящик.

Настоящая работа посвящена детальному исследованию особенностей вертикальной структуры баров (B/PS балджей) и, прежде всего, X-структур.

Актуальность темы. Наблюдаемые X-структуры можно охарактеризовать двумя параметрами: углом раствора (углом между лучом X-структуры и большой осью галактики) и длиной лучей. Новые данные наблюдений показывают, что параметры X-структур реальных галактик лежат в узком диапазоне значений. В работе [6] авторы исследовали B/PS балджи и X-структуры 11 галактик, видимых с ребра, и нашли, что углы раствора лучей лежат в пределах примерно от 20° до 43° . В работе [7] был получен примерно такой же диапазон значений для выборки из 22-х галактик, видимых с ребра: от $20^\circ \pm 2^\circ$ до $38^\circ \pm 2^\circ$. В еще одной работе [8] исследовались две большие выборки галактик с X-структурами и галактики с барлинзами. Если перевести данные из работы [8] в углы раствора X-структур, то для большинства галактик с небольшими углами наклона плоскости диска к лучу зрения ($i > 70^\circ$) разброс углов раствора окажется в диапазоне от 24° до 45° . В работе [7] на примере одной численной модели галактики была показано, что полученный диапазон значений углов раствора,

по-видимому, не может объясняться только эффектами проекции. В то же время в теоретических работах ранее вопрос о связи параметров X-структур и параметров галактики, в которой X-структура наблюдается, не ставился. Прежде всего, потому что раньше не было наблюдательного материала, с которым возможно сравнить результаты теоретического анализа. Теперь такой материал есть [6–8]. Поэтому задача о связи параметров X-структур с параметрами галактики, в которой такая X-структура наблюдается, становится весьма актуальной.

При сравнении модельных и наблюдательных данных по X-структурам возникает следующая проблема. Все группы авторов, ранее занимавшиеся исследованиями свойств X-структуры реальных галактик, использовали различные методики определения параметров X-структур. Так, Циамбур и Грэхам [6] характеризовали форму и размеры V/PS балджей и их X-структур, аппроксимируя наблюдаемые изофоты эллипсами, возмущенными некоторой комбинацией Фурье-гармоник. А Лаурикаинен и Сало [8] и Савченко и др. [7] изучали только X-структуры, используя процедуры нерезкого маскирования и фотометрической декомпозиции, соответственно. На примере отдельных галактик видно, что используемые подходы могут приводить к существенным расхождениям в получаемых результатах. Наиболее яркий пример — галактика ESO 443-042. В [6] авторы получили, что X-структура, наблюдаемая в этой галактике, весьма сплюснута (угол раствора примерно 16°). При этом параметры X-структуры, измеренные в [8] для той же галактики, оказались довольно типичными (угол раствора примерно 37°). Кроме того, как будет показано в Главе 1, между углами раствора X-структур модельных и реальных галактик также наблюдается некоторое несоответствие при определении параметров X-структур схожими методами. Для дальнейших исследований X-структур важно понять детальные причины описанных расхождений, как между модельными и наблюдательными данными, так и между наблюдательными данными, полученными разными методами.

Исследуя вековую эволюцию бара в различных моделях, можно установить общую связь параметров X-структур и параметров всей галактик. Однако, найденные таким образом закономерности, строго говоря, будут верны только в рамках рассмотренных моделей. Поэтому важно также понять, какие общие принципы стоят за различием в общей морфологии X-структур и их углов раствора в различных моделях. Для этого необходимо исследовать, что из себя представляют X-структуры с динамической точки зрения. С точки зрения динамики отдельных орбит устройство X-структур ранее обсуждалась в литературе только в контексте так называемых орбит 2:1 [9]. Двигаясь по орбите такого типа, за один полный оборот вокруг центра системы звезда совершает в точности две осцилляции вдоль вертикальной оси в системе отсчета, где бар покоится. Результаты недавних численно-экспериментальных работ говорят о том, что, по-видимому, X-структуры могут быть связаны не только с орбитами 2:1. В недавней работе Портейл и др. [10] рассмотрели некоторую модельную галактику с баром, по параметрам близкую к Млечному Пути, и выделили различные семейства орбит в такой модели. Оказалось, что для рассмотренной авторами

модели регулярные трехмерные орбиты, связанные с вертикальным резонансом 2:1, немногочисленны и в основном дают вклад в вертикальную структуру только на периферии В/PS балджа. Портейл и др. [10] высказали предположение, что во внутренних частях бара X-структура образуется за счет орбит, связанных с вертикальным резонансом 5:3 (так называемые орбиты-“брецельки”). В моделях, рассмотренных в [11] и [12], наблюдалась качественно похожая ситуация. Этими авторами было найдено сравнительно малое число орбит 2:1 для их моделей. Результаты работ [10–12] говорят о том, что помимо орбит 2:1 вертикальная структура бара в некоторых моделях может поддерживаться другими типами орбит. Если же это так, то возникает вопрос о том, каким образом различные типы орбит, отличные от орбит 2:1, могут образовывать X-структуру. Найти ответ на этот вопрос важно как для интерпретации наблюдательных данных, так и для построения более точных теоретических моделей эволюции бара в вертикальном направлении.

Еще один важный вопрос о связи особенностей вертикальной структуры бара и параметров галактики, в которой такой бар находится, состоит в следующем. Основное свидетельство того, что бары действительно могут терять симметрию в вертикальном направлении, в первую очередь получено из исследования численных моделей галактик [13–15], исследований динамики изгибных возмущений [16] и исследований динамики орбит в потенциалах, включающих бар-компоненту [13; 17]. Реальная же наблюдательная статистика баров, асимметричных в вертикальном направлении, пока что очень бедна. В настоящее время отождествлены только три галактики, видимые под промежуточными углами наклона (NGC 3227, NGC 4569 и ESO 506-G004), которые демонстрируют косвенные признаки наличия в них асимметричного бара [18; 19]. В то же время в работе [15] было показано, что в некоторых модельных галактиках бар может повторно проходить через стадию потери вертикальной симметрии уже после формирования В/PS балджа. Условия, при которых возникает такой вторичный изгиб бара (англ. *secondary buckling*), ранее специально в литературе не исследовались. Уточнение же этих условий важно по нескольким причинам. Во-первых, с практической точки зрения, такие исследования могут упростить дальнейший поиск галактик с вертикально асимметричными барами, то есть помочь в накоплении наблюдательного материала (пока что весьма скудного) для таких объектов. Во-вторых, такие исследования важны с теоретической точки зрения. Селвудом [20] напрямую было показано, что в различных потенциалах механизмы роста бара также могут быть разными. Поэтому исследование условий, при которых продолжительный изгиб возможен, важно для построения целостной картины о механизмах роста бара в вертикальном направлении.

Исследование особенностей вертикальной структуры бара в различных моделях галактик, проводимое в настоящей работе, существенно дополняет и систематизирует сложившуюся картину того, как происходит вековая эволюция бара в вертикальном направлении. Подобные исследования особенно актуальны

на фоне повышения интереса научного сообщества к В/PS балджам на различных красных смещениях [3], В/PS балджам в различных космологических расчетах [21], а также имеют принципиальное значение для интерпретации наблюдательных данных по В/PS балджу Млечного Пути.

Целью диссертационной работы является исследование морфологических особенностей вертикальной структуры баров (прежде всего X-структур) в различных моделях галактик и выявление связи между свойствами этих особенностей и свойствами галактик, в которых они образуются.

Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие задачи:

1. Моделирование эволюции на большом промежутке времени равновесных трехмерных многокомпонентных моделей галактик с различными начальными условиями в диске и темном гало. Измерение углов раствора X-структур в построенных моделях и сравнение полученных модельных данных с данными наблюдений.
2. Моделирование эволюции равновесных трехмерных многокомпонентных моделей галактик с различными вкладами классического балджа. Сравнительный анализ свойств и оценка величины изгиба бара в вертикальном направлении для различных вкладов классического балджа.
3. Исследование орбитального состава бара в моделях с различной морфологией X-структур. Уточнение физической природы X-структур, а также связи между различными типами орбит и параметрами X-структур.
4. Построение более точной фотометрической модели В/PS балджа с X-структурой, где угол раствора фигурирует явно. Применение этой модели для фотометрической декомпозиции модельных и реальных галактик. Сравнение получаемых модельных данных и данных для реальных галактик.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. *Впервые* проводится сравнение углов раствора и размеров X-структур модельных галактик, имеющих различные физические параметры, с данными наблюдений и показано, что нижняя граница наблюдаемого диапазона углов раствора определяется вкладом темного гало в общий гравитационный потенциал галактики.
2. *Впервые* на примере модельных галактик исследованы условия, при которых возникает или подавляется поздний продолжительный изгиб бара и получена оценка граничной массы классического балджа, при которой поздний продолжительный изгиб бара в принципе возможен.
3. *Впервые* для различных типов орбит, а не только орбит 2:1, показано, что X-структуры являются огибающими z -максимумов таких орбит.
4. Предложена *новая* фотометрическая модель для В/PS балджей, учитывающая, во-первых, наличие X-структуры и, во-вторых, в явном виде включающая в состав параметров угол раствора лучей X-структуры. С

помощью предложенной модели *впервые* получено согласие модельных и наблюдательных данных по углам раствора X-структур.

Научная и практическая ценность работы

Ценность результатов диссертации определяется следующим.

Во-первых, исследования вековой эволюции X-структуры в различных моделях галактик позволило установить связь параметров X-структур и параметров галактик, в которых X-структуры наблюдаются. Важным результатом является результат о малости углов раствора X-структур в галактиках с большой массой темного гало. Этот результат может быть использован в качестве дополнительного критерия при оценке массы темного гало в наблюдательных исследованиях реальных галактик.

Во-вторых, анализ вертикальной эволюции баров в различных моделях показал, что в зависимости от параметров моделей, вековая эволюция баров в вертикальном направлении протекает существенно различным образом на больших промежутках времени. Выявленные различия в дальнейшем могут быть использованы как при интерпретации наблюдательных данных, так и для построения более точной теории эволюции бара в вертикальном направлении.

В-третьих, нахождение граничных условий, при которых в галактиках может возникнуть долговременный изгиб бара, открывает возможность для построения более строгой выборки галактик, что, в свою очередь, может упростить дальнейший поиск галактик с вертикально асимметричными барами, которых пока практически не найдено.

В-четвертых, результаты относительно динамического устройства V/PS балджей и X-структур в различных моделях галактик имеют фундаментальное значение как для дальнейших теоретических исследований динамики V/PS балджей, так и для интерпретации данных по V/PS балджам реальных галактик, в том числе V/PS балджа Млечного Пути.

В-пятых, предложенная новая фотометрическая модель V/PS балджа с X-структурой может быть использована в дальнейших фотометрических исследованиях V/PS балджей и X-структур в больших обзорах галактик. Это позволит подтвердить найденные модельные зависимости на примере большого объема наблюдательных данных и более детально исследовать механизмы формирования вертикальной структуры баров в реальных галактиках.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. На основе численных моделей галактик впервые исследована связь параметров X-структур и параметров галактик, в которых X-структуры образуются. Получено, что нижняя граница наблюдаемых углов раствора должна определяться галактиками с большим вкладом темной материи в общий гравитационный потенциал ($M_h(r < 4R_d)/M_d \approx 3$).

2. Впервые показано, что возникновение продолжительного изгиба бара обуславливается наличием или отсутствием дополнительной концентрации массы (классического балджа) в центральной области галактики. Определена граничная масса классического балджа $M_b \lesssim 0.1M_d$, при которой продолжительный изгиб бара возможен.
3. Сделан вывод о том, что каждый тип регулярных трехмерных орбит в баре формирует свою X-структуру, а параметры всей наблюдаемой X-структуры определяются тем, какое семейство орбит доминирует в рассматриваемом потенциале. При этом на примере различных типов орбит показано, что лучи X-структуры есть огибающие z -максимумов орбит, повышенная плотность в которых возникает за счет того, что звезды проводят большую часть времени в z -максимумах орбит.
4. Построена новая фотометрическая модель для V/PS балджа с X-структурой. С ее помощью впервые проведено сравнение различных подходов к измерению X-структур и получено, что для некоторых галактик метод, основанный на аппроксимации изофот возмущенными эллипсами, может давать неверные результаты из-за вклада диска. Также показано, что значения углов раствора модельных и реальных X-структур согласуются между собой, если их измерять с помощью предложенной модели.

Достоверность. Надежность полученных в диссертации результатов обусловлена использованием хорошо оттестированных и проверенных на большом количестве различных задач пакетов для построения и моделирования многокомпонентных моделей галактик. Существенное внимание в работе уделяется проверке эффектов вертикальной релаксации и подбору необходимых условий для предотвращения влияния этих эффектов на полученные результаты. Наконец, все расчеты проводились для моделей с суммарным числом частиц порядка 10^7 , что обеспечивает хорошее пространственное разрешение всех исследуемых особенностей вертикальной структуры.

Важными свидетельствами достоверности результатов является их соответствие мировому уровню исследований в этой области, что подтверждается публикациями результатов в престижных международных журналах — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* и *Astrophysical Journal*.

Апробация. Основные результаты работы докладывались на семинаре астрономического отделения СПбГУ, на семинаре отдела небесной механики и динамической астрономии ГАО РАН, на Всероссийской конференции “Актуальные проблемы внегалактической астрономии”, ПРАО АКЦ ФИАН, Пущино, 18-21 апреля, 2017, ежегодной российской конференции “Современная звездная астрономия - 2018”, ГАИШ МГУ, Москва, 22-26 октября 2018, ежегодной российской конференции “Современная звездная астрономия - 2019”, САО РАН 7-11 октября 2019.

Личный вклад. Автор принимал равноправное участие в постановке задач, обсуждении и интерпретации полученных результатов относительно вертикальной структуры баров, изложенных в настоящей работе. Автором были построены все рассматриваемые в настоящей работе численные модели галактик и выполнены расчеты их эволюции, а также написаны программы для исследования свойств бара и его вертикальной структуры. В Главе 3 автором была высказана и подтверждена гипотеза о динамическом устройстве X-структур в различных моделях и написана программа для расчета характеристик орбит в рассматриваемых моделях. В Главе 4 автором предложена рассматриваемая новая фотометрическая модель. Модель программно реализована и с ее помощью выполнена декомпозиция всех рассматриваемых в данной работе реальных и модельных галактик.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных работах, 4 из которых изданы в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК.

1. Smirnov, Anton A. and Sotnikova, Natalia Ya., What determines the flatness of X-shaped structures in edge-on galaxies? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018. Vol. 481, no. 3, P. 4058-4076.
2. Smirnov, Anton A. and Sotnikova, Natalia Ya., Is the late buckling stage inevitable in the bar life? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2019. Vol. 485, no. 2, P. 1900-1905.
3. Parul, Hanna D., Smirnov, Anton A., and Sotnikova, Natalia Ya., Orbital Ingredients for Cooking X-structures in Edge-on Galaxies // *The Astrophysical Journal*. 2020. Vol. 895, no. 1, P. 12.
4. Smirnov, Anton A. and Savchenko, Sergey S., New X-shaped bulge photometric model as a tool for measuring B/PS bulges and their X-structures in photometric studies // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2020. Vol. 499, no. 1, P. 462-481.

Другие публикации автора:

1. Smirnov, Anton A., Sotnikova, Natalia Ya., and Koshkin, Alexei A., Simulations of slow bars in anisotropic disk systems // *Astronomy Letters*. 2017. Vol. 43, no. 2, P. 61-74.
2. Smirnov, Anton A., Sotnikova, Natalia Ya., Numerical studies of instability of generalized polytropic models of stellar disks // *Journal of Physics Conference Series*. 2017. Vol. 929, no. 1, P. 012009.
3. Mosenkov, Aleksandr V., Smirnov, Anton A., Sil'chenko, Olga K., Rich, R. Michael, Reshetnikov, Vladimir P., and Kormendy, John., Tilted outer and inner structures in edge-on galaxies? // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2020. Vol. 497, no. 2, P. 2039-2056.
4. Smirnov, Anton A., Tikhonenko, Iliya S., and Sotnikova, Natalia Ya., Face-on structure of barlenses and boxy bars: an insight from spectral dynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2021. Vol. 502, no. 4, P. 4689-4707.

5. Tikhonenko, Iliya S., Smirnov, Anton A., and Sotnikova, Natalia Ya., First direct identification of the barlens vertical structure in galaxy models // *Astronomy and Astrophysics*. 2021. Vol. 648, L4.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 188 страницы, включая 62 рисунка и 8 таблиц. Список литературы содержит 150 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** приведена краткая история темы исследования, описаны основные достигнутые результаты относительно вертикальной структуры баров, обоснованы актуальность темы, научная новизна, цели и задачи диссертации, приведены основные положения, выносимые на защиту, кратко представлено содержание диссертации.

В **Главе 1** исследован вопрос о связи параметров X-структур и параметров галактик, в которых наблюдаются X-структуры.

В пункте **1.1** описаны имеющиеся наблюдательные данные по X-структурам и дана общая характеристика параметров, определяющих вертикальную эволюцию бара. Такими параметрами являются толщина звездного диска, распределение радиальных скоростей звезд, а также вклады темного гало и центральной сферической компоненты (такой как классический балдж) в общий гравитационный потенциал.

В пункте **1.2.1** описаны многокомпонентные равновесные трехмерные модели галактик, используемые в настоящей работе, их характеристики и алгоритм построения их численных реализаций. Каждая модель состоит из звездного диска, погруженного в сферическое темное гало. В некоторых моделях также добавляется классический балдж. Пример кривой вращения для одной из моделей приведен на Рис. 1 (слева).

Построены четыре набора моделей с различными массами темного гало (четыре модели), начальными толщинами звездного диска (три модели), значениями параметра Тумре на некотором характерном радиусе (шесть моделей) и вкладами классического балджа (четыре модели). Параметр Тумре

$$Q(R) = \frac{\sigma_R(R)\kappa(R)}{3.36G\Sigma(R)}, \quad (1)$$

где R — цилиндрический радиус, $\sigma_R(R)$ — дисперсия радиальных скоростей, $\kappa(R)$ — частота эпициклических осцилляций звезд, G — гравитационная постоянная и $\Sigma(R)$ — поверхностная плотность диска. Параметр Тумре на практике определяет характерное значение дисперсии радиальных скоростей в рассматриваемых моделях и является мерой “динамической нагретости” звездного диска. Для каждой из моделей решаются уравнения движения на промежутке времени примерно 8 млрд. лет с адаптивным шагом по времени (минимальный шаг $dt_{\min} = 0.2$ млн. лет, максимальный — $dt_{\min} = 1.6$ млн. лет). Решение уравнений движения осуществляется с помощью общедоступного пакета `gyrfalcon` [22]. В пакете используется схема интегрирования `leapfrog`, а основная ресурсно-затратная операция — расчет гравитационных сил — осуществляется с помощью модифицированного `treecode`-алгоритма [23]. В расчетах используется система единиц, в которой полная масса диска $M_d = 1$, радиальный масштаб $R_d = 1$ и гравитационная постоянная $G = 1$.

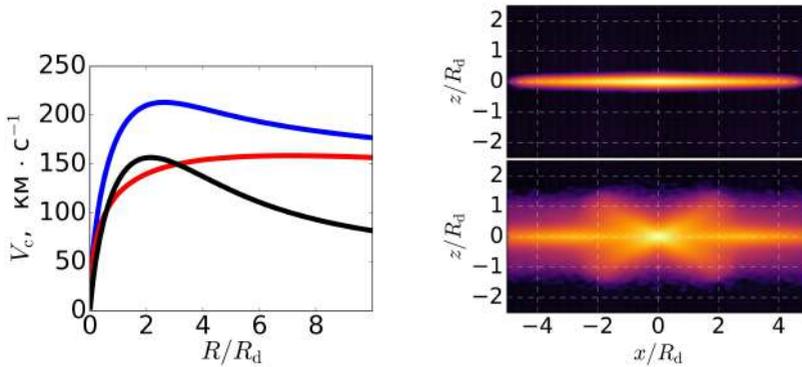


Рис. 1 — Слева: кривая вращения (синим) для одной из рассмотренных моделей. Черным цветом показан вклад диска, красным — гало. Справа: начальные и конечные распределения плотности в проекции (xz) в этой модели. Луч зрения идет в плоскости диска перпендикулярно большой оси бара (для нижнего изображения). На нижнем изображении четко выделяется В/PS балдж и X-структура.

Общая схема эволюции моделей описана в пункте 1.2.2. В каждой из рассмотренных моделей происходит образование бара. Образовавшийся бар затем утолщается в вертикальном направлении — образуется В/PS балдж и выделяется X-структура. Начальное и конечное распределения плотности в проекции (xz) показаны на Рис. 1. На конечный момент времени хорошо заметен В/PS балдж и его X-структура.

В пункте 1.2.3 исследованы эффекты численной релаксации в вертикальном направлении в моделях с различным числом частиц в диске. Для этого в девяти моделях с числом частиц в диске от 200 тыс. до 8 млн исследована эволюция толщины звездного диска. Показано, что эволюция толщины происходит существенно различным образом в зависимости от выбранного числа частиц. Сделан вывод о том, что число частиц является еще одним параметром, зависимость от которого необходимо рассматривать при исследовании X-структур.

В пункте 1.3.1 описана методика измерения параметров X-структур. Сама методика состоит в следующем. Рассматривается набор слоев параллельных плоскости диска. В каждом слое с различной высотой над плоскостью диска рассчитывается распределение поверхностной плотности частиц в зависимости от расстояния до центра выбранного слоя. Далее для каждого слоя определяется положение максимума плотности. Затем распределение максимумов плотности в пространстве, найденных для всех слоев, аппроксимируется линейной функцией. Угол наклона полученной прямой соответствует углу раствора X-структур. Описанная методика может применяться для любых ориентаций бара относительно луча зрения. Ниже, если не указано иное, все результаты приведены для случая, когда большая ось бара развернута перпендикулярно лучу зрения.

В пункте **1.3.2** исследована эволюция углов раствора X-структур в моделях с различным числом частиц в диске, ранее рассмотренных в пункте 1.2.3. Показано, что для корректного исследования X-структур необходимо рассматривать модели с числом частиц в диске $\gtrsim 2$ млн.

В пунктах **1.4.1–1.4.4** проведен анализ эволюции углов раствора X-структур в моделях с различными физическими параметрами: в **1.4.1** — с различной массой гало, в **1.4.2** — с различными вкладами классических балджей, в **1.4.3** и **1.4.4** — в моделях с различными значениями толщины звездного диска и параметра Тумре, соответственно. На Рис. 2 показано, как меняется угол раствора со временем в некоторых из рассмотренных моделей. Видно, что в зависимости от параметров моделей эволюция углов раствора происходит различным образом и имеется разброс углов раствора на конечный момент времени в зависимости от модели. На основе полученных зависимостей делаются следующие выводы. Увеличение толщины звездного диска, значения параметра Тумре или вклада классического балджа ведет к увеличению значений угла раствора в рассмотренном диапазоне параметров. Увеличение же массы гало приводит к уменьшению угла. При этом наибольший и наименьший углы получаются в моделях с наименьшей и наибольшей массой гало, соответственно.

В пункте **1.4.5** проведено сравнение размеров модельных X-структур между собой для различных моделей и размеров реально наблюдаемых X-структур. Показано, что рассмотренные модельные X-структуры, как правило, имеют размеры в плоскости диска от 0.3 до 0.6 в единицах большой полуоси бара. Это согласуется с наблюдательными данными по V/PS балджам, полученными ранее другими авторами.

Результаты главы описаны в пункте **1.5**.

В пункте **1.5.1** проведено сравнение значений углов раствора X-структур модельных галактик со значениями углов раствора реально наблюдаемых X-структур. Сравнение проведено с учетом эффектов проекции, а именно изменения углов за счет поворота большой оси бара относительно луча зрения. Для большинства реальных и модельных галактик углы раствора заключены в диапазоне от 25° до 45° , за исключением нескольких реальных галактик с углами от 15° до 20° . Такие малые углы в рамках рассмотренных моделей получить на удается даже с учетом эффектов проекции. Решению этой проблемы, в частности, посвящена Глава 4.

В пункте **1.5.2** проведено сравнение полученных закономерностей в изменении морфологии баров и V/PS балджей и закономерностей, полученных в более ранних численно-экспериментальных работах. Рассмотрены следующие особенности: образование барлинзы, потеря баром вертикальной симметрии в ходе эволюции и влияние классического балджа на этот процесс, образование двойных X-структур. Перечисленные особенности возникают в рассмотренных моделях для некоторых выделенных значений параметров. Эти значения согласуются с полученными ранее другими авторами.

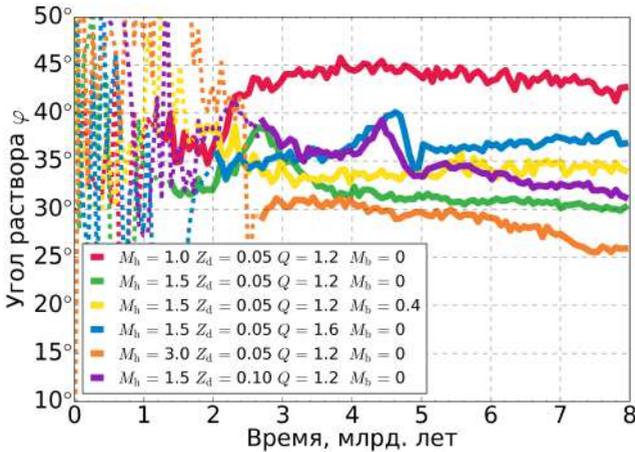


Рис. 2 — Эволюция угла раствора X-структур для шести из тринадцати рассмотренных моделей с различными физическими параметрами. В легенде M_h — масса гало в пределах сферы радиусом $4R_d$, Z_d — начальная толщина диска, Q — значение параметра Тумре на $2R_d$. Части графиков, изображенные пунктиром, соответствуют периоду времени до формирования X-структуры.

В пункте 1.5.3 более подробно обсуждаются различные сценарии вертикальной эволюции бара в рассмотренных моделях, а именно проходит ли вертикальная эволюция бара с сохранением симметрии относительно плоскости диска или нет. Отмечено, что при больших значениях параметра Тумре и начальной толщины звездного диска бар обязательно проходит через стадию длительной потери вертикальной симметрии.

Пункт 1.6 суммирует основные результаты Главы.

В Главе 2 исследована связь центральной концентрации массы (классического балджа) и феномена длительной потери баром вертикальной симметрии.

В пункте 2.1 коротко обсуждаются имеющиеся наблюдательные данные и результаты предыдущих численно-экспериментальных работ по изгибающимся барам.

В пункте 2.2 дано описание использующихся в данной главе численных моделей. Всего рассматривается четырнадцать различных моделей: четыре модели из Главы 1, демонстрирующие длительную потерю баром вертикальной симметрии, четыре модели с аналогичными начальными параметрами, но добавленным классическим балджем и еще шесть моделей с различными вкладами балджа. Подготовка численных реализаций моделей и расчеты эволюции построенных моделей проведены аналогично тому, как это было сделано в пункте 1.2.1 Главы 1.

В пункте 2.3 проведен сравнительный анализ вертикальной эволюции бара в моделях с классическими балджами и без. Для этого вводится величина $S_{\text{бар}} = (A_2(z > 0) - A_2(z < 0))/A_2$, где $A_2(z > 0)$ — амплитуда бара над

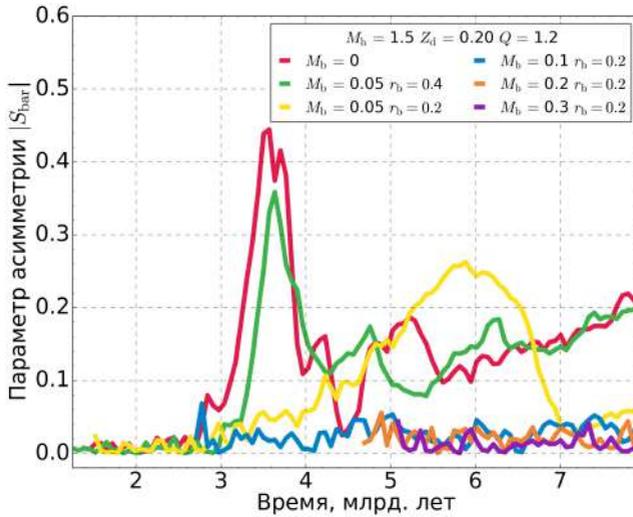


Рис. 3 — Эволюция модуля параметра асимметрии $S_{\text{бар}}$ для моделей с различными массами классического балджа M_b и характерными масштабами r_b . Остальные обозначения такие же как в подписи к Рис. 2.

плоскостью диска ($z > 0$), а $A_2(z < 0)$ — амплитуда бара под плоскостью диска ($z < 0$). В случае симметричного бара значение этого параметра близко к нулю, в случае же, когда бар обладает большой асимметрией относительно плоскости диска, значение отстает от нуля. На основе анализа эволюции этого параметра в серии из восьми моделей сделан вывод о том, что начального классического балджа умеренной массы достаточно для поддержания симметричной вертикальной эволюции бара.

В пункте 2.4 проведен аналогичный анализ эволюции параметра $S_{\text{бар}}$ для серии моделей с различными вкладами классических балджей (см. Рис. 3). Определяются граничные параметры балджа, при которых вторичная потеря баром вертикальной симметрии оказывается подавлена: $M_b = 0.1M_d$ и $r_b = 0.2R_b$, где M_b и M_d — полные массы классического балджа и диска, соответственно, а r_b и R_d — их масштабы спадания плотности (для диска — в его плоскости).

В пункте 2.5 представлены основные результаты Главы.

Глава 3 посвящена исследованию динамической природы X-структур в рассмотренных в Главе 1 моделях.

В пункте 3.1 представлены результаты предыдущих работ по исследованию орбит, составляющих В/PS балджи и X-структуры в различных потенциалах.

В пункте 3.2.1 дано описание двух численных моделей с разной морфологией X-структур, для которых далее исследованы типы орбит, составляющих В/PS балджи и X-структуры. Изначально модели отличаются только значением параметра Тумре: в первой — характерное значение $Q = 1.2$, во второй —

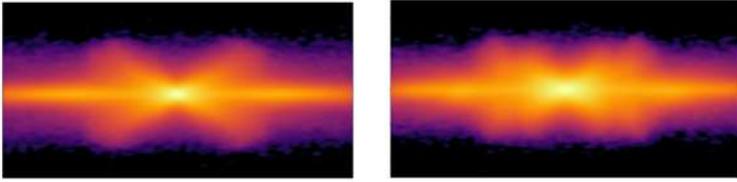


Рис. 4 — Модель с типичной одинарной X-структурой (слева) и модель с двойной X-структурой (справа). Луч зрения идет вдоль плоскости диска и перпендикулярно большой оси бара.

$Q = 1.6$. Однако, для первой модели X-структуры имеют довольно типичную морфологию, а для второй — X-структуры оказывают двойными, то есть в балдже выделяется восемь лучей (см. Рис. 4).

В пункте 3.2.2 описана методика нахождения главных частот осцилляций частиц — “звезд” с помощью Фурье-анализа координатных временных рядов соответствующих частиц. Суть методики в следующем. В системе отсчета, где бар покоится, для каждой из частиц рассматривается три временных ряда: по x , по z и по R (ось x идет вдоль большой оси бара, ось z — перпендикулярно плоскости диска). К каждому временному ряду применяется преобразование Фурье и определяются главные частоты (частоты линий с наибольшей амплитудой) в соответствующих спектрах. Далее каждой частице ставится в соответствие набор из трех полученных частот: f_x , f_z и f_R . При этом в рассматриваемой системе отсчета величина $2\pi f_x$ близка к угловой скорости частицы, а f_R соответствует частоте эпициклических осцилляций.

В пункте 3.3 на основании отношения f_R/f_x частот эпициклических осцилляций и осцилляций вдоль оси x выделено семейство орбит с $f_R/f_x = 2 \pm 0.1$, составляющее бари в рассматриваемых моделях. Частиц с такими орбитами оказывается примерно половина от общего числа в каждой из моделей.

В пункте 3.4.1 описаны особенности распределений частиц бара по отношению f_z/f_x характерных частот вертикальных осцилляций к частотам осцилляций в плоскости диска. На Рис. 5 представлены эти распределения. Их форма для двух рассматриваемых моделей сильно различается. В первой модели, где X-структура одинарная, имеется широкий пик с максимумом на $f_z/f_x = 1.75$ (7:4) и вторичный пик на $f_z/f_x = 2$. Во второй модели, где X-структура двойная, наблюдается резкий пик с максимумом на $f_z/f_x = 1.66$ (5:3), затем плато, и небольшой пик на $f_z/f_x = 2$. Отмечено, что в рассмотренных моделях доля орбит с $f_z : f_x = 2 : 1$, с которыми обычно в литературе связываются В/PS балджи и X-структуры, мала.

В пункте 3.4.2 описаны особенности пространственного распределения групп орбит с различным отношением f_z/f_x на выделенный момент времени $t = 450$ вр. ед. (примерно 6 млрд. лет). Наглядно показано, что все группы орбит с различными отношениями f_z/f_x участвуют в формировании В/PS балджей. Окончательно установлено, что орбиты с $f_z : f_x = 2 : 1$ вносят малый вклад в

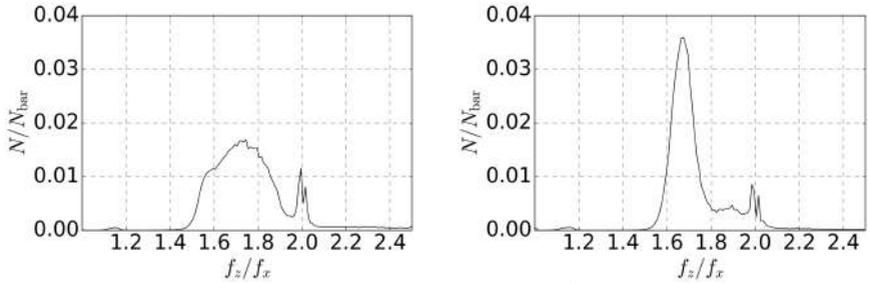


Рис. 5 — Распределение частиц бара по отношению f_z/f_x характерных частот вертикальных осцилляций к частотам осцилляций в плоскости диска для модели с типичной одинарной X-структурой (слева) и двойной (справа).

структуру В/PS балджа и не могут объяснять феномен X-структур в рассмотренных моделях.

В пункте 3.5.1 дано определение интеграла Якоби:

$$E_j = E - \Omega_p \cdot L_z, \quad (2)$$

где E — полная энергия звезды, L_z — проекция ее углового момента на вертикальную ось, а Ω_p — скорость узора бара. Эта характеристика сохраняется при движении звезды по орбите в отличие от углового момента и служит мерой максимально удаления звезды от центра диска. Исследуя орбиты с близкими значениями E_j , можно оценить вклад различных орбитальных групп в структуру В/PS балджа на разных расстояниях от центра системы на некотором временном промежутке.

В пункте 3.5.2 исследованы распределения орбит по интегралам Якоби и проведен анализ вкладов орбит разных типов в вертикальную структуру бара на различных расстояниях от центра диска. Для модели с одинарной X-структурой на всех расстояниях наблюдается смесь орбитальных семейств. Для модели с двойной X-структурой — в основном доминируют орбиты с $f_z/f_x = 1.6 \div 1.7$ кроме самых центральных областей.

В пункте 3.6.1 описаны типичные орбиты, поддерживающие В/PS балджи в рассматриваемых моделях. Это орбиты как с целочисленными отношениями частот вблизи пиков распределений отношений частот: орбиты с $f_z/f_x = 7 : 4$, $f_z/f_x = 5 : 3$, — так и с произвольным отношением частот, например, с $f_z/f_x = 1.73$ (орбита-“бабочка”). Орбиты с целочисленным отношением частот являются замкнутыми. Изображения орбит представлены на Рис. 6, верхний ряд.

В пункте 3.6.2 исследованы профили плотности, создаваемые ансамблями типичных орбит на большой шкале времени, и показано, что наиболее сильные уярчения возникают в точках, соответствующих максимальному возвышению частицы над плоскостью диска (см. Рис. 6, нижний ряд).

В пункте 3.6.3 проведен анализ распределения орбит в терминах “интеграл Якоби - максимальное возвышение над плоскостью диска”. На Рис. 7

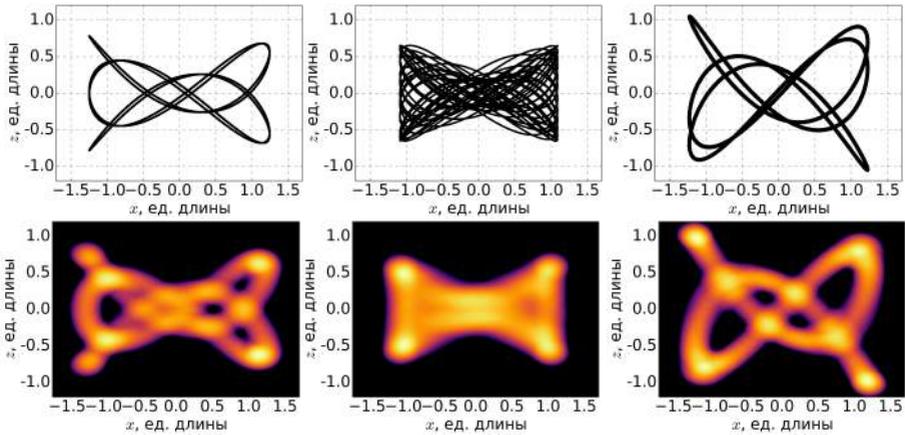


Рис. 6 — Типичные орбиты, формирующие V/PS балджи в рассмотренных моделях, (сверху) и их усредненные по времени профили (снизу). Отношения частот f_z/f_x слева направо: 7 : 4, 1.73 и 5 : 3. Одна единица длины соответствует начальному значению экспоненциального масштаба диска R_d .

представлены эти распределения для модели с одинарной X-структурой. Как видно из рисунка, орбиты с различными отношениями f_z/f_x выстраиваются вдоль некоторых сегментов на данной плоскости. Сделан вывод о том, что в рассматриваемых моделях X-структуры наблюдаются вследствие выстраивания z -максимумов орбит различных типов.

В пункте 3.7.1 описана методика выделения X-структур методом нерезкого маскирования, когда интенсивность в пикселе заменяется на сумму исходной интенсивности и ее градиента с некоторым весом. Такая методика позволяет усилить контрастность изображения и явным образом выделяет X-структуры.

В пункте 3.7.2 проведен сравнительный анализ маскированных изображений для орбит с различными отношениями f_z/f_x и явно показано, что каждое из выделенных по отношению f_z/f_x семейств орбит образует луч X-структуры, характеристики которого (наклон к плоскости диска, протяженность) определяются выделенным семейством.

В пункте 3.8 даны основные выводы Главы.

В Главе 4 проведен рафинированный фотометрический анализ выборки из тридцати одной реальной галактики с X-структурами и некоторых модельных галактик из Главы 1.

В пункте 4.1 описаны методики выделения X-структур, используемые в работах других авторов, и расхождение в результатах, полученных для одних и тех же галактик разными методами.

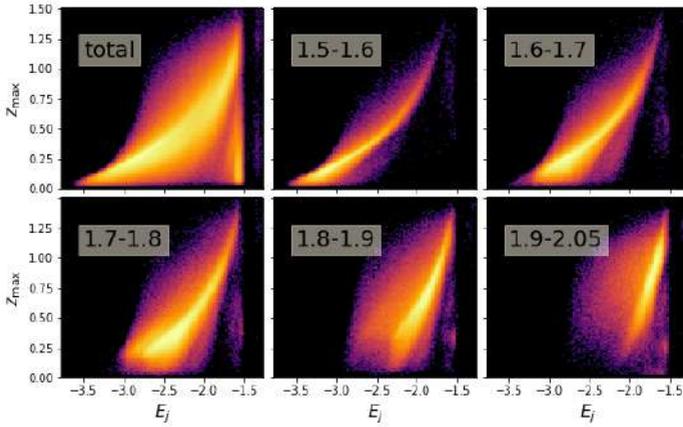


Рис. 7 — Распределение орбит по энергиям E_j (в ед. энергии) и максимальному достижимому возвышению над плоскостью диска z_{\max} (в ед. длины) для модели с одинарной X-структурой. На верхней левой панели представлено распределение для всех частиц бара, а в последующих — для отдельных групп орбит. Значения отношений частот f_z/f_x выделенных групп указываются в подписи.

В пункте 4.2 введена новая фотометрическая модель В/PS балджа с X-структурой (здесь и далее модель “XB” от “X-shaped bulge”). Модель представляет собой модификацию часто используемого в фотометрических исследованиях так называемого серсиковского профиля, описываемого следующей функцией от координат пикселя (x, y) на изображении:

$$I(x, y) = I_e \exp \left[-\nu_n \left(\left(\frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right) \right], \quad (3)$$

где I_e — это эффективная яркость, r_E — эффективный радиус, n — индекс Серсика, ν_n — это некоторая функция от n [24] и r — расстояние, измеряемое вдоль большой оси эллипса с эллиптичностью ϵ , проходящего через точку с координатами (x, y) . Предлагаемый модифицированный профиль имеет следующий вид:

$$I(x, y) = \begin{cases} I_S(x, y), & y \leq kx, \\ I_S(x, y) \cdot \exp(-|x - x_0|/s_X), & y > kx. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $I_S(x, y)$ — интенсивность в пикселе с координатами x и y , вычисляемая по формуле (3), k — угловой коэффициент луча X-структуры, арктангенс которого есть значение угла раствора: $\varphi = \arctan k$, $x_0 = y/k$ — абсцисса точки, которая имеет ординату y , но при этом лежит на луче X-структуры и s_X — параметр, который определяет, как быстро интенсивность спадает в области выше луча. Выражение (4) приведено для первого квадранта. Для оставшихся трех квадрантов необходимо сделать замену знаков перед x и y . По сути, предложенная

модель отличается от обычного профиля Серсика наличием двух параметров: угла раствора лучей X-структуры (параметр k) и параметра, характеризующего быстроту падения плотности выше луча X-структуры (параметр s_X).

В пункте 4.3 описывается методика подгонки многокомпонентной фотометрической модели галактики с учетом новой фотометрической модели V/PS балджа. Так как ХВ модель обладает двумя дополнительными параметрами по сравнению с обычно используемой моделью балджа, подгонка выполняется последовательными приближениями в три этапа:

- 1. Предварительный прогон. Целью этого прогона являлось определение начальных условий для ХВ модели балджа. Изображение галактики подгоняется комбинацией диска и обычного серсиковского балджа.
- 2. Промежуточный прогон. На этом этапе модель серсиковского балджа заменяется на модель ХВ и проводится уточнение параметров диска.
- 3. Итоговый прогон. Здесь определяются окончательные значения параметров для ХВ модели вместе с параметрами других фотометрических компонент

В качестве основного программного инструмента для подбора параметров фотометрической модели использовался свободно распространяемый пакет `Imfit` [25]. Для нахождения оптимальных значений параметров в этом пакете используется метод максимального правдоподобия и статистика χ^2 :

$$-2 \ln \mathcal{L} = \chi^2 = \sum_{i=0}^N w_i (I_{m,i} - I_{d,i})^2, \quad (5)$$

где i — номер пикселя, w_i — вес пикселя, а $I_{m,i}$ и $I_{d,i}$ — интенсивности в фотометрической модели и в исходном изображении, соответственно.

В пункте 4.4 проведена декомпозиция серии численных моделей галактики и исследовано влияние эффектов проекции, связанных с поворотом бара и плоскости диска по отношению к лучу зрения. Также исследовано влияние модели диска и дополнительной центральной компоненты (классического балджа) на результаты декомпозиции. Показано, что модель диска с провалом в центре позволяет более точно определять угол раствора X-структур при углах поворота от 30° до 45° большой оси бара относительно луча зрения.

Пункт 4.5 посвящен декомпозиции реальных галактик.

В пункте 4.5.1 описана исследуемая выборка из тридцати одной галактики и детали предварительной обработки изображений: склейка соседних кадров, вычитание фона, маскирование и определение шумов.

В пункте 4.5.2 представлены результаты декомпозиции выборки реальных галактик. Декомпозиция выполняется также последовательно в несколько этапов. Детально разобраны случаи: NGC 128 (галактика со сложной структурой в центре), ESO 443-042 (галактика с очень малым углом раствора X-структур по версии авторов [6]) и PGC 24926 (галактика с пылевой полосой). Представлены результаты для всей выборки галактик и показано, что углы раствора X-структур для реальных галактик лежат в диапазоне от 28° до 45° .

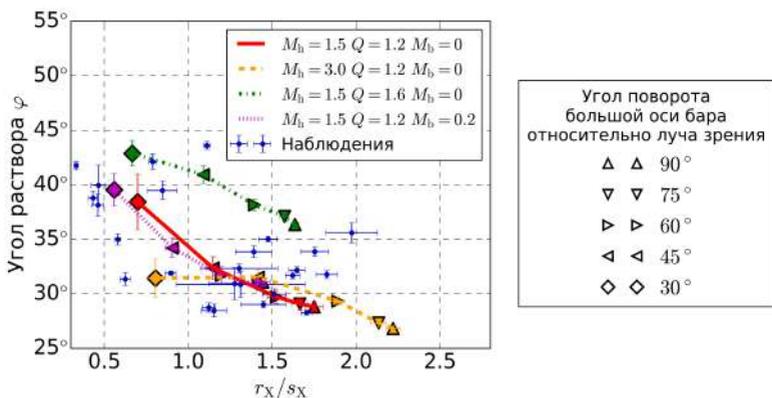


Рис. 8 — Сравнение углов раствора X-структуры и отношения r_X/s_X масштабов спадания плотности для фотометрических моделей V/PS балджа реальных (синие точки) и модельных (треугольники и ромбы) галактик. Для модельных галактик различными символами обозначены углы поворота бара большой оси бара относительно луча зрения. Разными цветами обозначены модели с различающимися физическими параметрами (описание параметров см. в подписи к Рис. 2).

В пункте 4.6 проведено сравнение полученных результатов по углам раствора для рассмотренной выборки галактик с результатами предыдущих работ. На примере галактики ESO 443-042 проведен сравнительный анализ методик оценки параметров X-структур, используемых в работах других авторов и в данной работе. Показано, что углы раствора, полученные в работе [8], в среднем больше, чем измеренные в настоящей работе, а в работах [6] и [7] — в среднем меньше. На основе детального сравнения методик показано, что расхождение в углах раствора обусловлено тем, как учитывается компонента диска.

В пункте 4.7 проведено сравнение полученных параметров X-структур для реальных и модельных галактик. Как видно из Рис. 8, при использовании одинаковой методики углы раствора X-структуры реальных галактик не меньше, чем полученные для модельных галактик.

В пункте 4.8 приведены результаты Главы.

В **Заключении** перечислены все основные выводы выполненного исследования особенностей вертикальной структуры баров в численных моделях дисковых галактик.

Список литературы

1. *Lütticke, R.* Box- and peanut-shaped bulges. I. Statistics / R. Lütticke, R.-J. Dettmar, M. Pohlen // *A&AS*. — 2000. — Сент. — Т. 145. — С. 405—414. — eprint: [astro-ph/0006359](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0006359).
2. *Yoshino, A.* Box/peanut and bar structures in edge-on and face-on nearby galaxies in the Sloan Digital Sky Survey - I. Catalogue / A. Yoshino, C. Yamauchi // *MNRAS*. — 2015. — Февр. — Т. 446, № 4. — С. 3749—3767.
3. Revealing the cosmic evolution of boxy/peanut-shaped bulges from HST COSMOS and SDSS / S. J. Kruk [и др.] // *MNRAS*. — 2019. — Дек. — Т. 490, № 4. — С. 4721—4739. — arXiv: [1910.04768](https://arxiv.org/abs/1910.04768) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
4. *Combes, F.* Formation and properties of persisting stellar bars / F. Combes, R. H. Sanders // *A&A*. — 1981. — Март. — Т. 96. — С. 164—173.
5. Galaxy Zoo: bars in disc galaxies / K. L. Masters [и др.] // *MNRAS*. — 2011. — Март. — Т. 411, № 3. — С. 2026—2034. — arXiv: [1003.0449](https://arxiv.org/abs/1003.0449) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
6. *Ciambur, B. C.* Quantifying the (X/peanut)-shaped structure in edge-on disc galaxies: length, strength, and nested peanuts / B. C. Ciambur, A. W. Graham // *MNRAS*. — 2016. — Июнь. — Т. 459. — С. 1276—1292. — arXiv: [1603.00019](https://arxiv.org/abs/1603.00019).
7. Measuring the X-shaped structures in edge-on galaxies / S. S. Savchenko [и др.] // *MNRAS*. — 2017. — Нояб. — Т. 471. — С. 3261—3272. — arXiv: [1707.04700](https://arxiv.org/abs/1707.04700).
8. *Laurikainen, E.* Barlenses and X-shaped features compared: two manifestations of boxy/peanut bulges / E. Laurikainen, H. Salo // *A&A*. — 2017. — Февр. — Т. 598. — A10. — arXiv: [1609.01936](https://arxiv.org/abs/1609.01936).
9. *Patsis, P. A.* The phase space of boxy-peanut and X-shaped bulges in galaxies - I. Properties of non-periodic orbits / P. A. Patsis, M. Katsanikas // *MNRAS*. — 2014. — Дек. — Т. 445. — С. 3525—3545. — arXiv: [1410.4921](https://arxiv.org/abs/1410.4921) [[nlin](https://arxiv.org/abs/nlin)].
10. *Portail, M.* Peanuts, brezels and bananas: food for thought on the orbital structure of the Galactic bulge / M. Portail, C. Wegg, O. Gerhard // *MNRAS*. — 2015. — Июнь. — Т. 450. — С. L66—L70. — arXiv: [1503.07203](https://arxiv.org/abs/1503.07203).
11. A Unified Framework for the Orbital Structure of Bars and Triaxial Ellipsoids / M. Valluri [и др.] // *ApJ*. — 2016. — Февр. — Т. 818, № 2. — С. 141. — arXiv: [1512.03467](https://arxiv.org/abs/1512.03467) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/astro-ph)].
12. On the orbits that generate the X-shape in the Milky Way bulge / C. G. Abbott [и др.] // *MNRAS*. — 2017. — Сент. — Т. 470. — С. 1526—1541. — arXiv: [1703.07366](https://arxiv.org/abs/1703.07366).
13. Box and peanut shapes generated by stellar bars / F. Combes [и др.] // *A&A*. — 1990. — Июль. — Т. 233. — С. 82—95.
14. A dynamical instability of bars in disk galaxies / N. Raha [и др.] // *Nature*. — 1991. — Авг. — Т. 352. — С. 411.

15. *Martinez-Valpuesta, I.* Evolution of Stellar Bars in Live Axisymmetric Halos: Recurrent Buckling and Secular Growth / I. Martinez-Valpuesta, I. Shlosman, C. Heller // *ApJ*. — 2006. — Янв. — Т. 637. — С. 214–226. — eprint: [astro-ph/0507219](#).
16. *Sotnikova, N. Y.* Mechanisms of the Vertical Secular Heating of a Stellar Disk / N. Y. Sotnikova, S. A. Rodionov // *Astronomy Letters*. — 2003. — Май. — Т. 29. — С. 321–335. — eprint: [astro-ph/0304215](#).
17. *Patsis, P. A.* The phase space of boxy-peanut and X-shaped bulges in galaxies - I. Properties of non-periodic orbits / P. A. Patsis, M. Katsanikas // *MNRAS*. — 2014. — Дек. — Т. 445. — С. 3525–3545. — arXiv: [1410.4921 \[nlin.CD\]](#).
18. *Erwin, P.* Caught in the Act: Direct Detection of Galactic Bars in the Buckling Phase / P. Erwin, V. P. Debattista // *ApJ*. — 2016. — Июль. — Т. 825. — С. L30. — arXiv: [1607.01290](#).
19. *Li, Z.-Y.* The Carnegie-Irvine Galaxy Survey. V. Statistical Study of Bars and Buckled Bars / Z.-Y. Li, L. C. Ho, A. J. Barth // *ApJ*. — 2017. — Авг. — Т. 845. — С. 87. — arXiv: [1707.03570](#).
20. *Sellwood, J. A.* Three mechanisms for bar thickening / J. A. Sellwood, O. Gerhard // *MNRAS*. — 2020. — Июль. — Т. 495, № 3. — С. 3175–3191. — arXiv: [2005.05184 \[astro-ph.GA\]](#).
21. Structural and photometric properties of barred galaxies from the Auriga cosmological simulations / G. Blázquez-Calero [и др.] // *MNRAS*. — 2020. — Янв. — Т. 491, № 2. — С. 1800–1819. — arXiv: [1911.01964 \[astro-ph.GA\]](#).
22. *Dehnen, W.* A Hierarchical $\langle E_{10} \rangle_{\langle N \rangle}$ Force Calculation Algorithm / W. Dehnen // *Journal of Computational Physics*. — 2002. — Июнь. — Т. 179. — С. 27–42. — eprint: [astro-ph/0202512](#).
23. *Barnes, J.* A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm / J. Barnes, P. Hut // *Nature*. — 1986. — Дек. — Т. 324. — С. 446–449.
24. *Caon, N.* On the shape of the light profiles of early-type galaxies. / N. Caon, M. Capaccioli, M. D’Onofrio // *MNRAS*. — 1993. — Дек. — Т. 265. — С. 1013–1021. — arXiv: [astro-ph/9309013 \[astro-ph\]](#).
25. *Erwin, P.* IMFIT: A Fast, Flexible New Program for Astronomical Image Fitting / P. Erwin // *ApJ*. — 2015. — Февр. — Т. 799, № 2. — С. 226. — arXiv: [1408.1097 \[astro-ph.IM\]](#).