

Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Громов Анатолий Олегович

**Применение штеккелевских потенциалов
в динамическом моделировании звездных систем**

Специальность 01.03.01 — астрометрия и небесная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических
наук

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,

доцент

Никифоров Игорь Иванович

Санкт-Петербург

2022

Оглавление

Введение	5
1 Штеккелевские модели звездных систем	14
1.1. Определение штеккелевских потенциалов	14
1.1.1. Переменные действие–угол	14
1.1.2. Определение эллиптических и эллипсоидальных координат	18
1.1.3. Представление штеккелевских потенциалов	20
1.1.4. Задание функций φ формулами Родионова	22
1.1.5. Формулы для пространственной плотности в штеккелев- ских потенциалах	24
1.2. Некоторые свойства штеккелевских моделей	27
1.2.1. Теорема Кузмина	27
1.2.2. Условие Родионова	28
1.3. Третий интеграл движения	29
1.3.1. Третий квадратичный по скоростям интеграл движения .	29
1.3.2. К вопросу существования третьих интегралов	32
1.3.3. Теорема о существовании плоскости симметрии	36
1.3.4. Наклон эллипсоида скоростей в штеккелевских системах .	37
1.3.5. Третий интеграл движения для внешних галактик	37
1.3.6. Формулы для определения параметра z_0	38
1.3.7. Другие виды третьих интегралов	40
1.4. Описание штеккелевских моделей в переменных действие–угол . .	45
1.4.1. Случай эллиптических координат	45
1.4.2. Обзор работ по построению штеккелевских моделей, согла- сующихся с наблюдениями	47
1.4.3. Метод штеккелевской подгонки	49
1.4.4. Случай эллипсоидальных координат	51
1.5. Выводы	53

2	Построение штеккелевской модели Галактики по наблюдательным данным	55
2.1.	Задание потенциала в экваториальной плоскости	55
2.2.	Наблюдательные данные	57
2.3.	Оценка параметров потенциала в экваториальной плоскости . . .	61
2.4.	Матрицы корреляций и оценки средней ошибки круговой скорости	70
2.5.	Оценка параметра z_0	76
2.6.	Построение и исследование эквиденсит	77
2.7.	Выводы	81
3	Учет вертикального распределения	84
3.1.	Условная оптимизация	84
3.2.	Метод эквипотенциалей	87
3.2.1.	Построение функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$	87
3.2.2.	Определение параметров эквипотенциалей, исследование эквиденсит	90
3.2.3.	Ошибки приближения исходного потенциала штеккелевским	93
3.2.4.	Корректировка параметров эквипотенциалей	95
3.3.	Штеккелевские модели по ярким красным гигантам	98
3.4.	Выводы	103
4	Сравнение методов штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки	106
4.1.	Определение параметра z_0 для штеккелевской подгонки	106
4.2.	Аппроксимация функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ для отдельных компонент Галактики в методе штеккелевской подгонки	109
4.3.	Аппроксимация трехкомпонентного потенциала методом штеккелевской подгонки	117
4.4.	Ошибки приближения потенциала штеккелевским в методе штеккелевской подгонки	120
4.5.	Исследование пространственной плотности, построение эквиденсит	121
4.6.	Решение задачи получения реалистичного вертикального распределения пространственной плотности для метода штеккелевской подгонки	123
4.7.	Выводы	127

Заключение	129
Список литературы	132

Введение

Построение моделей звездных систем, в частности нашей Галактики, — одна из фундаментальных проблем современной астрономии. Математическое моделирование позволяет изучать далекие космические объекты, их происхождение и эволюцию. Особое значение имеет построение реалистичной, то есть наиболее точно описывающей наблюдательные данные, модели нашей Галактики.

В данной работе решается задача построения реалистичной трехкомпонентной (гало, диск, центральная компонента) модели нашей Галактики, основанной на заданном в экваториальной плоскости потенциале. Предполагается, что потенциал модели является штеккелевским (допускающим разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби). Для моделей с такими потенциалами существует третий квадратичный интеграл движения, что позволяет объяснить наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность эллипсоида скоростей, не выходя за рамки теории стационарной Галактики. Также в настоящее время разработан алгоритм описания звездной системы в переменных действие–угол, основанный на потенциалах, допускающих разделение переменных, самой известной группой которых являются штеккелевские потенциалы. Такое описание позволяет легко строить фазовые модели звездных систем.

Актуальность исследования

В настоящее время возродился интерес к штеккелевским моделям звездных систем. Это связано с работами Бинни и ряда других авторов, в которых разработан алгоритм нахождения функции фазовой плотности для моделей со штеккелевскими потенциалами, основанный на описании таких моделей в переменных действие–угол [39]. В рамках данного подхода был предложен ряд функций фазовой плотности, аргументами которых являются переменные действия и которые дают функции распределения скоростей, согласующиеся с наблюдениями [38], [49]. Однако используемый этими авторами алгоритм «штеккелевской

подгонки» (в оригинальных работах «Stäckel fudge») имеет ряд неразрешимых в рамках данного подхода недостатков. Альтернативой данному алгоритму является метод «штеккелевского обобщения», которому и посвящено данное исследование. Он лишен недостатков метода штеккелевской подгонки, более прост в реализации и дает физически адаптивные модели звездных систем.

Кроме того, в литературе известно лишь несколько работ, в которых бы строились штеккелевские модели по наблюдательным данным. Работа Сато и Миямото [89] не согласуется с современными результатами. Исследование Фамаэ и Дейонге [60] опирается на динамические характеристики, однако, как отмечают сами авторы, использование кинематических данных значительно бы увеличило точность модели. Актуальной (помимо работ нашей группы) является публикация Бинни и Вона [41], которая не лишена недостатков метода штеккелевской подгонки.

Целью данной работы является разработка и реализация алгоритма построения штеккелевской модели звездной системы, согласующейся с кинематическими данными о вращении, рядом динамических характеристик и имеющей реалистичное вертикальное распределение пространственной плотности.

Научная новизна работы

Были построены трехкомпонентные штеккелевские модели нашей Галактики **наиболее точно** описывающие кинематические и динамические наблюдательные данные. При решении данной задачи был предложен оригинальный алгоритм, позволяющий учитывать природную дисперсию азимутальных скоростей, исключать объекты с избыточными невязками (выбросы), а также учитывать и устранять кинематическую неоднородность групп объектов, относящихся к разным классам.

Впервые были предложены методы решения задачи получения реалистичного вертикального распределения в штеккелевских моделях. Данная проблема возникает во всех известных работах по штеккелевскому моделированию. Один из алгоритмов, основанный на методе эквипотенциалей, фактически дает математический аппарат, позволяющий управлять вертикальной структурой. Были построены трехкомпонентные модели нашей Галактики при разных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих.

Впервые было произведено сравнение двух подходов к штеккелевскому

моделированию (штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки). Было установлено, что метод штеккелевского обобщения в ряде случаев оказался более точным. Учитывая его простоту, однозначность в определении третьего интеграла движения, он представляется наиболее предпочтительным при дальнейших исследованиях по штеккелевскому моделированию.

Практическая значимость работы

Разработанные алгоритмы могут быть применены при моделировании кривой вращения, распределения плотности и массы в нашей Галактике. Полученные в диссертации результаты могут послужить основой для дальнейших масштабных исследований в области фазового моделирования звездных систем и, в частности, нашей Галактики.

Проводимые исследования были поддержаны грантом РФФИ в рамках научного проекта 19-32-90144.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. По данным о кинематике мазеров с тригонометрическими параллаксами построены трехкомпонентные модели потенциала Галактики в ее плоскости. При этом разработан и реализован алгоритм, позволяющий учитывать возможную кинематическую неоднородность мазеров в областях образования массивных звезд по отношению к мазерам остальных типов. Найдено значимое и существенное различие значений природных (неизмерительных) дисперсий азимутальных скоростей для разных групп мазеров. Аналогичные модели потенциала получены по ярким красным гигантам с фотометрическими расстояниями, представляющим более удаленную от центра часть Галактики.
2. Методом штеккелевского обобщения из экваториальной плоскости на все пространство построены модели потенциала Галактики, согласующиеся с ее кривой вращения и рядом динамических характеристик.
3. Разработан и реализован основанный на методе эквипотенциалей подход к решению проблемы нереалистичности вертикального распределения в штеккелевских моделях, который позволяет регулировать сжатие или верти-

кальный масштаб модели путем варьирования дополнительных параметров. Этим методом в результате обобщения моделей, полученных для галактической плоскости, впервые построены физически адаптированные штеккелевские модели Галактики при разных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих. Модели являются наиболее реалистичными в классе штеккелевских из предложенных в литературе.

4. На примере построенных моделей впервые проведено сравнение двух подходов в рамках штеккелевского моделирования — штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки. Для всего трехкомпонентного потенциала Галактики результаты применения двух методов хорошо согласуются друг с другом. Для отдельных компонент метод штеккелевского обобщения обладает существенным преимуществом по точности. Для метода штеккелевской подгонки разработанный алгоритм на основе эквипотенциалей был с успехом применен с целью достижения реалистичности вертикального распределения плотности.

Публикации по теме диссертации

Журналы из списка ВАК:

1. Громов А.О. Модели галактик со штеккелевским потенциалом // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2014, вып. 2, с. 322.
2. Gromov A.O., Nikiforov I.I., Ossipkov L.P. On the possibility of applying the quasi-isothermal Staekel's model to our Galaxy // Baltic Astronomy, 2015, vol. 24, p. 150.
3. Gromov A.O., Nikiforov I.I., Ossipkov L.P. Staekel-type dynamic model of the Galaxy based on maser kinematic data // Baltic Astronomy, 2016, vol. 25, p. 53.
4. Громов А.О., Никифоров И.И. Трехкомпонентная штеккелевская модель Галактики, основанная на кривой вращения по данным о мазерах // Астрофизический бюллетень, 2021, т. 76, вып. 2, с. 187.

5. Громов А.О., Никифоров И.И. Построение штеккелевской модели Галактики: решение проблемы реалистичности вертикального распределения // Письма в астрономический журнал, 2021, Т. 47, № 6, с. 383.

Другие публикации

1. Громов А.О. Штеккелевские изотермические модели галактик // Процессы управления и устойчивость: труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2012, с. 125.
2. Gromov A.O. New quasi-isothermal models of Galaxy // Astronomicheskii Tsirkulyar 2012, № 1579, p. 1.
3. Громов А.О. Проекция плотности для моделей звездных систем с обобщенно-изотермическим потенциалом // Процессы управления и устойчивость: труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2013, с. 187.
4. Громов А.О. Новые штеккелевские модели галактик // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, 2013, № 221, с. 129.
5. Громов А.О. Оценка параметров для обобщенно-изотермической модели Галактики // Процессы управления и устойчивость: труды 45-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2014, с. 117.
6. Gromov A.O. Staeckel models of galaxies with generalized isothermal potential // Astronomical and Astrophysical Transactions, 2014, vol. 28, issue 4, p. 331.
7. Громов А.О. Модель распределения массы в звездных системах с квази-изотермическим потенциалом // Физика космоса: труды 44-й международной студенческой научной конференции, 2015, с. 178.
8. Громов А.О., Никифоров И.И. Модель Галактики с квази-изотермическим потенциалом // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, 2015, № 222, с. 31.
9. Громов А.О. Сравнение штеккелевских моделей с моделями, полученными методом экvipотенциалей // Процессы управления и устойчивость: труды

47-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2016, с. 163.

10. Громов А.О., Никифоров И.И. Трехкомпонентная штеккелевская модель галактики // *Астрономия-2018*. т. 1. Современная звездная астрономия 2018. М.: Тривант, 2018, с. 137.

Личный вклад автора

Первоначальная идея и постановка задачи была предложена Л.П. Осипковым. И.И. Никифорову принадлежат основные идеи алгоритма построения трехкомпонентной модели потенциала Галактики в ее плоскости. Автором диссертационной работы была осуществлена реализация данного алгоритма по данным о кинематике мазеров и ярких красных гигантов. Совместно с И.И. Никифоровым была осуществлена обработка наблюдательных данных. Автором было получено штеккелевское обобщение данной модели, построены эквиденситы. Автором был предложен алгоритм получения реалистичного вертикального распределения плотности в штеккелевских моделях, который основывается на методе эквипотенциалей, разработанном С.А. Кутузовым и Л.П. Осипковым. На основе данного алгоритма построены модели Галактики при различных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих. Автором было проведено сравнение двух подходов к штеккелевскому моделированию. Модификации алгоритмов, анализ и интерпретация результатов проводились совместно с соавторами публикаций.

Апробация результатов

Результаты, полученные в диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Кафедры небесной механики и Кафедры космических технологий и прикладной астродинамики Санкт-Петербургского государственного университета, на семинарах в ГАО РАН, а также на различных конференциях, среди которых: «Современная звездная астрономия» (ГАИШ, Москва, 2012 г., 2015 г., 2018 г.; САО РАН, Карачаево–Черкессия, 2019 г.); «Всероссийская астрономическая конференция» (ГАО РАН, Санкт-Петербург, 2013 г.); «Пулковская молодежная астрономическая конференция» (ГАО РАН, Санкт-Петербург, 2013 г.,

2014 г.); «Физика космоса» (Коуровская АО, Свердловская обл., 2015 г.); «Физика космоса, структура и динамика планет и звездных систем» (УдГУ, Ижевск, 2012 г.); «Процессы управления и устойчивость» (СПбГУ, Санкт-Петербург, 2012 г., 2013 г., 2014 г., 2016 г.).

Содержание диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 140 страниц, включая 34 рисунка и 44 таблицы. Список литературы включает в себя 100 наименований отечественных и зарубежных авторов.

Во **введении** обосновывается актуальность темы, ее цели, научная новизна, практическая значимость. Перечисляются выносимые на защиту результаты, публикации по теме диссертации, указывается апробация результатов.

В **первой** главе представлены общие сведения о штеккелевских моделях и возможность их описания в переменных действие–угол, в результате чего уравнение Гамильтона–Якоби допускает разделение переменных. Вводятся эллиптические координаты, в которых и задаются штеккелевские потенциалы. Описываются свойства штеккелевских потенциалов и моделей, построенных на их основе. Приводятся основные формулы двух методов штеккелевского моделирования (штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки). Обсуждается вопрос существования третьего квадратичного по скоростям интеграла движения, а также приводятся другие виды третьих интегралов движения. Рассматривается алгоритм описания штеккелевских моделей в переменных действие–угол.

Во **второй** главе предложен алгоритм построения штеккелевской модели с учетом кинематических данных. На первом этапе оцениваются параметры заданного в экваториальной плоскости потенциала путем оптимизации модельной кривой круговой скорости по отношению к азимутальным скоростям, найденным по данным о тригонометрических параллаксах и пространственных скоростях мазеров. Использовались два каталога объектов: Рида и др. [85] и Коллаборации VERA и др. [97]. Алгоритм позволяет учитывать измерительную и природную дисперсии азимутальных скоростей, а также исключать объекты с избыточными невязками (выбросы). Была добавлена возможность делить выборку на группы объектов, в каждой из которых вычисляется своя природная

дисперсия. Выявлена и учтена значительная кинематическая неоднородность некоторых групп. Из-за ненулевой дисперсии скоростей мазеров была добавлена возможность корректировки данных за асимметричный сдвиг. Показано отсутствие полного вырождения для всех пар параметров, хотя и имеется сильная корреляция для некоторых из них.

На втором этапе потенциал из экваториальной плоскости штеккелевским образом обобщается на все пространство. В результате получается *аналитическое* выражение для пространственной плотности модели. Вид исследуемых эквиденсит (кривых равной плотности) выявил проблему нереалистичности вертикального распределения плотности в штеккелевских моделях, которая присутствует и в работах других авторов. Было установлено хорошее согласие построенной трехкомпонентной (гало, тонкий диск, центральная компонента) штеккелевской модели Галактики с оценками околосолнечной плотности по данным наблюдений, а также с величинами массы Галактики в пределах различных радиусов, полученными другими авторами.

Третья глава посвящена решению вопроса реалистичности вертикального распределения пространственной плотности. Рассмотрены два способа решения. В первом накладывались наблюдательные ограничения на закон плотности гало (постоянство центральной поверхностной плотности) и/или диска (подчинение барометрическому закону вертикального хода плотности), однако удалось лишь решить задачу построения диска с полутолщиной не менее $h_z = 600$ пк, что недостаточно для моделирования тонкого диска.

Второй основан на методе эквипотенциалей, с помощью которого нештеккелевский потенциал обобщается из экваториальной плоскости на все пространство штеккелевским образом. В таком случае в выражение для штеккелевского потенциала вводятся две различные функции, одна из которых непосредственно влияет на вертикальное распределение плотности. Кроме того, введение дополнительных параметров позволяет управлять вертикальной структурой отдельных компонент Галактики. Этим способом по мазерам и на основе кривой круговой скорости по ярким красным гигантам построен набор трехкомпонентных штеккелевских моделей Галактики при разных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих.

В **четвертой** главе впервые сравниваются два подхода к построению штеккелевских моделей (штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки). Ре-

зультаты обоих подходов сопоставимы, а в некоторых случаях метод штеккелевского обобщения дает более реалистичные результаты. Для метода штеккелевской подгонки с успехом был применен алгоритм учета вертикального распределения, описанный в третьей главе.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты проведенного в диссертационной работе исследования.

Глава 1

Штеккелевские модели звездных систем

1.1. Определение штеккелевских потенциалов

1.1.1. Переменные действие–угол

Уравнение Гамильтона–Якоби, одно из основных уравнений механики

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; q_1, \dots, q_n; t \right) = 0, \quad (1.1)$$

решение которого тесно связано с решением канонических уравнений

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

где q_i — обобщенные координаты, p_i — обобщенные импульсы, t — время, H — функция Гамильтона, S — производящая функция, с помощью которой осуществляется каноническое преобразование.

В консервативных системах, которые мы и будем рассматривать в дальнейшем, временная зависимость может быть выделена: $S = S(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) - Et$; тогда уравнение (1.1) переходит в не зависящее от времени уравнение Гамильтона–Якоби [28]

$$H \left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}; q_1, \dots, q_n \right) = E,$$

где α_i — постоянные интегрирования. В таких системах верен закон сохранения энергии, а $E = \text{const}$ есть значение интеграла энергии для рассматриваемой системы.

К. Якоби доказал, что нахождение общего интеграла канонической системы эквивалентно нахождению полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби [30]. Полным интегралом уравнения Гамильтона–Якоби называют такое его решение $S(q_i, \alpha_i, t)$, которое зависит от n параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и удовлетворяет условию невырожденности

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \right) \neq 0.$$

Полный интеграл не содержит всех решений уравнения (1.1) — общее решение этого уравнения включает произвольные функции, однако он позволяет получить все решения канонических уравнений.

Теорема Якоби.

Если известен полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби $S(q_i, \alpha_i, t)$, то общее решение канонических уравнений движения получается из соотношений:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n$ — произвольные постоянные.

Потенциальная возможность решения уравнения Гамильтона–Якоби позволяет получать интегрируемые модели звездных систем, и как результат описывать не только движение отдельной звезды в поле галактики, но и изучать некоторые общие статистические характеристики (например, фазовое распределение звезд). Для решения этого уравнения необходимо найти полный интеграл дифференциального уравнения в частных производных, однако его нахождение возможно лишь в специальных случаях. Задача состоит в отыскании канонического преобразования, которое позволяет максимально упростить уравнение Гамильтона–Якоби. Оптимальным является случай, когда все координаты циклические, а преобразованный гамильтониан зависит только от импульсов и в «новых» координатах имеет вид $H'(J_1, \dots, J_n)$, где J_1, \dots, J_n — канонические импульсы в «новых» координатах.

Рассмотрим систему с одной степенью свободы. Пусть p и q — «старые» канонические импульсы и координаты, которые каноническим преобразованием переходят в «новые» J и θ , так что на кривой L (например, орбите объекта) θ периодична с периодом 2π . Тогда для производящей функции $S(q, J)$ справедливо соотношение

$$p = \frac{\partial}{\partial q} S(q, J),$$

$$\theta = \frac{\partial}{\partial J} S(q, J).$$

Из них имеем $\frac{\partial \theta}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)$. Так как θ на кривой L меняется на 2π , то

$$2\pi = \oint_L d\theta = \frac{\partial}{\partial J} \oint_L p(q, \alpha) dq,$$

где α — постоянные интегрирования.

Откуда

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_L p(q, \alpha) dq.$$

Данное равенство является определением переменных действия. Траектории на фазовой плоскости — замкнутые инвариантные кривые, а значит движение — периодическое. Переменные действие–угол — это такая пара сопряженных канонических переменных, что сопряженная координата θ возрастает на 2π при завершении полного периода действий. Такие переменные называются углами. Сопряженные им канонические импульсы J называются действиями. Углы являются циклическими координатами рассматриваемой системы. Физически J_r и J_z можно интерпретировать как степень радиальных и вертикальных колебаний.

Решение уравнения Гамильтона–Якоби относительно производящей функции S может быть представлено в виде:

$$S = \int_{q_0}^q p(q, \alpha) dq.$$

Канонические уравнения для переменных действие–угол имеют вид

$$\dot{J} = -\frac{\partial}{\partial \theta} H'(J) = 0,$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial J} H'(J) = \omega(J),$$

где $\omega(J)$ — характеристическая частота движения, а $H'(J)$ определяется из уравнения $H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = \alpha = H'(J)$. Иногда берут $\alpha = E$, где E — интеграл энергии.

Тогда из непосредственного интегрирования следует $\theta = \omega(J)t + \delta$; $J = \text{const}$.

Решение уравнения Гамильтона–Якоби

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \dots, q_n\right) = H'(J_1, \dots, J_n) = \text{const}$$

в общем случае сложная задача, так как необходимо решать уравнение в частных производных. Однако существует класс систем (например, системы со штекелевским потенциалом), в которых производящая функция S представляется в виде суммы n слагаемых, каждое из которых зависит только от одной координаты

$$S(q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^n S_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Тогда

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_{k=1}^n H_k(p_k, q_k).$$

Уравнение Гамильтона–Якоби можно записать в виде n уравнений вида

$$H_k\left(\frac{\partial S}{\partial q_k}, q_k\right) = \alpha_k,$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \alpha = H'(J)$. В этом случае переменные действия можно определить

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_k} p_k(q_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_k.$$

Получив связь J_k и α_k и подставив в $S_k(q_k, \alpha_k)$, получаем переменные угол

$$\theta_k = \frac{\partial S}{\partial J_k}.$$

Если переменные разделяются, то математическая модель интегрируема, а

значит динамика такой модели может быть подробно изучена. Так как потенциал реальной звездной системы неинтегрируемый, то интегрируемую модель можно использовать для дальнейшего изучения методами теории возмущений. Технику построения интегрируемых гамильтонианов близких к галактическим разрабатывали Каасалайнен и Бинни [71].

1.1.2. Определение эллиптических и эллипсоидальных координат

Подобное разделение переменных возможно в сферических, параболических координатах, однако нам более всего интересен случай эллиптических координат

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = z_0 \xi_1 \xi_2, \quad \xi_1 \in [1, \infty), \quad \xi_2 \in [-1, 1], \quad (1.2)$$

где R и z — цилиндрические координаты, а z_0 — постоянная размерности длины. Координатными поверхностями эллиптических координат ξ_1, ξ_2 являются эллипсоиды вращения, двуполостные гиперболоиды и меридиональные плоскости $\lambda = \text{const}$, где λ — азимут в цилиндрической системе координат. Точки $z = z_0$ и $z = -z_0$ являются фокусами этих поверхностей, меридианные сечения которых приведены на рис. 1.1. Координаты ξ_1 соответствует эллипсоидам, а ξ_2 — гиперболоидам, при чем $\xi_2 > 0$ соответствует гиперболам в верхней полуплоскости, а $\xi_2 < 0$ в нижней.

Отметим два предельных случая подобных координат [1]:

1) $z_0 = 0$ — система эллиптических координат переходит в систему полярных, потенциал становится сферически симметричным;

2) $z_0 \rightarrow \infty$ — система эллиптических координат обращается в цилиндрические, а потенциал допускает разделение переменных вида $\Phi = \varphi_1(R) + \varphi_2(z)$.

Эллиптические координаты координаты являются решением уравнения

$$\frac{R^2}{\xi^2 - a^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - c^2} = 1$$

относительно переменной ξ . В русскоязычной литературе обычно полагают $a = z_0, c = 0$ (в таком случае систему координат называют «вытянутой»). В иностранной также придерживаются данных значений, но иногда полагают $a = 0,$

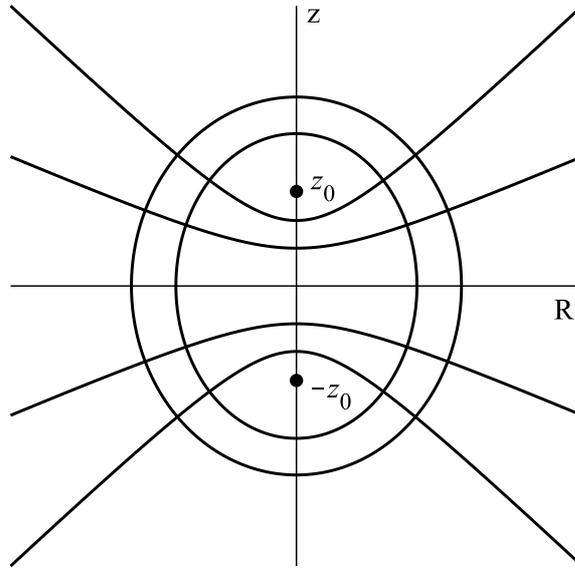


Рис. 1.1: Меридианные сечения координатных поверхностей эллиптических координат

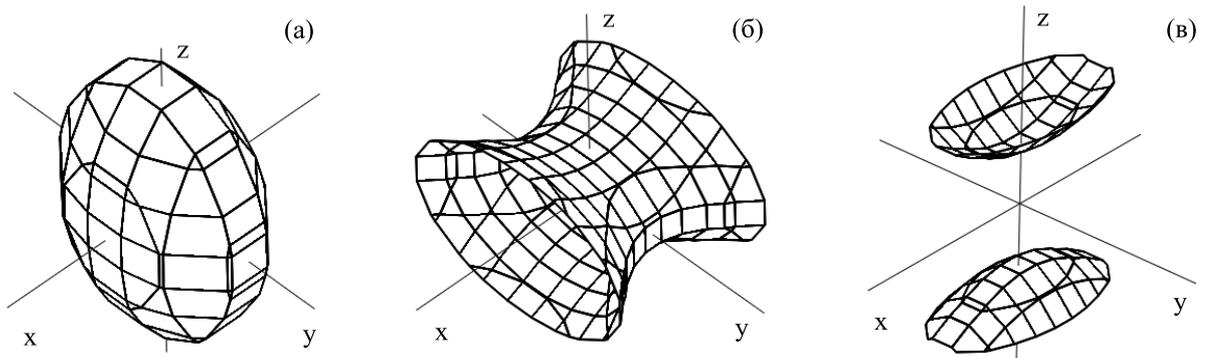


Рис. 1.2: Координатные поверхности эллипсоидальных координат

$c = z_0$ (такую систему координат называют «сплюснутой») [52]. В таком случае исследуемая модель поворачивается на угол в 90° , вытягиваясь вдоль оси z . В данной работе будем придерживаться первого варианта задания координат.

Штеккелевское разложение потенциала возможно и в случае эллипсоидальных координат. Такой трехосный подход необходим, например, при исследовании эллиптических галактик. Эллипсоидальные координаты являются решением по ξ_1, ξ_2, ξ_3 уравнения

$$\frac{x^2}{\xi_1^2 + \alpha} + \frac{y^2}{\xi_2^2 + \beta} + \frac{z^2}{\xi_3^2 + \gamma} = 1,$$

где α, β, γ — постоянные.

Поверхностями для $\xi_1 = \text{const}$ являются эллипсоиды. Для больших ξ_1 они становятся сферическими с радиусом $\sqrt{\xi_1 + \alpha}$. С уменьшением ξ_1 эллипсоиды сжимаются и становятся трехосными с длинной осью вдоль z и короткой вдоль x . Пример таких поверхностей представлен на рис. 1.2а.

Поверхности $\xi_2 = \text{const}$ являются однополостными гиперboloидами вдоль оси x . С уменьшением ξ_2 гиперboloид вырождается в часть плоскости $y = 0$ между двумя гиперболами (данный случай соответствует $\xi_2 = -\beta$). Такие гиперboloиды изображены на рис. 1.2б.

Поверхности $\xi_3 = \text{const}$ — двуполостные гиперboloиды вокруг оси z . Они постепенно расширяются и приближаются к плоскости $z = 0$, а в точке $\xi_3 = -\gamma$ совпадают с этой плоскостью. Пример соответствующих поверхностей представлен на рис. 1.2в.

1.1.3. Представление штеккелевских потенциалов

Рассмотрим механическую систему с гамильтонианом, содержащим только квадраты импульсов

$$H(q_i, p_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j(q_1, \dots, q_n) p_j^2 + \Phi(q_1, \dots, q_n),$$

где Φ — потенциал модели. Уравнение Гамильтона–Якоби, соответствующее такой системе имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum a_j(q_1, \dots, q_n) \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right)^2 + \Phi(q_1, \dots, q_n) = h. \quad (1.3)$$

Тогда справедлива

Теорема Штеккеля [19].

Уравнение (1.3) допускает разделение переменных тогда и только тогда, когда существует неособая матрица $U(q_i)$, в которой элементы u_{kr} зависят только от переменной q_r и вектор $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)^T$, где Ψ_r зависит только от q_r , что

$$\begin{aligned} 1) \quad a_j(q_j) &= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{1j}} = \frac{\Delta_{1j}}{\Delta}; \\ 2) \quad \Phi(q_j) &= \sum_{j=1}^n \frac{\Psi_j}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial u_{1j}} = \sum_{j=1}^n a_j \Psi_j(q_j); \end{aligned}$$

где $\Delta = \det U$, Δ_{1j} – алгебраическое дополнение к элементу u_{1j} ($j = 1..n$).

Например, для эллиптических координат матрица U записывается в виде

$$\begin{pmatrix} z_0^2 & z_0^2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\xi_1^2 - 1} & \frac{1}{1 - \xi_2^2} & 0 \\ -\frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} & -\frac{1}{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)} & 1 \end{pmatrix}$$

В эллиптических координатах функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{mz_0^2}{2} (\xi_1 - \xi_2) \left(\frac{\dot{\xi}_1^2}{\xi_1^2 - 1} + \frac{\dot{\xi}_2^2}{1 - \xi_2^2} \right) + \frac{mz_0^2}{2} (\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2) \dot{\lambda}^2 - \Phi,$$

а гамильтониан

$$H = \frac{1}{2mz_0^2 (\xi_1^2 - \xi_2^2)} \left[(\xi_1^2 - 1) p_{\xi_1}^2 + (1 - \xi_2^2) p_{\xi_2}^2 + \left(\frac{1}{\xi_1^2 - 1} + \frac{1}{1 - \xi_2^2} \right) p_\lambda^2 \right] + \Phi,$$

где p_{ξ_1} , p_{ξ_2} , p_λ – импульсы.

Тогда можно получить общее решение уравнение Гамильтона–Якоби относительно функции S

$$\begin{aligned} S = -Et + p_\lambda \varphi + \int \sqrt{2mz_0^2 E + \frac{\beta - 2mz_0 \varphi_1(\xi_1)}{\xi_1 - 1} - \frac{p_\lambda^2}{(\xi_1^2 - 1)^2}} d\xi_1 + \\ + \int \sqrt{2mz_0^2 E + \frac{\beta + 2mz_0 \varphi_2(\xi_2)}{1 - \xi_2} - \frac{p_\lambda^2}{(1 - \xi_2^2)^2}} d\xi_2, \end{aligned}$$

где $\varphi_1(\xi_1)$, $\varphi_2(\xi_2)$ – функции, возникающие при разложении потенциала Штеккелевским образом; E , β – произвольные постоянные.

В эллиптических координатах гамильтониан звезды, движущейся в осесимметричном поле имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (a_{\xi_1} p_{\xi_1}^2 + a_{\xi_2} p_{\xi_2}^2 + a_\lambda p_\lambda^2) + \Phi(\xi_1, \xi_2),$$

где коэффициенты a_{ξ_1} , a_{ξ_2} , a_λ определяются из условия 1 теоремы Штеккеля.

В таком случае потенциал должен записываться в виде

$$\Phi = \frac{\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}. \quad (1.4)$$

Изначально такие потенциалы использовались Штеккелем [92], Леви-Чевитой [73] и др. для решения механических задач. В звездную динамику их ввел Эддингтон [56]. Вообще говоря, учитывая области определения координат ξ_1 , ξ_2 и тот факт, что в общей точке $\varphi_1(1) = \varphi_2(1)$ во избежание особенностей потенциала, можно принять одну функцию $\varphi(\xi)$ на всей области определения координат. Де Зееу [52] показал, что модели со штеккелевскими потенциалами могут давать такое же распределение массы, как и реальные галактики.

В трехосном случае (эллипсоидальные координаты) штеккелевский потенциал представляется в виде

$$\Phi = \frac{\varphi(\xi_1)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} + \frac{\varphi(\xi_2)}{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1)} + \frac{\varphi(\xi_3)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)}. \quad (1.5)$$

Де Зееу показал [52], что большинство семейств орбит важных для структуры и динамики трехосных эллиптических галактик могут быть построены в подобных штеккелевских потенциалах.

1.1.4. Задание функций φ формулами Родионова

Так как основные функции описания звездной системы (например, фазовая и пространственная плотности) можно выразить через $\varphi(\xi)$ и ее производные, то задача определения такой функции является основной при построении штеккелевских моделей. Для определения функций $\varphi(\xi)$ используются различные аналитические и численные подходы. Одним из наиболее точных аналитических методов решения поставленной задачи являются формулы, приведенные в работах Родионова [25]. Если потенциал задан в экваториальной плоскости, то функции $\varphi(\xi)$ определяются как

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi \left(R = z_0 \sqrt{\xi^2 - 1}, z = 0 \right), \quad (1.6)$$

а если на оси симметрии, то

$$\varphi(\xi) = \Phi(R = 0, z = 0) - (1 - \xi^2) \Phi(R = 0, z = z_0 \xi). \quad (1.7)$$

Также можно определить формулы для определения функций $\varphi(\xi)$ для потенциала, заданного в некотором столбе $R = R_*$:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \varphi \left(\sqrt{1 + \frac{R_*^2}{z_0^2 (1 - \xi^2)}} \right) - \\ - \left[1 - \xi^2 + \frac{R_*^2}{z_0^2 (1 - \xi^2)} \right] \Phi \left(R = R_*, z = \xi \sqrt{z_0^2 + \frac{R_*^2}{1 - \xi^2}} \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где первое слагаемое вычисляется через потенциал в экваториальной плоскости по формуле (1.6). Непосредственная подстановка приводит к виду функции

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = \left[\Phi \left(R = \frac{R_*}{\sqrt{1 - \xi^2}}, z = 0 \right) - \Phi \left(R = R_*, z = \xi \sqrt{z_0^2 + \frac{R_*^2}{1 - \xi^2}} \right) \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{R_*^2}{z_0 (1 - \xi^2)} \right] + \xi^2 \Phi \left(R = R_*, z = \xi \sqrt{z_0^2 + \frac{R_*^2}{1 - \xi^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Такой вариант определения функции $\varphi(\xi)$ позволяет использовать данные о потенциале в окрестности Солнца.

Как отмечает сам Родионов [25], лучше всего определять потенциал двумя различными функциями $\varphi(\xi)$, одна из которых задает поведение потенциала в экваториальной плоскости, а другая в вертикальном направлении. К похожему выводу о необходимости использования некоторого компромисса при задании функций $\varphi(\xi)$ пришел Хори [66] в своей работе, в которой исследовалось согласие реального и приближенного штеккелевского потенциалов на примере полуэмпирической модели Галактики Шмидта. Хори пришел к выводу, что различия таких потенциалов составляют 10 процентов, а в окрестности Солнца всего 5 процентов. Дейонге и де Зееу [50] сравнивали истинный и приближенный штеккелевский потенциалы на примере модели Галактики Бакола–Шмидта–Сонейра и установили, что различия составляют не более 3%. Подобный результат на более широком диапазоне моделей потенциала Млечного Пути получил Ясевичус

[70]. Как и ожидалось, наилучшее согласие наблюдалось в центральной области Галактики, радиусом 0.5 кпк. Таким образом, задачу движения в штеккелевском потенциале можно рассматривать как приложение метода возмущений к реальному потенциалу звездной системы.

Отметим некоторые естественные условия, которые накладываются на выражение функции $\varphi(\xi)$.

- 1) $\varphi(0) = 0$;
- 2) $\varphi(1) = \Phi_0$, где Φ_0 — значение потенциала в центре модели;
- 3) При $\xi \rightarrow \infty$ $\frac{\varphi(\xi)}{\xi} \rightarrow \frac{GM}{z_0}$, где G — гравитационная постоянная, M — полная масса.

В литературе исследовалось множество выражений для потенциала на предмет возможности построения штеккелевского приближения. Использованные выражения для функций $\varphi(\xi)$ приведены в табл. 1.1.

1.1.5. Формулы для пространственной плотности в штеккелевских потенциалах

Зная функцию $\varphi(\xi)$ в разложении (1.4), используя уравнение Пуассона

$$4\pi G\rho = -\nabla^2\Phi, \quad (1.10)$$

где пространственная плотность

$$\rho = \iiint \Psi dv_x dv_y dv_z, \quad (1.11)$$

G — гравитационная постоянная Ψ — фазовая плотность, а

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

есть оператор Лапласа, можно легко получить выражение для пространственной плотности модели, зависящей от функций $\varphi(\xi)$ и их производных

Таблица 1.1: Выражения для $\varphi(\xi)$, используемые в различных работах

Автор	Год	Выражение
Г.Г. Кузмин [10]	1954	$\varphi(\xi) = \Phi_0 z_0 \sqrt{\xi_0^2 + \xi^2}$
Г.Г. Кузмин [11]	1956	$\varphi(\xi) = \frac{GM}{z_0} \frac{\xi_0}{\zeta_0} \zeta,$ $\zeta^2(\xi) = \frac{\xi^2 + \xi_0}{1 + \xi_0}$
И.Л. Генкин [4]	1962	$\varphi(\xi) = k\xi^4 + (c - kz_0^2) \xi^2$
Т. де Зееу [52]	1985	$\varphi(\xi) = \frac{GM}{\sqrt{\xi}}$
Т. де Зееу и др. [54]	1986	$\varphi(\xi) = 2\sqrt{\xi_0 + \gamma} \delta(\xi - \xi_0)$
Г.Г. Кузмин, Г.А. Маласидзе [16]	1987	$\varphi(\xi) = \Phi_0 \frac{a}{b + \zeta(\xi)} \xi^2,$ $\zeta(\xi) = \sqrt{p^2 + q^2 \xi^2},$ $\varphi(\xi) = \Phi_0 \frac{\zeta(\xi) - b}{1 - b},$ $\varphi(\xi) = \Phi_0 \frac{a}{b + \xi } \xi^2$
Х. Дейонге, Т. де Зееу [50]	1988	$\varphi(\xi) = GM \sqrt{\xi + q},$ $\varphi(\xi) = \frac{GM}{a + \sqrt{\xi}}$
П. Батслеер, Х. Дейонге [32]	1994	$\varphi(\xi) = \frac{GM}{a + \sqrt{\xi}}$
В. Де Брюйне и др. [48]	1999	$\varphi(\xi) = \frac{-GM}{(d + \xi^p)^s}$

$$4\pi z_0^2 G\rho = \frac{[\varphi(\xi_1) - \varphi(\xi_2) - \xi_1\varphi'(\xi_1) + \xi_2\varphi'(\xi_2)] (2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^3} - \frac{(\xi_1^2 - 1)\varphi''(\xi_1) - (1 - \xi_2^2)\varphi''(\xi_2)}{(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2}. \quad (1.12)$$

Заметим, что Родионов [25] приводит особую формулу для вычисления пространственной плотности на оси симметрии:

$$\rho(R = 0, z) = -\frac{1}{4\pi G z_0^2} \cdot \frac{2[\varphi(\xi) - \varphi(1) - \xi\varphi'(\xi) + \varphi'(1)] + (\xi^2 - 1)\varphi''(\xi)}{(\xi^2 - 1)^2}. \quad (1.13)$$

Необходимость определения такой формулы связана с возможным появлением фиктивных особенностей при определении функции распределения плотности на оси симметрии.

В эллипсоидальных координатах можно получить [53] схожие формулы

$$\rho = \rho_{\xi_1} + \rho_{\xi_2} + \rho_{\xi_3},$$

$$4\pi G\rho_{\xi_1} = \frac{4a(\xi_1)}{(\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1 - \xi_3)^2} \varphi(\xi_1) + \frac{2(4a(\xi_1)[2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3] - a'(\xi_1)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3))}{(\xi_1 - \xi_2)^3 (\xi_1 - \xi_3)^3} \varphi'(\xi_1) - \frac{2\varphi(\xi_1)}{(\xi_1 - \xi_2)^4 (\xi_1 - \xi_3)^4 (\xi_2 - \xi_3)} \times \left(4a(\xi_1) [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) + (\xi_1 - \xi_3)^2] + a'(\xi_1)(2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1) - (\xi_1 - \xi_3)^3 [4a(\xi_2) + (\xi_1 - \xi_2)a'(\xi_2)] + (\xi_1 - \xi_2)^3 [4a(\xi_3) + (\xi_1 - \xi_3)a'(\xi_3)] \right),$$

где $a(\xi_i) = (\xi_i + \alpha)(\xi_i + \beta)(\xi_i + \gamma)$, а ρ_{ξ_2} и ρ_{ξ_3} получаются из данной формулы переходом $\xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow \xi_3 \rightarrow \xi_1$ один или два раза соответственно.

1.2. Некоторые свойства штеккелевских моделей

Ниже выделим некоторые свойства штеккелевских моделей, полученных в работах различных исследователей.

1.2.1. Теорема Кузмина

Кузминым было показано [11], что для штеккелевских моделей можно выбрать функции $\varphi(\xi)$ таким образом, чтобы плотность получалась неотрицательной во всем пространстве, а масса — конечной. Рассмотрим доказательство этого утверждения.

Введем вспомогательную функцию ψ

$$\psi(\xi) = 4\pi G z_0^2 \rho_{R=0}.$$

На оси симметрии $\xi_1^2 = 1$ или $\xi_2^2 = 1$, из выражения для пространственной плотности (1.12) имеем:

$$(\xi^2 - 1)^2 \psi + 2(\varphi - \xi\varphi') + (\xi^2 - 1)\varphi'' = \text{const}.$$

Вводя соответствующие коэффициенты и используя функцию ψ , получаем

$$4\pi G z_0^2 \rho = g_1^2 \psi_1 + 2g_1 g_2 \psi_{12} + g_2^2 \psi_2,$$

где

$$g_1 = \frac{\xi_1^2 - 1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}, \quad g_2 = \frac{1 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2},$$

$$\psi_1 = \psi(\xi_1), \quad \psi_2 = \psi(\xi_2),$$

$$\psi_{12} = \frac{2 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \psi \xi d\xi}{\xi_1^2 - \xi_2^2}.$$

В силу неотрицательности коэффициентов g_1 и g_2 необходимым и достаточным условием неотрицательности плотности во всем пространстве является неотрицательность плотности на оси симметрии. Это утверждение получило название теоремы Кузмина. Де Зееу [53] получил обобщение теоремы Кузмина на случай эллипсоидальных координат.

Приведем полученное Кузминым условие конечности массы. При $\xi_1 \rightarrow \infty$ имеем

$$4\pi G z_0^2 \rho \rightarrow \psi_1 + \left[4(1 - \xi_2^2) \int_{\xi_2}^{\xi_1} \psi \xi d\xi + (1 - \xi_2^2) \psi_2 \right] \xi_1^{-4}.$$

Масса конечна, если при больших ξ функция ψ убывает быстрее, чем $|\xi|^{-3}$. А так как $R = z_0 \xi_1$ при больших ξ_1 , то конечная масса в модели получается, если плотность убывает по R быстрее, чем R^{-3} .

Таким образом, убеждаемся, что можно выбрать функцию φ так, чтобы выполнялись условия неотрицательности плотности и конечности массы.

Штеккелевские модели с отрицательной плотностью не редкость. Можно выделить работы Генкина, в которых данный вопрос удалось решить добавлением к выражению плотности некоторой положительной постоянной с соответствующей добавкой к потенциалу. Такие добавки не нарушают штеккелевости потенциала, однако, как отмечает Кузмин, такие модели малореалистичны.

Отметим и недостаток условия конечности массы. Плотность реальных звездных систем убывает с расстоянием как $R^{-\alpha}$, где $3 < \alpha < 2$, что приводит при $R \rightarrow \infty$ эквиденситы (кривые равной плотности) штеккелевских систем должны становятся все более сферическими.

1.2.2. Условие Родионова

Родионовым в своей работе [26] доказано следующее утверждение для штеккелевских потенциалов.

Если потенциал на оси симметрии $U(z \geq z_0)$ есть строго убывающая функция, экваториальный потенциал $U(R)$ обладает следующими свойствами:

- А) является строго убывающей функцией;*
- Б) при любом $\varepsilon > 0$, таком что $R > \varepsilon$, удовлетворяет неравенству;*

$$U(R) < U(R = 0) - [U(R = 0) - U(\varepsilon)] \frac{R^2 (\varepsilon^2 + z_0^2)}{\varepsilon^2 (R^2 + z_0^2)}.$$

Справедливо и обратное утверждение, что если экваториальный потенциал $U(R)$ есть строго убывающая функция и при любых $\varepsilon > 0$ таких что

$R > \varepsilon$, удовлетворяет неравенству (Б), то потенциал на оси симметрии также есть строго убывающая функция.

Из приведенной выше теоремы следует несколько важных утверждений (доказательства которых приводить здесь не будем):

а) для того, чтобы не возникало особенностей распределения плотности в штеккелевских моделях, необходима шестикратная непрерывная дифференцируемость потенциала в центре модели;

б) предыдущее условие эквивалентно $\varphi_1^{(n)}(\xi_1 = 1) = \varphi_2^{(n)}(\xi_2 = 1)$ для $n = 0, 1, 2, 3$;

в) при малых R естественной аппроксимацией силового поля в экваториальной плоскости является квазиупругое поле. Чем больше z_0 , тем обширнее эта область;

г) изоповерхности потенциала остаются сплюснутыми на сколь угодно больших расстояниях от центра.

Исходя из указанных выше теоретических результатов появляется большая надежда на построение физически правдоподобной штеккелевской модели какой-нибудь реальной звездной системы, например нашей Галактики.

1.3. Третий интеграл движения

1.3.1. Третий квадратичный по скоростям интеграл движения

Общий вид потенциала (1.4) можно представить в виде условия

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} [(\xi_1^2 - \xi_2^2) \Phi] = 0, \quad (1.14)$$

которое в свою очередь можно записать в цилиндрических координатах R , λ , z :

$$3 \left(z \frac{\partial \Phi}{\partial R} - R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - (R^2 + z_0^2 - z^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} + Rz \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (1.15)$$

Данное равенство является ограничивающим условием, которое накладывается на потенциал третий квадратичный интеграл движения

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\lambda^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*), \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} &= z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} &= (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \end{aligned}$$

Используя функции $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ из условия (1.4), выражение для Φ^* можно представить в виде

$$\Phi^* = \frac{\xi_2^2 \varphi_1(\xi_1) - \xi_1^2 \varphi_2(\xi_2)}{z_0^2 (\xi_1^2 - \xi_2^2)}.$$

Интегралом движения называют всякую функцию от координат, скоростей и времени, которая сохраняет постоянное значение при движении звезды. Ограничивающее условие накладываемое третьим квадратичным интегралом на потенциал также является условием разрешимости системы уравнений для Φ^* . Условие (1.15) получается из системы уравнений для Φ^* , если первое уравнение продифференцировать по z , второе по R и исключить $\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial R \partial z}$ из полученных уравнений. Стоит отметить, что множество исследователей работало над физической интерпретацией данного условия, однако она так и не была получена.

Теорию построения моделей с таким интегралом движения подробно в своих работах рассматривал Кузмин [56]. Уиттакер [99] называл такие интегралы адельфическими, поскольку их свойства очень похожи на свойства интеграла энергии. Первые два члена такого интеграла представляют собой сумму квадратов моментов вращения вокруг двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в плоскости $z = 0$. Последний член имеет вид интеграла энергии по z координате, умноженного на постоянную с размерностью квадрата длины z_0^2 , которую мы уже встречали при определении эллиптических координат и о которой подробнее будет рассказано ниже. При $z_0 = 0$ потенциал имеет сферическую симметрию и тогда интеграл представляет собой сумму квадратов двух интегралов импульса вращения. При $z_0 \rightarrow \infty$ интеграл превращается в интеграл Оорта, о котором будет рассказано ниже. Вообще говоря, форма третьего квадратичного интеграла не однозначна. Например, к нему можно добавить интеграл энергии, умноженный на произвольную постоянную.

Из линейности ограничения накладываемого третьим квадратичным интегралом на потенциал следует, что для таких моделей возможна суперпозиция

потенциалов с одним и тем же z_0 . Таким образом можно строить модели с компонентами, представляющими собой эллипсоиды различной сплюснутости, для которых по прежнему существует третий интеграл.

Бинейм и др. [33], пользуясь моделью Галактики Безансона, показали что третий интеграл сохраняется в пределах тысячных процента в окрестности Солнца. При увеличении z до 6 кпк интеграл продолжает хорошо сохраняться и его вариации составляют около 1%. Ошибки значительно возрастают при исследовании центральной области ($R < 4$ кпк), что авторы связывают с большим количеством резонансных орбит.

Из наблюдений известно, что распределение скоростей звезд в окрестности Солнца хорошо аппроксимируется шварцшильдовским распределением

$$f(v_x, v_y, v_z) = e^{-Q},$$

где Q — положительно определенная квадратичная форма скоростей v_x, v_y, v_z . Таким образом, распределение скоростей звезд эллипсоидально. Такое распределение может быть определено эллипсоидом скоростей, который задается уравнением $Q = \text{const}$.

Эллипсоид скоростей определялся для различных подсистем Галактики с использованием как собственных движений, так и лучевых и пространственных скоростей звезд. Для большинства подсистем эллипсоид скоростей является трехосным, а отношение его осей можно аппроксимировать отношением $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_z = 8 : 5 : 4$. Большой вклад в решение задачи определения эллипсоидов скоростей внес Шварцшильд. В табл. 1.2 представлены данные о дисперсиях скоростей звезд главной последовательности с различными значениями показателя цвета $B - V$ [36]. Величины, приведенные в 4 и 5 столбце таблицы, свидетельствуют в пользу трехосности эллипсоида скоростей для различных подсистем. Объяснить такую трехосность в рамках теории стационарной Галактики, учитывая лишь два классических интеграла движения — энергии и площадей, невозможно. Однако объяснить такой факт можно предположением о существовании третьего интеграла, вообще говоря не обязательно квадратичного по скоростям. В последнем столбце табл. 1.2 приводятся данные об отклонении вертекса (угла между направлением на центр Галактики и направлением большой оси эллипсоида скоростей). В рамках двухинтегральных моделей ось вращения эллипсоида скоростей должна быть направлена в сторону галакти-

Таблица 1.2: Данные о главных дисперсиях звезд главной последовательности с различными значениями показателя цвета $B - V$ [36]

$(B - V)_{min}$	$(B - V)_{max}$	σ_1 , КМ/с	σ_2/σ_1	σ_z/σ_1	l_v , град
-0.230	0.139	$14.35^{+0.49}_{-0.50}$	$0.65^{+0.07}_{-0.06}$	$0.38^{+0.05}_{-0.10}$	$30.2^{+4.7}_{-5.3}$
0.139	0.309	$20.17^{+0.07}_{-0.03}$	$0.40^{+0.02}_{-0.10}$	$0.47^{+0.09}_{-0.03}$	$22.8^{+2.8}_{-2.0}$
0.309	0.412	$22.32^{+0.56}_{-0.47}$	$0.53^{+0.06}_{-0.04}$	$0.42^{+0.03}_{-0.09}$	$19.8^{+3.2}_{-3.4}$
0.412	0.472	$26.26^{+0.80}_{-0.59}$	$0.60^{+0.06}_{-0.04}$	$0.46^{+0.03}_{-0.09}$	$10.2^{+5.0}_{-5.4}$
0.472	0.525	$30.57^{+0.96}_{-0.70}$	$0.60^{+0.06}_{-0.04}$	$0.44^{+0.04}_{-0.11}$	$6.9^{+5.1}_{-5.3}$
0.525	0.582	$32.93^{+1.09}_{-0.75}$	$0.66^{+0.06}_{-0.05}$	$0.46^{+0.04}_{-0.10}$	$1.9^{+6.0}_{-6.1}$
0.582	0.641	$37.64^{+1.37}_{-0.94}$	$0.62^{+0.08}_{-0.03}$	$0.56^{+0.01}_{-0.12}$	$10.2^{+5.6}_{-6.0}$
0.641	0.719	$37.13^{+0.11}_{-0.31}$	$0.62^{+0.06}_{-0.04}$	$0.54^{+0.02}_{-0.10}$	$7.6^{+5.9}_{-6.0}$
0.719	1.543	$37.20^{+1.41}_{-0.93}$	$0.69^{+0.06}_{-0.05}$	$0.49^{+0.04}_{-0.11}$	$13.1^{+6.7}_{-6.0}$
0.610	1.543	$37.92^{+0.79}_{-0.63}$	$0.65^{+0.04}_{-0.03}$	$0.54^{+0.02}_{-0.05}$	$10.3^{+3.9}_{-3.9}$

ческого вращения, что вообще говоря не так. Подобные отклонения вертекса также можно объяснить третьим интегралом движения. Кроме того, в моделях с тремя интегралами задачи построения орбит решаются в квадратурах, орбиту можно представить как сумму трех движений по каждой координате.

1.3.2. К вопросу существования третьих интегралов

В шестимерном фазовом пространстве координат x, y, z и скоростей v_x, v_y, v_z пространственно-кинематическая структура некоторой звездной системы определяется функцией фазовой плотности Ψ . Пространственная плотность звезд ρ получается путем интегрирования Ψ по скоростям. Если пренебречь действием иррегулярных сил, то справедлива [21, 35]

Теорема Лиувилля.

При движении звездной системы любой фазовый объем сохраняет постоянную величину.

Следствием закона сохранения массы в фазовом пространстве является уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \text{Div}(\mathbf{V}\Psi) = 0,$$

где Div — оператор дивергенции в фазовом пространстве: $\text{Div} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$, $i = 1, \dots, 6$, а $\mathbf{V} = (v_x, v_y, v_z, \dot{v}_x, \dot{v}_y, \dot{v}_z)$. По теореме Лиувилля $\text{Div}\mathbf{V} = 0$,

то

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 V_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \left(V \frac{\partial}{\partial X} \right) \Psi = 0,$$

при $\mathbf{X} = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$.

Если Φ — потенциал регулярных сил, то

$$\dot{v}_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \dot{v}_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \dot{v}_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

и

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + v_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial v_x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial v_y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial v_z} = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) в звездной динамике называют бесстолкновительным уравнением Больцмана, а в теории плазмы уравнением Власова. Из него следует [21, 35]

Теорема Джинса.

При любом движении звездной системы ее фазовая плотность является интегралом движения.

Из теоремы Джинса следует, что фазовая плотность должна являться функцией шести независимых друг от друга интегралов движения I_i

$$\Psi = \Psi(I_1, I_2, \dots, I_6). \quad (1.18)$$

Отсюда можно получить другую формулировку теоремы Джинса [21]:

Координаты и скорости могут входить в фазовую плотность только в таких комбинациях, которые сами являются интегралами движения.

Если мы рассматриваем теорию стационарной Галактики, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

В таком случае аргументами фазовой плотности остаются пять интегралов.

Учитывая осевую симметрию системы, имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0.$$

Тогда фазовая плотность не зависит от интеграла, содержащего λ и остаются четыре интеграла движения.

Заметим, что они не могут быть многозначными. В противном случае выражение для фазовой плотности станет многозначным, что лишено физического смысла. Из четырех интегралов один наверняка многозначный. Так как если имеем четыре однозначных интеграла, тогда придавая им числовые значения, можем исключить все три компоненты скорости, получив тем самым уравнение связи для R и z . В таком случае все орбиты будут являться замкнутыми кривыми, что вообще говоря не соответствует действительности. Однозначные интегралы также называют изолирующими. Гиперповерхности $I = \text{const}$ однозначных интегралов делят фазовое пространство на части изолированные друг от друга. В то время как гиперповерхности многозначных интегралов непрерывно переходят друг в друга. Таким образом, можно сказать что проблема существования того или иного количества однозначных интегралов тесно связана с проблемой перемешивания в фазовом пространстве, а существование третьего интеграла препятствует такому перемешиванию. Необходимость учета однозначных интегралов неоднократно подчеркивалась в работах Огородникова [21], Антонова [1], Кузмина [10] и Линден-Белла [74].

В литературе широко известны два классических интеграла движения: интеграл энергии I_1 (в силу стационарности системы) и интеграл площадей I_2 (в силу ротационной симметрии системы), которые в цилиндрических координатах R, λ, z записываются в виде

$$I_1 = 2E = v_R^2 + v_\lambda^2 + v_z^2 - 2\Phi,$$

$$I_2 = L_z = Rv_\lambda,$$

где v_R, v_λ, v_z — проекции скорости в цилиндрических координатах.

Таким образом открытым остается вопрос о существовании третьего интеграла движения, который с одной стороны объясняет наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность эллипсоида скоростей, а с другой неминуемо ведет к

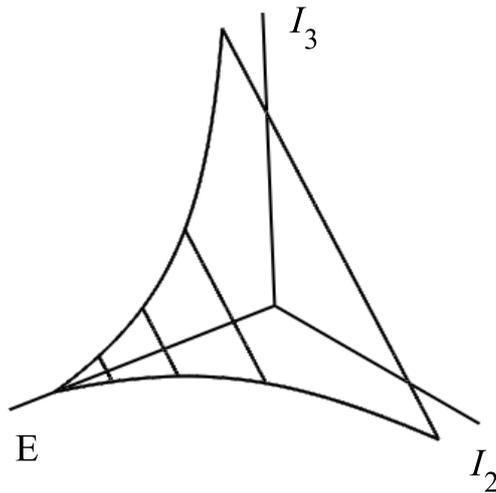


Рис. 1.3: Обобщение диаграммы Линблада

ограничениям общности потенциала. Энон и Эйлис [64] в попытке ответить на вопрос, всегда ли существует третий интеграл пришли к заключению, что при малых значениях энергии третий интеграл существует всегда. При значении энергии, превосходящем некоторое критическое значение, существует бесконечное количество разделенных областей, в которых третий интеграл продолжает существовать. Пространство между ними называется «эргодическими областями», в которых третий интеграл становится неизолирующим. При росте энергии доля, занятая подобными «эргодическими областями», увеличивается и в итоге заполняет все пространство.

Зависимость Ψ от I_1, I_2, I_3 графически можно представить изоповерхностями в трехмерной диаграмме, где по координатным осям отложены I_1, I_2, I_3 . Такая диаграмма (пример которой представлен на рис. 1.3) является обобщением на три интеграла диаграммы Линдблада. В частности, она графически иллюстрирует распределение звездных орбит, так как их форма и размеры однозначно определяются заданием интегралов движения. Де Зееу [52] определил области на диаграмме, соответствующие ящичным и трубкообразным орбитам.

Заметим, что квадратичные по скоростям интегралы, аналогичные рассмотренному I_3 , возможны и для нестационарного поля. Более подробно о таких случаях написано в [1]. Впрочем по [13] эти интегралы могут получены из соответствующих стационарных интегралов преобразованием Шюрера. Если говорить о несимметричных полях, то для систем вращающихся с постоянной угловой

скоростью, возможно существование интегралов первой и второй степени по скоростям. Для этого потенциал должен представляться в виде $\Phi = \varphi(y)$ или $\Phi = \frac{Ax^2 + By^2}{2}$. Как доказано в [96] другие виды потенциала недопустимы. Вопрос о существовании интегралов более высоких степеней по видимому не изучен.

1.3.3. Теорема о существовании плоскости симметрии

Выделим еще одно свойство штеккелевских систем [12].

Из теоремы Лихтенштейна известно, что равновесная вращающаяся конфигурация неоднородной гравитирующей жидкости имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения. Кузмин обобщил эту теорему для звездных систем, в частности для случая трех интегралов движения.

Если существует третий интеграл (1.16) и потенциал представляется в виде (1.4), то наличие плоскости симметрии следует из рассмотрения уравнения Пуассона при $R = 0$. Тогда

$$\Phi(z) = \frac{z_0^2}{z^2 - z_0^2} \varphi\left(\frac{z}{z_0}\right),$$

а интегралы имеют вид

$$I_1 = v_R^2 + v_z^2 - 2\Phi(z), \quad I_2 = 0,$$

$$I_3 = z^2 v_R^2 + z_0^2 v_z^2 - 2z_0^2 \Phi(z),$$

и следовательно

$$\rho = \rho(\Phi, z^2),$$

а уравнение Пуассона имеет вид

$$\Phi''(z) + \frac{2z}{z^2 - z_0^2} \Phi'(z) - \frac{4z_0^2}{(z^2 - z_0^2)^2} [\Phi(z) - \Phi(z_0)] + 4\pi G \rho(\Phi, z^2) = 0. \quad (1.19)$$

Ввиду непрерывности $\Phi(z)$ и $\Phi'(z)$ решение уравнения (1.19) может быть только четным. Следовательно, функция $\varphi(\xi)$ тоже четная и существует плоскость симметрии $z = 0$.

Параллельно эта теорема была доказана Идлисом [2], который оперирует

разложениями в ряд по степеням z .

1.3.4. Наклон эллипсоида скоростей в штеккелевских системах

Исследуем распределение скоростей с интегралом (1.16) [10].

Поворотом осей v_R и v_z приведем (1.16) к сумме квадратов компонентов скоростей. Если опустить общий множитель z_0^2 , то (1.16) в эллиптических координатах ξ_1, ξ_2 с соответствующими им скоростями v_{ξ_1} и v_{ξ_2} имеет вид

$$I_3 = \xi_2^2 v_{\xi_1}^2 + \xi_1^2 v_{\xi_2}^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 v_\lambda^2 - 2\Phi^*.$$

Для угла поворота координатных осей α имеем формулу

$$\tan \alpha = \frac{2Rz}{R^2 + z_0^2 - z^2}.$$

Поверхности постоянных значений ξ^2 (эллипсоиды и гиперболоиды, о которых рассказывалось выше) обладают тем свойством, что в каждой их точке оси v_{ξ_1} и v_{ξ_2} перпендикулярны им или являются их касательными. Как следствие, этим поверхностям перпендикулярны и оси эллипсоида скоростей.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что вне галактической оси и вне галактической плоскости оси эллипсоида скоростей имеют наклон к галактической плоскости. А в силу наличия плоскости симметрии для точек расположенных симметрично относительно этой плоскости положение осей эллипсоида также симметрично.

Впервые к подобным заключениям пришел Эддингтон [56], а чуть позднее Чандрасекар [44].

1.3.5. Третий интеграл движения для внешних галактик

В некоторых работах рассматривалась возможность существования третьего квадратичного по скоростям интеграла движения в других звездных системах. Вкратце остановимся на этих работах, приводя основные результаты.

Бинни [34] в своей работе рассматривал три эллиптические галактики и установил, что две из них нельзя объяснить двухинтегральными моделями. Ван

дер Марел [95] для 4 эллиптических галактик ранних типов пришел к выводу, что все они описываются двухинтегральными моделями.

Меррифилд [76] в своей работе разработал метод зависящий от отношения масса–светимость, которое определялось из кинематических свойств галактики вдоль главной оси. Различные наборы данных давали непоследовательные значения отношения масса-светимость, поэтому следует предполагать существование третьего интеграла движения. Анализ таких данных также позволяет объяснить анизотропию эллипсоида скоростей, на которую влияет третий интеграл. Исследование кинематических данных для галактик NGC 4697 и NGC 1052 показало, что ни одна из них точно не описывается двухинтегральными моделями.

1.3.6. Формулы для определения параметра z_0

Одним из важнейших параметров при работе со штеккелевскими моделями является z_0 , который определяет крупномасштабную структуру звездной системы. Постоянство z_0 во всей рассматриваемой области является необходимым условием существования третьего квадратичного интеграла.

При аппроксимации реального потенциала штеккелевским стоит говорить о квазипостоянстве z_0 . В силу этого и третий квадратичный интеграл следует использовать скорее как квазиинтеграл, то есть функцию пусть и не сохраняющую свое значение при движении звезды, но имеющую столь малые отклонения, что ими можно пренебречь. О квазипостоянстве z_0 можно говорить и в свете некоторых прикладных работ. В этом можно убедиться из результатов для некоторых моделей (Эйнасто [58] и Эйнасто и Рюммель [29]). Схожие, но более реалистичные варианты, получались и у автора [63]. О них более подробно будет рассказано ниже.

Зная потенциал $\Phi(R, z)$ определенный на всем пространстве из ограничивающего условия (1.15) можно определить z_0 по формуле

$$z_0^2(R) = \frac{3 \frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} + R \left(\frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial R^2} - 4 \frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial z^2} \right)}{\frac{\partial^3 \Phi(R, 0)}{\partial z^2 \partial R}} - R^2. \quad (1.20)$$

Подобные функции для z_0 строили Эйнасто и Рюммель [29], а также Осипко-

вым [22].

Вводя динамические параметры Оорта A , B и Кузмина $C = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Big|_{z=0}$, можно получить альтернативное выражение для определения z_0 :

$$z_0^2 = \frac{-4R^2 (C^2 + B(A - B))}{\frac{\partial C}{\partial R}} - R^2.$$

Зачастую z_0 по обеим формулам вычисляется в окрестности Солнца, то есть при $R = R_0$. Величины A , B , C в окрестности Солнца могут быть найдены по данным о вращении плоских подсистем Галактики и по данным о движении звезд перпендикулярно галактической плоскости.

Рядом авторов широко освещался вопрос нахождения условия вещественности z_0 . Эйнасто и Рюммель [29] в своей работе заключили, что z_0 становится мнимым на расстояниях, при которых выполняется условие

$$-\frac{d \ln \rho(R, 0)}{d \ln R} > 4,$$

где $\rho(R, z)$ — пространственная плотность. Осипков [22] же получил в качестве условия мнимости z_0 неравенство

$$-\frac{d \ln C^2}{d \ln R} \geq 4,$$

где C — по прежнему, параметр Кузмина. Как отмечено в [22] выполнение данного условия на периферии заведомо невозможно.

Пусть $\rho_1(R)$ — функция распределения плотности, отнесенная к экваториальной плоскости. Используя уравнение Пуассона, Родионов [27] получил следующую формулу для нахождения z_0

$$z_0^2 = \frac{2 \int_0^\infty \rho_1(R) R dR - V_{esc}^2}{C^2},$$

где C — параметр Кузмина, а V_{esc} — скорость отрыва. Из этой формулы следует, что z_0 характеризует степень концентрации массы к центру системы, определяя крупномасштабную структуру модели.

В заключении приведем табл. 1.3, в которой представлены значения z_0 , полученные другими авторами для теоретических моделей.

Таблица 1.3: Сводка значений параметра z_0 , используемых в различных работах

Автор	Год	Значение z_0 , кпк
Г.Г. Кузмин [10]	1953	3.6
Г.Г. Кузмин [11]	1956	3.1
П. Уэйман [98]	1959	2.2
Г. Хори [66]	1962	2.5
Г. А. Маласидзе [20]	1973	4.8
С. Манабе [75]	1979	2.6
А.О. Громов И.И. Никифоров Л.П. Осипков [63]	2015	5.3
А.О. Громов И.И. Никифоров [6]	2021	2.5; 4.3; 2.2

1.3.7. Другие виды третьих интегралов

Во многих работах третий интеграл предлагался квадратичным по скоростям. Это связано с использованием шварцшильдова распределения скоростей. Однако предлагались и некоторые другие виды третьих интегралов, многие из которых все равно так или иначе сводятся к квадратичному по скоростям. На таких выражениях для третьих интегралов остановимся в данном разделе.

Оортом [80] в качестве третьего интеграла был предложен интеграл энергии по z -координате:

$$I_3 = v_z^2 - 2[\Phi(R, z) - \Phi(R, 0)].$$

Условием, которое накладывает такой интеграл на потенциал рассматриваемой системы является разделение переменных в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} = 0$$

или, по-другому,

$$\Phi = \Phi_1(R) + \Phi_2(z).$$

Идлис [8] отмечал, что подобный интеграл не совместим с конечностью размеров звездной системы. Однако он может использоваться для движения внутри однородного эллипсоида конечных размеров. В качестве приближенного он справедлив для орбит, близких к круговым. Лучшее приближение дает исполь-

зование адиабатического инварианта вертикальных колебаний

$$J = \frac{I_3}{C(R)},$$

$$C(R) = - \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right|_{z=0}.$$

Идлис искал интеграл в виде суммы членов нулевого, второго и четвертого порядков, однако не сумел найти общее решение. Однако им было установлено, что четная и нечетная часть любого интеграла движения также является интегралом движения. Согласно Генкиным [5] в случае осесимметричного потенциала интеграл движения в виде полинома четвертой степени по скоростям сводится к квадратичному.

Линден-Белл [74] заметил, что если какой-либо интеграл движения справедлив только для определенного потенциала, то невозможно полагать, что фазовая плотность зависела бы от такого интеграла, существующего только на одном этапе эволюции. Тогда можно заключить, что известные интегралы движения сохраняются для целого класса систем. Исходя из этого, Линден-Белл ищет интегралы в виде

$$I = I(R, z, v_R, v_z, v_\lambda, \zeta(\mu)),$$

где $\mu = \mu(R, z)$ — фиксированная, но неизвестная функция, а ζ — произвольная функция. В наиболее общем виде такой интеграл совпадает с квадратичным по скоростям.

Бозис [43] предложил вид интеграла четвертой степени по скоростям

$$I = v_x^2 v_y^2 + A v_x^2 + 2B v_x v_y + \Gamma v_y^2 + E,$$

где

$$A = A(y), \quad \Gamma = \Gamma(x), \quad B = f(x + y) + g(x - y).$$

Условием существования такого интеграла является равенство

$$[A - \Gamma] (f'' + g'') + \frac{3}{2} A' (f' - g') - \frac{3}{2} \Gamma' (f' + g') + \frac{A'' - \Gamma''}{2} (f + g) = 0,$$

а потенциал записывается в виде

$$\Phi = \frac{1}{2} [A + \Gamma] + B.$$

Во многих случаях такой интеграл сводится к квадратичному по скоростям. Кроме того, область применения таких интегралов заметно уже, чем у квадратичных. Как отмечал Антонов [3], построение орбит с таким интегралом затруднительно и требует разработки особого аппарата, однако ему удалось получить полное решение.

Отдельно следует отметить работы, в которых формальный третий интеграл строился в виде некоторого ряда. Наибольших успехов в этом направлении достиг Контопулос с учениками. В своих работах они строят интеграл в виде ряда по степеням отклонений в фазовом пространстве от какой-либо фиксированной круговой орбиты (например, [45]). В этом случае, фиксируя значение интеграла площадей, сводим задачу к исследованию гамильтоновой системы с двумя степенями свободы.

Запишем Гамильтониан в виде

$$H = s_1 p_1 + s_2 p_2 + H_3 + H_4 + \dots,$$

где s_1, s_2 — постоянные, q_1, q_2, p_1, p_2 — канонические переменные, а H_i — однородные полиномы переменных $p_1^{\frac{1}{2}}$ и $p_2^{\frac{1}{2}}$, периодические относительно q_1 и q_2 . Импульсы p_1, p_2 здесь переменные действия, то есть адиабатические инварианты эпициклических колебаний, а q_1, q_2 — углы, имеющие смысл фазы невозмущенных (эпициклических) колебаний. Тогда, определив величины:

$$P = s_1^2, \quad Q = s_2^2,$$

можно записать, что

$$\xi = (2p_1/P^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cos q_1, \quad v_\xi = (2P^{\frac{1}{2}}p_1)^{\frac{1}{2}} \sin q_1,$$

$$z = (2p_2/Q^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cos q_2, \quad v_z = (2Q^{\frac{1}{2}}p_2)^{\frac{1}{2}} \sin q_2.$$

Здесь ξ, z — отклонения от круговой орбиты, а v_ξ, v_z — соответствующие ком-

поненты скорости. В общем виде потенциал записывается как

$$2\Phi = L_z^2/r^2 - P\xi^2 - Qz^2 + 2b\xi z^2 + 2\lambda\xi^2 z,$$

r — радиус круговой орбиты, L_z — значение интеграла площадей, а b, λ — некоторые постоянные. При отсутствии резонансов, то есть при иррациональности s_1/s_2 , третий интеграл имеет следующий вид

$$I_3 = \frac{1}{2}(v_\xi^2 + P\xi^2) + \frac{b}{4Q - P} ((P - 2Q)\xi z^2 - 2\xi v_z^2 + 2v_\xi z v_z) + \\ + \frac{2\lambda}{4P - Q} ((v_\xi^2 - P\xi^2)z - \xi v_\xi v_z) + \dots$$

В I входят слагаемые, пропорциональные $v_\xi v_z$, поэтому если I_3 является аргументом фазовой плотности, то эллипсоид скоростей наклонен к экваториальной плоскости. Этот факт подтверждается современными наблюдательными данными.

Развитие компьютерной техники позволяет алгоритмизировать построение такого третьего интеграла движения и использовать сколь угодно большое количество членов ряда. Однако все же следует отметить, что применимость такого интеграла ограничивается звездами, которые движутся по орбитам, не сильно отличающимся от круговых. Что касается сходимости подобных рядов, то для произвольных (немалых) отклонений от круговой орбиты такие ряды являются асимптотическими.

В работах [9, 93] предлагалось выражать дополнительный интеграл через полярные координаты в пространстве скоростей:

$$v_x = v \cos f, \quad v_y = v \sin f, \quad I(x, y, v_x, v_y) = K(x, y, v, f).$$

При этом функцию K можно разложить в ряд Фурье

$$K = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kf + b_k \sin kf].$$

Однако попытки определить коэффициенты данного ряда приводят к бесконечной системе дифференциальных уравнений в частных производных. При попытках ее решения возникают некоторые трудности.

Манабе [75], используя тот факт, что радиальное движение слабо связано с вертикальным в ящичных орбитах, предлагает разделить потенциал на три составляющие

$$\Phi(R, z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(R) + \Phi_3(R, z),$$

где $\Phi_1(z) = \Phi(R_c, z) - \Phi(R_c, 0)$, $\Phi_2(R) = \Phi(R, 0)$, $\Phi_3(R, z) = \Phi(R, z) - \Phi_1(z) - \Phi_2(R)$, а R_c — радиус круговой орбиты для заданного значения интеграла площадей. Для звезд с маленькими пекулярными скоростями можно положить $\Phi_3 \sim \varepsilon\Phi_1$ и $\Phi_3 \sim \varepsilon\Phi_2$ при $|\varepsilon| \ll 1$. Для потенциала Миямото–Нагая, например, $\varepsilon = 0.03$ при $R_c = 10$.

Полагая, что в диске сильно сплюснутой галактики, частота вертикальных колебаний больше частоты радиальных, пренебрегая в первом приближении R -движением, третий интеграл можно записать в виде

$$I_3 = \frac{1}{2}v_z^2 + \Phi_1(z) + \delta_2(R, z, v_z).$$

Кузмин [13] в своей работе ввел общую классификацию интегралов движения, основанную на форме изоповерхностей в пространстве скоростей. Следуя его работе, выделим следующие виды.

1. «Плоский интеграл» с изоповерхностями в виде параллельных плоскостей.

Примерами таких интегралов являются

а) $I = v_z^2 - 2U(z)$ с потенциалом вида $\Phi = U(z) + V(x, y, t)$.

б) $I = R^2v_\lambda^2 - 2U(\lambda)$ с потенциалом $\Phi = \frac{1}{R^2}U(\lambda) + V(R, z, t)$.

2. «Цилиндрический интеграл», изоповерхностями которого являются соосные круговые цилиндры. Примером интеграла такого вида является $I = v_x^2 + v_y^2 - 2U(x, y)$ с потенциалом $\Phi = U(x, y) + V(z, t)$

3. «Сферические интегралы» (или интеграл Чандрасекара), изоповерхностями которого являются концентрические сферы, вида $I = \varphi(t)^2w^2 - 2U(r, t)$, где w — длина вектора $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, \mathbf{v} — вектор скорости, $\mathbf{u}(r, t)$ — вектор центра сферических изоповерхностей интеграла в пространстве скоростей.

Некоторые из приведенных выше интегралов так или иначе сводятся к квадратичному интегралу. Интегралы более высоких степеней имеют более узкую

сферу применения, так как зависят от произвольных постоянных, а не функций. Так или иначе третий квадратичный по скоростям интеграл движения получил более широкое распространение в научных исследованиях.

1.4. Описание штеккелевских моделей в переменных действие–угол

1.4.1. Случай эллиптических координат

Описание звездных систем в переменных действие–угол с использованием сепарабельных потенциалов получило распространение сравнительно недавно. Изначально использовался алгоритм построения торов [71]. Он оказался неудобен так как давал зависимость фазовых координат от действий и углов, а не наоборот, как требуется. На смену ему пришел метод, использующий адиабатические инварианты [37], однако он оказался хорош только для звезд в экваториальной плоскости. В частности, вертикальная плотность не уменьшалась экспоненциально, а также возникали корреляции v_R и v_z , что противоречит предположению о их слабой зависимости.

В настоящее время используется метод определения действий на основе сепарабельных потенциалов. Он давал ошибки для $J_z < 4\%$, для $J_R < 6\%$, а чаще и $< 2\%$ от среднего значения. В то время как в методе адиабатических приближений ошибки действий составляли $> 4\%$ для звезд тонкого диска и еще больше для звезд толстого диска [39]. Даже последние данные миссии Gaia не смогут дать настолько точных оценок координат фазового пространства, чтобы неточности алгоритма стали существенны.

В потенциалах, допускающих разделение переменных (одним из видов которых являются штеккелевские потенциалы) переменные действия определяются как

$$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{L_k} p_k(q_k; \alpha_1, \dots, \alpha_n) dq_k,$$

а переменные угла как

$$\theta_k = \frac{\partial S}{\partial J_k},$$

где p_k и q_k — канонические импульсы и координаты, α_k — постоянные инте-

гирования, S — производящая функция уравнения Гамильтона–Якоби, а L_k — некоторые кривые.

Алгоритм вычисления действий в штеккелевских потенциалах следующий [86]:

1. Приводим потенциал к штеккелевскому виду. Затем оцениваем значение интеграла I_3 для некоторого набора точек в фазовом пространстве.

2. Определяем для этих точек сопряженные канонические импульсы $p_\xi = p_\xi(\xi, E, L_z, I_3)$, где E и L_z — интегралы энергии и площадей, из уравнения

$$2(\xi - z_0^2)p_\xi^2 = E - \frac{L_z^2}{2(\xi - z_0^2)} - \frac{I_3}{\xi} + \frac{\varphi(\xi)}{\xi},$$

где $\xi = \xi_1, \xi_2$.

3. Определяем действия $J_\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi^-}^{\xi^+} p_\xi d\xi$, где $\xi_2^- = 0$, $\xi_2^+ = \xi_1^- = z_0^2$, $\xi_1^+ = \infty$. В случае близком к сферическому $J_{\xi_1} \approx J_R$, $J_{\xi_2} \approx J_z$, $J_\lambda \approx L_z$.

4. Для определения углов $\theta_\xi = \frac{\partial S}{\partial J_\xi}$, где S — обобщающая функция:

$$S = S_\lambda + S_{\xi_1} + S_{\xi_2} = \int_0^\lambda L_z d\lambda' + \sum_{\xi=\xi_1, \xi_2} \int_{\xi_0}^\xi p_{\xi'} d\xi', \quad \xi_0 = \xi_1^-, \xi_2^-$$

$$\theta_\xi = \frac{\partial S}{\partial J_\xi} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial J_\xi} + \frac{\partial S}{\partial L_z} \frac{\partial L_z}{\partial J_\xi} + \frac{\partial S}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial J_\xi},$$

где

$$\frac{\partial J_{\xi_1}}{\partial E} = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - z_0^2)p_{\xi_1}}, \quad \frac{\partial J_{\xi_1}}{\partial L_z} = -\frac{L_z}{4\pi} \int_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - z_0^2)^2 p_{\xi_1}},$$

$$\frac{\partial J_{\xi_1}}{\partial I_3} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \frac{d\xi_1}{(\xi_1 - z_0^2) \xi_1 p_{\xi_1}},$$

$$\frac{\partial J_{\xi_2}}{\partial E} = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \frac{d\xi_2}{(\xi_2 - z_0^2)p_{\xi_2}}, \quad \frac{\partial J_{\xi_2}}{\partial L_z} = -\frac{L_z}{2\pi} \int_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \frac{d\xi_2}{(\xi_2 - z_0^2)^2 p_{\xi_2}},$$

$$\frac{\partial J_{\xi_2}}{\partial I_3} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \frac{d\xi_2}{(\xi_2 - z_0^2) \xi_2 p_{\xi_2}},$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \sum_{\xi=\xi_1, \xi_2} \frac{1}{4} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \frac{d\xi'}{(\xi' - z_0^2) p_{\xi'}}, \quad \frac{\partial S}{\partial L_z} = \lambda - \sum_{\xi=\xi_1, \xi_2} \frac{L_z}{4} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \frac{d\xi'}{(\xi' - z_0^2)^2 p_{\xi'}},$$

$$\frac{\partial S}{\partial I_3} = - \sum_{\xi=\xi_1, \xi_2} \frac{1}{4} \int_{\xi^-}^{\xi^+} \frac{d\xi'}{(\xi' - z_0^2) \xi' p_{\xi'}}.$$

С помощью переменных действие–угол можно довольно просто получать выражение для фазовой плотности. В литературе известно большое количество подобных функций. Первым шагом при построении фазовой модели служит построение реалистичной динамической модели, согласующейся с наблюдениями.

1.4.2. Обзор работ по построению штеккелевских моделей, согласующихся с наблюдениями

Такая задача уже решалась рядом авторов. Например, Сато и Миямото [89] пришли к необходимости построения модели, допускающей третий квадратичный по скоростям интеграл движения. Рассматривая две модели потенциала Галактики, авторы определяют значения параметров путем сравнения кривой круговой скорости с 18 наблюдательными значениями, полученными в результате наблюдения движения газа в центральной области $R < R_0$ ($R_0 = 10$ кпк). Работа является первой попыткой построения штеккелевской модели на основе наблюдательных данных, однако в настоящее время используемые в ней данные устарели, кроме того, они были малочисленны и представляли только внутреннюю Галактику. Полученные значения динамических характеристик нашей Галактики также разнятся с принимаемыми сейчас (например, у Сато и Миямото пространственная плотность в окрестности Солнца получилась равной $0.142 M_{\odot}/\text{пк}^3$, а по современным оценкам она составляет $0.08\text{--}0.11 M_{\odot}/\text{пк}^3$).

В работе Фамаэ и Дейонге [60] заранее выбранные формы штеккелевских потенциалов оптимизировались по производным, динамическим характери-

кам. В частности, исследуемые потенциалы должны давать плоскую кривую вращения. Постоянные Оорта, значения круговой скорости и пространственной плотности принимались фиксированными. Используя данные величины как критерий отбора, авторы получили сетку значений параметров потенциала и более подробно исследовали пять из них. Формально модель потенциала является трехкомпонентной (гало, тонкий диск и толстый диск). Вероятно, данная работа является первой попыткой построения многокомпонентной штеккелевской модели Галактики по наблюдательным данным. Однако, как отмечают сами авторы, для построения реалистичной модели Галактики вместе с динамическими характеристиками необходимо использовать непосредственно кинематические данные. К сожалению, ими это так и не было сделано.

Следует отметить работу Бинни и Вона [41], в которой строится фазовая модель для системы шаровых скоплений. Заданные выражения функции фазовой плотности диска и гало (двухкомпонентная модель мотивирована бимодальным распределением металличности) явно зависят от переменных действия, значения которых находятся при помощи штеккелевских потенциалов. Однако для получения штеккелевского приближения принятой в этой работе модели Пиффла и др. [82] используется алгоритм *Stäckel fudge*, недостатки которого по сравнению с формулами Родионова (1.6), (1.7) будут обсуждаться ниже. Заметим, что данная работа является первой попыткой практического применения алгоритма построения фазовых моделей с использованием штеккелевских потенциалов.

Совсем недавно был предложен алгоритм «определитель действий» (*action finder*) [67], в основе которого лежит алгоритм глубокого обучения, предназначенный для преобразования выборки координат фазового пространства вдоль орбит в статическом потенциале в координаты действие–угол. Преимуществом данного метода является то, что он не требует известного заранее выражения потенциала, лежащего в основе модели. Кроме того, предварительные результаты давали более точные оценки действий. Можно ли сказать, что подобный алгоритм придет на смену штеккелевским потенциалам? В ближайшее время нет. Для увеличения точности аппроксимации координат требуется глубокая нейронная сеть с десятками миллионов параметров. Как указывают авторы подобные преобразования неэффективны. Решением этой проблемы может стать введение начального («игрушечного») потенциала. Наилучшим выбором явля-

ется некоторый штеккелевский потенциал. Так что подобный алгоритм можно скорее считать некоторым улучшением штеккелевского моделирования или даже надстройкой над ним. Еще одной трудностью может служить не очень широкое распространение нейронных сетей. Вероятно, за ними будущее, однако в настоящее время алгоритм определения действий, основанный на потенциалах, допускающих разделение переменных, представляется более доступным.

1.4.3. Метод штеккелевской подгонки

Одним из альтернативных способов по отношению к формулам (1.6), (1.7) нахождения функций $\varphi(\xi)$ является метод штеккелевской подгонки (Stäckel fudge), который разрабатывался в работах Бинни [39] и Сандерса, Бинни [88]. Остановимся на нем подробнее.

Поставим задачу построить такой штеккелевский потенциал Φ_s , который будет являться аппроксимацией осесимметричного потенциала $\Phi(R, z)$. Система координат определяется заданием параметра z_0 , который находится из формулы

$$z_0^2(R, z) = \frac{3 \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} + R \left(\frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial R^2} - 4 \frac{\partial^2 \Phi(R, z)}{\partial z^2} \right)}{\frac{\partial^3 \Phi(R, z)}{\partial z^2 \partial R}} - R^2 + z^2. \quad (1.21)$$

Тогда оценка действий и углов в фазовой точке (x, v) в первом приближении штеккелевского потенциала вычисляется по следующему алгоритму [2].

Интегрируем орбиту в «настоящем» потенциале. Для некоторых точек орбиты по (1.21) находим значение z_0 . В получившейся системе координат продолжаем интегрировать до нахождения ξ_1^+ , ξ_1^- , ξ_2^+ — предельных координат орбиты, которые приблизительно задаются точками, а ξ_2^- полагают равным нулю. где $\dot{\xi}_1 = 0$, $\dot{\xi}_2 = 0$.

Из нижеприведенных равенств находим $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$ для некоторых точек орбиты

$$\varphi(\xi_1) = \bar{\chi}(\xi_1) - \frac{1}{2}\bar{\chi}, \quad \varphi(\xi_2) = -\bar{\chi}(\xi_2) + \frac{1}{2}\bar{\chi}, \quad (1.22)$$

$$\bar{\chi}(\xi_1) = \int_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \chi(\xi_1, \xi_2) \Xi_2(\xi_2) d\xi_2, \quad \bar{\chi}(\xi_2) = \int_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \chi(\xi_1, \xi_2) \Xi_1(\xi_1) d\xi_1, \quad (1.23)$$

$$\bar{\chi} = \int_{\xi_2^-}^{\xi_2^+} \int_{\xi_1^-}^{\xi_1^+} \chi(\xi_1, \xi_2) \Xi_1(\xi_1) \Xi_2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad \chi(\xi_1, \xi_2) = -(\xi_1 - \xi_2) \Phi(\xi_1, \xi_2), \quad (1.24)$$

$$\Xi_1(\xi_1) = 4\xi_1^{-5} \left(\xi_1^{-4} - \xi_1^{+4} \right)^{-1}, \quad \Xi_2(\xi_2) = (\xi_2^+ - \xi_2^-)^{-1}. \quad (1.25)$$

Находим $\varphi(\xi_1)$ и $\varphi(\xi_2)$ для 40 точек орбиты, так чтобы можно было интерполировать их, как гладкие функции. Это и есть нахождение наилучшего штеккелевского приближения потенциала.

Бинни [40] предлагал альтернативный подход к нахождению z_0 . Для каждого значения энергии и действия J_λ вычисляется оболочка орбиты $J_R = 0$ и эллипс, определяющий орбиту в меридиональной плоскости. Значение координаты фокуса этого эллипса и дает оценку z_0 . Однако в последствии Бинни отказался от его использования.

Сравнивая метод Stäckel fudge с методом штеккелевского обобщения (формулы (1.6), (1.7)) можно выделить следующее.

1. Очевидно, что Stäckel fudge является более сложным алгоритмом. Для вычисления функций $\varphi(\xi)$ необходимо неоднократное и часто численное нахождение интегралов. Кроме вычислительных затрат это ведет и к потере точности. В то время как метод штеккелевского обобщения прост и позволяет находить аналитические выражения для функции $\varphi(\xi)$.

2. Значения параметра z_0 вычисленные по алгоритму Stäckel fudge в разных точках орбиты, вообще говоря, различны. Поэтому необходимо брать некоторое среднее значение. Кроме того могут отличаться значения z_0 при переходе от одной орбиты к другой. Как упоминалось выше постоянство z_0 является условием сохранения I_3 . Возникает вопрос, какой из интегралов I_3 для различных z_0 является аргументом фазовой плотности. О невозможности многозначных интегралов быть аргументом фазовой плотности говорилось выше. Также остается открытым вопрос, насколько точно будет описывать выражение для фазовой плотности области, которые не затрагивались интерполированием. При применении метода штеккелевского обобщения параметр z_0 фиксируется постоянным на всей рассматриваемой области, а значит существует только один I_3 , который и является аргументом фазовой плотности.

В данной работе ограничимся случаем осесимметричного потенциала, что допустимо для нашей (дисковой) Галактики. Однако для исследования эллиптических галактик необходим трехосный подход. В алгоритме Stäckel fudge та-

кой метод разработан и дает штеккелевское приближение потенциала для эллипсоидальных координат. Алгоритм подгонки в данном случае становится более сложным, необходима оценка уже двух координатных параметров подобных z_0 , в результате чего необходимы большие вычислительные затраты.

1.4.4. Случай эллипсоидальных координат

В эллипсоидальных координатах штеккелевский потенциал представляется в виде (1.5). Из уравнения Гамильтона–Якоби имеем [52]

$$2(\xi + \alpha)(\xi + \beta)(\xi + \gamma)p_\xi^2 = \xi^2 E - \xi A + B + \varphi(\xi),$$

где E — интеграл энергии, $\xi = \xi_1, \xi_2, \xi_3$, A и B — константы, определяемые из равенств

$$I_2 = \frac{\alpha^2 + \alpha A + B}{\alpha - \gamma}, \quad I_3 = \frac{\gamma^2 E + \gamma A + B}{\gamma - \alpha},$$

где I_2, I_3 — интегралы движения.

Действия определяются аналогично предыдущему случаю

$$J_\xi = \frac{2}{\pi} \int_{\xi^-}^{\xi^+} d\xi |p_\xi(\xi)|,$$

где (ξ^-, ξ^+) — корни уравнения $p_\xi(\xi) = 0$.

Stäckel fudge для трехосного случая записывается следующим образом

$$\varphi(\xi) = \chi_\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + C_\xi \xi + D_\xi,$$

где

$$\chi_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

$$\chi_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_2 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_2)\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

$$\chi_{\xi_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_3 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

C_ξ и D_ξ — постоянные.

Тогда

$$2(\xi + \alpha)(\xi + \beta)(\xi + \gamma)p_\xi^2 = \xi^2 E - \xi A_\xi + B_\xi + \chi_\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Для каждой координаты ξ заданы два новых интеграла $A_\xi = a - C_\xi$, $B_\xi = b + D_\xi$. Задание координат точки в фазовом пространстве и выбор системы координат дает нам одно условие для A_ξ и B_ξ . Разделение переменных в штеккелевском потенциале означает, что производная гамильтониана по эллипсоидальной координате равна нулю для «настоящего» потенциала $\Phi(R, z)$. Положив эту производную равной нулю, получаем еще одно условие для A_ξ и B_ξ при использовании точки в фазовом пространстве (\mathbf{x}, \mathbf{v}) . Затем аппроксимируем выражение для $p_\xi(\xi)$ и находим оценки действий.

В [87] приводятся явные выражения для некоторых функций. Из подстановки начальной точки имеем:

$$B_\xi = 2(\xi_0 + \alpha)(\xi_0 + \beta)(\xi_0 + \gamma)p_{\xi_0}^2 - \xi_0 E + \xi_0 A_\xi - \chi_\xi(\xi_{1,0}, \xi_{2,0}, \xi_{3,0}),$$

где $\xi_0 = \xi_{1,0}, \xi_{2,0}, \xi_{3,0}$, p_{ξ_0} — импульс в начальной точке фазового пространства.

Из $\frac{\partial H}{\partial \xi} = 0$ имеем

$$A_{\xi_1} = (\xi_{2,0} + \xi_{3,0})E + \frac{1}{2} \frac{p_{\xi_{2,0}}^2 (\xi_{1,0} - \xi_{2,0})}{P_{\xi_{2,0}}^2} + \frac{1}{2} \frac{p_{\xi_{3,0}}^2 (\xi_{1,0} - \xi_{3,0})}{P_{\xi_{3,0}}^2},$$

$$A_{\xi_2} = (\xi_{1,0} + \xi_{3,0})E + \frac{1}{2} \frac{p_{\xi_{1,0}}^2 (\xi_{2,0} - \xi_{1,0})}{P_{\xi_{1,0}}^2} + \frac{1}{2} \frac{p_{\xi_{3,0}}^2 (\xi_{2,0} - \xi_{3,0})}{P_{\xi_{3,0}}^2},$$

$$A_{\xi_3} = (\xi_{1,0} + \xi_{2,0})E + \frac{1}{2} \frac{p_{\xi_{1,0}}^2 (\xi_{3,0} - \xi_{1,0})}{P_{\xi_{1,0}}^2} + \frac{1}{2} \frac{p_{\xi_{2,0}}^2 (\xi_{3,0} - \xi_{2,0})}{P_{\xi_{2,0}}^2},$$

$$P_{\xi_1}^2 = \frac{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)}{4(\xi_1 + \alpha)(\xi_1 + \beta)(\xi_1 + \gamma)},$$

$$P_{\xi_2}^2 = \frac{(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_1)}{4(\xi_2 + \alpha)(\xi_2 + \beta)(\xi_2 + \gamma)},$$

$$P_{\xi_3}^2 = \frac{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)}{4(\xi_3 + \alpha)(\xi_3 + \beta)(\xi_3 + \gamma)}.$$

Для штеккелевского потенциала существуют 6 интегралов движения (A_{ξ_1} ,

$A_{\xi_2}, A_{\xi_3}, B_{\xi_1}, B_{\xi_2}, B_{\xi_3}$), однако не все они являются независимыми.

Вариант метода штеккелевского обобщения в случае эллипсоидальных координат еще не разработан, однако это может стать перспективным направлением для будущих научных исследований. Этот интерес обусловлен также тем, что Бинни [34] и Мериффилд [76] в своих работах установили, что некоторые эллиптические галактики могут быть описаны только трехинтегральными моделями.

Методы штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки являются альтернативными способами решения задачи построения штеккелевской модели потенциала звездной системы. В настоящий момент трудно сказать, какой из них в конечном счете окажется наиболее удачным.

1.5. Выводы

По результатам сделанного обзора можно сделать следующие выводы.

1. Разработка аппарата штеккелевского моделирования даст большой толчок решению задачи фазового моделирования звездных систем. Возможность разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби (и как следствие его решение) позволяет описывать построенную модель в переменных действие–угол. В литературе известно большое количество выражений для фазовой плотности в таких переменных.
2. Несмотря на большое количество теоретических работ по построению штеккелевских моделей, можно отметить существенный недостаток работ, в которых бы модели строились по наблюдательным данным. Стоит отметить, что в известных работах построенные модели являются не очень реалистичными (устаревшие данные, не соответствующее наблюдаемому вертикальное распределение пространственной плотности и др.). Для дальнейшего фазового моделирования необходимо построить реалистичную штеккелевскую модель какой-либо звездной системы, например, нашей Галактики.
3. Существование в штеккелевских моделях третьего квадратичного по скоростям интеграла движения является еще одним преимуществом таких моделей. Третий интеграл позволяет объяснить ряд наблюдательных фактов, например трехосность эллипсоида скоростей.

4. Необходимо сравнение двух альтернативных подходов к штеккелевскому моделированию: штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки. В последнее время развивается только более сложный последний. Сравнение результатов позволит сделать выводы о том, какой же из методов лучше.

Сделанные выводы приводят к необходимости построения штеккелевской модели нашей Галактики методом штеккелевского обобщения.

Глава 2

Построение штеккелевской модели Галактики по наблюдательным данным

2.1. Задание потенциала в экваториальной плоскости

В данной главе решается задача построения штеккелевской модели, заданной потенциалом в экваториальной плоскости. Изначально на потенциал не накладывается никаких ограничений, а значит приведенный ниже алгоритм может использоваться для любой модели, полученной, например, путем аппроксимации данных о вращении «холодной» галактической подсистемы. Однако в работах нашей группы встречались потенциалы (например, потенциал Хернквиста [65]), которые давали особенности в некоторых точках, что приводило к непреодолимым трудностям при моделировании.

В данной работе гало представлялось квази-изотермическим потенциалом [15]

$$\Phi_1(R, 0) = \Phi_{0,1} \ln \left(1 + \frac{\beta}{w(R)} \right), \quad (2.1)$$

где функция $w(R)$ определяется соотношением

$$w^2(R) = 1 + \kappa_1^2 \frac{R^2}{R_0^2}. \quad (2.2)$$

Здесь R_0 — произвольный масштабный параметр. В данной работе он принимается равным 8.15 кпк, что соответствует расстоянию от Солнца до центра Галактики [85].

Диск описывался обобщенно–изохронным потенциалом [14]

$$\Phi_2(R, 0) = \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 R^2}}. \quad (2.3)$$

Для центральной компоненты был выбран потенциал Миямото–Нагая [77]

$$\Phi_3(R, 0) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \kappa_3^2}}. \quad (2.4)$$

Заданный в экваториальной плоскости потенциал можно обобщить на трехмерное пространство. Для этого функции $\varphi_1(\xi_1)$ определяются по формуле (1.6) на промежутке $[1; \infty)$. Аналитическим образом функции $\varphi_2(\xi_2)$ продолжаются на $[-1; 1)$. Таким образом, выражения для функции $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ совпадают; различаются лишь области их определения. В таком случае в дальнейшем вместо двух различных функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ будем использовать общее обозначение φ . Аналогично поступим и с переменными ξ_1 и ξ_2 : введем переменную ξ такую что

$$\xi = \begin{cases} \xi_1, & \xi \geq 1, \\ \xi_2, & -1 \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Функции φ для различных компонент потенциала (2.1)–(2.4) можно задать в явном виде

$$\varphi_h(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,1} \ln \left[1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right], \quad (2.5)$$

$$\varphi_d(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}}, \quad (2.6)$$

$$\varphi_b(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi^2 - 1) + \kappa_3^2}}. \quad (2.7)$$

Для всей Галактики $\varphi(\xi) = \varphi_h(\xi) + \varphi_d(\xi) + \varphi_b(\xi)$. На рис. 2.1 представлены кривые $\varphi(\xi)$ для компонент модели и для модели Галактики.

Графики на рис. 2.1 схожи с теми, что приводит в своей работе Родионов [56] для модели Шмидта [90]. Стоит отметить монотонность функции φ при $\xi > 0$, что говорит об отсутствии дефектов в потенциалах. С подобными трудностями столкнулся Уэйман [98] при работе с моделью Шмидта для некоторого промежутка значений параметра z_0 . В результате функция $\varphi(\xi)$ остается неопределенной на некотором промежутке для ξ (например, у Уэймана [98] на

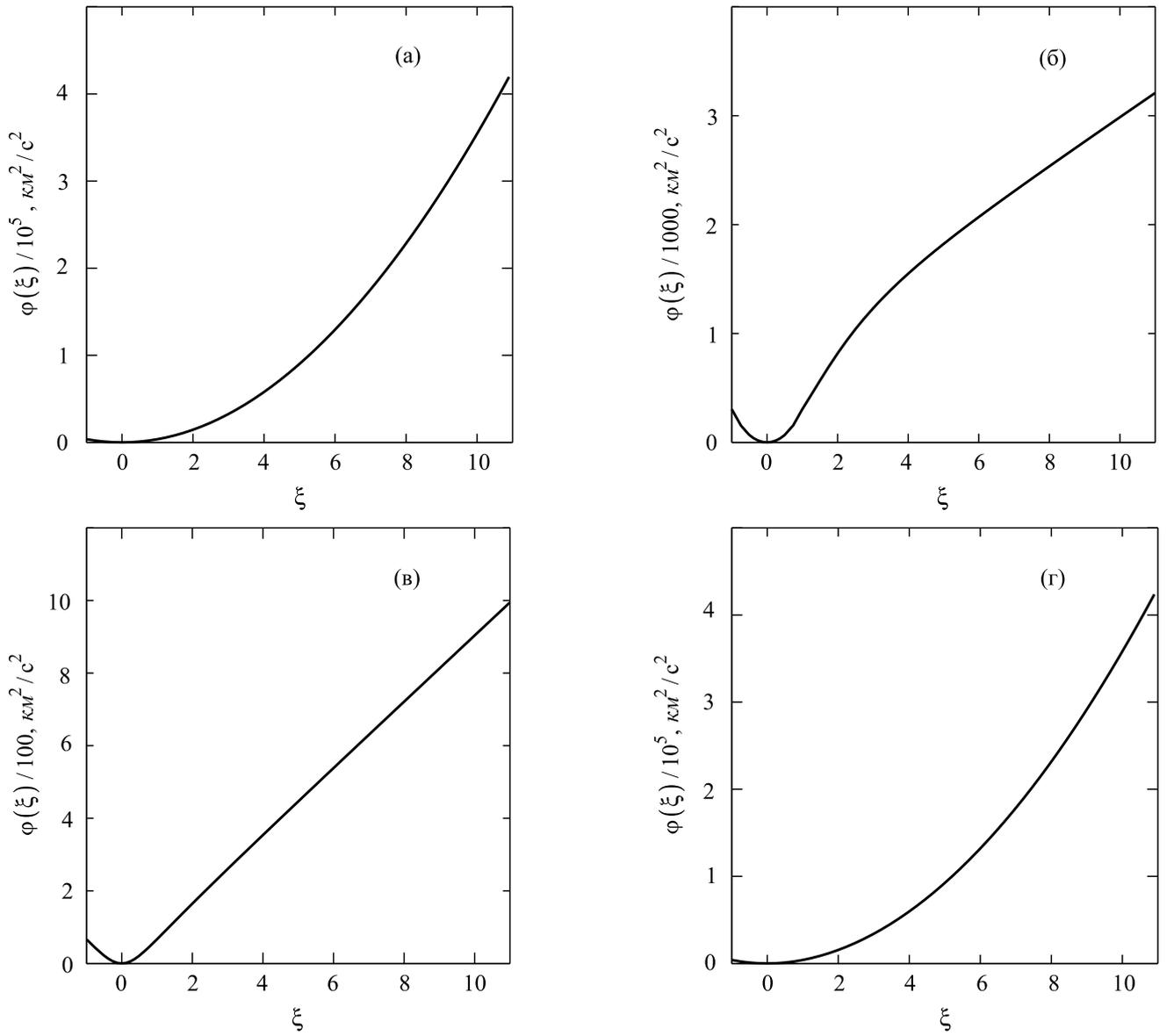


Рис. 2.1: Функции $\varphi(\xi)$, полученные методом штеккелевского обобщения: (а) — гало, (б) — диск, (в) — центральная компонента, (г) — трехкомпонентная модель.

$0.86 < |\xi| < 1$), в результате чего пришлось использовать интерполяцию.

2.2. Наблюдательные данные

Оценка параметров потенциала проводилась путем оптимизации модельной кривой круговой скорости по отношению к азимутальным скоростям θ_i маэров. РСДБ-наблюдения позволяют получать точные оценки тригонометрических параллаксов и собственных движений. Использовались каталоги Рида и др. [85] и Коллаборации VERA и др. [97] (далее каталог VERA).

Наиболее точным и надежным методом определения расстояний являются измерения тригонометрических параллаксов. В последние десятилетия были разработаны радиоастрометрические наблюдения с использованием радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ), которые могут обнаруживать молекулярные мазеры, связанные с молодыми звездами, находящимся на больших гелиоцентрических расстояниях, то есть на большей части Млечного Пути. РСДБ параллаксы позволяют точно определять положение Солнца в Галактике, изучать ее спиральную структуру и кинематику.

Первый из использованных каталогов (Рид и др. [85]) включает в себя измерения параллаксов и собственных движений примерно 200 мазерных источников, основанных на результатах наблюдений на радиоастрономической обсерватории VLBA, в рамках японского проекта VERA, европейского EVN и австралийского LBA.

Каталог Коллаборации VERA и др. [97] включает в себя данные о параллаксах и собственных движениях 99 (с полными данными 96) мазерных источников. 68 из них относятся к областям образования звезд, а 31 к объектам других типов, в частности поздних. Некоторые объекты (например, IRAS 18286-0959 [68] или K3-35 [94]) являются кандидатами в молодые планетарные туманности.

34 объекта содержатся в обоих каталогах. Сравнение ошибок параллаксов, представленное на рис. 2.2, показывает, что точность каталога VERA в среднем ниже, чем точность каталога Рида и др. Авторы каталога VERA связывают это с недостаточным количеством эпох наблюдений или калибровочными ошибками. Кроме того, следует отметить, что каталог VERA содержит значительно более неоднородную выборку, чем каталог Рида и др.

Дальнейшее моделирование было выполнено для трех выборок. Первая, наиболее однородная выборка состояла только из областей образования массивных звезд (далее HMSFRs): все объекты из каталога Рида и др. [85], два HMSFRs (G125.51+02.03 и IRAS21379+5106) из каталога VERA и др. [97] и один (G305.20+0.208) из каталога в работе Расторгуева и др. [24]. Две другие основывались на менее однородном каталоге VERA. Одна из этих выборок содержала только области образования звезд (различных масс, далее SFRs). Другая включала объекты каталога VERA всех типов: SFRs, звезды на асимптотической ветви гигантов (AGB), красные сверхгиганты (RSGs); далее выборка VERA. Использование каталогов, созданных различными исследовательскими

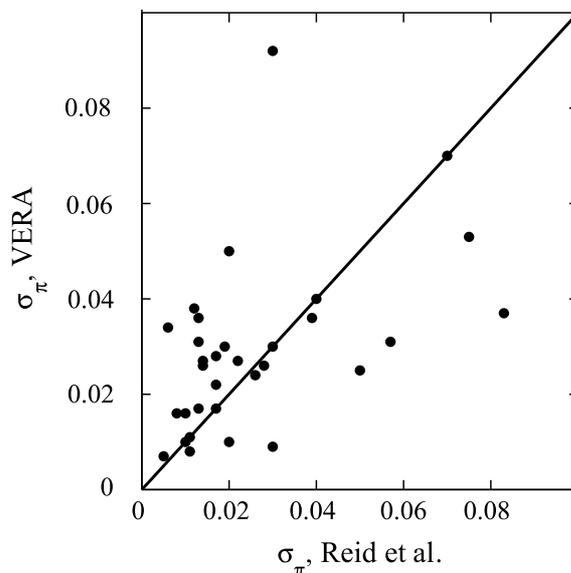


Рис. 2.2: Сравнение ошибок параллаксов для каталогов Рида и др. [85] и VERA и др. [97]. Точками обозначены пары $(\sigma_\pi, \text{Reid}; \sigma_\pi, \text{VERA})$. Прямая отображает линию совпадения ошибок параллаксов: для точек выше этой прямой ниже точность определения параллаксов в каталоге VERA; для точек ниже прямой ниже точность определения параллаксов в каталоге Рида и др.

группами, позволяет оценить зависимость результатов от типа данных.

Приведенные в каталогах значения тригонометрических параллаксов, собственных значений и лучевых скоростей обрабатывались в ходе следующей процедуры, в большинстве основанной на формулах, приведенных в [43].

Алгоритм получения галактоцентрических расстояний, азимутальных скоростей и ошибок измерения

1. Преобразование скорости относительно Местного Стандарта Покоя, V_{lsr} , приведенной в каталоге, в гелиоцентрическую скорость V_r :

$$V_r = V_{\text{lsr}} - U_\odot \cos l \cos b - V_\odot \sin l \cos b - W_\odot \sin b,$$

где $U_\odot = 10.3 \text{ км с}^{-1}$, $V_\odot = 15.3 \text{ км с}^{-1}$, $W_\odot = 7.7 \text{ км с}^{-1}$, в соответствии со стандартным движением Солнца 20 км/с в направлении $\alpha(1900) = 18^{\text{h}}$, $\delta(1900) = +30^\circ$, принятым при обработке радионаблюдений.

2. Переход от экваториальных координат (α, δ) , приведенных в каталоге, к

галактическим координатам (l, b) :

$$\sin b = \sin \delta \cos(90^\circ - \delta_p) - \cos \delta \sin(\alpha - \alpha_p - 6^h) \sin(90^\circ - \delta_p),$$

$$l = \varphi + (\theta - 90^\circ),$$

$$\sin \varphi = [\cos \delta \sin(\alpha - \alpha_p - 6^h) \cos(90^\circ - \delta_p) + \sin \delta \sin(90^\circ - \delta_p)] / \cos b,$$

$$\cos \varphi = \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_p - 6^h) / \cos b,$$

где $\alpha_p = 12^h 51^m 26^s 2817$, $\delta_p = 27^\circ 07' 42'' 013$, $\theta = 122.^\circ 932$, $\varphi \in [0; 360)$.

3. Преобразование собственного движения в экваториальных координатах (μ_α, μ_δ) в собственное движение в галактических координатах (μ_l, μ_b) :

$$\mu_l = l(\alpha + \mu_\alpha, \delta + \mu_\delta) - l(\alpha, \delta), \quad \mu_b = b(\alpha + \mu_\alpha, \delta + \mu_\delta) - b(\alpha, \delta).$$

4. Вычисление компоненты скорости в галактических координатах:

$$V_l = kr\mu_l \cos b, \quad V_b = kr\mu_b,$$

где $k = 4.7406$, $r = \frac{1}{\pi}$, где π — параллакс, приведенный в каталоге.

5. Переход к компонентам скорости в декартовых гелиоцентрических координатах:

$$U = (V_r \cos b - V_b \sin b) \cos l - V_l \sin l,$$

$$V = (V_r \cos b - V_b \sin b) \sin l + V_l \cos l,$$

$$W = V_b \cos b + V_r \sin b.$$

6. Переход к галактоцентрической системе координат, связанной с Солнцем:

$$U_g = U + U_\odot, \quad V_g = V + \theta_\odot, \quad W_g = W + W_\odot,$$

где $U_\odot = 10.7 \text{ км с}^{-1}$, $\theta_\odot = 247 \text{ км с}^{-1}$, $W_\odot = 7.7 \text{ км с}^{-1}$ [85].

7. Переход к галактоцентрической системе координат, связанной с объектом:

$$R^2 = R_0^2 + r^2 \cos^2 b - 2R_0r \cos l \cos b, \quad \theta = V_g \cos \beta + U_g \sin \beta,$$

$$\sin \beta = \frac{r \cos b}{R} \sin l, \quad \cos \beta = \frac{R_0 - r \cos b \cos l}{R},$$

где θ — азимутальная скорость объекта, $R_0 = 8.15$ кпк [85].

8. Оценка измерительной дисперсии θ

$$\sigma_\theta^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial \pi} \right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mu_\alpha} \right)^2 \sigma_{\mu_\alpha}^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \mu_\delta} \right)^2 \sigma_{\mu_\delta}^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial V_r} \right)^2 \sigma_{V_r}^2,$$

где значения средних ошибок измерений σ_π , σ_{μ_α} , σ_{μ_δ} , σ_{V_r} взяты из оригинальных каталогов [24, 85, 97].

2.3. Оценка параметров потенциала в экваториальной плоскости

Параметры потенциала $\Phi(R, 0) = \Phi_1(R, 0) + \Phi_2(R, 0) + \Phi_3(R, 0)$, заданного формулами (2.1)–(2.4), оценивались нелинейным методом наименьших квадратов. Невязкой для отдельного объекта служила разность между модельным значением круговой скорости в точке R_i (галактоосевое расстояние данного объекта) — $\theta_C(R_i)$, которое вычислялось как $\theta_C^2 = -R \frac{d\Phi}{dR}$, и азимутальной скоростью θ_i , полученной на 7 шаге, приведенного выше алгоритма. На начальном этапе, на котором не учитывалось значение природной дисперсии, минимизировалась функция

$$L^2 = \sum_{i=1}^N p_i [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2, \quad (2.8)$$

где

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (2.9)$$

есть вес i -го объекта, учитывающий только измерительную неопределенность σ_i скорости θ_i (шаг 8, приведенного выше алгоритма); N — объем рассматриваемой выборки.

Полученные в результате минимизации (2.8) оценки параметров потенциала по трем различным выборкам приведены в табл. 2.1. Так как в некоторых вариантах расчетов в настоящей работе значение параметра β получается предельным — $\beta \rightarrow \infty$ (в таком случае квази-изотермический потенциал переходит в потенциал Шустера–Пламмера), — вместо него оценивался связанный с ним

Таблица 2.1: Результаты моделирования потенциала в плоскости Галактики по выборкам мазеров HMSFRs, SFRs и VERA

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
q	0.690 ± 0.019	0.502 ± 0.039	0.501 ± 0.011
κ_1	0.04478 ± 0.0011	0.105 ± 0.017	0.1098 ± 0.0096
$\Phi_{0,1}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	269.5 ± 9.8	244.7 ± 25.0	307.0 ± 7.9
α	0.1594 ± 0.0029	0.1643 ± 0.018	0.0985 ± 0.0065
$\kappa_2, \text{ КПК}^{-1}$	0.10569 ± 0.00096	0.1090 ± 0.0073	0.1213 ± 0.0069
$\Phi_{0,2}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	326.1 ± 1.5	313.8 ± 9.3	341.4 ± 17.3
$\Phi_{0,3}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	260.4 ± 6.9	205.3 ± 43.6	238.4 ± 40.3
$\kappa_3, \text{ КПК}$	1.29 ± 0.58	1.36 ± 0.38	0.91 ± 0.50
L^2/N_{free}	507	150	1034

параметр $q = \frac{\beta}{\beta + 1} \in [0; 1]$. Сопоставление модельных кривых вращения с наблюдательными данными представлено на рис. 2.3.

В табл. 2.1 приведены значения статистики χ^2 , которая вычислялась как L^2/N_{free} , где $N_{\text{free}} = N - M$ — число степеней свободы, M — число определяемых параметров. Так как данные значения получились много больше единицы (плохое согласие с наблюдательными данными можно визуальнo оценить на рис. 2.3), то это значит, что отклонения азимутальных скоростей θ_i мазеров от модели не могут быть объяснены только ошибками измерений. Для получения более реалистичной модели необходимо учитывать природную дисперсию скоростей.

На втором этапе для оценки значений величины природной дисперсии σ_0 , она вводится как неизвестный параметр в выражение для весовых коэффициентов

$$p_i = (\sigma_i^2 + \sigma_0^2)^{-1}, \quad (2.10)$$

где σ_i — измерительная неопределенность θ_i .

Природной дисперсией в общем случае мы называем наблюдаемую дисперсию аргумента статистического коллектива, очищенную от случайных ошибок измерений аргумента. Природная дисперсия статистического коллектива совпадает с собственно дисперсией статистического коллектива в случае отсутствия ошибок измерений аргумента. Таким образом, природная дисперсия представляет собой объективно существующую отличную от нуля дисперсию аргумента

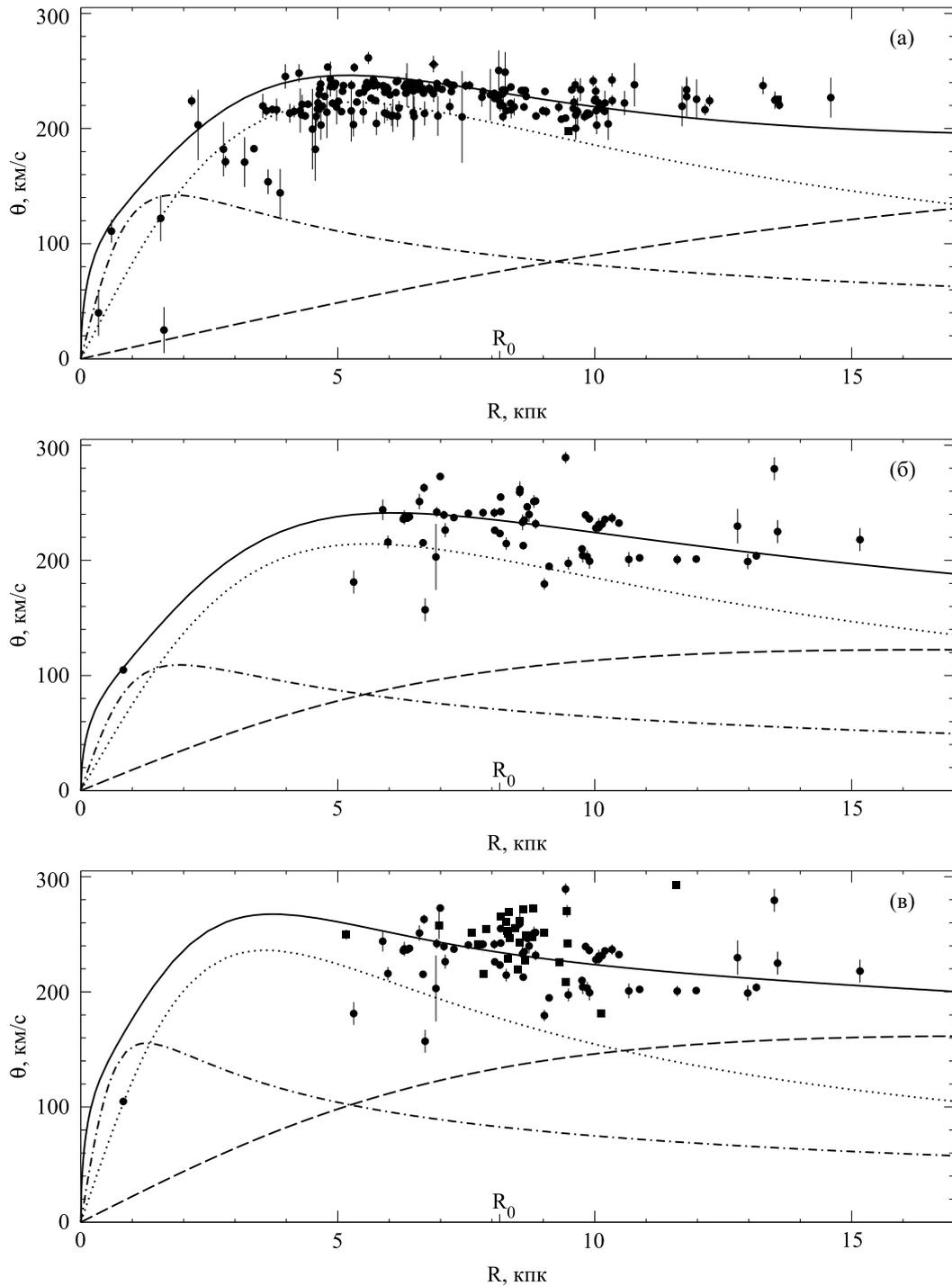


Рис. 2.3: Кривые вращения Галактики для моделей потенциала, аппроксимирующих данные о мазерных источниках. (а) — Решение по выборке HMSFRs; кружки — объекты каталога Рида и др. [85], квадраты — два объекта из каталога Коллаборации VERA и др. [97], ромб — объект из каталога Расторгуева и др. [24]; см. текст. (б) — Решение для выборки SFRs. (в) — Решение для выборки VERA; кружки — SFRs, квадраты — другие типы объектов. Кривые круговой скорости: сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрих-пунктирная линия — центральная компонента. Бары соответствуют измерительным ошибкам азимутальных скоростей мазеров; в некоторых случаях бар меньше размера символа, обозначающего объект.

в условиях наличия случайных ошибок измерений значений аргументов членов статистического коллектива.

В частности, природной дисперсией азимутальных скоростей объектов галактической подсистемы является наблюдаемая дисперсия этих скоростей за вычетом дисперсии измерений величин азимутальных скоростей, обусловленной случайными ошибками параллаксов, лучевых скоростей и собственных движений. При этом средние ошибки измерений считаются заранее известными.

Значение природной дисперсии оценивалось в результате итеративной процедуры, на каждом шаге которой при фиксированных значениях параметров потенциала, полученных на предыдущем шаге, σ_0 оценивалось из уравнения

$$L^2(\sigma_0^2) = N_{\text{free}}. \quad (2.11)$$

При найденном значении σ_0 заново оценивались параметры потенциала, которые использовались на следующем шаге оценки природной дисперсии. Процедура сходилась за два — три шага. В качестве начального приближения брались значения параметров из табл. 2.1.

Для учета кинематической неоднородности полного каталога VERA для SFR-объектов и объектов остальных типов (AGB и RSG) оценивались два различных значения природной дисперсии — $\sigma_{0,1}$ и $\sigma_{0,2}$ соответственно. Тогда весовые коэффициенты для SFR-объектов задавались как $p_{i,1} = (\sigma_i^2 + \sigma_{0,1}^2)^{-1}$, а для объектов остальных типов — $p_{i,2} = (\sigma_i^2 + \sigma_{0,2}^2)^{-1}$.

В случае двух природных дисперсий уравнение (2.11) можно записать так:

$$L^2(\sigma_{0,1}^2, \sigma_{0,2}^2) = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{[\theta_i - \theta_C(R_i)]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{0,1}^2} + \sum_{i=N_1+1}^N \frac{[\theta_i - \theta_C(R_i)]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{0,2}^2} = N_{\text{free}},$$

где первая сумма берется по SFR-объектам, а вторая по объектам других типов (AGB и RSG). При верных дисперсиях в знаменателях двух сумм, вклад каждой из них в общий итог асимптотически равен доле каждой группы объектов в объединенной выборке. Это дает уравнения для определения $\sigma_{0,1}$ и $\sigma_{0,2}$:

$$\sum_{i=1}^{N_1} p_{i,1} [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2 = \frac{N_1}{N} N_{\text{free}}, \quad (2.12)$$

Таблица 2.2: Результаты моделирования потенциала в плоскости Галактики по выборкам мазеров HMSFRs, SFRs и VERA после учета природной дисперсии азимутальных скоростей

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
σ_0 или $\sigma_{0,1}$, км/с	7.64 ± 0.55	23.7 ± 3.2	23.4 ± 2.5
$\sigma_{0,2}$, км/с			26.0 ± 2.8
q	$1_{-0.048}$	0.539 ± 0.049	0.591 ± 0.040
κ_1	0.0419 ± 0.0015	0.106 ± 0.016	0.105 ± 0.011
$\Phi_{0,1}$, км ² /с ²	265.0 ± 17.2	282.5 ± 33.9	264.5 ± 25.6
α	0.1933 ± 0.0074	0.204 ± 0.055	0.203 ± 0.040
κ_2 , КПК ⁻¹	0.1006 ± 0.0057	0.105 ± 0.016	0.107 ± 0.016
$\Phi_{0,2}$, км ² /с ²	304.2 ± 3.1	288.6 ± 13.4	392.9 ± 11.7
$\Phi_{0,3}$, км ² /с ²	216.5 ± 13.4	174.8 ± 63.6	205.1 ± 50.0
κ_3 , КПК	1.20 ± 0.28	1.11 ± 0.66	1.3 ± 0.76

$$\sum_{i=N_1+1}^N p_{i,2} [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2 = \frac{N_2}{N} N_{\text{free}}, \quad (2.13)$$

где N_1 и N_2 — количество мазеров SFRs и мазеров других типов соответственно, $N = N_1 + N_2$; для полной выборки $N_1 = 64$, $N_2 = 31$, $N = 95$. Величины $\sigma_{0,1}$ и $\sigma_{0,2}$ находились в результате итеративной процедуры, аналогичной описанной выше.

Значения параметров потенциала, полученные на втором этапе, представлены в табл. 2.2. Рис. 2.4 отображает сравнение модельной кривой вращения с наблюдательными данными. Можно заметить, что согласие с данными существенно улучшилось.

В пользу введения двух различных природных дисперсий говорит работа нашей группы [7], в которой использовались объекты в областях образования звезд высокой массы (по каталогам Расторгуева и др. [24] и Рида и др. [84]) и объекты других типов. Рассматривались две подвыборки: области образования звезд высокой массы (HMSFRs) и объекты других типов (не-HMSFRs). Как показано в [79], измерительная неопределенность параллаксов у мазеров не-HMSFRs в среднем заметно выше, чем у мазеров HMSFRs. Кроме того, в отличие от источников HMSFRs, принадлежащих одному и тому же классу объектов, мазеры не-HMSFRs относятся к 14 различным классам, что позволяет предполагать кинематическую неоднородность.

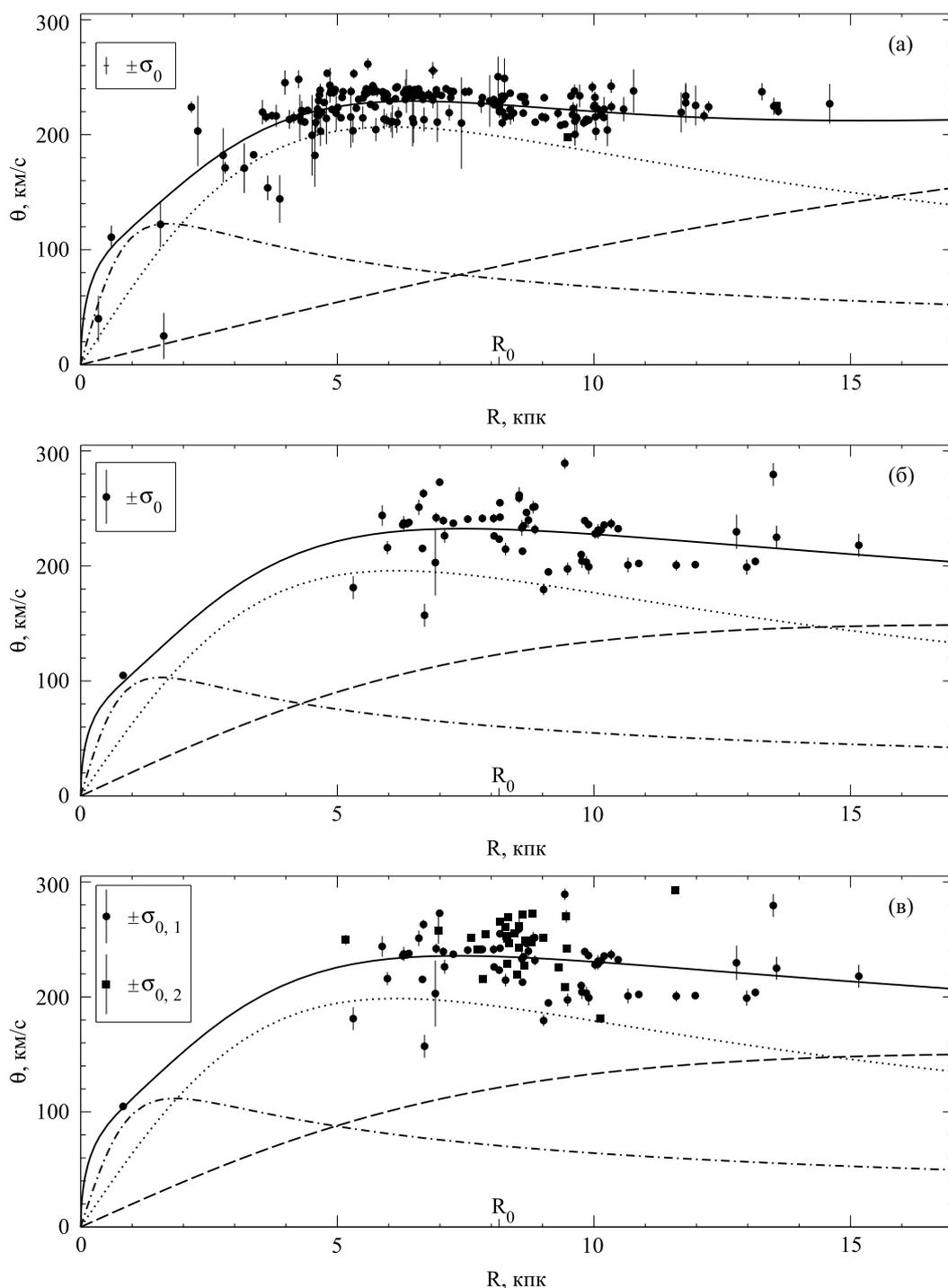


Рис. 2.4: То же, что и на рис. 2.3 с учетом природной дисперсии азимутальных скоростей. Бары в левом верхнем углу отображают найденные величины природных дисперсий.

Природные дисперсии для этих двух случаев отличались почти в 3 раза. Значение природной дисперсии, полученной по объединенной выборке, в полтора раза превышало значение, полученное по массивным объектам. Все это говорит о кинематической неоднородности рассматриваемых выборок. Введение двух природных дисперсий привело к решению без существенных смещений

Таблица 2.3: Списки исключенных из обработки объектов в порядке их отбрасывания при окончательной оценке модельных параметров ($K' = 1$). Критические значения k и $k_{0.05}$ указаны для финальных объемов выборок

Объект	$\frac{ \theta_i - \theta_C(R_i) }{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_{0,i}^2}}$
HMSFRs	
($k = 2.79, k_{0.05} = 3.65$)	
G002.70+00.04	3.55
IRAS 21379+5106	4.29
G009.62+00.19	4.59
G012.02-00.03	3.43
SFRs	
($k = 2.37, k_{0.05} = 3.32$)	
G037.50+00.53	2.66
Sgr B2	—
VERA	
($k = 2.52, k_{0.05} = 3.44$)	
G037.50+00.53	2.65
Sgr B2	—
NSV 17351	2.69

оценок параметров по сравнению с результатом по однородной группе HMSFRs, при этом в целом с меньшими статистическими ошибками параметров.

Несмотря на существенно меньшие различия значений $\sigma_{0,1}$ и $\sigma_{0,2}$, полученные для рассматриваемых в данной работе объектов, для получения более реалистичной модели кажется необходимым оценивать различные природные дисперсии для разных типов объектов.

Стоит отметить существенное (в несколько раз) различие природных дисперсий для групп объектов, полученных по каталогу Рида и др. [85] и VERA и др. [97], что говорит о неоднородности последнего даже в рамках подвыборки объектов одного типа.

Анализ невязок полученных решений показал, что даже после учета природной дисперсии остаются объекты, которые сильно смещают решение (выбросы). Для исключения объектов на третьем этапе применялся следующий алгоритм

[78]. Выявлялись объекты, для которых

$$\frac{|\theta_i - \theta_C(R_i)|}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_0^2}} > k, \quad (2.14)$$

где значение k определяется из уравнения

$$[1 - \psi(k)] N_{\text{free}} = 1,$$

$\psi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ — интеграл вероятностей, а σ_0 — соответствующая природная дисперсия, то есть σ_0 , $\sigma_{0,1}$ или $\sigma_{0,2}$. Далее из K объектов, удовлетворяющих условию (2.14), исключались $K - K'$ объектов, где $K' = 3$ на стадии определения σ_0 , $\sigma_{0,1}$, $\sigma_{0,2}$ или $K' = 1$ при окончательном оценивании модельных параметров с найденными (фиксированными) значениями природных дисперсий. Если среди оставшихся объектов встречаются такие, у которых невязка по модулю превосходит значение $k_{0.05}$, то есть корень уравнения

$$[1 - \psi(k_{0.05})] N_{\text{free}} = 0.05,$$

то эти объекты также исключались.

На каждой итерации заново решались задачи определения параметров потенциала, значений природной дисперсии и исключения выбросов до тех пор, пока на одной из итераций ни один объект не будет исключен.

При рассмотрении выборки SFRs и объединенной выборки каталога VERA и др. [97] принудительно был отброшен объект Sgr B2. Это единственный объект в этих выборках, который находится в центральной части Галактики. Оценка параметров потенциала центральной компонентны по одному объекту заведомо неправдоподобна. Поэтому при работе с данными выборками значения параметров $\Phi_{0,3}$ и κ_3 принимались равными тем, что были получены в результате оценки по выборке HMSFRs.

Список исключенных объектов для различных выборок представлен в табл. 2.3. Значения параметров потенциала в табл. 2.4, а кривые вращения на рис. 2.5.

Из-за ненулевой дисперсии скоростей мазеров модельные кривые на рис. 2.5 описывают зависимость от R , строго говоря, не круговой скорости, а средней

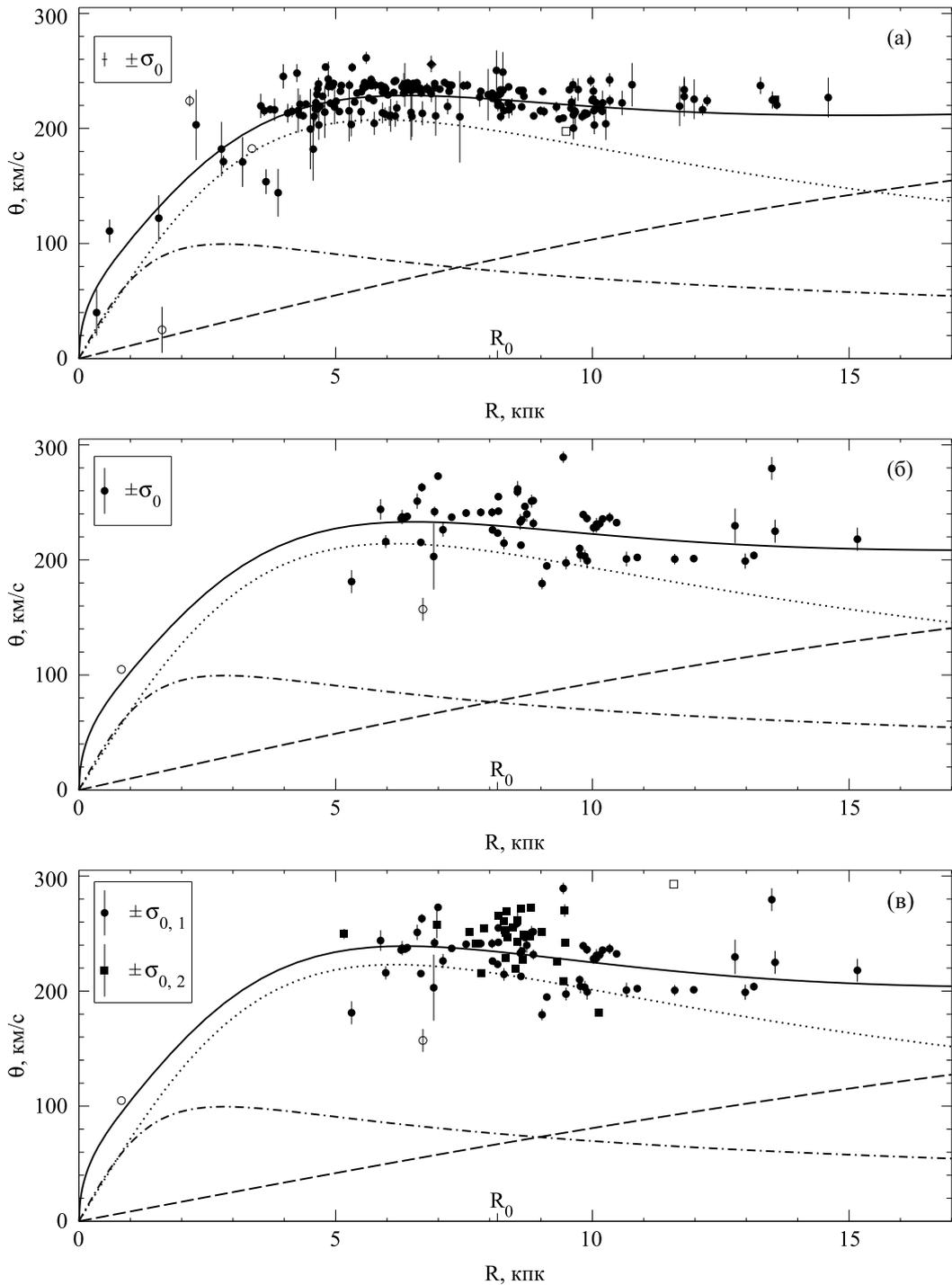


Рис. 2.5: То же, что и на рис. 2.4 после исключения объектов с избыточными невязками. Светлые символы обозначают исключенные объекты.

азимутальной. Для трех выборок мазеров был оценен асимметричный сдвиг $\Delta\theta_{\text{ad}} = v_{\odot} - [\theta_{\odot} - \theta_C(R_0)]$ при $v_{\odot} = 11.0 \pm 2$ км/с [42], $\theta_{\odot} = 247 \pm 4$ км/с [85]. На четвертом этапе данные каждой из выборок были скорректированы на полученный для нее асимметричный сдвиг: $\theta_{i,\text{corr}} = \theta_i - \Delta\theta_{\text{ad}}$. Далее заново оценивались параметры потенциала при прежних значениях природной дисперсии, взятых из табл. 2.4. В табл. 2.5 приведены финальные значения, которые будут

Таблица 2.4: Результаты моделирования потенциала в плоскости Галактики по выборкам мазеров HMSFRs, SFRs и VERA с учетом природной дисперсии азимутальных скоростей и после исключения выбросов

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
σ_0 или $\sigma_{0,1}$, км/с	6.11 ± 0.44	19.9 ± 2.7	19.6 ± 2.2
$\sigma_{0,2}$, км/с			22.8 ± 2.5
q	$1_{-0.051}$	0.86 ± 0.19	$1_{-0.20}$
κ_1	0.0429 ± 0.0009	0.0379 ± 0.0044	0.0309 ± 0.0040
$\Phi_{0,1}$, км ² /с ²	263.5 ± 12.8	285 ± 62.1	274 ± 59
α	0.1826 ± 0.0088	0.205 ± 0.042	0.209 ± 0.034
κ_2 , кПК ⁻¹	0.1093 ± 0.0031	0.1049 ± 0.0095	0.1043 ± 0.0080
$\Phi_{0,2}$, км ² /с ²	304.8 ± 1.7	315.5 ± 13.8	328.6 ± 12.0
$\Phi_{0,3}$, км ² /с ²	226.9 ± 10.3	(226.9)	(226.9)
κ_3 , кПК	2.01 ± 0.30	(2.01)	(2.01)

использоваться в дальнейшей работе.

Кривые круговой скорости в сравнении с кривыми средней скорости вращения, полученными на предыдущем этапе, представлены на рис. 2.6а–2.6в. На рис. 2.6г представлено сравнение скорректированных кривых круговой скорости для различных выборок. Можно сказать, что эти кривые практически совпали на $R < 12$ кПК.

2.4. Матрицы корреляций и оценки средней ошибки круговой скорости

При решении задачи разложения кривой вращения Галактики на компоненты часто возникает неединственность полученных результатов. Необходимо вводить некоторые внешние предположения, например об отношении массы компонент, для получения решения. С целью установления корректности полученного решения были построены матрицы корреляций параметров потенциала. Для этого сначала строится матрица кривизны A , где ее элементы определяются как

$$A_{k,l} = \sum_{i=1}^N p_i \frac{\partial \theta_C(R_i)}{\partial x_k} \frac{\partial \theta_C(R_i)}{\partial x_l},$$

Таблица 2.5: Параметры моделей потенциала в плоскости Галактики, скорректированных за асимметричный сдвиг $\Delta\theta_{\text{ад}}$

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
$\Delta\theta_{\text{ад}}, \text{ км/с}$	-7.1 ± 0.3	-2.6 ± 1.7	-0.1 ± 2.0
q	$1_{-0.045}$	$1_{-0.17}$	$1_{-0.20}$
κ_1	0.0432 ± 0.0010	0.0352 ± 0.0036	0.0333 ± 0.0034
$\Phi_{0,1}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	266.3 ± 12.6	284.3 ± 46	262.0 ± 53
α	0.1925 ± 0.0069	0.204 ± 0.039	0.208 ± 0.033
$\kappa_2, \text{ КПК}^{-1}$	0.1020 ± 0.0036	0.103 ± 0.010	0.1011 ± 0.0083
$\Phi_{0,2}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	313.2 ± 2.1	318.0 ± 11.0	326.0 ± 11.1
$\Phi_{0,3}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	231.0 ± 9.7	(231.0)	(231.0)
$\kappa_3, \text{ КПК}$	1.40 ± 0.35	(1.40)	(1.40)

где, как и раньше, $\theta_C(R_i)$ — модельное значение круговой скорости в точке R_i , p_i — весовые коэффициенты вида (2.10), N — количество объектов в выборке, $\mathbf{x} = (\Phi_{0,1}, q, \kappa_1, \Phi_{0,2}, \alpha, \kappa_2, \Phi_{0,3}, \kappa_3)$ — вектор параметров.

Обращение матрицы кривизны дает оценку матрицы ковариаций стандартных ошибок для найденных параметров \mathbf{x}

$$C = A^{-1}.$$

Тогда стандартные ошибки оценок параметров можно найти по диагональным элементам матрицы ковариаций

$$\sigma_{x_k} = \sqrt{C_{kk}}.$$

В общем случае элемент матрицы C есть ковариация параметров x_k и x_l

$$c_{kl} = \text{cov}(x_k, x_l) = r_{kl}\sigma_{x_k}\sigma_{x_l},$$

где r_{kl} — коэффициент линейной корреляции для параметров x_k и x_l . В табл. 2.6–2.8 приведены значения коэффициентов корреляций для оценок параметров потенциала после учета асимметричного сдвига (см. табл. 2.5) для различных выборок данных. Можно заметить, что полного вырождения параметров не наблюдается. Это говорит о том, что удалось разложить кривую вращения по компонентам Галактики. Однако присутствует сильная корреляция параметров

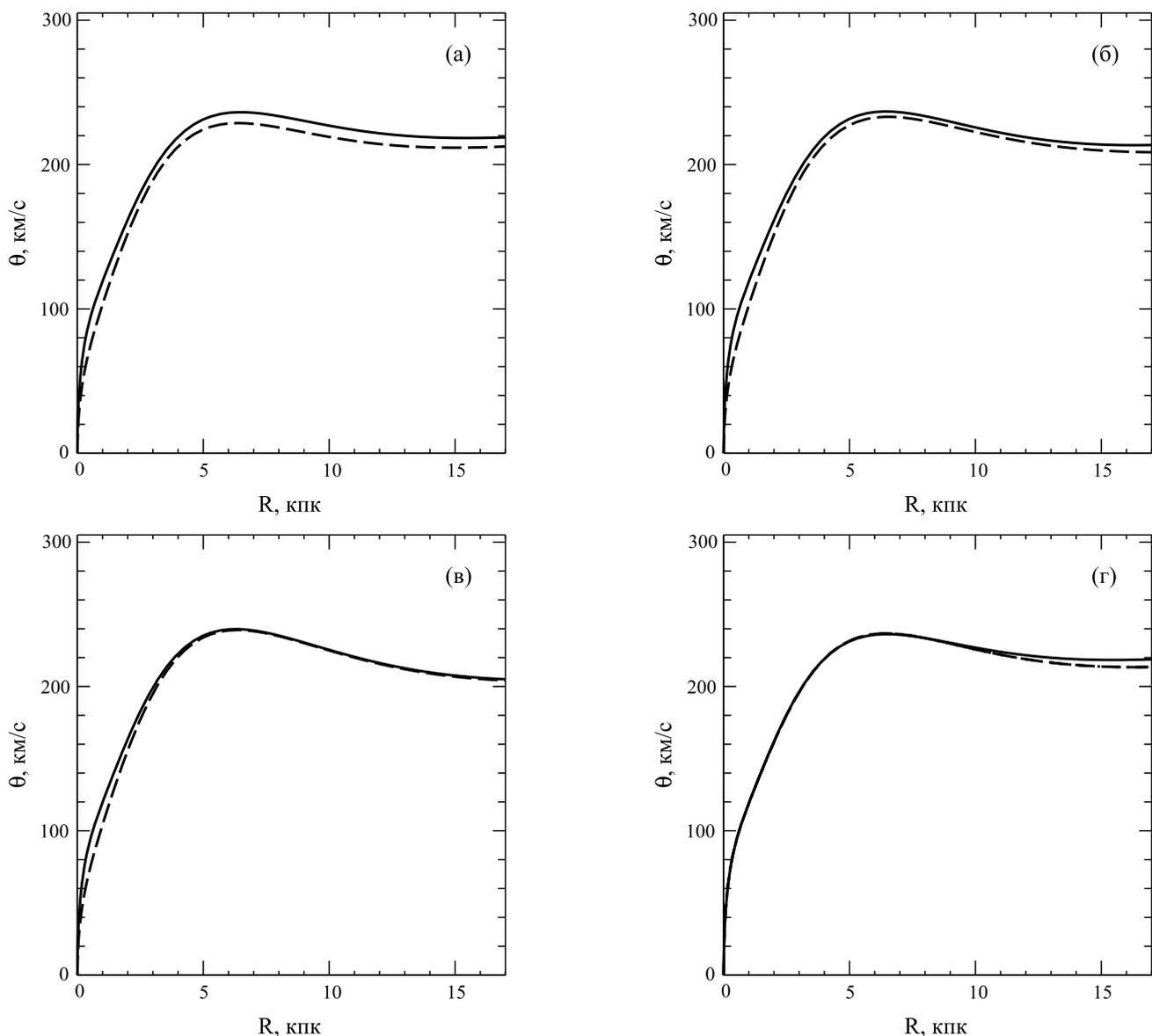


Рис. 2.6: (а)–(в) — Сравнение кривой круговой скорости (сплошная линия), полученной после коррекции за асимметричный сдвиг, с кривой средней скорости вращения (пунктирная линия) для выборок HMSFRs (а), SFRs (б) и VERA (в) соответственно. (г) — Сравнение трех кривых круговой скорости для выборок HMSFRs (сплошная линия), SFRs (пунктирная линия) и VERA (штрихпунктирная линия). Последние две кривые практически совпадают.

$\Phi_{0,1}$ и κ_1 , а также α и κ_2 . Последняя зависимость была также подтверждена аналитическим путем. Кроме того, для выборок HMSFRs и VERA наблюдается корреляция между параметрами $\Phi_{0,1}$ и q .

Приведем аналитическое доказательство корреляции между параметрами α и κ_2 . Рассмотрим обобщенно-изохронный потенциал (2.3), в котором фиксиро-

ван параметр $\Phi_{0,2}$ и исследуем выражение

$$\frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 R^2}}.$$

При $\kappa_2^2 R^2 \ll 1$, если R фиксировано, имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1 + 1 + \frac{1}{2}\kappa_2^2 R^2} = \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{2}\kappa_2^2 R^2} = C = \text{const}.$$

Тогда

$$\alpha = C\alpha + \frac{C}{2}\kappa_2^2 R^2$$

или

$$\kappa_2 = \sqrt{\frac{2(1-C)\sqrt{\alpha}}{C}} \frac{\sqrt{\alpha}}{R}. \quad (2.15)$$

При $\kappa_2^2 R^2 \gg 1$ имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha - 1 + \kappa_2 R} = C_1 = \text{const}.$$

Тогда

$$\alpha = C_1(\alpha - 1) + C_1\kappa_2 R$$

или

$$\kappa_2 = \frac{\alpha(1 - C_1) + C_1}{C_1 R}. \quad (2.16)$$

Получаем, что при фиксированном R

$$\kappa_2 \sim \begin{cases} \sqrt{\alpha} & R^2\kappa^2 \ll 1; \\ \alpha + \text{const} & R^2\kappa^2 \gg 1. \end{cases}$$

Критическое значение параметра κ_2 можно вычислить из равенства $R^2\kappa_2^2 = 1$. Тогда в окрестности Солнца оно равно $\kappa_2 \approx 1/R_0 \approx 0.1227$. Так как значения κ_2 получились близкими к критическому (см., например, табл. 2.5), то, вероятно, поэтому в задаче нет полного вырождения этих параметров.

Зная матрицу ковариаций C , можно оценить среднюю ошибку прогноза $\sigma_{\theta_C(R)}$, под которой понимается средняя ошибка значения модели $\theta_C(R, \mathbf{x})$ с учетом неопределенности оценки случайного вектора \mathbf{x} . Для этой оценки и ее

Таблица 2.6: Матрица значений коэффициентов корреляций для выборки HMSFRs

	$\Phi_{0,1}$	q	κ_1	$\Phi_{0,2}$	α	κ_2	$\Phi_{0,3}$	κ_3
$\Phi_{0,1}$	1	-0.98	0.97	-0.38	0.03	0.16	0.21	-0.05
q	-0.98	1	-0.08	0.36	0.52	-0.77	-0.1	0.01
κ_1	0.97	-0.08	1	0.43	0.11	0.13	-0.12	-0.08
$\Phi_{0,2}$	-0.38	0.36	0.43	1	-0.43	-0.51	0.67	-0.2
α	0.03	0.52	0.11	-0.43	1	0.96	-0.11	0.12
κ_2	0.16	-0.77	0.13	-0.51	0.96	1	-0.09	-0.1
$\Phi_{0,3}$	0.21	-0.1	-0.12	0.67	-0.11	-0.09	1	0.13
κ_3	0.05	0.01	-0.08	-0.2	0.12	-0.1	0.13	1

Таблица 2.7: Матрица значений коэффициентов корреляций для выборки SFR

	$\Phi_{0,1}$	q	κ_1	$\Phi_{0,2}$	α	κ_2
$\Phi_{0,1}$	1	-0.76	0.9	-0.11	0.4	0.08
q	-0.76	1	-0.33	0.16	0.58	-0.11
κ_1	0.9	-0.33	1	0.18	0.7	0.13
$\Phi_{0,2}$	-0.11	0.16	0.18	1	-0.63	-0.37
α	0.4	0.58	0.7	-0.63	1	0.98
κ_2	0.08	-0.11	0.13	-0.37	0.98	1

Таблица 2.8: Матрица значений коэффициентов корреляций для выборки VERA

	$\Phi_{0,1}$	q	κ_1	$\Phi_{0,2}$	α	κ_2
$\Phi_{0,1}$	1	-0.91	0.94	-0.35	0.27	0.29
q	-0.91	1	-0.27	0.20	0.58	-0.27
κ_1	0.94	-0.27	1	0.33	0.74	0.29
$\Phi_{0,2}$	-0.35	0.2	0.33	1	-0.59	-0.41
α	0.27	0.58	0.74	-0.59	1	0.97
κ_2	0.29	-0.27	0.29	-0.41	0.97	1

матрицы ковариаций C средняя ошибка прогноза находится по формуле

$$\sigma_{\theta_C(R)}^2 = \text{grad}[\theta_C(R, \mathbf{x})]^T C \text{grad}[\theta_C(R, \mathbf{x})] =$$

Таблица 2.9: Значения средних ошибок $\sigma_{\theta_C(R)}$ (в км/с) для различных расстояний R

R, кпк	HMSFRs	SFR	VERA
1	0.05	0.08	0.05
2	0.05	0.15	0.09
3	0.08	0.18	0.10
4	0.09	0.47	0.25
5	0.14	0.58	0.50
6	0.16	1.00	0.83
7	0.20	1.34	1.14
8	0.24	1.64	1.84
9	0.27	2.45	2.53
10	0.30	2.97	3.10
11	0.32	3.41	3.56
12	0.34	3.86	4.20
13	0.35	4.28	4.42
14	0.37	4.67	4.65
15	0.38	5.03	5.00

$$= \left(\frac{\partial \theta_C(R, \mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \theta_C(R, \mathbf{x})}{\partial x_8} \right)^T C \left(\frac{\partial \theta_C(R, \mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \theta_C(R, \mathbf{x})}{\partial x_8} \right).$$

Вообще говоря, среднюю ошибку прогноза можно находить в любой точке R . Справочно такие ошибки для различных $R \in [1; 15]$ и различных выборок приведены в табл. 2.9. Однако особый интерес представляют оценки вычисленные в окрестности Солнца ($R_0 = 8.15$ кпк); они составили $\sigma_{\theta_C(R_0)} = 0.25$ км/с для выборки HMSFRs, $\sigma_{\theta_C(R_0)} = 1.67$ км/с для SFR, $\sigma_{\theta_C(R_0)} = 1.95$ км/с для выборки VERA.

Подобные ошибки также определялись методом статистического моделирования Монте–Карло с использованием 100 независимых реализаций оценки с нулевым математическим ожиданием и заданным среднеквадратичным отклонением. Однако оценки оказались несколько завышенными: $\sigma_{\theta_C(R_0)} = 0.6$ км/с для выборки HMSFRs, $\sigma_{\theta_C(R_0)} = 2.9$ км/с для SFR, $\sigma_{\theta_C(R_0)} = 3.2$ км/с для выборки VERA.

2.5. Оценка параметра z_0

Определение еще одного параметра штеккелевского потенциала — z_0 — невозможно осуществить указанными выше способами, так как он не входит в выражения для потенциала в экваториальной плоскости. Данный параметр характеризует степень концентрации массы к центру системы, определяя в том числе крупномасштабную структуру модели [27]. Для его оценки использовалась формула (1.20), которая получается простым выражением параметра z_0 из условия (1.15), которое является необходимым ограничением, накладываемым на потенциал третьим квадратичным интегралом движения. Однако необходим потенциал, явно учитывающий данные о вертикальном распределении. В связи с чем модель (2.1)–(2.4), определенная только в экваториальной плоскости, не подходит. Исследовались несколько потенциалов

А. Потенциал Гарднера и др. [62]

$$\Phi = \frac{1}{2}V_h^2 \ln(r^2 + r_0^2) - \frac{GM_{c_1}}{\sqrt{r^2 + r_{c_1}^2}} - \frac{GM_{c_2}}{\sqrt{r^2 + r_{c_2}^2}} + \\ + \sum_{i=1}^3 \frac{-GM_{d_i}}{\sqrt{R^2 + (a_{d_i} + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} + \sum_{n=1}^3 \frac{-GM_{g_n}}{\sqrt{R^2 + (a_{d_n} + \sqrt{z^2 + b_g^2})^2}}$$

Б. Потенциал Фелльхауэра и др. [61]

$$\Phi = \frac{V_0^2}{2} \ln(R^2 + z^2 q_\Phi^{-2} + d^2) + \frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + (b + \sqrt{z^2 + c^2})^2}} + \frac{GM_b}{r + a}$$

В. Потенциал Иргэнга и др. [69]

$$\Phi = -\frac{M_h}{a_h} \ln\left(\frac{\sqrt{r^2 + a_h^2} + a_h}{r}\right) - \frac{M_b}{\sqrt{r^2 + b_b^2}} - \frac{M_d}{\sqrt{r^2 + (a_d + \sqrt{z^2 + b_d^2})^2}}$$

Г. Потенциал Аллан—Сантьяна [31]

$$\Phi = -\frac{M_1}{\sqrt{R^2 + z^2 + b_1^2}} - \frac{M_2}{\sqrt{R^2 + \left(a_2 + \sqrt{z^2 + b_2^2}\right)^2}} - \frac{M_3 (r/a_3)^{2.02}}{\left(1 + (r/a_3)^{1.02}\right) \cdot r} - \frac{M_3}{1.02a_3} \cdot \left(-\frac{1.02}{1 + (r/a_3)^{1.02}} + \ln \left(1 + (r/a_3)^{1.02}\right) \right)$$

При дальнейшей работе все значения параметров потенциалов определялись из оригинальных работ. Здесь G — гравитационная постоянная, $r^2 = R^2 + z^2$ — сферический радиус.

Так как третий квадратичный интеграл следует рассматривать скорее как квази-интеграл (остается приблизительно постоянным в пределах большой области), то и z_0 следует рассматривать как величину, слабо меняющуюся с изменением R . Так как постоянство z_0 является необходимым для постоянства I_3 , то среди рассматриваемых потенциалов А—Г выбирался тот, который давал бы наименьшие вариации z_0 с изменением R . Для потенциала Гарднера и др. [62] значение z_0 хорошо сохраняется, по крайней мере, при $R \in [2; 9]$. Другие же потенциалы давали постоянный рост z_0 в окрестности Солнца, в связи с чем даже на малых промежутках заметна значительная разница в значениях.

Для потенциала Гарднера и др. было оценено значение параметра z_0 в окрестности Солнца при $R = R_0 = 8.15$ кпк, которое составило $z_0 = 5.3$ кпк и которое и будет использоваться при дальнейшей работе в этой главе в предположении его постоянства во всей рассматриваемой области. Полученное значение согласуется с теми, что приведены в табл. 1.2. Стоит отметить, что таким же образом параметр z_0 оценивался в работах Эйнасто и Рюммеля [29] и Осипкова [22]. По сравнению с этими моделями потенциал Гарднера и др. также давал лучшее сохранение параметра z_0 . Для справки в табл. 2.10 приведены значения параметра z_0 при $R = R_0 = 8.15$ кпк для всех рассматриваемых моделей А—Г.

2.6. Построение и исследование эквиденсит

На основе построенных штеккелевских моделей довольно просто можно получить аналитическое выражение для пространственной плотности, пользуясь формулой (1.10). На его основе можно получать и наглядно изучать некоторые

Таблица 2.10: Значения параметра z_0 для исследованных выражений потенциала $A - \Gamma$ в окрестности Солнца $R = 8.15$ кпк

Потенциал	z_0
Гарднер и др. [62]	5.3 кпк
Фелльхауэр и др. [61]	8.8 кпк
Иргэнг и др. [69]	2.2 кпк
Аллан—Сантьян [31]	7.9 кпк

динамические характеристики рассматриваемой модели. В силу громоздкости указанного выше выражения, на практике ряд задач представляется нерешаемым. Например, получение фазовой плотности путем решения интегрального уравнения (1.11). Однако существует способ разложения фазовой плотности в ряды Фрикке [59]. Зная аналитическое выражение для пространственной плотности, с использованием численных алгоритмов можно получить некоторую аппроксимацию фазовой плотности. Не будем здесь подробно останавливаться на этом, отметив лишь еще одно перспективное направление исследований для штеккелевских моделей.

Получаемые результаты для пространственной плотности удобно представлять графически в виде эквиденсит (кривых равной плотности). Такие кривые рассматриваемых моделей для значения плотности $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ различных компонент и всей Галактики представлены на рис. 2.7. На рис. 2.8 же представлены эквиденситы для различных значений плотности.

Стоит заметить, что полученные эквиденситы получились мало правдоподобными в вертикальном распределении плотности. Так по звездным подсчетам сжатие внутреннего гало Галактики составляет 0.65 ± 0.05 , внешнего — 0.8 ± 0.1 [42]; в моделях гало часто принимается сферическим. Сжатие модельного гало 0.24 на рис. 2.7 противоречит этим данным. Центральная компонента, если говорить о классическом балдже, также предполагается сферической. Если представлять ею галактический бар, то отношение осей должно быть ~ 0.35 [42]. Полученные балджи моделей с отношением осей 0.27 на рис. 2.7 являются избыточно сжатыми. Неправдоподобным представляется и вертикальное распределение пространственной плотности дисков, полутолщина которых составляет от 300 ± 50 пк [42] для тонкого диска до 900 ± 180 пк для толстого. Модельный диск получился толще этих значений.

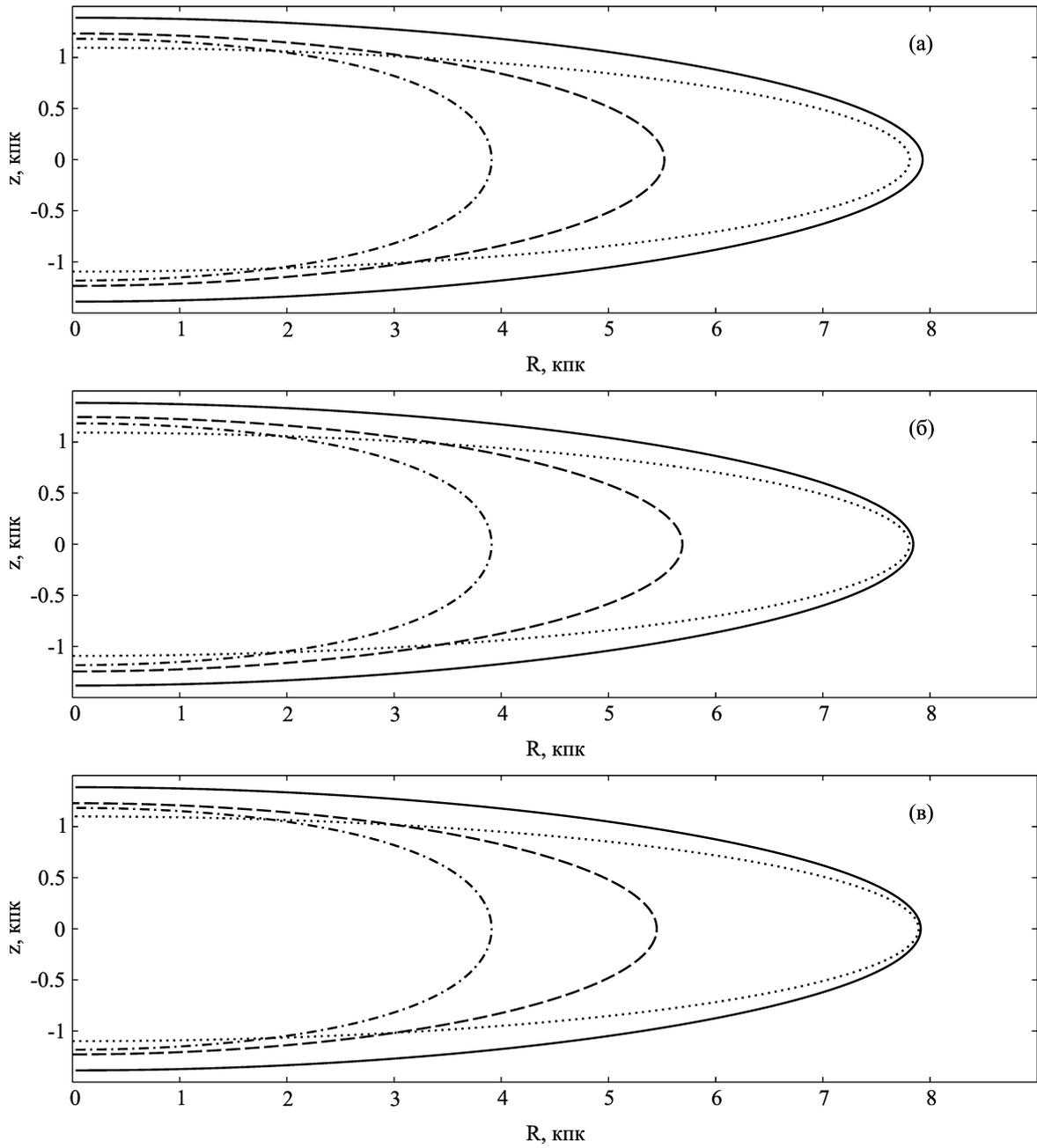


Рис. 2.7: Эквиденситы (кривые равной плотности) $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ для моделей, полученных штеккелевским обобщением исходных потенциалов в экваториальной плоскости (табл. 2.5) по выборкам HMSFRs (а), SFRs (б) и VERA (в). Сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрих-пунктирная линия — центральная компонента.

Стоит отметить, что эквиденситы дисков, приведенные в работах Фамаэ и Дейонге [60], Бинни и Вона [41] также далеки от реалистичных. Вышесказанное говорит о необходимости разработки некоторого аппарата позволяющего регулировать сплюснутость компонент штеккелевских моделей. Решение данной проблемы будет предложено в следующей главе.

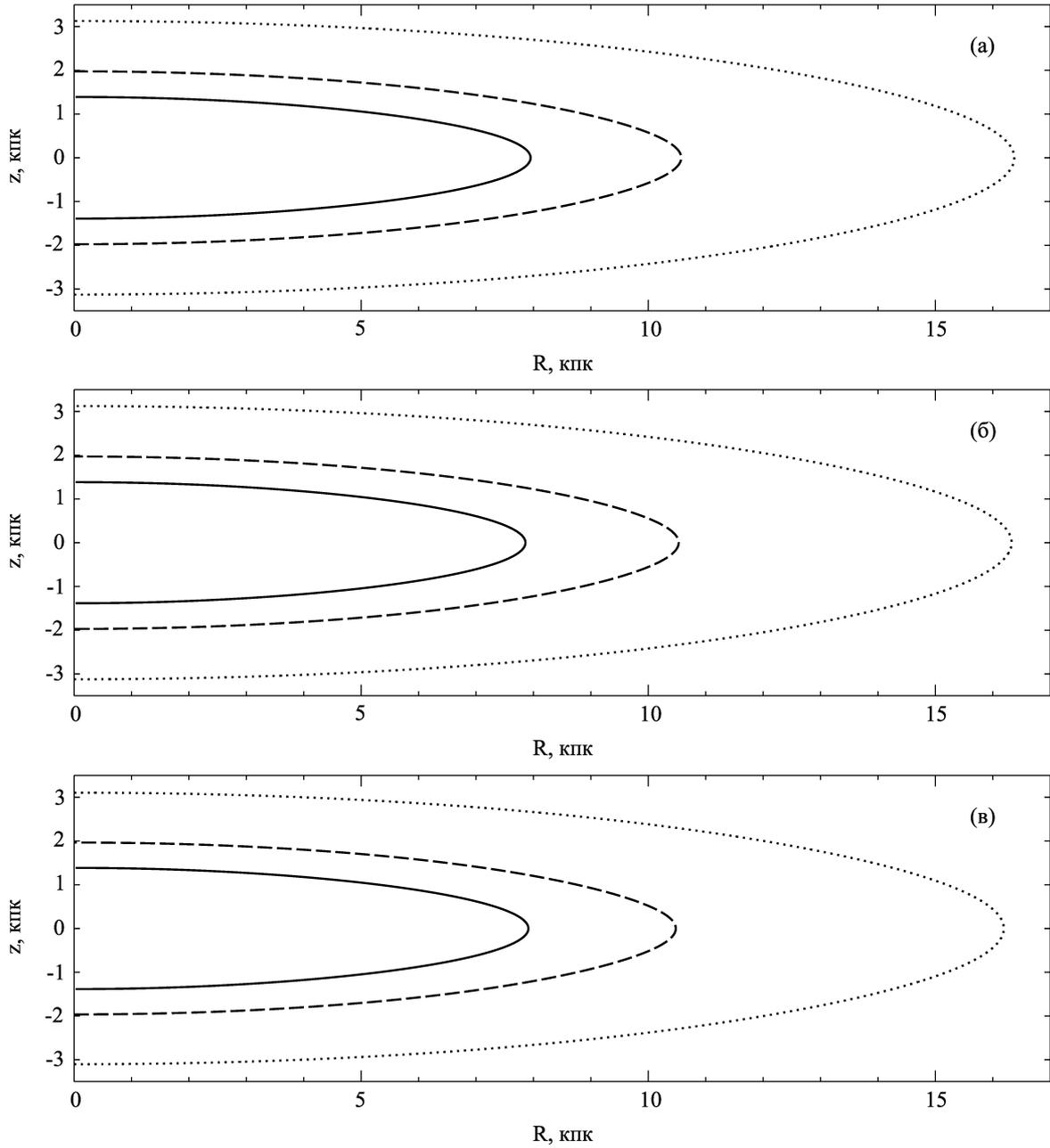


Рис. 2.8: Эквиденситы для различных значений плотности ρ по выборкам HMSFRs (а), SFRs (б) и VERA (в). Сплошная линия — $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ (соответствуют кривым на рис. 2.7), штриховая линия — $\rho = 0.01 M_{\odot}/\text{пк}^3$; пунктирная линия — $\rho = 0.001 M_{\odot}/\text{пк}^3$.

Интересно сравнить некоторые модельные динамические характеристики со значениями, приведенными в других работах. Так в табл. 2.11 представлены значения пространственной плотности в окрестности Солнца ($R = R_0 = 8.15$ кпк) для всей модели и различных ее компонент. Полученное значение хорошо согласуется с современными оценками $\rho_{\odot} = 0.08\text{--}0.11 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ [18], $\rho_{\odot} = 0.097 \pm 0.013 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ [42].

В табл. 2.12 приведены значения модельной величины массы в шаре радиусом 20 кпк (что соответствует области, покрываемой кинематическими данными), 50 кпк, а также на большом удалении от центра в 200 кпк, которые вычислялись по формуле

$$M(r) = r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr}.$$

Сравнивая последние с величинами в других работах (например, Дисон и др. [46] нашли $M_{50} = (0.42 \pm 0.04) \times 10^{12} M_{\odot}$, а Вильямс и Эванс [100] — $M_{50} = (0.45 \pm 0.15) \times 10^{12} M_{\odot}$), можно наблюдать некоторое завышение массы, что, вероятно, связано с неучетом вертикального распределения.

Таблица 2.11: Значения пространственной плотности ρ в $M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ в окрестности Солнца $R = 8.15$ кпк для всей Галактики и отдельных ее компонент

Компонента	HMSFRs	SFRs	VERA
Общая	0.098	0.097	0.098
Гало	0.003	0.003	0.003
Диск	0.095	0.094	0.094
Центральная	0.0005	0.0005	0.0005

2.7. Выводы

Отметим основные результаты проделанной в данной главе работы

1. В данной главе был разработан алгоритм построения моделей звездных систем методом штеккелевского обобщения. На первом этапе оцениваются параметры заданного в экваториальной плоскости потенциала путем оптимизации кривой круговой скорости по наблюдательным значениям азимутальных скоростей. Разработанный алгоритм включает в себя возможность учета природной дисперсии, исключения объектов с избыточными невязками (выбросов), а также корректировки решения за ассиметричный сдвиг. В алгоритм была добавлена возможность учета различных значений природной дисперсии для выборок, содержащих объекты разных классов, с целью установления их кинематической неоднородности. На втором этапе заданный в экваториальной плоскости потенциал с помощью формулы (1.6) обобщается штеккелевским образом на все пространство.

Таблица 2.12: Значения массы в M_{\odot} в шаре радиусом R_s для всей Галактики и отдельных ее компонент

	HMSFRs	SFRs	VERA
$R_s = 20$ кпк			
Общая	$1.7 \cdot 10^{11}$	$1.6 \cdot 10^{11}$	$1.4 \cdot 10^{11}$
Гало	$1.2 \cdot 10^{11}$	$1.1 \cdot 10^{11}$	$8.8 \cdot 10^{10}$
Диск	$3.6 \cdot 10^{10}$	$3.8 \cdot 10^{10}$	$4.2 \cdot 10^{10}$
Центральная	$1.1 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$
$R_s = 50$ кпк			
Общая	$6.6 \cdot 10^{11}$	$7.0 \cdot 10^{11}$	$5.9 \cdot 10^{11}$
Гало	$6.0 \cdot 10^{11}$	$6.3 \cdot 10^{11}$	$5.2 \cdot 10^{11}$
Диск	$5.2 \cdot 10^{10}$	$5.5 \cdot 10^{10}$	$5.8 \cdot 10^{10}$
Центральная	$1.1 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$
$R_s = 200$ кпк			
Общая	$2.9 \cdot 10^{12}$	$3.3 \cdot 10^{12}$	$2.8 \cdot 10^{12}$
Гало	$2.9 \cdot 10^{12}$	$3.3 \cdot 10^{12}$	$2.8 \cdot 10^{12}$
Диск	$6.1 \cdot 10^{10}$	$6.5 \cdot 10^{10}$	$6.9 \cdot 10^{10}$
Центральная	$1.1 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{10}$

2. Разработанный алгоритм был успешно реализован при построении трехкомпонентной (гало, диск, центральная компонента) штеккелевской модели Галактики. Оценка параметров потенциала проводилась путем сравнения кривой круговой скорости с наблюдательными значениями азимутальных скоростей мазеров. Исследовались три выборки объектов (HMSFRs, SFR, VERA). Последняя из них была разбита на две подвыборки, для каждой из которых определялось собственное значение природной дисперсии. Удалось установить кинематическую неоднородность этих подвыборок. Полученные матрицы коэффициентов корреляции параметров потенциала позволяют говорить об отсутствии полного вырождения параметров, однако наблюдаются сильные корреляции между некоторыми из них. Далее заданный в экваториальной плоскости потенциал штеккелевским образом обобщается на все пространство. Было установлено, что при определенных значениях параметров отличия исходного потенциала от полученного штеккелевского в среднем составляют менее 3%. Исследование штеккелевской модели установило хорошее согласие модельных и наблюдаемых значений около-солнечной пространственной плотности, а также массы в шаре различных

радиусов, которые не являются входными данными исследуемой модели. Стоит отметить, что полученная в данной главе модель, которая согласуется как с кинематическими наблюдательными данными, так и с рядом динамических характеристик, является наиболее реалистичной штеккелевской моделью нашей Галактики из всех известных в литературе.

3. В штеккелевских моделях с помощью уравнения Пуассона (1.10) возможно получать аналитическое выражение для пространственной плотности. Были построены эквиденситы (кривые равной плотности). При их исследовании было установлено, что штеккелевские модели дают неправдоподобное вертикальное распределение пространственной плотности. Эта проблема характерна для всех штеккелевских моделей известных в литературе и несомненно заслуживает отдельного рассмотрения. Решению данной задачи посвящена следующая глава.

Глава 3

Учет вертикального распределения

3.1. Условная оптимизация

В работе нашей группы [6] было предложено два пути решения вопроса получения реалистичного вертикального распределения пространственной плотности в штеккелевских моделях. В первом используется аппарат условной оптимизации параметров. Для этого при минимизации функции (2.8) накладываются дополнительные ограничения на параметры потенциала. Так для диска полагалось, что ход вертикальной плотности подчиняется барометрическому закону, предложенному в своих работах Паренаго [23]

$$\rho(z) = \rho_0 \exp(-|z|/h_z). \quad (3.1)$$

Здесь принималось $h_z = 900$ пк, что соответствует толстому диску Галактики [42].

При использовании данного подхода необходимо заново оценивать параметры потенциала путем минимизации функции (2.8), с учетом дополнительного ограничения (3.1) для параметров α и κ_2 (параметр $\Phi_{0,2}$ сокращался). В табл. 3.1 приведены значения параметров с учетом ассиметричного сдвига. Как и следовало ожидать, согласие с данными о кинематике мазеров ухудшилось, о чем говорят возросшие значения природной дисперсии. На рис. 3.1 представлены финальные сравнения кривых вращения с наблюдательными данными. Из вида эквиденсит, представленных на рис. 3.2, можно убедиться, что удалось сжать диск до значений характерных для толстого диска. Однако решение подобной задачи для тонкого диска получить не удалось.

В попытке добиться сферического гало на параметры его потенциала накла-

Таблица 3.1: Результаты моделирования потенциала в плоскости Галактики в предположении барометрического закона для диска при $h_z = 900$ пк с учетом асимметричного сдвига $\Delta\theta_{ad}$

Характеристика	HMSFRs	SFRs	VERA
N	202 \rightarrow 198	64 \rightarrow 63	95(64 + 31) \rightarrow 92(62 + 30)
σ_0 или $\sigma_{0,1}$, км/с	$8.16 \pm 0.60 \rightarrow$ 7.07 ± 0.52	$23.9 \pm 3.2 \rightarrow$ 24.2 ± 3.3	$23.7 \pm 2.5 \rightarrow$ 20.1 ± 2.2
$\sigma_{0,2}$, км/с			$26.1 \pm 2.8 \rightarrow 23.2 \pm 2.5$
$\Delta\theta_{ad}$, км/с	(-7.5)	(-4.0)	(-0.5)
q	0.5072 ± 0.0091	0.501 ± 0.040	0.509 ± 0.064
κ_1	0.1021 ± 0.0028	0.101 ± 0.014	0.0669 ± 0.0086
$\Phi_{0,1}$, км ² /с ²	295.5 ± 6.4	299 ± 28	246 ± 35
α	1.568 ± 0.080	1.56 ± 0.31	1.57 ± 0.18
κ_2 , кпк ⁻¹	0.435 ± 0.014	0.436 ± 0.071	0.433 ± 0.037
$\Phi_{0,2}$, км ² /с ²	354.1 ± 2.8	352.2 ± 15.9	395.3 ± 9.6
$\Phi_{0,3}$, км ² /с ²	173.2 ± 13.9	(173.2)	(173.2)
κ_3 , кпк	2.06 ± 0.51	(2.06)	(2.06)

Примечание. В строке « N » указаны начальный и конечный (после исключения выбросов) объемы каждой выборки, разделенные знаком « \rightarrow », при этом для выборки VERA в скобках дано количество объектов SFRs (первое число) и суммарно AGB и RSGs (второе число) в выборке. Для природных дисперсий азимутальных скоростей (σ_0 или $\sigma_{0,1}$, $\sigma_{0,2}$) также представлены значения до и после исключения выбросов. Оценки параметров потенциала приведены для конечных выборок.

дывалось условие постоянства центральной поверхностной плотности, имеющее место для внешних галактик [55]

$$\mu_{0D} \equiv r_0 \rho_0 \approx \text{const}. \quad (3.2)$$

Здесь r_0 — радиус ядра профиля плотности темной материи, ρ_0 — центральная плотность. По оценке Донато и др. [55] $\log \mu_{0D} = 2.15 \pm 0.2$. Де Вега, Санчес [51], указывая, что закон (3.2) имеет схожую природу с известным для молекулярных облаков в нашей Галактике соотношением Ларсона [72], приводят значение $\mu_{0D} = 140 M_\odot/\text{пк}^2$ для $0.3 \text{ кпк} < r_0 < 30 \text{ кпк}$. Ларсон [72] получил значение $\mu_{0D} = 162 M_\odot/\text{пк}^2$. Решение задачи условной оптимизации с принятым дополнительным условием не привели к желаемому профилю гало.

Указанным способом удалось решить лишь локальную задачу построения

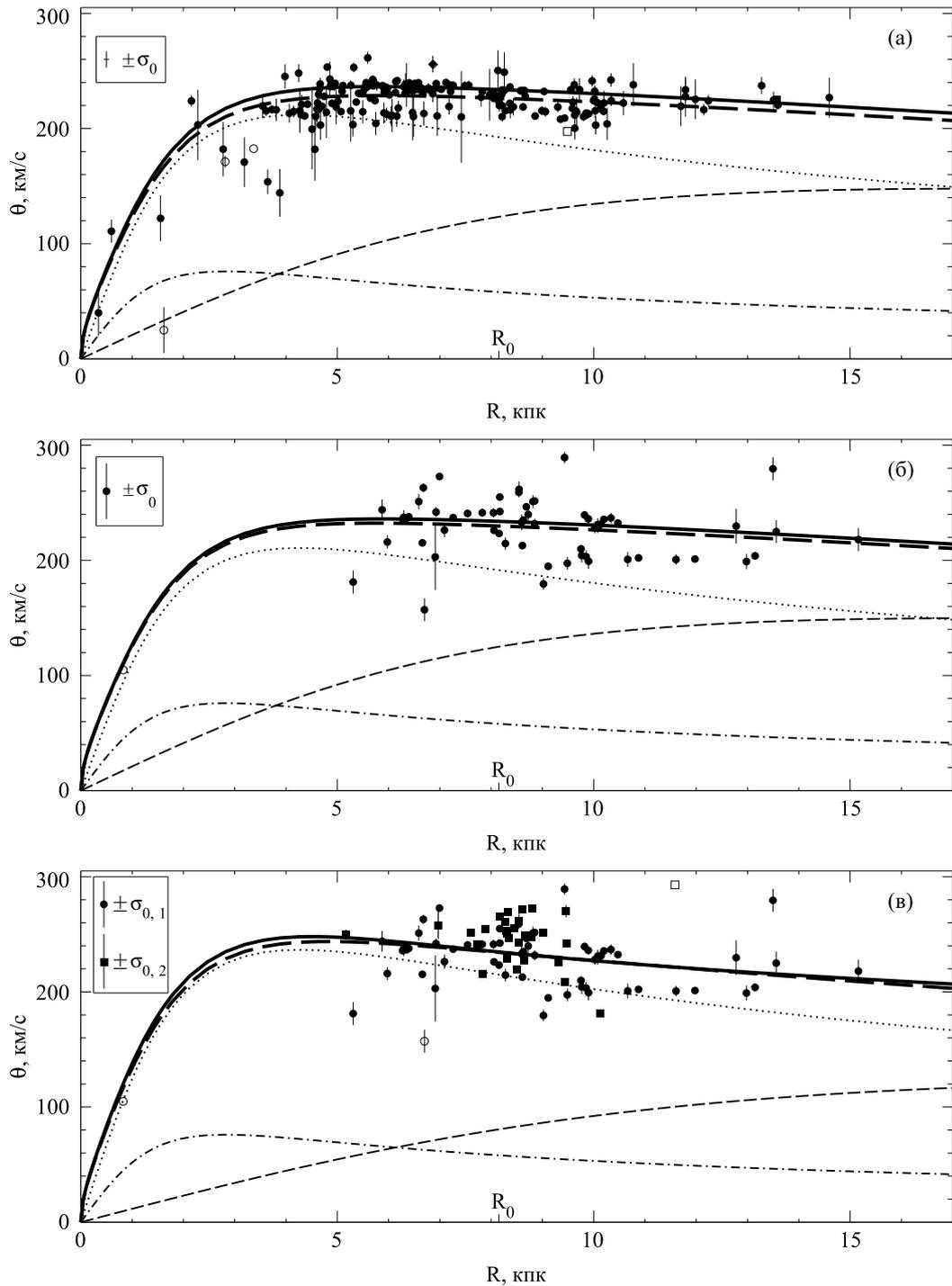


Рис. 3.1: То же, что на рис. 2.5, но при условной оптимизации — в предположении барометрического закона для диска при $h_z = 900$ пк. Жирная сплошная линия — кривая круговой скорости после коррекции за асимметричный сдвиг, жирная пунктирная линия — кривая средней скорости вращения (модельная кривая до коррекции). Кривые для отдельных компонент даны с учетом асимметричного сдвига.

толстого диска, поэтому такой подход не универсален. Подробнее остановимся на втором варианте решения данной проблемы.

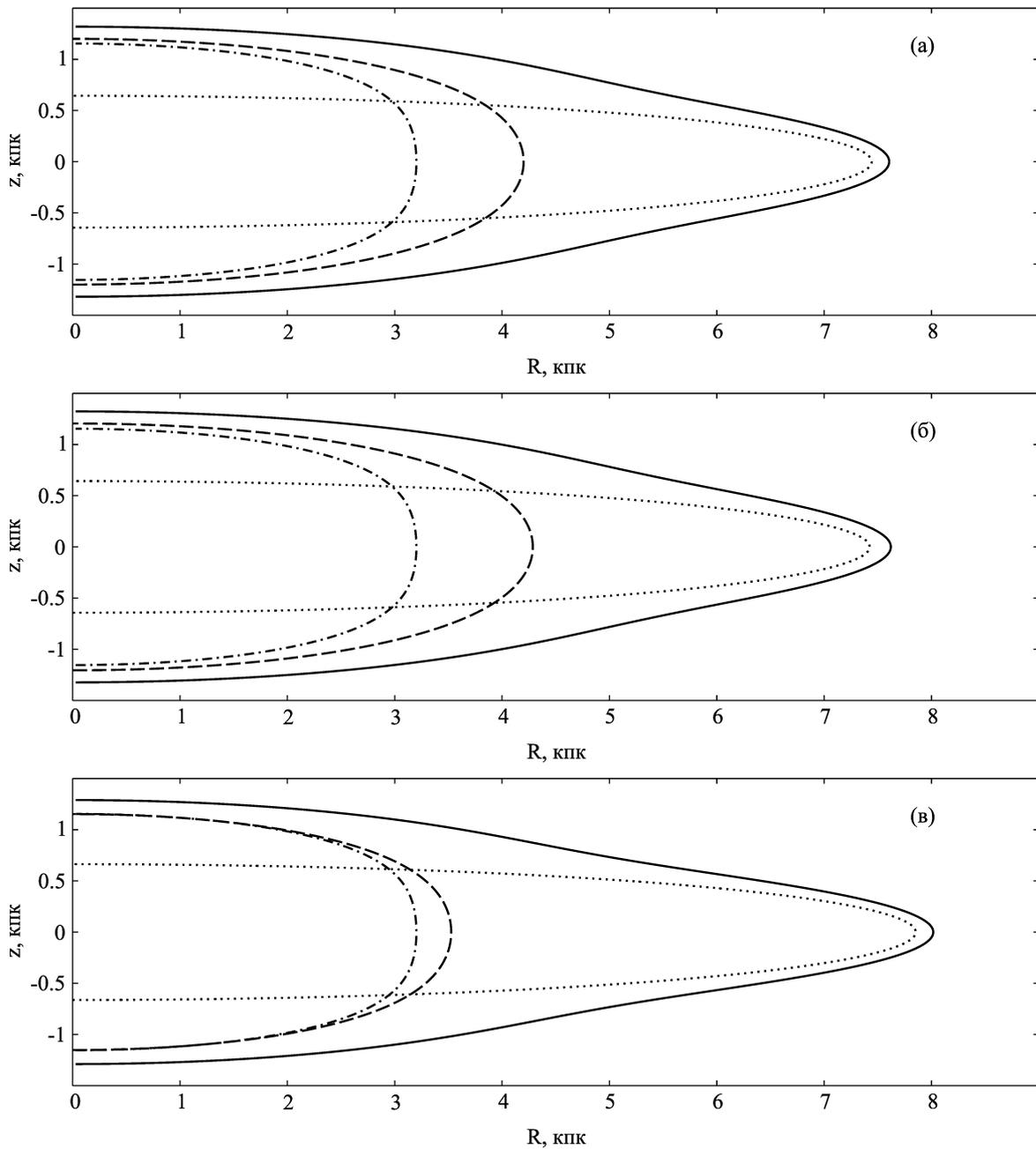


Рис. 3.2: То же, что на рис. 2.7, но при условной оптимизации — в предположении барометрического закона с $h_z = 900$ пк.

3.2. Метод эквипотенциалей

3.2.1. Построение функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$

Было решено отказаться от штеккелевского обобщения потенциала из экваториальной плоскости, определяющего единственную функцию $\varphi(\xi)$, чтобы иметь возможность использовать две различные функции $\varphi(\xi)$ в формуле (1.4). Для решения задачи продолжения потенциала из экваториальной плоскости на

все пространство использовался метод эквипотенциалей [17]. Суть его состоит в том, что в результате замены переменной вида $r^2 = f(R, z)$, где r — галактоцентрическое расстояние, заданный в экваториальной плоскости нештеккелевский потенциал $\Phi(r) = \Phi(R, 0)$ (формулы (2.1)—(2.4)), обобщается на все пространство потенциалом $\Phi(f(R, z))$, который зависит от обеих цилиндрических координат R и z .

В качестве функций $f(R, z)$ рассматривались следующие варианты

$$\text{А. } f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\sqrt{(\varepsilon^2\mu^2R^2 + \mu^2z^2 + \varepsilon^2)};$$

$$\text{Б. } f(R, z) = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{(\mu^2z^2 + \varepsilon^2)};$$

$$\text{В. } f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\mu\sqrt{(1 - \varepsilon)z^2 + \varepsilon^2},$$

которые были предложены Осипковым [81]. Кроме того, для гало и центральной компоненты дополнительно рассматривалось стандартное сферическое обобщение $f(R, z) = R^2 + z^2$.

Далее для потенциалов каждой компонентны определяются функции $\varphi_1(\xi_1)$ по формуле (1.6), которая отвечает за радиальное распределение, и $\varphi_2(\xi_2)$, отвечающей за вертикальное распределение, по формуле (1.7). Как отмечал Родионов [25], использование двух различных функций $\varphi(\xi)$ дает более точные модели звездных систем. Главным преимуществом данного метода является то, что он дает явные дополнительные параметры, варьирование которых позволяет управлять сжатием компонент модели. Данный алгоритм применяется уже после определения параметров потенциала, а значит можно использовать оптимальные, взятые из табл. 2.5, значения.

Не для всех видов А — В функции $f(R, z)$ удалось получить конечные решения. Ниже приведены аналитические выражения для функций $\varphi(\xi)$, которые и использовались при дальнейшем штеккелевском моделировании.

Для гало (2.1) со сферическим обобщением $f(R, z) = R^2 + z^2$:

$$\varphi_1(\xi_1) = \Phi_{0,1}\xi_1^2 \ln \left[1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 (\xi_1^2 - 1)}} \right], \quad (3.3)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,1} \ln(1 + \beta) - \Phi_{0,1} (1 - \xi_2^2) \ln \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 \xi_2^2}} \right). \quad (3.4)$$

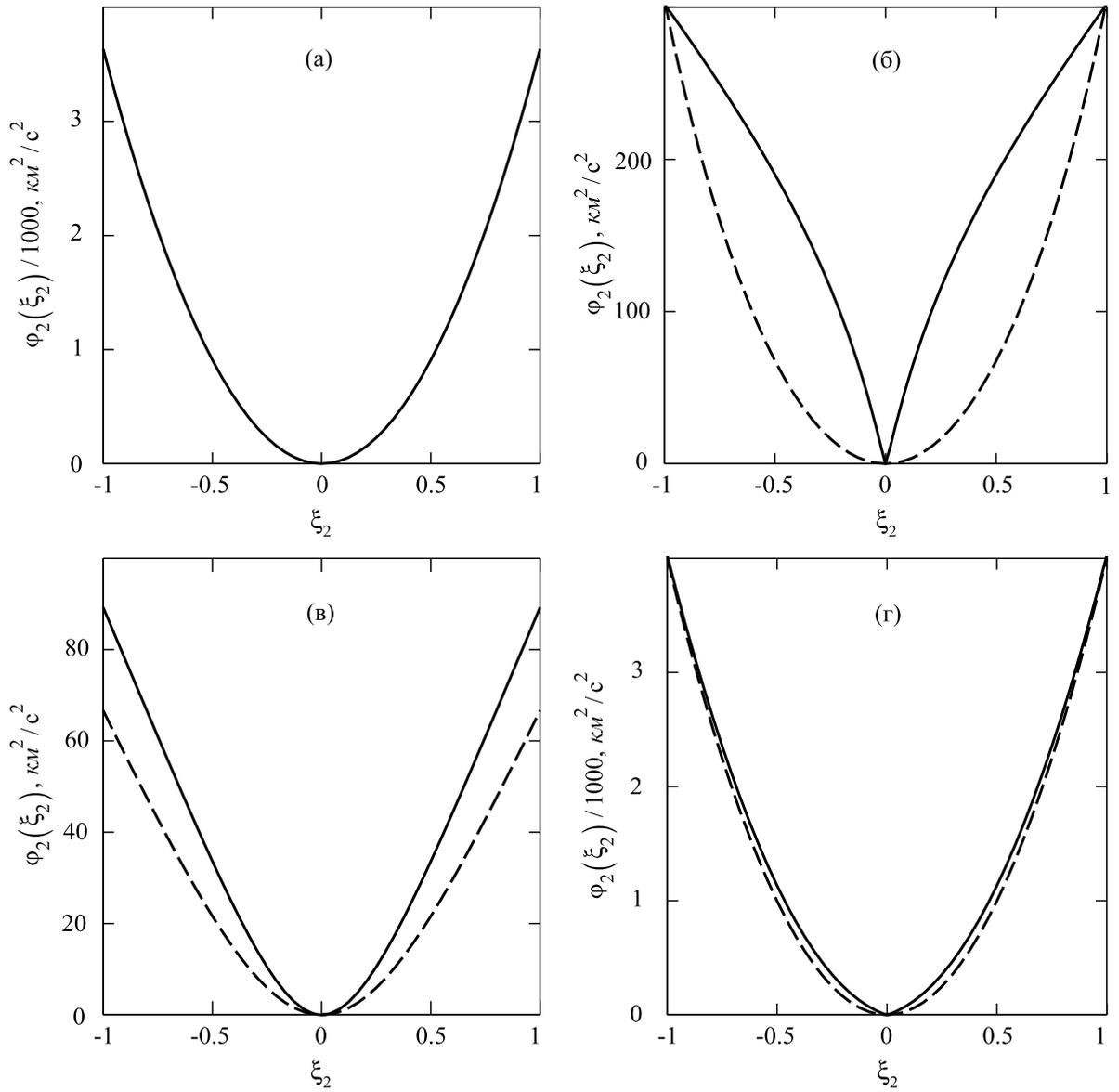


Рис. 3.3: Сравнение функций $\varphi_2(\xi_2)$, полученных в главе 2 (пунктирная линия), с функциями $\varphi_2(\xi_2)$, полученными с использованием метода эквипотенциалей (сплошная линия): гало — (а) (кривые практически совпали), диск — (б), центральная компонента — (в) и трехкомпонентная модель — (г). При построении графиков использовались значения параметров потенциала, полученных по выборке HMSFRs.

Для центральной компоненты (2.4) при $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\mu\sqrt{(1-\varepsilon)z^2 + \varepsilon^2}$:

$$\varphi_1(\xi_1) = \xi_1^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2\mu\varepsilon + \kappa_3^2}}, \quad (3.5)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{2\mu\varepsilon + \kappa_3^2}} - (1 - \xi_2^2) \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 \xi_2^2 + 2\mu\sqrt{(1-\varepsilon)z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon^2} + \kappa_3^2}}. \quad (3.6)$$

Для диска (2.3) при $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{(\mu^2 z^2 + \varepsilon^2)}$:

$$\varphi_1(\xi_1) = \Phi_{0,2} \xi_1^2 \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 [z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2(1 - \varepsilon)\varepsilon]}}, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi_2) = & \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + 2(1 - \varepsilon)\varepsilon\kappa_2^2}} - \\ & - \Phi_{0,2} (1 - \xi_2^2) \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 [z_0^2 \xi_2^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{\mu^2 z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon^2}]}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

На рис. 3.3 представлены сравнения функций $\varphi_2(\xi_2)$, полученных в главе 2 и в настоящей главе. При построении графиков использовались значения параметров потенциала, полученных по выборке HMSFRs (см. табл. 2.5). Существенные расхождения заметны только для функций диска, что связано со сложным видом эквипотенциалей. Для гало же кривые и вовсе совпали. Хорошее согласие наблюдается и для трехкомпонентной модели. Функции $\varphi_1(\xi_1)$ с точностью до некоторых постоянных совпали с функциями (2.5) — (2.7). Более подробно о влиянии аддитивных постоянных будет обсуждаться ниже.

Таким образом, алгоритм состоит из двух основных этапов. На первом, методом эквипотенциалей потенциал $\Phi(R, 0)$, заданный в экваториальной плоскости, обобщается на все пространство потенциалом $\Phi(f(R, z)) = \Phi_{\text{eq}}(R, z)$. На втором этапе потенциал $\Phi_{\text{eq}}(R, z)$ аппроксимируется штеккелевским потенциалом $\Phi_{\text{St.gen}}(R, z)$ методом штеккелевского обобщения. Полученный на последнем этапе потенциал и используется при дальнейших исследованиях.

3.2.2. Определение параметров эквипотенциалей, исследование эквиденсит

При определении параметров эквипотенциалей учитывалось значение коэффициента сжатия Q (отношения вертикального и горизонтального размеров эквиденситы

$\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ штеккелевской модели). Для гало рассматривались сферический случай $Q = 1$, а также вариант сжатого гало при $Q = 0.65$. Для центральной компоненты — $Q = 1, 0.35$. Для диска учитывалось не его сжатие, а полутолщина (половина вертикального размера эквиденситы $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$),

Таблица 3.2: Значения z_0 и параметров эквиденсит при сферических и сжатых гало и центральной компоненте

Гало	z_0 , кпк	Центральная компонента		Диск, ($h_z = 300$ пк)
		Сферическая ($Q = 1$)	Сжатая ($Q = 0.35$)	
Сферическое ($Q = 1$)	2.5	$\mu_3 = 10$ $\varepsilon_3 = 10$	$\mu_3 = 1.2$ $\varepsilon_3 = 0.47$	$\mu_2 = 20$ $\varepsilon_2 = 0.2$
Сжатое ($Q = 0.65$)	4.3	$\mu_3 = 80$ $\varepsilon_3 = 45$	$\mu_3 = 2.6$ $\varepsilon_3 = 0.49$	$\mu_2 = 750$ $\varepsilon_2 = 0.41$

Таблица 3.3: Значения пространственной плотности ρ в $M_\odot \text{пк}^{-3}$ в окрестности Солнца ($R = 8.15$ кпк) для всей Галактики и отдельных ее компонент, полученные с использованием метода эквипотенциалей

Компонента	HMSFRs	SFRs	VERA
Общая	0.092	0.093	0.092
Гало	0.003	0.003	0.003
Диск	0.089	0.090	0.089
Центральная	0.0004	0.0004	0.0004

которая принималась равной $h_z = 300$ пк.

Так как для гало был выбран вариант сферического обобщения $f(R, z) = R^2 + z^2$, то единственным параметром, который возможно варьировать для получения необходимого сжатия, остался параметр z_0 . Поэтому он заново оценивается из указанных условий, а не определяется по формуле (1.20), как раньше. Полученное значение принималось и для центральной компоненты и для диска при дальнейшей работе с ними. В табл. 3.2 приведены значения параметров эквипотенциалей, полученных для рассмотренных вариантов вертикальной структуры компонент.

На рис. 3.4 представлены эквиденситы для различных вариантов сжатия компонент, полученных по выборке Рида и др. [85]. На рис. 3.5 представлены эквиденситы для случая «сферическое гало — сжатая центральная компонента» для выборки VERA и др. [97], так как такая комбинация представляется наиболее реалистичной. Для этого же случая на рис. 3.6 представлены эквиденситы для различных значений плотности для трех выборок. А в табл. 3.3

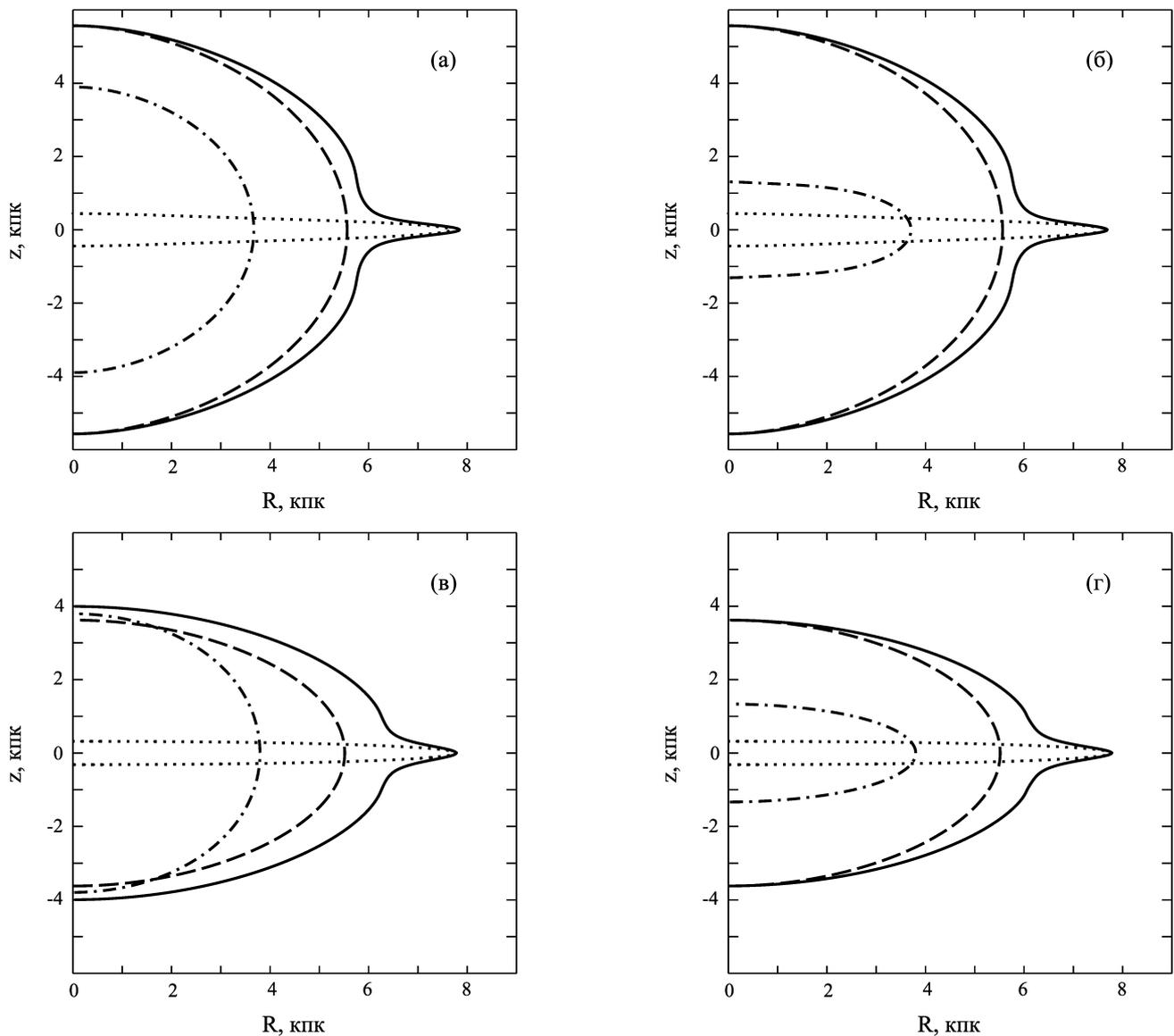


Рис. 3.4: Эквиденситы $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ для штеккелевских моделей, построенных с использованием метода эквипотенциалей по выборке HMSFRs: сферические гало и центральная компонента (а), сферическое гало и сжатая центральная компонента (б), сжатое гало и сферическая центральная компонента (в), сжатые гало и центральная компонента (г). Диск везде для целевой полутолщины $h_z = 300$ пк. Обозначения те же, что на рис. 2.7.

представлены значения околосолнечной плотности. Как и ранее полученные значения хорошо согласуются с принимаемыми в литературе, что служит еще одним доводом в пользу используемого в данной работе подхода.

В зависимости от сжатия Q центральная компонента допускает разные интерпретации. В случае $Q = 1$ она соответствует классическому балджу. Однако существование такого балджа в Галактике не подтверждается данными [42], [47]. Сжатый «балдж» ($Q = 0.35$, рис. 3.4б,г и 3.5) по своим характеристи-

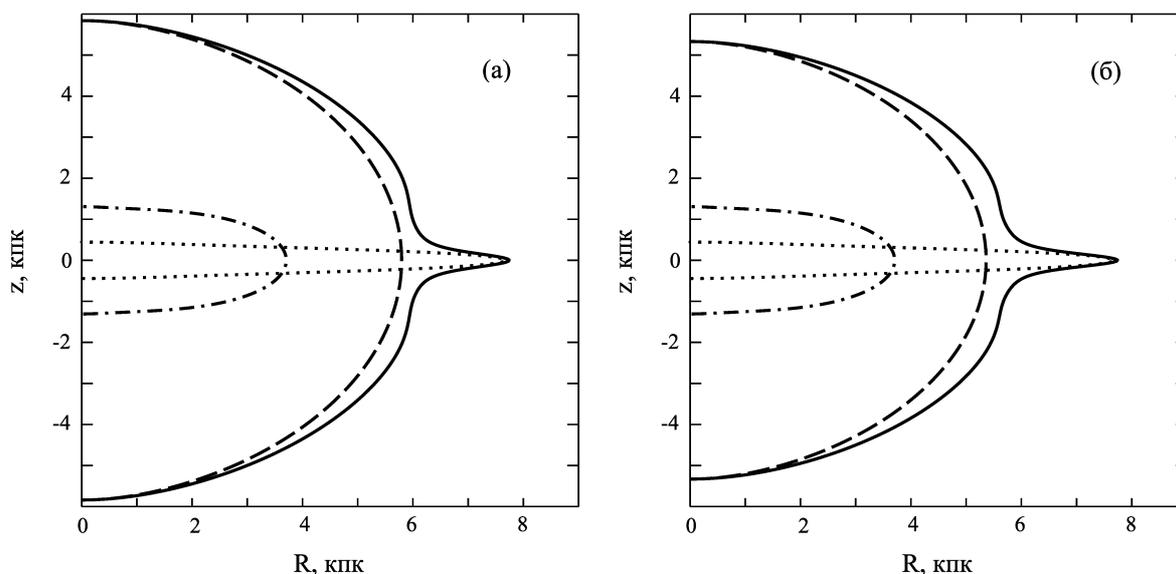


Рис. 3.5: То же, что на рис. 3.4, но для выборки SFRs (а) и выборки VERA (б) в случае модели со сферическим гало и сжатой центральной компонентой.

кам получился близким к компоненте толстого диска, который по современным данным имеет полутолщину ~ 1 кпк, примерно вдвое меньший, чем у тонкого диска, радиальный масштаб и низкую плотность в окрестностях Солнца [91]. Поэтому центральную компоненту в этом случае более правильно рассматривать как толстый диск, основная масса которого сосредоточена внутри солнечного круга.

Дальнейшее исследование в этом пункте будем проводить для модели «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента», полученной по выборке HMSFRs, так как такая модель выглядит наиболее реалистичной.

3.2.3. Ошибки приближения исходного потенциала штеккелевским

Для штеккелевских потенциалов, полученных с использованием метода эквипотенциалей были оценены относительные ошибки приближения. Результаты для отдельных компонент и трехкомпонентной модели представлены в табл. 3.4–3.7. Средние значения получились равными: гало — 0.2%, диск — 11.5%, центральная компонента — 3.8%, трехкомпонентная модель — 15.3%. Наблюдается рост ошибок при удалении от экваториальной плоскости и в центре модели. О том, что штеккелевские модели плохо описывают данные области неоднократно упоминалось в литературе (например, [66]). Также следует отметить

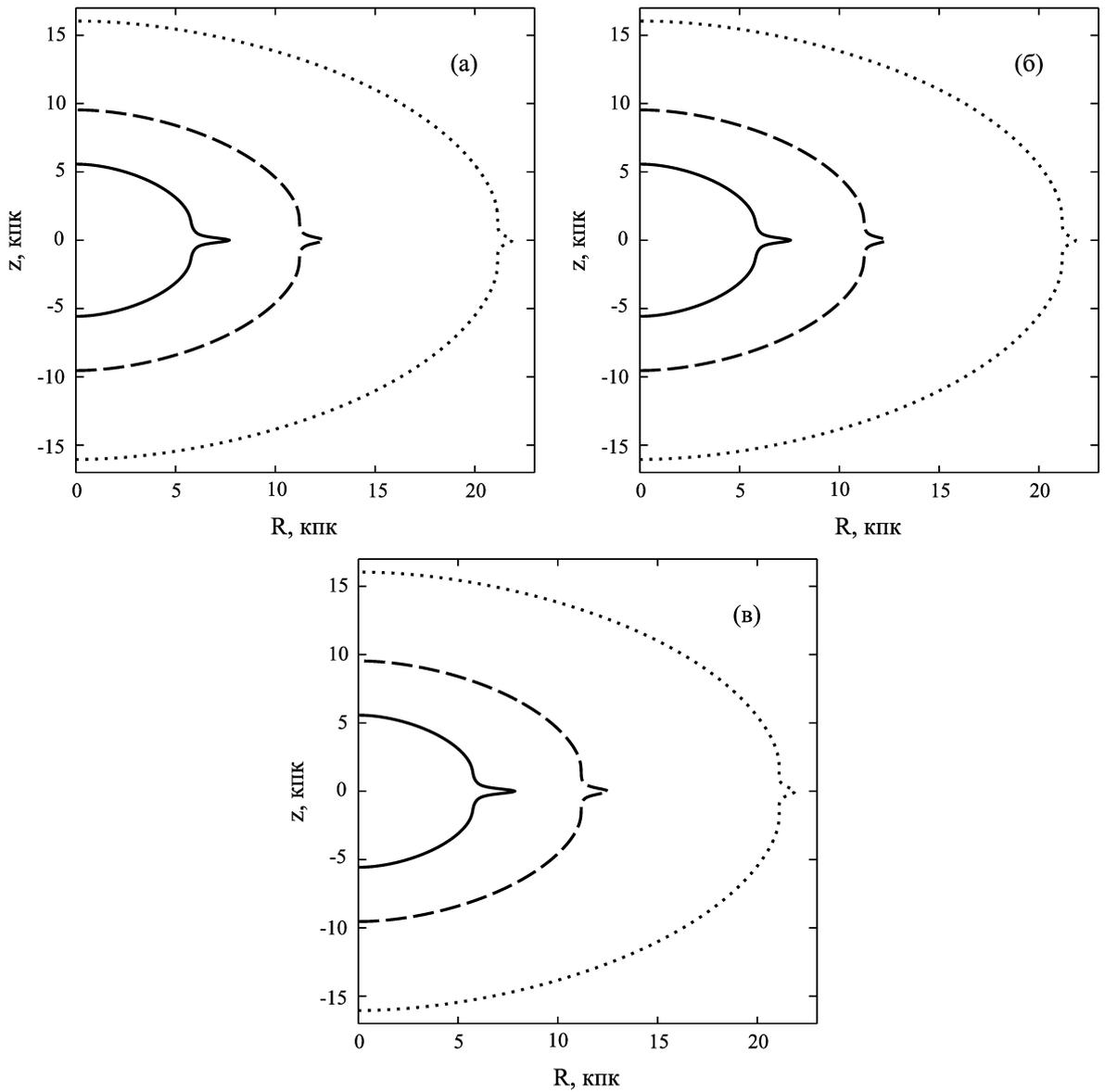


Рис. 3.6: Эквиденситы для различных значений плотности ρ для штеккелевских моделей, построенных с использованием метода эквипотенциалей по выборкам HMSFRs (а), SFRs (б) и VERA (в). Обозначения те же, что и на рис. 2.8. Сплошные кривые соответствуют эквиденситам для всей модели на рис. 3.4а, 3.5а, 3.5б соответственно.

ненулевые относительные отклонения для диска, центральной компоненты и, как следствие, трехкомпонентной модели в экваториальной плоскости. Данный факт объясняется тем, что для эквипотенциалей этих компонент не выполняется условие $f(R, 0) = R^2$. Решение данного вопроса будет представлено ниже.

Несмотря на это, в целом, согласие штеккелевских приближений и исходных потенциалов получилось удовлетворительным, что говорит о возможности использования описанного здесь метода.

Таблица 3.4: Относительные ошибки приближения потенциала гало штеккелевским с использованием метода эквипотенциалей, выраженные в процентах

R/z	1	2	3	R/z	1	2	3
1	0	0.1	0.5	7.9	0.1	0.2	0.5
2	0	0.2	0.5	8.0	0.1	0.2	0.5
3	0.1	0.2	0.5	8.1	0.1	0.2	0.5
4	0.1	0.2	0.5	8.2	0.1	0.2	0.5
5	0.1	0.2	0.5	8.3	0.1	0.2	0.5
6	0.1	0.2	0.5	8.4	0.1	0.2	0.5
7	0.1	0.2	0.5	9	0.1	0.2	0.5
7.4	0.1	0.2	0.5	10	0.2	0.5	0.4
7.5	0.1	0.2	0.5	11	0	0.2	0.4
7.6	0.1	0.2	0.5	12	0	0.2	0.4
7.7	0.1	0.2	0.5	13	0	0.2	0.4
7.8	0.1	0.2	0.5	14	0	0.2	0.4
				15	0	0.2	0.3

Таблица 3.5: Относительные ошибки приближения потенциала диска штеккелевским с использованием метода эквипотенциалей, выраженные в процентах

R/z	0	1	2	3	R/z	0	1	2	3
1	2.5	106.5	102.2	42.0	7.9	0.3	6.5	9.2	10.7
2	2.1	67.3	67.1	43.7	8.0	0.3	6.3	8.9	10.4
3	1.7	41.1	45.9	36.8	8.1	0.3	6.1	8.7	10.2
4	1.2	25.8	31.9	29.2	8.2	0.3	5.9	8.4	9.9
5	0.9	16.8	22.5	22.6	8.3	0.3	5.7	8.2	9.7
6	0.6	11.3	16.2	17.4	8.4	0.3	5.5	8.0	9.5
7	0.5	7.9	11.9	13.4	9	0.2	3.8	6.1	7.5
7.4	0.4	7.7	10.6	12.1	10	0.2	2.9	4.8	6.0
7.5	0.4	7.4	10.3	11.8	11	0.1	2.3	3.8	4.9
7.6	0.4	7.2	10.0	11.5	12	0.1	1.8	3.1	4.0
7.7	0.4	6.9	9.7	11.2	13	0.1	1.4	2.5	3.3
7.8	0.4	6.7	9.4	11.0	14	0.1	1.2	2.1	2.7
					15	0	1.0	1.7	2.3

3.2.4. Корректировка параметров эквипотенциалей

Так как для функций Б и В эквипотенциалей, использованных для обобщения потенциалов диска и центральной компоненты соответственно, не выполня-

Таблица 3.6: Относительные ошибки приближения потенциала центральной компоненты штеккелевским с использованием метода эквипотенциалей, выраженные в процентах

R/z	0	1	2	3	R/z	0	1	2	3
1	20.0	27.6	33.3	38.1	7.9	0.2	0.7	1.8	2.8
2	7.9	17.2	25.0	26.1	8.0	0.2	0.7	1.7	2.7
3	3.3	9.3	15.8	17.7	8.1	0.2	0.7	1.6	2.6
4	1.6	5.0	9.7	11.9	8.2	0.2	0.6	1.6	2.5
5	0.9	2.8	6.0	8.0	8.3	0.2	0.6	1.5	2.4
6	0.5	1.7	3.8	5.4	8.4	0.2	0.6	1.5	2.3
7	1.0	1.1	2.5	3.8	9	0.2	0.4	1.0	1.7
7.4	0.3	0.9	2.1	3.3	10	0.1	0.3	0.7	1.3
7.5	0.3	0.9	2.1	3.2	11	0.1	0.2	0.5	1.0
7.6	0.3	0.8	2.0	3.1	12	0.1	0.2	0.4	0.7
7.7	0.3	0.8	1.9	3.0	13	0.1	0.1	0.3	0.6
7.8	0.3	0.8	1.8	2.9	14	0	0.1	0.2	0.4
					15	0	0.1	0.2	0.4

Таблица 3.7: Относительные ошибки приближения трехкомпонентного потенциала штеккелевским с использованием метода эквипотенциалей, выраженные в процентах

R/z	0	1	2	3	R/z	0	1	2	3
1	22.5	134.1	135.4	80.2	7.9	0.6	6.6	10.9	13.5
2	10.0	84.5	92.1	69.8	8.0	0.6	6.4	10.6	13.1
3	5.0	50.4	61.7	54.6	8.1	0.6	6.2	10.3	12.8
4	2.9	30.8	41.6	41.1	8.2	0.5	6.0	10.0	12.5
5	1.8	19.6	28.5	30.6	8.3	0.5	5.8	9.7	12.1
6	1.2	13.0	20.0	22.8	8.4	0.5	5.6	9.4	11.8
7	0.8	9.0	14.4	17.2	9	0.4	4.2	7.2	9.2
7.4	0.7	7.8	12.7	15.4	10	0.3	3.2	5.5	7.3
7.5	0.7	7.6	12.3	15.0	11	0.2	2.5	4.4	5.8
7.6	0.7	7.3	11.9	14.6	12	0.2	1.9	3.5	4.7
7.7	0.6	7.0	11.6	14.2	13	0.1	1.6	2.8	3.9
7.8	0.6	6.8	11.3	13.8	14	0.1	1.3	2.3	3.2
					15	0.1	1.0	1.9	2.7

ется условие $f(R, 0) = R^2$, то потенциалы в экваториальной плоскости, вообще

говоря, отличаются от (2.3), (2.4). Необходима корректировка параметров потенциала и эквипотенциалей для этих компонент.

Для функции эквипотенциали диска (вариант Б) имеем

$$f(R, 0) = R^2 + 2(1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2. \quad (3.9)$$

Отсюда потенциал (2.3) имеет вид

$$\tilde{\Phi}_2(R, 0) = \tilde{\Phi}_{0,2} \frac{\tilde{\alpha}}{(\tilde{\alpha} - 1) + \sqrt{1 + \tilde{\kappa}_2^2 [R^2 + 2(1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2]}}. \quad (3.10)$$

Для корректировки параметров используем следующий алгоритм:

1. По данным о вращении определялся параметр $\tilde{\kappa}_2$. Для этого оптимизировалась целевая функция относительно $\tilde{\kappa}_2$ при фиксированных значениях остальных параметров модели (в частности, $\tilde{\Phi}_{0,2} = \Phi_{0,2}$, а $\tilde{\alpha} = \alpha$). Приближительная оценка при $\varepsilon_2 = 0.2$ составила

$$\tilde{\kappa}_2 \approx \frac{\kappa_2}{\sqrt{1 + 2(1 - \varepsilon_2)\varepsilon_2/R_0}} \approx 0.998\kappa_2.$$

2. Используя в функциях $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ значение $\tilde{\kappa}_2$ вместо κ_2 из желаемого вида эквиденсит заново оценивались значения параметров ε_2 и μ_2 . Если новые значения получались отличными от значений, найденных ранее, то этапы 1 и 2 повторялись до схождения.

3. После схождения заново оценивались параметры $\tilde{\Phi}_{0,2}$ и $\tilde{\alpha}$ при фиксированных значениях остальных параметров. В случае сильного смещения предполагалось повторение этапов 1–3, однако на практике этого не потребовалось.

Для функции $f(R, z)$ центральной компоненты (вариант В) имеем

$$f(R, 0) = R^2 + 2\mu_3\varepsilon_3. \quad (3.11)$$

Модифицированный в экваториальной плоскости Галактики потенциал (2.4) имеет вид

$$\tilde{\Phi}_3(R, 0) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{R^2 + 2\mu_3\varepsilon_3 + \tilde{\kappa}_3}}. \quad (3.12)$$

Тогда модифицированное значение параметра $\tilde{\kappa}_3$ вычисляется как

$$\tilde{\kappa}_3^2 = \kappa_3^2 - 2\mu_3\varepsilon_3. \quad (3.13)$$

Далее определялись параметры μ_3 и ε_3 , используя в функциях $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ модифицированное значение $\tilde{\kappa}_3$

$$\varphi_1(\xi_1) = \xi_1^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2\mu_3\varepsilon_3 + \tilde{\kappa}_3^2}}, \quad (3.14)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{2\mu_3\varepsilon_3 + \tilde{\kappa}_3^2}} - (1 - \xi_2^2) \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 \xi_2^2 + 2\mu_3 \sqrt{(1 - \varepsilon_3) z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon_3^2} + \tilde{\kappa}_3^2}}. \quad (3.15)$$

В результате проделанных операций были заново переопределены значения некоторых параметров. Результаты представлены в табл. 3.8. На рис. 3.7а,б приведены примеры эквиденсит диска и центральной компоненты для случая «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента» по выборке HMSFRs. Как можно заметить, различия получились едва заметными. На рис. 3.7в приведено сравнение кривых круговой скорости до и после корректировки. Кривые практически совпали. Сравнение кривых круговой скорости, полученных в главе 2 и с использованием метода эквипотенциалей, еще до корректировки параметров давало хорошее согласие. Фактически кривые совпадали при $R > 1$ кпк. Таким образом, можно утверждать, что произведенная корректировка параметров диска и центральной компоненты практически не влияет на решение, однако позволяет добиться полного совпадения потенциалов в экваториальной плоскости, представленных в разделе 2.1 и после обобщения методом эквипотенциалей.

3.3. Штеккелевские модели по ярким красным гигантам

Разработанный алгоритм построения штеккелевских моделей был применен к данным о более чем 23 000 ярких красных гигантов (ЯКГ) из работы Айлерс и др. [57]. Хотя для этих объектов использовались спектрофотометри-

Таблица 3.8: Значения параметров потенциала и эквипотенциалей для диска и центральной компоненты до и после корректировки параметров

Диск		Центральная компонента	
до корректировки	после корректировки	до корректировки	после корректировки
$\kappa_2 = 0.1020 \text{ кпк}^{-1}$	$\kappa_2 = 0.1013 \text{ кпк}^{-1}$	$\kappa_3 = 1.4 \text{ кпк}^{-1}$	$\kappa_3 = 1.1 \text{ кпк}^{-1}$
$\Phi_{0,2} = 313.2 \text{ км}^2/\text{с}^2$	$\Phi_{0,2} = 314.4 \text{ км}^2/\text{с}^2$	$\mu_3 = 1.2$	$\mu_3 = 1.7$
$\alpha = 0.1925$	$\alpha = 0.1917$	$\varepsilon_3 = 0.47$	$\varepsilon_3 = 0.47$
$\mu_2 = 20$	$\mu_2 = 20$		
$\varepsilon_2 = 0.2$	$\varepsilon_2 = 0.2$		

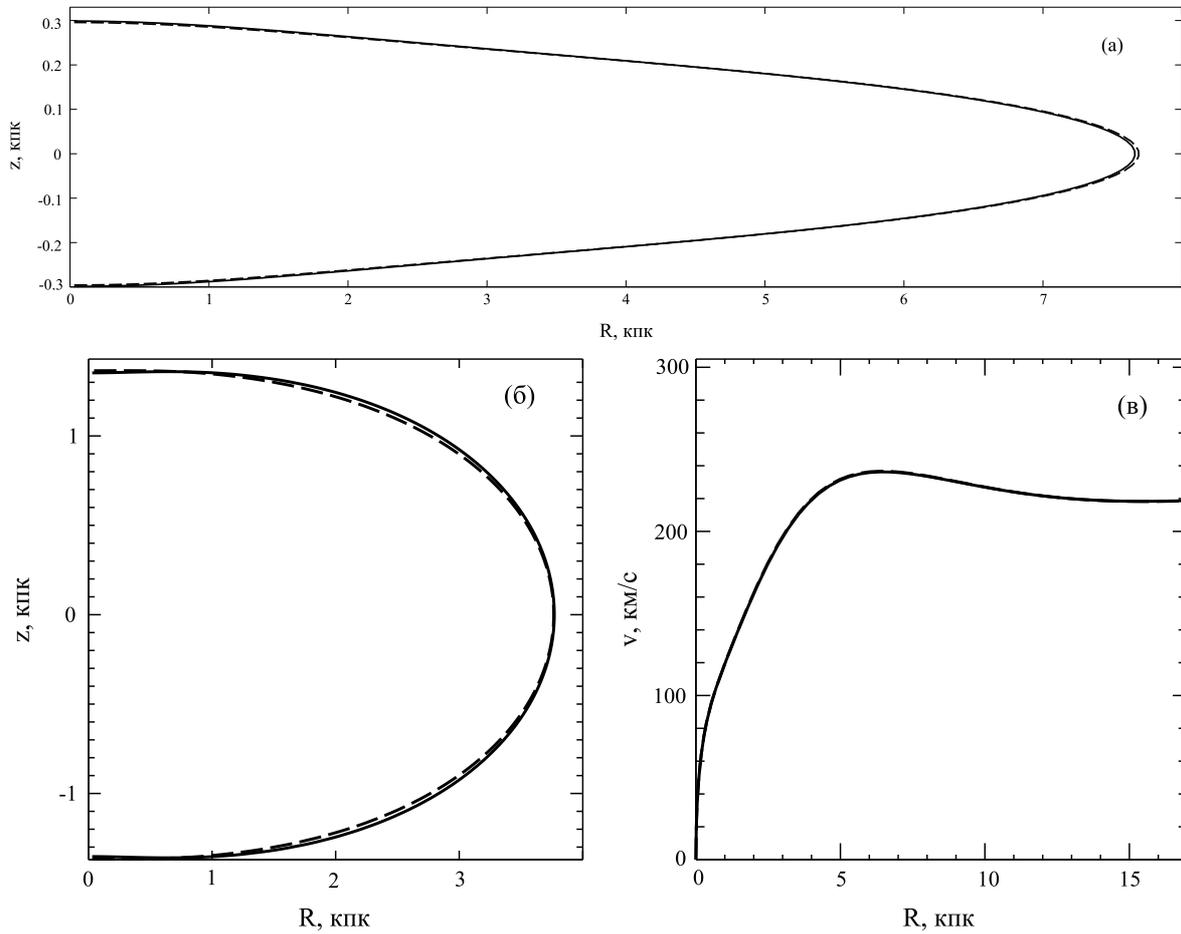


Рис. 3.7: Сравнение эквиденсит диска — (а), центральной компоненты — (б) и кривых круговой скорости — (в), полученных до корректировки параметров (пунктирная линия) и после (сплошная линия) для выборки HMSFRs с профилями «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента».

ческие расстояния, откалиброванные по астрометрическим параллаксам Gaia, но все же не абсолютные расстояния, как для мазеров, полученная по ЯКГ

рассматриваемая статистика охватывает большой промежуток галактоцентрических расстояний ($5 < R < 25$ кпк), а также содержит большее количество объектов. При моделировании использовались средние значения круговой скорости и их доверительные интервалы для 38 значений R , которые приведены в работе Айлерс и др. [57].

Для исходной модели потенциала в составе гало (2.1), тонкого диска (2.3) и толстого диска (2.4) методом наименьших квадратов определялись оценки параметров потенциала (алгоритм описан в главе 2), которые приведены в столбце «Легкий толстый диск» в табл. 3.9. Так как Айлерс и др. [57] исключили объекты центральной области ($R < 5$ кпк), то для значений параметров потенциала (2.4) принимались оценки из табл. 2.5. Сравнение модельной кривой круговой скорости со средними значениями по ЯКГ приведены на рис. 3.8. На рис. 3.9 представлены сравнения кривых круговой скорости, полученных по выборке из работы Айлерс и др. [57] и по выборке Рид и др. [85]. В окрестности Солнца согласие получилось хорошим, а вот при удалении от центра заметны расхождения, что объясняется отсутствием данных в выборке Рида и др. при $R > 16$ кпк.

Далее с использованием метода эквипотенциалей потенциал обобщался на все пространство и заново определялись значения параметров z_0 , μ_2 , ε_2 , μ_3 и ε_3 , исходя из желаемого вида профилей эквиденсит (рассматривался случай «сферическое гало — тонкий диск с полутолщиной $h_z = 300$ пк — толстый диск с полутолщиной $h_z = 900$ пк» [42]), значения которых также приведены в первом столбце табл. 3.9. На рис. 3.10а представлены эквиденситы, из вида которых можно заключить, что удалось достичь целевых характеристик гало и обоих дисков.

Ряд данных говорит о том, что масса толстого диска может составлять $\sim 50\%$ массы всего диска Галактики (см., например, [47], [91]). Однако в построенной модели масса тонкого диска оказалась почти в 5 раз больше массы толстого диска. Поэтому по данным о ЯКГ была также построена штеккелевская модель при условии равенства масс двух дисковых компонент ($M_{\text{thin}} = M_{\text{thick}} = 3.5 \times 10^{10} M_{\odot}$). Полученные значения параметров потенциала и эквиденсит представлены в столбце «Тонкий и толстый диски равных масс» в табл. 3.9; сравнение кривой круговой скорости с данными на рис. 3.8б, а эквиденситы $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ — на рис. 3.10б. На рис. 3.11 представлено сравнение

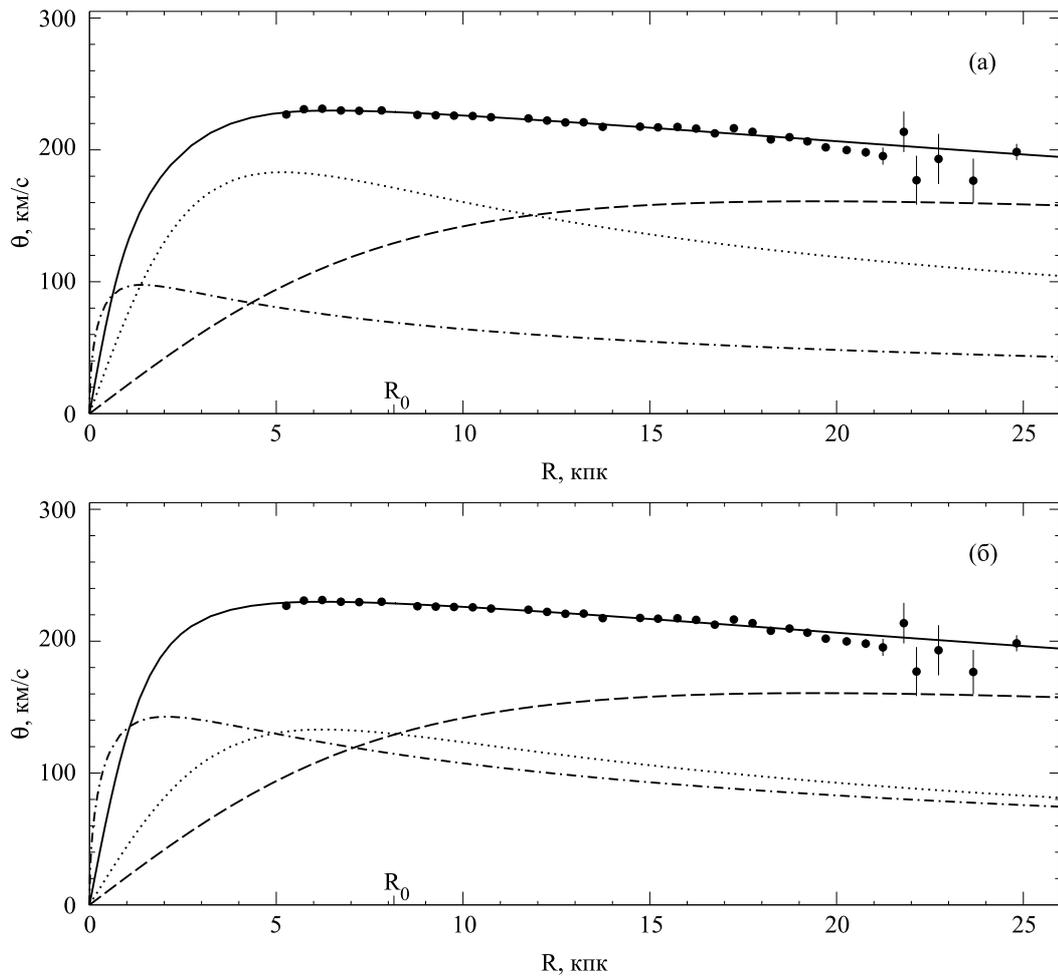


Рис. 3.8: Кривые круговой скорости для моделей потенциала Галактики, аппроксимирующих данные Айлерс и др. [57] о средних круговых скоростях ярких красных гигантов (кружки): сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая линия — гало; пунктирная линия — тонкий диск; штрихпунктирная линия — толстый диск. (а) — Решение для легкого толстого диска (с параметрами, полученными по мазерам). (б) — Решение в предположении равенства масс тонкого и толстого дисков.

эквиденсит для полных штеккелевских моделей вида «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента», построенных по данным о мазерах и по данным о ЯКГ, для различных значений пространственной плотности.

В табл. 3.10 приведены значения пространственной плотности в окрестности Солнца для штеккелевской модели и для отдельных ее компонент. Как и ранее, получилось хорошее согласие с наблюдательными данными [18], [42]. В табл. 3.11 приведены значения массы в шаре различных радиусов. Значения получились на порядок ниже, чем аналогичные в главе 2, что, вероятно, связано с видом кривой круговой скорости.

Таким образом, по данным о ЯКГ удалось построить штеккелевские модели

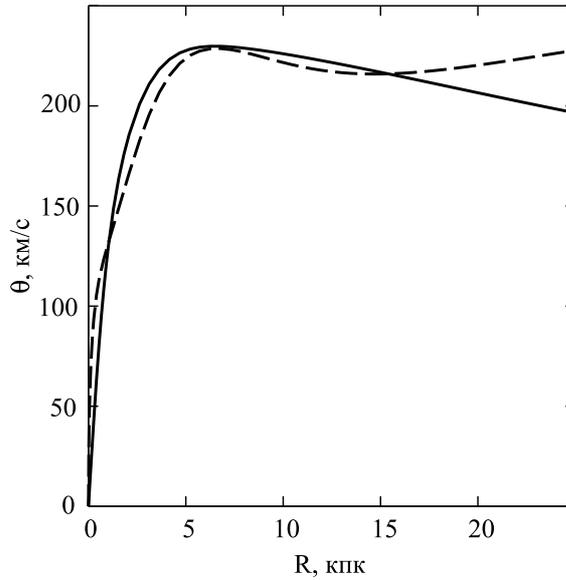


Рис. 3.9: Сравнение кривых круговой скорости, полученных по данным из работы Айлерс и др. [57] (сплошная линия) и по выборке Рида и др. [85] (пунктирная линия).

Таблица 3.9: Оценки параметров потенциала, эквипотенциалей и величины z_0 при штеккелевском моделировании Галактики по данным о ярких красных гигантах

Характеристика	Легкий толстый диск	Тонкий и толстый диски равных масс
q	0.6592 ± 0.0018	0.6561 ± 0.0018
κ_1	0.10387 ± 0.00063	0.10940 ± 0.00061
$\Phi_{0,1}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	264.2 ± 1.1	264.58 ± 0.95
α	0.7698 ± 0.0067	0.6467 ± 0.012
$\kappa_2, \text{ кпк}^{-1}$	0.2359 ± 0.0022	0.1777 ± 0.0032
$\Phi_{0,2}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	289.4 ± 1.0	207.8 ± 1.2
$\Phi_{0,3}, \text{ км}^2/\text{с}^2$	(231.0)	409.6 ± 2.2
$\kappa_3, \text{ кпк}$	(1.4)	2.062 ± 0.087
$z_0, \text{ кпк}$	2.2	2.2
μ_2	30	14
ε_2	0.2	0.09
μ_3	0.57	2
ε_3	0.27	0.5

«галло — тонкий диск — толстый диск» с заданными профилями плотности компонент при различных предположениях о массах дисков.

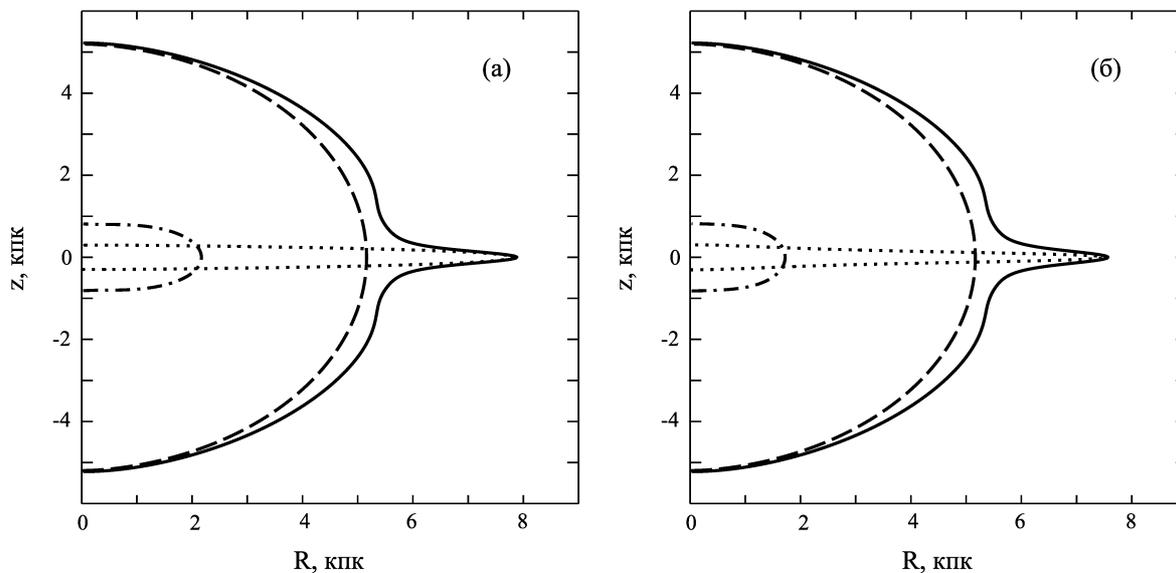


Рис. 3.10: Эквиденситы $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ для штеккелевских моделей, построенных на основе метода экvipотенциалей по данным о ярких красных гигантах. (а) — Решение для легкого толстого диска. (б) — Решение в предположении равенства масс тонкого и толстого дисков. Сплошная линия — трехкомпонентная модель; штриховая линия — гало; пунктирная линия — тонкий диск; штрихпунктирная линия — толстый диск.

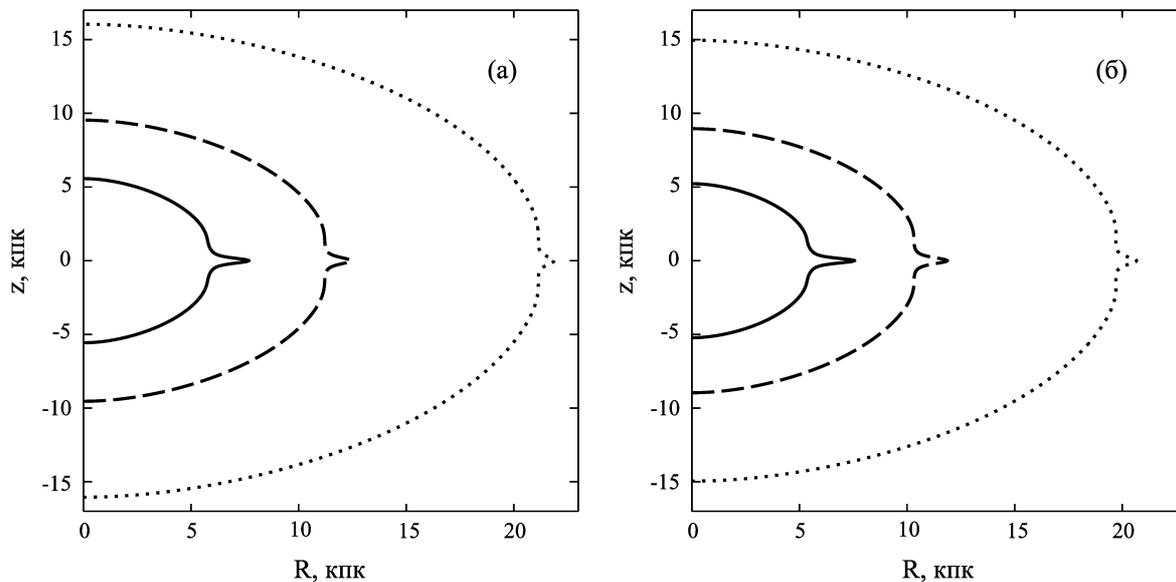


Рис. 3.11: Эквиденситы для полных штеккелевских моделей «сферическое гало – тонкий диск – толстый диск», построенных с использованием метода экvipотенциалей по данным о мазерах HMSFRs (а) и ярких красных гигантах (б). Сплошная линия — $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$, штриховая линия — $\rho = 0.01 M_{\odot}/\text{пк}^3$, пунктирная линия — $\rho = 0.001 M_{\odot}/\text{пк}^3$.

3.4. Выводы

По итогам проделанной в данной главе работы можно выделить следующие результаты:

Таблица 3.10: Значения пространственной плотности ρ в $M_{\odot} \text{пк}^{-3}$ в окрестности Солнца ($R = 8.15$ кпк) для всей Галактики и отдельных ее компонент при использовании данных о ЯКГ

Компонента	Легкий толстый диск	Диски равной массы
Общая	0.096	0.095
Гало	0.002	0.003
Тонкий диск	0.094	0.092
Толстый диск	0.0002	0.0002

Таблица 3.11: Значения массы в M_{\odot} в шаре радиусом R_s для всей Галактики и отдельных ее компонент при использовании данных о ЯКГ

	Легкий толстый диск	Диски равной массы
$R_s = 20$ кпк		
Общая	$8.5 \cdot 10^{10}$	$8.6 \cdot 10^{10}$
Гало	$5.2 \cdot 10^{10}$	$5.2 \cdot 10^{10}$
Тонкий диск	$2.8 \cdot 10^{10}$	$1.7 \cdot 10^{10}$
Толстый диск	$5.3 \cdot 10^9$	$1.7 \cdot 10^{10}$
$R_s = 50$ кпк		
Общая	$2.6 \cdot 10^{11}$	$2.5 \cdot 10^{11}$
Гало	$1.9 \cdot 10^{11}$	$1.8 \cdot 10^{11}$
Тонкий диск	$5.7 \cdot 10^{10}$	$3.4 \cdot 10^{10}$
Толстый диск	$1.1 \cdot 10^{10}$	$3.4 \cdot 10^{10}$
$R_s = 200$ кпк		
Общая	$3.2 \cdot 10^{11}$	$3.0 \cdot 10^{11}$
Гало	$2.5 \cdot 10^{11}$	$2.3 \cdot 10^{11}$
Тонкий диск	$5.9 \cdot 10^{10}$	$3.5 \cdot 10^{10}$
Толстый диск	$1.1 \cdot 10^{10}$	$3.5 \cdot 10^{10}$

1. Был разработан и реализован метод решения задачи построения реалистичного вертикального распределения плотности в штеккелевских моделях, основанный на методе эквипотенциалей. Обобщение этим методом нештеккелевского потенциала из экваториальной плоскости на все пространство позволяет вводить новые параметры в выражения для функций $\varphi(\xi)$. Варьирование этих параметров позволяет непосредственно управлять верти-

кальной структурой модели. На основе разработанного алгоритма построен набор физически адаптированных трехкомпонентных штеккелевских моделей Галактики при различных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих.

2. Был предложен метод решения поставленной в данной главе задачи с использованием условной оптимизации. На параметры потенциала гало и/или диска накладывались дополнительные наблюдательные ограничения. Так для гало предлагалось условие постоянства центральной поверхностной плотности, а для диска подчинение барометрическому закону хода вертикальной плотности. Удалось достичь решения только частной задачи (построение диска с полутолщиной $h_z = 600$ пк), поэтому нельзя сказать, что данный метод является универсальным.
3. Разработанный алгоритм построения штеккелевских моделей с реалистичным вертикальным распределением плотности был успешно реализован с использованием наблюдательных данных о ярких красных гигантах. Были построены трехкомпонентные модели вида «сферическое гало — тонкий диск — толстый диск» при разных предположениях о массах дисков.

Глава 4

Сравнение методов штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки

Интересно сравнить два подхода к построению штеккелевских моделей (метод штеккелевского обобщения и метод штеккелевской подгонки). Такое сопоставление позволит судить дает ли какой-нибудь из них неоспоримые преимущества или оба этих метода окажутся равнозначными. С этой целью в данной главе строятся штеккелевские модели на основе потенциала (2.1)–(2.4) методом штеккелевской подгонки. Алгоритм состоит из двух этапов. На первом, как и в главе 3, потенциал обобщается из экваториальной плоскости на все пространство методом эквипотенциалей. На втором этапе обобщенный потенциал аппроксимируется штеккелевским методом штеккелевской подгонки. Кроме того, решается вопрос построения реалистичного вертикального распределения пространственной плотности путем обобщения метода эквипотенциалей на метод *Stäckel fudge*.

4.1. Определение параметра z_0 для штеккелевской подгонки

В предыдущих главах уже были решены задачи определения параметров потенциала, заданного в экваториальной плоскости, путем сопоставления модельной кривой вращения с наблюдательными данными о круговых скоростях объектов. Конечные значения параметров для потенциалов (2.1)–(2.4) представлены в табл. 2.5 и будут использованы в данной главе. Кроме того, с целью получения реалистичного вертикального распределения были применены значе-

Таблица 4.1: Значения z_0 (в кпк) для различных R и z при использовании метода штеккелевской подгонки для гало

$R, \text{ кпк}$ \ $z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	1.00	3.02	5.10	7.28
1	1.00	3.02	5.09	7.27
2	1.00	3.01	5.08	7.25
3	0.99	2.99	5.05	7.21
4	0.98	2.97	5.02	7.16
5	0.98	2.95	4.98	7.11
6	0.97	2.92	4.93	7.04
7	0.96	2.89	4.88	6.96
8	0.95	2.86	4.82	6.88
9	0.93	2.82	4.76	6.78
10	0.92	2.78	4.69	6.69

ния параметров эквипотенциалей, указанных в табл. 3.8. В данной главе будет рассмотрено решение, полученное по выборке HMSFRs с вертикальным распределением типа «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента», так как такой вариант представляется наиболее реалистичным.

Как и в главе 3, потенциалы (2.1)–(2.4) обобщались из экваториальной плоскости на все пространство методом эквипотенциалей. Для гало по прежнему использовалось сферическое обобщение, для диска эквипотенциали типа Б, а для центральной компонентны типа В (см. пункт 3.2.1). Далее к заданному во всем пространстве нештеккелевскому потенциалу применялся алгоритм штеккелевской подгонки.

Рассматривалась конечная область пространства, в которой, как ожидалось, метод штеккелевской подгонки работает лучше всего: $R \in [0; 10]$, $z \in [0; 3]$. В качестве пробных точек рассматривалась сетка с шагом в 1 кпк. Таким образом исследовалось поведение функции $\varphi(\xi)$ в 44 точках пространства, что близко к количеству, которое использовали Бинни и Вон (40 точек).

Далее для каждой из 44 точек по формуле (1.21) вычислялось значение параметра z_0 . Так как потенциал (2.1)–(2.4) методом эквипотенциалей обобщен на все пространство, то он и подставляется в (1.21). Таким образом нет необходимости использовать сторонние потенциалы, например, потенциал Гарднера и

Таблица 4.2: Значения z_0 (в кпк) для различных R и z при использовании метода штеккелевской подгонки для диска

$R, \text{ кпк}$ \ $z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	1.46	1.92	2.32	2.68
1	1.49	1.94	2.33	2.70
2	1.55	1.99	2.37	2.73
3	1.63	2.05	2.43	2.78
4	1.73	2.13	2.50	2.85
5	1.85	2.23	2.59	2.93
6	1.98	2.34	2.69	3.02
7	2.13	2.47	2.80	3.12
8	2.28	2.61	2.93	3.24
9	2.44	2.75	3.06	3.36
10	2.60	2.90	3.20	3.49

др. [62] как это было сделано во второй главе.

В табл. 4.1, 4.2, 4.3 представлены значения параметра z_0 , вычисленные в различных точках для гало, диска и центральной компоненты. Обращает на себя внимание широкий разброс значений (вплоть до семикратного) для каждой из компонент. Проблема различных z_0 , который отвечает за сохранение третьего интеграла движения, уже обсуждалась выше. Здесь на практике еще раз удалось это показать. Стоит отметить, что в большинстве случаев, значение параметра z_0 в окрестности Солнца было близко к полученным ранее в данной работе ($z_0 = 5.3, 2.5, 4.3$ кпк). Отметим хаотическое поведение параметра z_0 для центральной компоненты. Если в каждой плоскости $z = \text{const}$ для гало наблюдается уменьшение значений, а для диска увеличение значений при увеличении R , то для центральной компоненты характерны провалы, например в точках ($R = 4; z = 1$) или ($R = 6; z = 2$). Вероятно, с этим связано хаотическое поведение данных аппроксимации штеккелевской подгонки, о которых будет сказано ниже.

Таблица 4.3: Значения z_0 (в кпк) для различных R и z при использовании метода штеккелевской подгонки для центральной компоненты

R , кпк \ z , кпк	0	1	2	3
0	0.65	1.50	1.71	2.03
1	0.96	1.67	1.82	2.11
2	1.32	2.04	2.02	2.27
3	1.70	3.49	2.31	2.50
4	2.09	1.34	2.69	2.78
5	2.49	2.24	3.37	3.11
6	2.90	2.72	1.51	3.51
7	3.31	3.15	2.96	4.11
8	3.72	3.55	3.52	4.79
9	4.13	3.96	3.96	3.76
10	4.56	4.36	4.37	4.37

4.2. Аппроксимация функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ для отдельных компонент Галактики в методе штеккелевской подгонки

Следующим шагом в алгоритме штеккелевской подгонки является определение значений функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ в заданных точках. Для этого используются формулы (1.22)–(1.25).

Для вычисления функций $\bar{\chi}$, $\bar{\chi}(\xi_1)$, $\bar{\chi}(\xi_2)$ использовался метод интегрирования Симпсона. Данный метод имеет алгебраический порядок точности 3. Из вида функций $\varphi(\xi)$ (см. рис. 2.1) можно предположить, что они будут хорошо аппроксимироваться полиномами второй степени (параболами). Действительно, увеличение степени аппроксимирующего полинома до многочлена 4, 6, 8, 10 степеней не давала существенного увеличения точности. Для простоты дальнейших рассуждений будем приближать $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ квадратичными функциями. В силу этого точности метода Симпсона для вычисления возникающих интегралов вполне достаточно.

Вычислив значения $\varphi(\xi)$ в указанных точках, они аппроксимировались квадратичными функциями. Методом наименьших квадратов вычислялись коэф-

фициенты этих функций с учетом условия $\varphi(0) = 0$. Получились следующие результаты.

$$\begin{aligned} \text{Гало:} & \quad \varphi_1(\xi_1) = 3611\xi_1^2 + 41.45\xi_1, & \varphi_2(\xi_2) = 3438\xi_2^2 + 124.3\xi_2. \\ \text{Диск:} & \quad \varphi_1(\xi_1) = -24.52\xi_1^2 + 432.3\xi_1, & \varphi_2(\xi_2) = -200.6\xi_2^2 + 486.2\xi_2. \\ \text{Центр. комп.:} & \quad \varphi_1(\xi_1) = 11.90\xi_1^2 + 46.89\xi_1, & \varphi_2(\xi_2) = 49.23\xi_2^2 + 40.50\xi_2. \end{aligned}$$

На рис. (4.1)–(4.3) представлены сравнения функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$, полученных с помощью метода эквипотенциалей в главе 3, аппроксимаций функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ и использованных данных, полученных с помощью метода штеккелевской подгонки. Можно сделать несколько выводов.

Во-первых, полученные значения функции $\varphi_1(\xi_1)$ для диска и центральной компоненты плохо согласуются с кривыми, полученными в главе 3. По большей части это связано с тем, что близким по R значениям соответствуют сильные колебания по $\varphi_1(\xi_1)$. Этот факт можно объяснить тем, что центральной компоненте свойственны хаотические колебания z_0 даже в пределах одной горизонтальной плоскости ($z = \text{const}$). По всей видимости с этим и связано неструктурированное положение точек на плоскости $(\xi_1, \varphi_1(\xi_1))$. Для диска же прослеживаются 4 линии, которые соответствуют 4 различным рассматриваемым значениям $z = 0, 1, 2, 3$. Для каждого столбца табл. 4.2 разброс значений не велик, однако при изменении z меняется и среднее значение z_0 , с чем и связано такое поведение данных. Значение z_0 задает вид координатных поверхностей и при различных z_0 разным значениям R и z могут соответствовать близкие значения ξ_1 и ξ_2 . Отметим, что для функций $\varphi_2(\xi_2)$ диска и центральной компоненты такой разброс в данных не характерен.

Обращает на себя внимание очень хорошее согласие полученных результатов для функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ в случае гало. Казалось бы, отличия z_0 здесь даже больше, чем, например, у диска, но вид эквипотенциалей (использовалось сферическое обобщение) заметно упрощает выражение функций $\varphi(\xi)$ для гало. Таким образом, для простого вида потенциала согласие между результатами метода штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки получилось отличным. В то же время при использовании более сложных выражений для эквипотенциалей при обобщении потенциала наблюдаются сильные колебания в значениях $\varphi_1(\xi_1)$.

Во-вторых, отметим еще раз хорошее согласие функций $\varphi(\xi)$ для гало, полученных в главе 3 и методом штеккелевской подгонки. На рис. 4.1 кривые

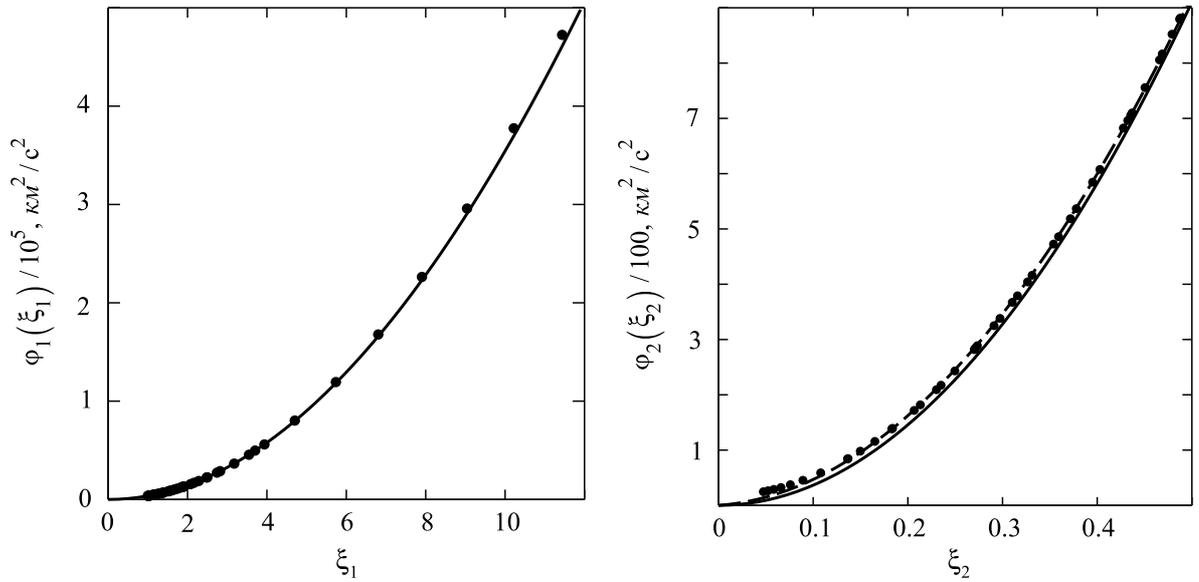


Рис. 4.1: Сравнение функций $\varphi_1(\xi_1)$ (слева) и $\varphi_2(\xi_2)$ (справа) для галло, полученных методом штеккелевского обобщения с использованием метода эквипотенциалей (сплошная линия) и методом штеккелевской подгонки (пунктир). Для $\varphi_1(\xi_1)$ кривые практически совпали. Точками обозначены данные, полученные методом штеккелевской подгонки, по которым производилась аппроксимация.

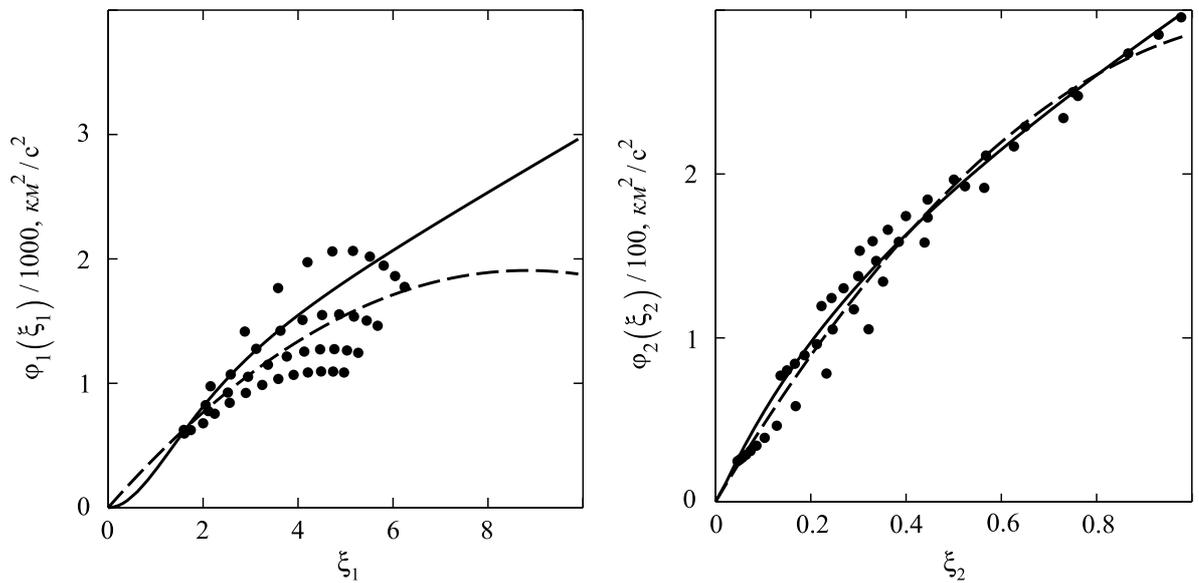


Рис. 4.2: То же, что и на рис. 4.1 для диска.

для двух случаев практически совпали, что подтверждается приведенными в табл. 4.4, 4.5 относительными отклонениями $\delta\varphi(\xi)$ значений φ_{fudge} при методе штеккелевской подгонки от φ_{gen} метода штеккелевского обобщения, которые

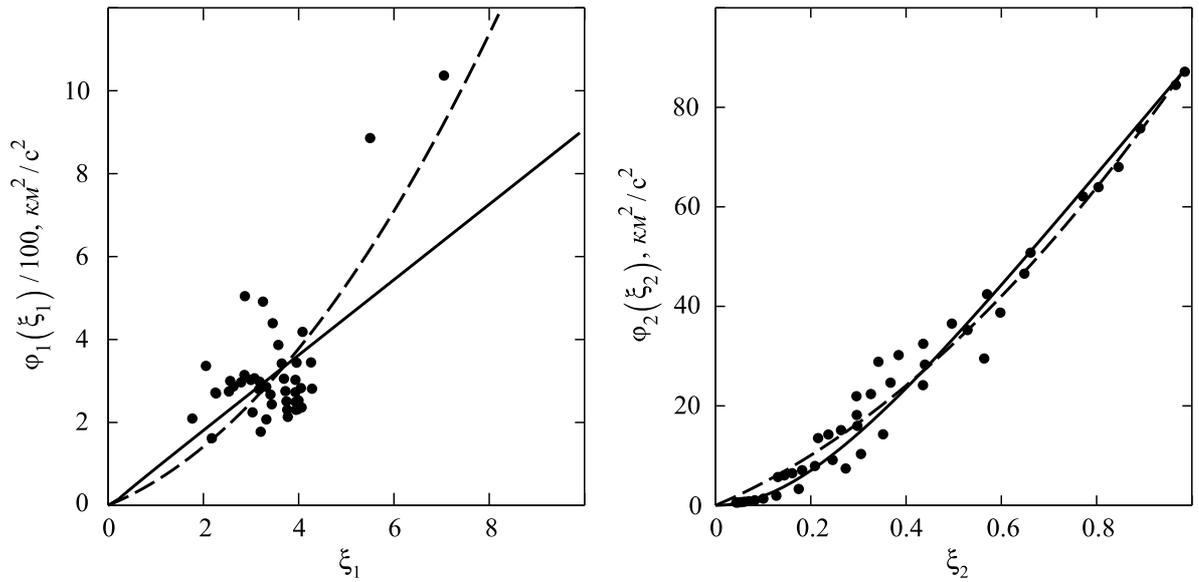


Рис. 4.3: То же, что и на рис. 4.1 для центральной компоненты.

Таблица 4.4: Таблица относительных отклонений $\varphi_1(\xi_1)$ для гало, выраженных в процентах

R , кпк \ z , кпк	0	1	2	3
0	0	0.6	0.7	0.7
1	2.5	0.5	0.6	0.6
2	2.1	0.4	0.5	0.6
3	1.8	0.3	0.5	0.6
4	1.4	0.2	0.4	0.6
5	1.1	0.2	0.4	0.6
6	0.8	0.2	0.4	0.6
7	0.6	0.2	0.4	0.6
8	0.3	0.2	0.5	0.6
9	0.1	0.2	0.5	0.7
10	0.1	0.2	0.5	0.7

вычислялись по формуле:

$$\delta\varphi(\xi) = \frac{|\varphi_{\text{fudge}}(\xi) - \varphi_{\text{gen}}(\xi)|}{\varphi_{\text{gen}}(\xi)} \cdot 100\%.$$

Среднее отклонение для функции $\varphi_1(\xi_1)$ для гало составило 0.7%. Для функции $\varphi_2(\xi_2)$ наблюдаются большие отличия (до 200%) в отдельных точках при

Таблица 4.5: Таблица относительных отклонений $\varphi_2(\xi_2)$ для гало, выраженных в процентах

$R, \text{ кпк}$ \diagdown $z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	0	24.3	10.1	6.3
1	202.4	20.3	8.7	5.6
2	166.1	16.7	7.4	4.9
3	133.4	13.5	6.2	4.4
4	104.4	10.7	5.2	3.8
5	78.9	8.2	4.4	3.4
6	57.1	6.2	3.6	3.0
7	39.0	4.6	3.0	2.7
8	24.4	3.3	2.5	2.5
9	13.5	2.4	2.2	2.3
10	6.2	1.9	2.0	2.2

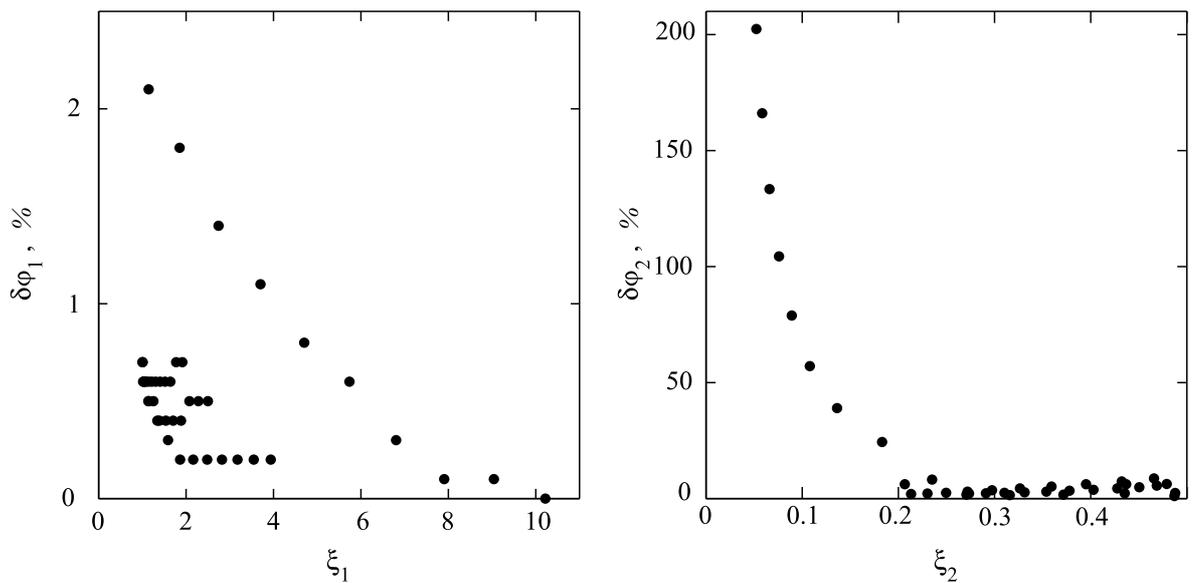


Рис. 4.4: Распределение отклонений (в процентах) функций $\varphi_1(\xi_1)$ (слева) и $\varphi_2(\xi_2)$ (справа), полученных методом штеккелевского обобщения от значений соответствующих функций, полученных в отдельных точках методом штеккелевской подгонки, для гало

малых ξ_2 . Однако по абсолютному значению эти отклонения невелики и не заметны на рис. 4.1. Среднее значение составило 25.8%. Если исключить несколько точек с неестественно большими отклонениями (7 точек с отклонениями

Таблица 4.6: Таблица относительных отклонений $\varphi_1(\xi_1)$ для диска, выраженных в процентах

$R, \text{ кпк}$ \diagdown $z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	0	26.5	34.0	40.0
1	10.2	22.2	30.8	37.5
2	19.9	17.6	27.5	34.9
3	24.3	12.9	24.1	32.3
4	23.0	8.3	20.8	29.7
5	17.9	4.1	17.7	27.2
6	11.0	0.9	14.9	24.8
7	3.6	0.7	12.8	22.5
8	3.7	0.3	11.2	20.3
9	10.4	1.7	10.2	18.3
10	16.5	3.5	9.1	16.6

Таблица 4.7: Таблица относительных отклонений $\varphi_2(\xi_2)$ для диска, выраженных в процентах

$R, \text{ кпк}$ \diagdown $z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	0	4.4	1.0	0.7
1	28.6	7.1	1.6	0.3
2	31.0	9.0	2.0	0.2
3	31.3	9.7	1.9	1.0
4	30.0	9.3	1.2	2.0
5	27.4	8.0	0.02	3.3
6	24.0	5.8	1.8	5.0
7	19.8	3.0	4.0	7.0
8	15.1	0.3	6.6	5.3
9	9.9	4.1	9.6	11.9
10	4.4	8.3	12.9	14.7

больше 39%), то среднее значение станет равным 6.3%. Графически результаты представлены на рис. 4.4.

Для диска и центральной компоненты наблюдается хорошее согласие результатов в случаях функций $\varphi_2(\xi_2)$ (рис. 4.2 и 4.3 и табл. 4.7, 4.9). Среднее от-

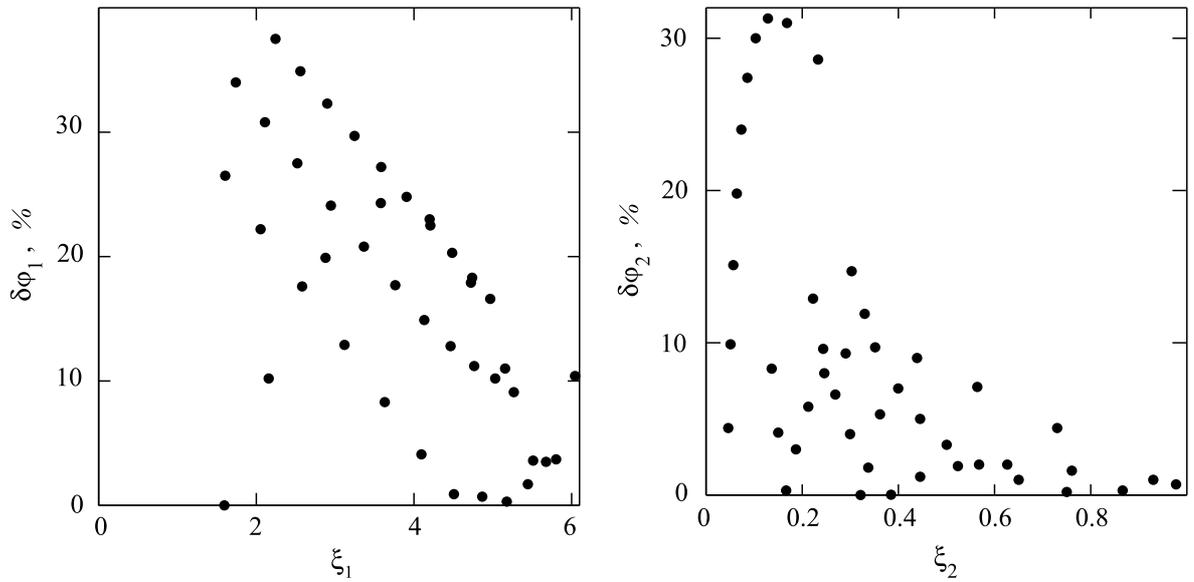


Рис. 4.5: То же, что и на рис. 4.4 для диска.

Таблица 4.8: Таблица относительных отклонений $\varphi_1(\xi_1)$ для центральной компоненты, выраженных в процентах

$R, \text{ кпк}$ \ $z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	0	31.3	31.7	20.4
1	94.0	33.5	29.3	17.4
2	66.8	19.6	21.4	11.4
3	40.3	17.8	10.1	3.5
4	19.5	77.5	2.5	5.0
5	3.6	13.1	18.3	13.5
6	8.7	4.0	62.1	21.7
7	18.3	15.1	10.8	31.1
8	26.1	23.4	22.9	38.8
9	32.4	30.1	30.2	27.5
10	37.6	35.5	35.8	35.9

клонение $\varphi_2(\xi_2)$ для диска составило 9.6%, для центральной компоненты 25.7%. Картина для функций $\varphi_1(\xi_1)$ гораздо хуже (рис. 4.2, 4.3, табл. 4.6, 4.8), что обусловлено высоким разбросом точек $(\xi, \varphi(\xi))$ для метода штеккелевской подгонки, что обсуждалось выше. Среднее значение отклонения $\varphi_1(\xi_1)$ для диска составило 18.9%, а для центральной компоненты — 28.7%. Стоит отметить плохое согласие функций при малых ξ_1 , плохо описанных точками $(\xi, \varphi(\xi))$. Рас-

Таблица 4.9: Таблица относительных отклонений $\varphi_2(\xi_2)$ для центральной компоненты, выраженных в процентах

$R, \text{ кПК}$ \diagdown $z, \text{ кПК}$	0	1	2	3
0	0	5.3	1.1	0.5
1	39.8	12.1	4.6	1.6
2	39.4	10.6	6.1	2.0
3	35.0	27.9	3.9	0.5
4	28.2	30.9	3.1	3.4
5	19.4	10.4	20.5	10.0
6	8.7	4.6	24.9	20.0
7	3.9	20.7	11.7	37.0
8	18.3	38.8	31.2	59.2
9	34.5	59.0	49.4	33.8
10	52.6	81.5	68.7	55.1

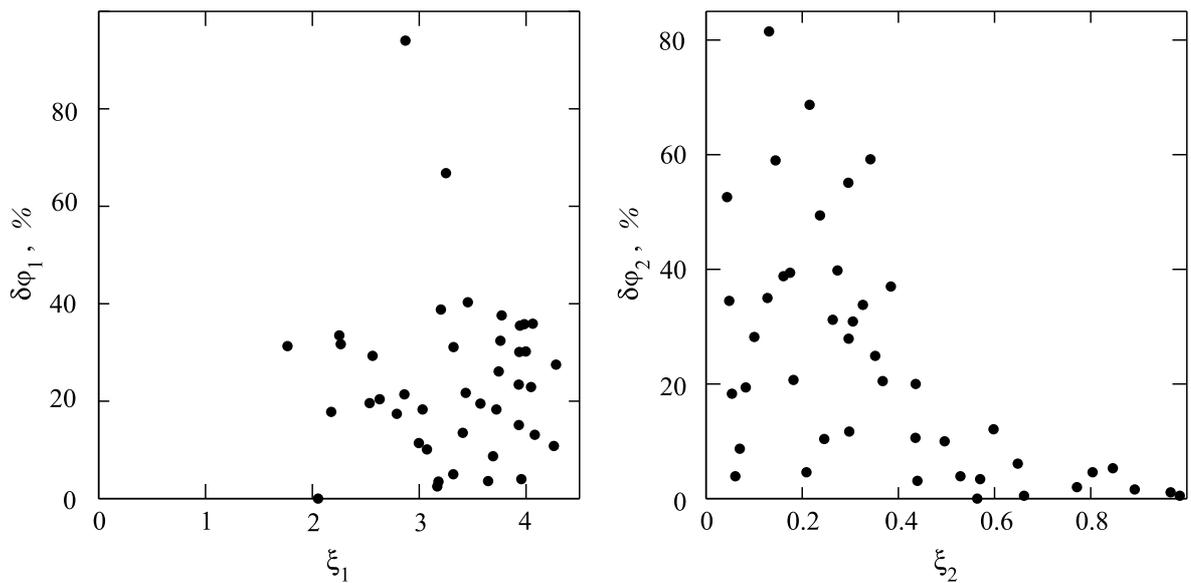


Рис. 4.6: То же, что и на рис. 4.4 для центральной компоненты.

пределение относительных отклонений графически изображено на рис. 4.5 для диска и на рис. 4.6 для центральной компоненты.

Таблица 4.10: Значения z_0 (в кпк) для различных R и z при использовании метода штеккелевской подгонки для трехкомпонентного потенциала

$R, \text{ кпк} \backslash z, \text{ кпк}$	0	1	2	3
0	2.6	2.4	2.5	2.8
1	2.6	2.7	2.8	3.0
2	2.6	3.1	3.2	3.3
3	2.7	3.3	3.6	3.8
4	2.8	3.5	3.9	4.2
5	3.0	3.6	4.1	4.5
6	3.2	3.8	4.3	4.8
7	3.4	4.0	4.5	5.0
8	3.6	4.2	4.7	5.2
9	3.9	4.4	5.0	5.5
10	4.1	4.7	5.2	5.7

4.3. Аппроксимация трехкомпонентного потенциала методом штеккелевской подгонки

Отдельно была решена задача построения методом штеккелевской подгонки трехкомпонентной модели Галактики. Для полного трехкомпонентного потенциала аппроксимировались функции $\varphi(\xi)$.

В первую очередь, как и в предыдущем пункте, определялись значения параметра z_0 в области $R \in [0; 10]$; $z \in [0; 3]$, которые приведены в табл. 4.10. Стоит отметить не такой большой разброс в значениях, как наблюдался в разделе 4.1. Примерно такой же результат получался при исследовании диска, однако, как видно на рис. 4.8, для полного потенциала не характерен разброс точек.

Затем квадратичной функцией аппроксимировались $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$:

$$\varphi_1(\xi_1) = 3486\xi_1^2 + 652\xi_1, \quad \varphi_2(\xi_2) = 3270\xi_2^2 + 713\xi_2.$$

Отметим интересный факт. Сумма функций $\varphi(\xi)$ для отдельных компонент не дает в точности функцию $\varphi(\xi)$ для полного потенциала модели, что ожидаемо из-за использования численных подходов в методе штеккелевской подгонки. Однако отклонения оказались не столь большими: 3.2% и 0.5% для старших

Таблица 4.11: Таблица относительных отклонений $\varphi_1(\xi_1)$ для трехкомпонентного потенциала, выраженных в процентах

$R, \text{ кПК}$ \diagdown $z, \text{ кПК}$	0	1	2	3
0	0	3.1	2.7	2.2
1	3.5	2.9	2.5	2.0
2	3.3	2.8	2.3	1.8
3	3.2	2.7	2.2	1.5
4	3.1	2.6	2.0	1.3
5	2.9	2.4	1.9	1.1
6	2.7	2.3	1.8	1.0
7	2.5	2.0	1.7	0.8
8	2.1	1.5	1.4	0.8
9	1.7	1.0	0.9	0.8
10	1.3	0.7	0.5	0.8

Таблица 4.12: Таблица относительных отклонений $\varphi_2(\xi_2)$ для трехкомпонентного потенциала, выраженных в процентах

$R, \text{ кПК}$ \diagdown $z, \text{ кПК}$	0	1	2	3
0	0	22.3	16.0	12.5
1	40.0	17.8	13.1	10.3
2	31.3	13.7	10.6	8.4
3	23.2	10.3	8.3	6.7
4	15.8	7.3	6.4	5.2
5	9.2	5.0	4.7	3.8
6	3.6	3.2	3.3	2.6
7	0.7	1.9	2.0	1.6
8	3.5	0.7	1.0	1.0
9	4.6	0.04	0.6	0.7
10	4.1	0.1	0.6	0.7

коэффициентов и 20.7% и 8.7% для коэффициентов при ξ для $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ соответственно. Плохое описание данных функциями $\varphi_1(\xi_1)$ для диска и центральной компоненты дает погрешности и в данном сравнении.

Результаты представлены на рис. 4.8, а относительные отклонения в табл. 4.11

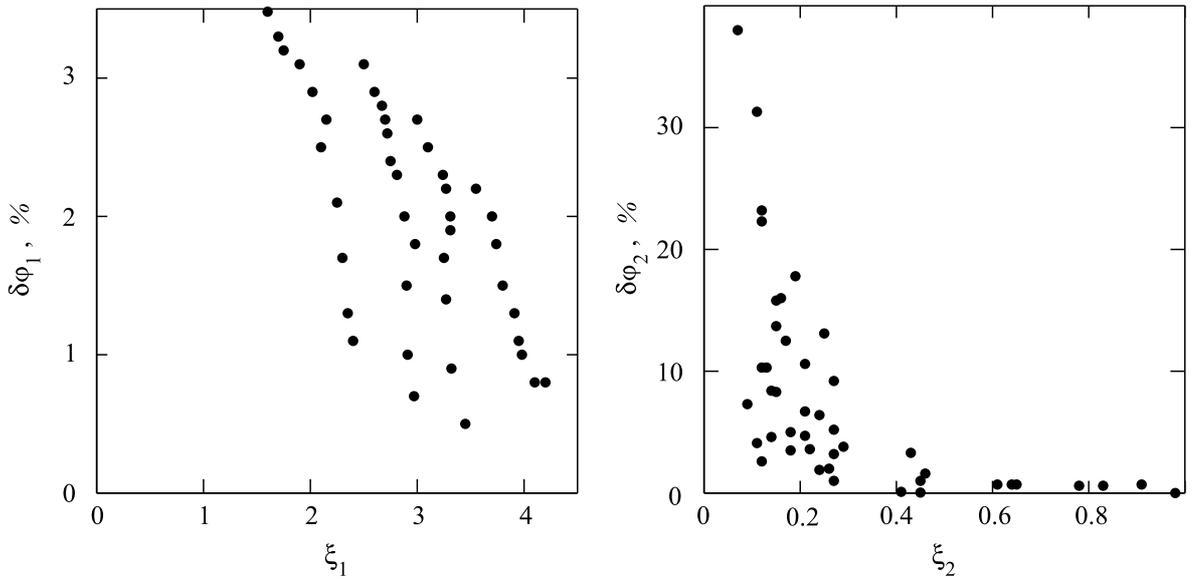


Рис. 4.7: То же, что и на рис. 4.4 для трехкомпонентной модели.

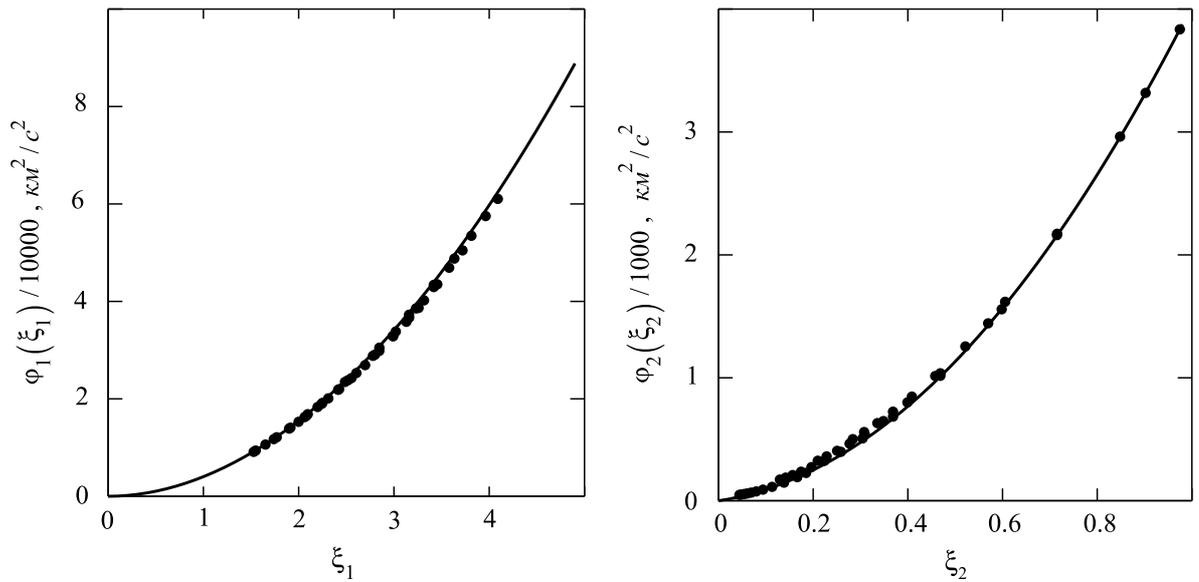


Рис. 4.8: То же, что и на рис. 4.1 для трехкомпонентной модели.

и 4.12, а их графическое представление на рис. 4.7. Стоит отметить хорошее согласие смоделированных данных, кривых, полученных в гл. 3 и аппроксимаций штеккелевской подгонки. Средние отклонения для полного потенциала составили для $\varphi_1(\xi_1) - 2.1\%$, а для $\varphi_2(\xi_2) - 8.4\%$. Примерно такие же значения получались для гало в предыдущем пункте. В связи с этим напрашивается вывод: в полном потенциале отдельные компоненты в некотором смысле компенсируют недостатки друг друга, давая хорошее согласие двух подходов к штеккелевско-

Таблица 4.13: Средние и максимальные отклонения функций $\varphi(\xi)$, полученных методом штеккелевского обобщения, от значений функций $\varphi(\xi)$, полученных методом штеккелевской подгонки, для трехкомпонентной модели и для отдельных компонент

	Отклонение $\varphi_1(\xi_1)$		Отклонение $\varphi_2(\xi_2)$	
	Среднее	Максимальное	Среднее	Максимальное
Гало	0.7%	2.5%	25.8% (6.3%)	202.4%
Диск	18.9%	40.0%	9.6%	31.0%
Центральная компонента	28.7%	94.0%	25.7%	81.5%
Модель	2.1%	3.5%	8.4%	38.9%

му моделированию. Средние и максимальные отклонения для всей модели и для отдельных ее компонент для удобства сведены в табл. 4.13.

4.4. Ошибки приближения потенциала штеккелевским в методе штеккелевской подгонки

Как и в разделе 3.2.3 приведем относительные отклонения потенциала, обобщенного с использованием метода эквипотенциалей, от его аппроксимации, полученной методом штеккелевской подгонки. Результаты для отдельных компонент и для всей Галактики в целом представлены в табл. 4.14–4.17.

Средние значения отклонений получились равными: для гало — 1.8%, для диска — 26.5%, для центральной компоненты — 9.9%, для всей модели — 35.0%. Сравнивая полученные результаты с теми, что были приведены в разделе 3.2.3 можно отметить, что в целом отклонения стали больше, что говорит в пользу использования метода штеккелевского обобщения. Стоит заметить и характерную для штеккелевских потенциалов особенность: в обоих случаях штеккелевская аппроксимация плохо описывала центральные области, а при отдалении от центра согласие становилось лучше.

Таблица 4.14: Относительные ошибки приближения потенциала гало штеккелевским методом штеккелевской подгонки, выраженные в процентах.

$R, \text{ кПК}$ \ $z, \text{ кПК}$	1	2	3
0	12.2	4.8	2.8
1	9.7	4.2	2.0
2	7.8	2.7	1.8
3	6.3	2.7	1.5
4	4.9	1.7	0.6
5	4.0	1.2	0.2
6	2.8	0.5	0
7	2.4	0.3	0
8	0.6	0.2	0
9	0.1	0.1	0
10	0.1	0	0

Таблица 4.15: Относительные ошибки приближения потенциала диска штеккелевским методом штеккелевской подгонки, выраженные в процентах.

$R, \text{ кПК}$ \ $z, \text{ кПК}$	1	2	3
0	122.5	119.6	50.0
1	121.4	117.5	49.6
2	76.0	76.5	51.1
3	45.2	51.4	42.7
4	27.9	35.1	33.6
5	17.5	24.3	26.0
6	11.5	17.3	19.8
7	8.0	12.9	15.3
8	6.2	9.6	11.6
9	3.9	6.6	8.6
10	3.0	5.3	6.9

4.5. Исследование пространственной плотности, построение эквиденсит

Дальнейшим шагом является построение и исследование эквиденсит для модели, полученной методом штеккелевской подгонки. Для этого выражения

Таблица 4.16: Относительные ошибки приближения потенциала центральной компоненты штеккелевским методом штеккелевской подгонки, выраженные в процентах.

$R, \text{ кПК}$ \ $z, \text{ кПК}$	1	2	3
0	32.6	38.6	41.9
1	33.7	38.3	41.5
2	20.5	28.3	27.7
3	11.3	16.7	17.9
4	7.7	9.9	12.4
5	3.1	7.1	8.9
6	1.8	5.4	6.5
7	1.3	2.8	5.1
8	0.9	2.1	4.0
9	0.6	1.4	2.1
10	0.5	1.1	1.9

Таблица 4.17: Относительные ошибки приближения потенциала трехкомпонентной модели штеккелевским методом штеккелевской подгонки, выраженные в процентах.

$R, \text{ кПК}$ \ $z, \text{ кПК}$	1	2	3
0	150.2	147.6	85.8
1	146.2	144.9	85.0
2	90.4	97.6	72.6
3	53.4	64.9	56.2
4	32.0	43.3	42.3
5	20.2	29.1	31.2
6	13.3	20.4	23.0
7	9.1	14.5	17.2
8	6.4	10.7	13.6
9	4.4	7.8	9.7
10	3.3	5.9	7.2

для функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ подставлялись в выражение для пространственной плотности. Кривые равной плотности представлены на рис. 4.9. Из их вида

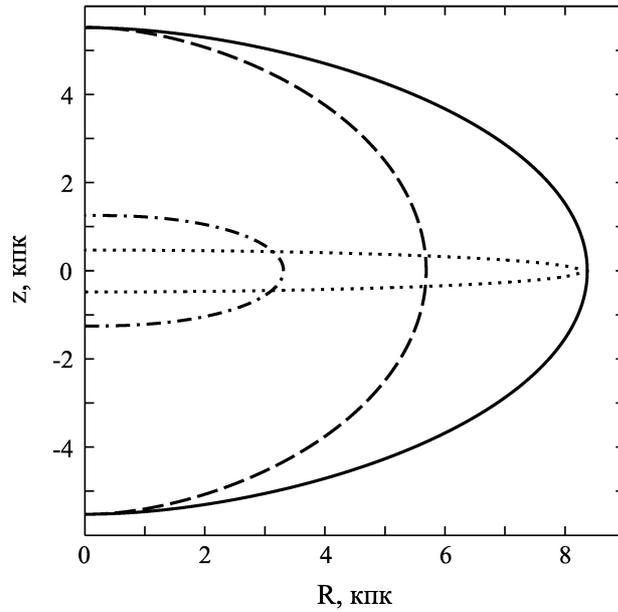


Рис. 4.9: Эквиденситы для модели, полученной методом штеккелевской подгонки для значения плотности $\rho = 0.1 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$. Сплошная линия — трехкомпонентная модель, штриховая — гало, пунктир — диск, штрих-пунктир — центральная компонента.

можно отметить неудовлетворительные результаты по вертикальному распределению. Полутолщина диска составила 480 пк, сплюснутость гало $Q = 0.96$, а центральной компоненты — $Q = 0.7$. Наблюдаемые значения вертикального распределения для отдельных компонент уже обсуждались в главе 2. Стоит отметить, что все профили получились эллиптическими, в том числе и профиль для всей модели (сплошная кривая на рис. 4.9), что связано с квадратичным видом выражения для пространственной плотности. Такой вид эквиденсит представляется менее реалистичным, чем, например, те что были получены на рис. 3.4, 3.5. Значение околосолнечной плотности составило $0.101 M_{\odot} \text{пк}^{-3}$, что хорошо согласуется с наблюдательными данными.

4.6. Решение задачи получения реалистичного вертикального распределения пространственной плотности для метода штеккелевской подгонки

Для достижения закладываемых профилей вертикальной плотности (сферическое гало, диск с полутолщиной $h_z = 300$ пк, центральная компонента со

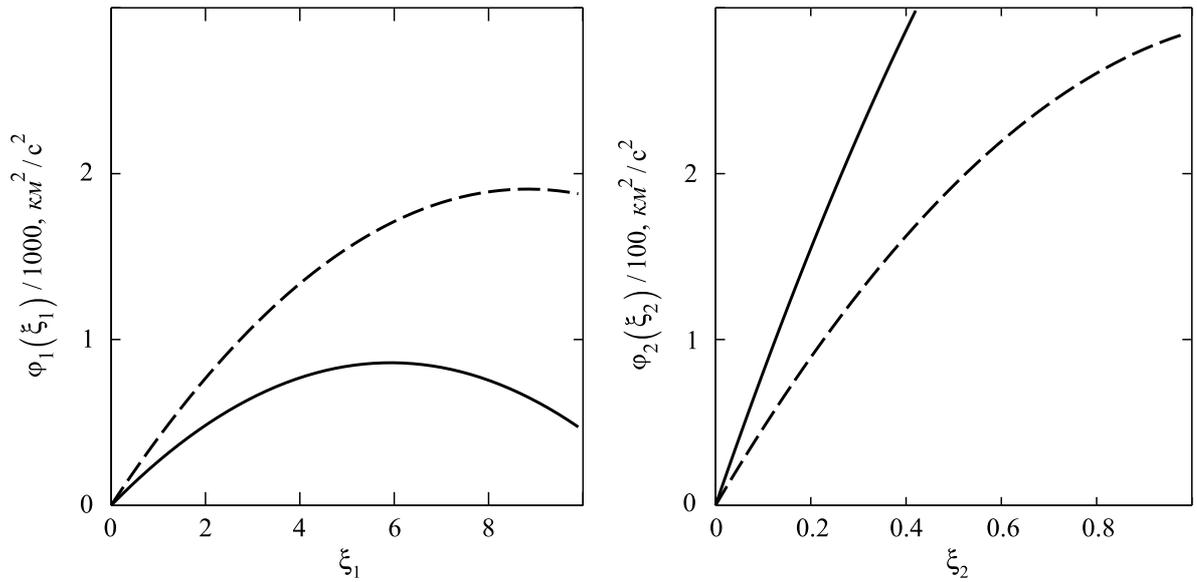


Рис. 4.10: Сравнение функций $\varphi_1(\xi_1)$ (слева) и $\varphi_2(\xi_2)$ (справа), полученных методом штеккелевской подгонки до (пунктирная линия) и после (сплошная линия) корректировки параметров для диска.

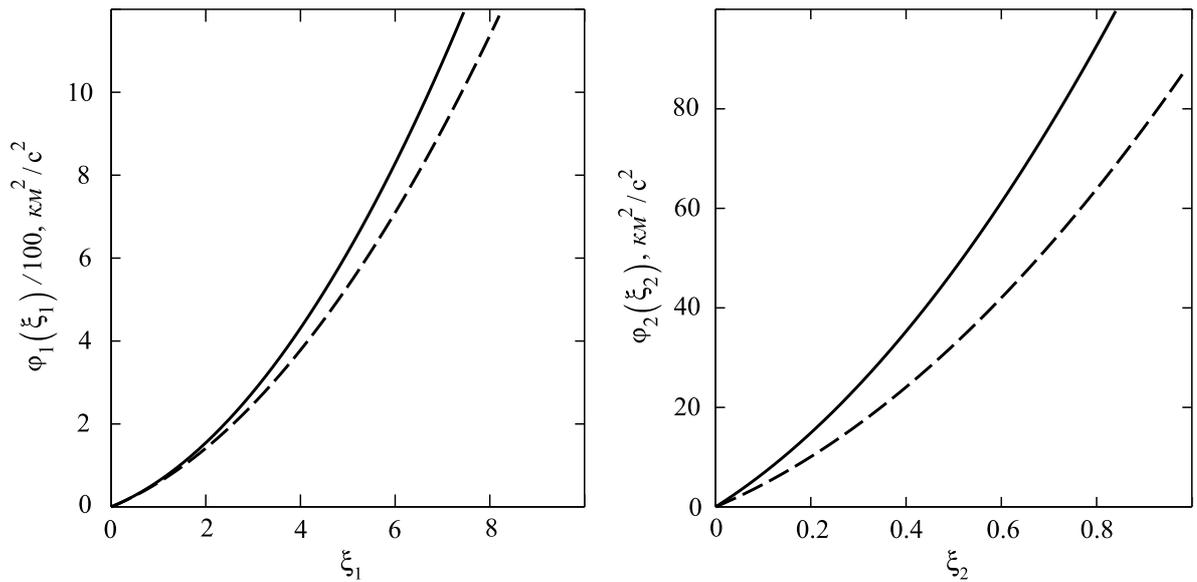


Рис. 4.11: То же, что и на рис. 4.10 для центральной компоненты.

сплюснутостью $Q = 0.35$) было решено переопределить значения параметров эквипотенциалей $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$ и параметра z_0 . Для этого использовался следующий алгоритм.

1. На первом этапе путем варьирования среднего значения параметра z_0 достигался сферический вид эквиденсит для гало. При этом сами функции

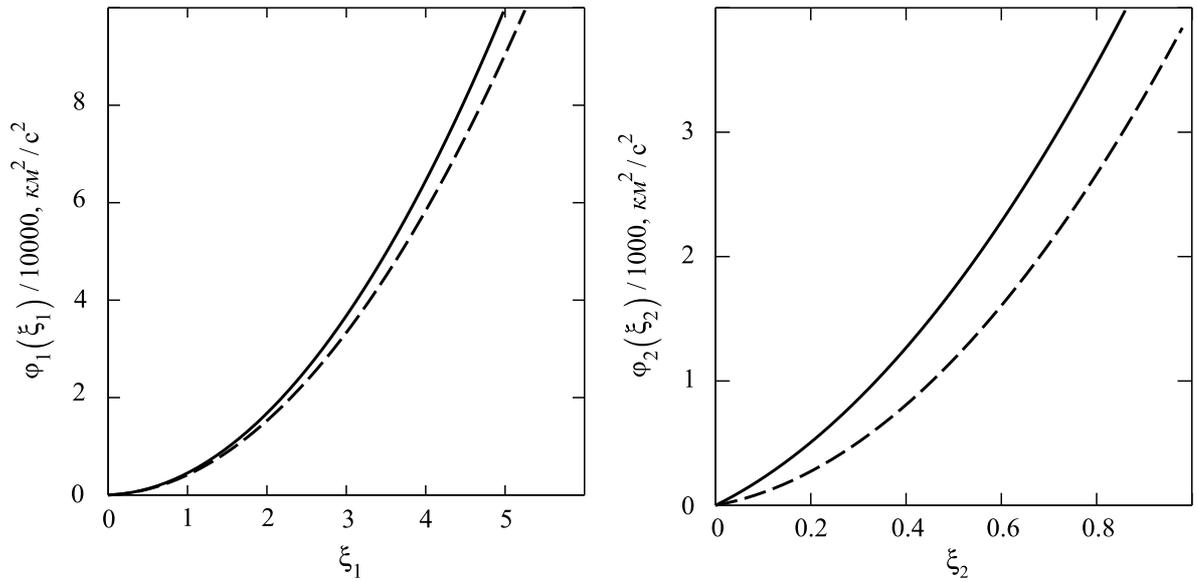


Рис. 4.12: То же, что и на рис. 4.10 для трехкомпонентной модели.

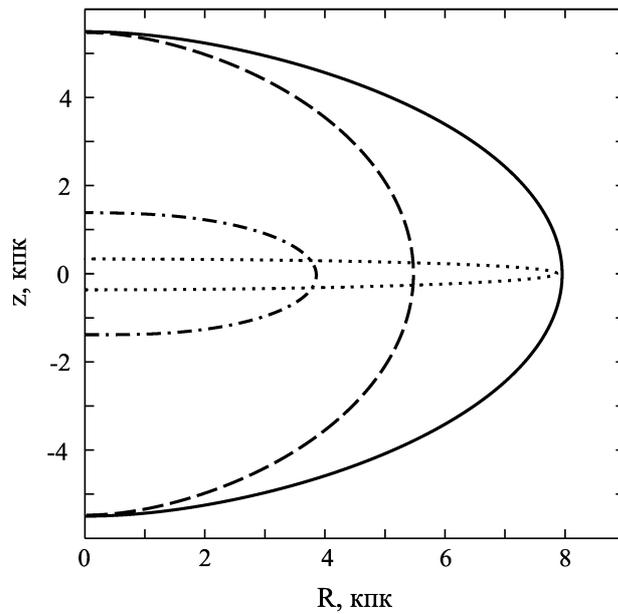


Рис. 4.13: То же, что и на рис. 4.9 после корректировки параметров.

$\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ оставались такими же как и в пункте 4.2.

2. Для каждой из функций диска и центральной компоненты $\varphi_i(\xi) = a_i \cdot \xi^2 + b_i \cdot \xi$ эмпирическим методом из желаемого вида эквиденсит определяются значения параметров a_i и b_i , где $i = (1, d)$ или $(2, d)$ для диска и $i = (1, b)$ или $(2, b)$ для центральной компоненты. Обозначим такие функции в данном алгоритме $\varphi_{\text{quad},i}$.

Таблица 4.18: Сравнение оценок параметров эквипотенциалей для методов штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки

	z_0 , кпк	Центральная компонента	Диск
Шт. обобщение	2.5	$\mu_3 = 1.7$ $\varepsilon_3 = 0.47$	$\mu_2 = 20$ $\varepsilon_2 = 0.2$
Шт. подгонка	2.7	$\mu_3 = 1.4$ $\varepsilon_3 = 0.17$	$\mu_2 = 36.6$ $\varepsilon_2 = 0.5$

3. Для рассматриваемой области пространства $R \in [0; 10]$, $z \in [0, 3]$ в каждом узле ξ_j по формулам (1.22)–(1.25) определялись выражения функций $\varphi_{\text{fudge},i}(\xi_j, m)$ при нефиксированных значениях параметров $m = (\mu_2, \varepsilon_2)$ для диска, $m = (\mu_3, \varepsilon_3)$ для центральной компоненты. При определении узлов ξ_j на начальном этапе использовались значения z_0 , полученные в пункте 4.2. При последующих итерациях (начиная со второй) значения параметра z_0 в узлах решетки определялись по формуле (1.20) заново при новых значениях параметров $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$.

4. Методом наименьших квадратов путем минимизации функции

$$L = \sum_{i,j} (\varphi_{\text{fudge},i}(\xi_j, m) - \varphi_{\text{quad},i}(\xi_j))^2$$

для диска и центральной компоненты находились значения параметров $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$.

5. Далее при новых значениях параметров $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$ строились эквиденситы диска и центральной компоненты и при необходимости повторялись шаги 2–4.

6. При новых значениях параметров $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$ методом штеккелевской подгонки определялись выражения $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ для трехкомпонентной модели.

Сравнение новых значений параметров $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$ со значениями, полученными в пункте 3.2.4, представлены в табл. 4.18. Скорректированные выражения функций $\varphi(\xi)$

Диск:	$\varphi_1(\xi_1) = -24.5\xi_1^2 + 290.3\xi_1,$	$\varphi_2(\xi_2) = -290.6\xi_2^2 + 832.2\xi_2;$
Центр. комп.:	$\varphi_1(\xi_1) = 15.2\xi_1^2 + 46.9\xi_1,$	$\varphi_2(\xi_2) = 69.2\xi_2^2 + 60.5\xi_2;$
Модель:	$\varphi_1(\xi_1) = 3870\xi_1^2 + 652\xi_1,$	$\varphi_2(\xi_2) = 3170\xi_2^2 + 1900\xi_2.$

На рис. 4.10–4.12 представлены сравнения функций $\varphi(\xi)$ для диска, центральной компоненты и трехкомпонентной модели, полученные до и после корректировки. Можно заключить, что за исключением диска, отклонения оказались малы. На рис. 4.13 представлены эквиденситы для метода штеккелевской подгонки после корректировки. Как можно заметить, удалось добиться желаемого профиля «сферическое гало — диск с полутолщиной $h_z = 300$ пк — центральная компонента со сплюснутостью $Q = 0.35$ ».

Таким образом, к методу штеккелевской подгонки успешно удалось применить алгоритм получения реалистичного вертикального распределения пространственной плотности, основанный на методе эквипотенциалей. Данная процедура решает поставленную задачу независимо от метода штеккелевского моделирования.

4.7. Выводы

Подводя итоги проделанной в данной главе работы, не будем забывать о несколько упрощенном алгоритме штеккелевской подгонки. Все-таки использование метода Симпсона и аппроксимация квадратичными функциями не дает высокой точности результатов. Однако можно сделать некоторые выводы.

1. Для метода штеккелевской подгонки допустимо применение метода эквипотенциалей, дающее реалистичные вертикальные распределения эквиденсит компонент Галактики. Таким образом, можно заключить, что использование метода эквипотенциалей решает вопрос вертикального распределения пространственной плотности для штеккелевских моделей, не зависимо от способа их построения.
2. Метод штеккелевского обобщения и метод штеккелевской подгонки в отдельных случаях давали хорошее согласие. Расхождения наблюдаются в случае сложных форм потенциалов и связаны с непостоянством z_0 в случае штеккелевской подгонки. Стоит отметить, что для трехкомпонентного потенциала недостатки отдельных компонент компенсируются и в целом

согласие двух подходов получается более чем хорошим. Однако факт непостоянства z_0 наряду с вопросом выбора третьего интеграла движения, как аргумента фазовой плотности, создает серьезную проблему при использовании метода штеккелевской подгонки. Учитывая явную вычислительную простоту, не требующую численных подходов на стадии задания функций $\varphi(\xi)$, метод штеккелевского обобщения выглядит более предпочтительным.

3. Для потенциалов диска и центральной компоненты метод штеккелевской подгонки давал значительные отклонения значений $\varphi(\xi)$ при малых отклонениях переменной ξ . Вероятно, это связано с вариациями z_0 при переходе от одной плоскости $z = \text{const}$ к другой, а также сложным видом потенциала компонент из-за использования соответствующих эквипотенциалей. С другой стороны при использовании полного трехкомпонентного потенциала значения z_0 получались усредненными по отношению к значениям компонент, с чем и связано исчезновение расхождений в данных. В таком случае, вероятно, метод штеккелевской подгонки наиболее применим к многокомпонентным моделям, однако к исследованию таким способом отдельных компонент стоит относиться с осторожностью.

Заключение

Интерес к штеккелевским моделям обусловлен разработанным Бинни алгоритмом описания моделей с сепарабельными потенциалами в переменных действие–угол и, как следствие, возможностью построения фазовых моделей с такими потенциалами. Кроме того, штеккелевские модели допускают существование третьего квадратичного по скоростям интеграла движения, что позволяет, не выходя за рамки теории стационарной Галактики, объяснить наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность эллипсоида скоростей. Однако используемый Бинни и группой других авторов метод штеккелевской подгонки требует значительных вычислительных усилий, а также использования численных подходов. Также данный метод имеет неустранимый недостаток: при его использовании третий интеграл является многозначным, а значит не может использоваться как аргумент фазовой плотности. Альтернативный метод штеккелевского обобщения прост в реализации, а самое главное — третий квадратичный по скоростям интеграл движения при его использовании является однозначным. Приведенное в данной работе сравнение двух подходов штеккелевского моделирования показало, что метод штеккелевской подгонки не дает никаких преимуществ по отношению к методу штеккелевского обобщения, а в некоторых случаях работал существенно хуже. В этом свете простой и аналитический метод штеккелевского обобщения представляется наиболее предпочтительным.

На основе этого метода в работе был представлен и реализован для нашей Галактики алгоритм построения многокомпонентной штеккелевской модели, согласующейся с наблюдательными кинематическими данными о вращении, рядом динамических характеристик и имеющей реалистичное вертикальное распределение плотности.

На первом этапе был разработан и реализован алгоритм оценки параметров потенциала, заданного в экваториальной плоскости, путем оптимизации кри-

вой круговой скорости по наблюдательным значениям азимутальных скоростей. Алгоритм включает в себя возможность как учета природной (неизмерительной) дисперсии скоростей для полной выборки в целом, так и учета различных дисперсий для групп объектов, относящихся к разным классам. Необходимость последнего этапа обусловлена предположением о кинематической неоднородности некоторых групп, которая и была подтверждена в данной работе. Также алгоритм допускает исключение объектов с избыточными невязками (выбросов) и коррекции решения за ассиметричный сдвиг. На втором этапе потенциал штеккелевским образом обобщался на все пространство.

Разработанный алгоритм был применен к построению трехкомпонентной модели Галактики, где гало описывалось квази-изотермическим потенциалом, диск — обобщенно-изохронным, а центральная компонента — потенциалом Миямото-Нагая. Для оценки параметров использовались два каталога мазеров: Рида и др [85] и Коллаборации VERA и др. [97]. Построенные модели хорошо согласуются с наблюдательными данными об околосолнечной плотности, а также дают близкие к значениям других авторов массы в шаре различных радиусов.

На этапе построения и исследования эквиденсит (кривых равной плотности) была выявлена существенная проблема, которая характерна для всех известных работ по штеккелевскому моделированию: неправдоподобное вертикальное распределение пространственной плотности. В настоящем исследовании было предложено два метода решения: и если первый, основанный на условной оптимизации параметров потенциала, позволил решить лишь частную задачу построения толстого диска, то второй, использующий метод эквипотенциалей, дает аппарат, позволяющий регулировать вертикальную структуру. Последним методом по данным о мазерах, а также по данным о ярких красных гигантах [57] были построены штеккелевские модели Галактики с различными предположениями о вертикальной структуре ее компонент.

Таким образом, предложенный в данной диссертации алгоритм гибок к изменению представлений о виде компонент Галактики, способен учитывать новые кинематические данные, а также принимать во внимание различные динамические аспекты. Он позволяет построить штеккелевскую модель, начиная с этапа выбора потенциала в экваториальной плоскости, охватывая различные стороны динамического моделирования, а отдельные главы могут применять-

ся для усовершенствования уже существующих методов. Построенные модели видятся наиболее реалистичными штеккелевскими моделями из известных в литературе. Они представляют как самостоятельный интерес, так и могут служить фундаментом для дальнейших научных исследований в области фазового моделирования и динамики звездных систем в целом.

Литература

1. Антонов В.А. Проблема третьего интеграла движения в звездной системе // Итоги науки Астрономия. — 1966. — С. 61-92.
2. Антонов В.А. Периодические и условно-периодические траектории в консервативных системах в условиях минимальной гладкости // Вестн. Лен. ун-та. — 1982. — № 13. — С. 86-96.
3. Антонов В.А. Теория орбит в звездных системах // Итоги науки и техники, сер. Астрономия. — 1985. — Т. 26. — С. 4-56.
4. Генкин И.Л. Динамика звездных систем с шварцшильдовым распределением скоростей звезд // Сообщ. гос. астрон. ин-та. им. П.К. Штенберга. — 1962. — № 124. — С. 3-27.
5. Генкин И.Л., Генкина Л.М. О возможности представления третьего интеграла движения неаналитическими функциями // Труды Астрофиз. ин-та АН КазССР. — 1982. — Т. 39. — С. 5-12.
6. Громов А.О., Никифоров И.И. Построение штеккелевской модели Галактики: решение проблемы реалистичности вертикального распределения плотности // Письма в Астрон. журн. — 2021. — Т. 47, вып. 6. — С. 383-402.
7. Громов А.О., Никифоров И.И. Трехкомпонентная штеккелевская модель Галактики, основанная на кривой вращения по данным о мазерах // Астрофиз. бюлл. — 2021. — Т. 76. — С. 187-201.
8. Идлис Г.М. О существовании и свойствах трех фундаментальных независимых первых интегралов движения отдельной звезды, входящих в общее выражение для фазовой плотности самогравитирующих звездных систем // Изв. Астрофиз. ин-та АН КазССР. — 1961. — № 11. — С. 3-40.

9. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи математических наук. — 1983. — Т. 38. — С. 3-67.
10. Кузмин Г.Г. Гравитационный потенциал Галактики и третий интеграл движения звезд // Изв. АН ЭССР. — 1954. — Т. 2. — С. 3-18.
11. Кузмин Г.Г. Модель стационарной Галактики, допускающая трехосное распределение скоростей // Астрон. журн. — 1956. — Т. 33. — С. 27-45.
12. Кузмин Г.Г. Заметки по звездной динамике // Публ. Тарт. обсерв. — 1963. — Т. 34. — С. 9-37.
13. Кузмин Г.Г. К теории интегралов движения звезд // Публ. Тарт. обсерв. — 1964. — Т. 34. — С. 457-484.
14. Кузмин Г.Г., Маласидзе Г.А. Форма гравитационного потенциала для решения уравнений движения в плоскости с использованием эллиптических интегралов // Сообщ. АН ГрузССР. — 1969. — Т. 54. — С. 565-568.
15. Кузмин Г.Г., Велтманн Ю.-И.К., Теньес П.Л. Квази-изотермические модели сферических звездных систем // Публ. Тарт. обсерв. — 1986. — Т. 51. — С. 232-242.
16. Кузмин Г.Г., Маласидзе Г.А. О некоторых моделях распределения массы звездной системы в теории третьего квадратичного интеграла движения // Публ. Тарт. обсерв. — 1987. — Т. 52. — С. 48-63.
17. Кутузов С.А., Осипков Л.П. Модель крупномасштабного гравитационного поля галактик // Вест. Ленингр. ун-та. Сер. 1. — 1981. — С. 99-105.
18. Локтин А.В., Марсаков В.А. Лекции по звездной астрономии / А.В. Локтин, В.А. Марсаков. — Ростов-на-Дону: Южный фед. ун-т, 2009. — 280 с.
19. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье; под ред. Д.Р. Меркина. — М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 823 с.
20. Маласидзе Г.А. Об орбитах звезд с нулевым моментом импульса в теории третьего квадратичного интеграла движения // Материалы Всесоюзного совещания, состоявшегося в Алма-Ате 23-26 октября 1972 г., 1973, С. 93-98.

21. Огородников К.Ф. Динамика звездных систем / К.Ф. Огородников; под ред. П.Т. Резниковского. — М.: Наука, 1958. — 627 с.
22. Осипков Л.П. О применимости третьего квадратичного интеграла к некоторым моделям распределения масс в звездных системах // Вест. Ленингр. ун-та. — 1975. — Т. 7. — С. 151-158.
23. Паренаго П.П. Исследование, основанное на сводном каталоге звездных параллаксов ГАИШ // Тр. ГАИШ. — 1940. — Т. 13. — С. 59-117.
24. Расторгуев А.С., Уткин Н.Д., Заболотских М.В. и др. Галактические мазеры: кинематика, спиральная структура и динамическое состояние диска // Астрофиз. бюлл. — 2017. — Т. 72. — С. 134-155.
25. Родионов В.И. О построении моделей звездных систем, допускающих третий квадратичный интеграл движения звезд // Вест. Ленингр. ун-та. — 1974. — Т. 13. — С. 142-148.
26. Родионов В.И. О потенциале в теории третьего квадратичного интеграла движения // АН Армянской ССР Астрофизика. — 1975. — Т. 11. — С. 145-148.
27. Родионов В.И. Распределение массы в моделях звездных систем, допускающих третий квадратичный интеграл // Докл. АН УзССР. — 1985. — Т. 3. — С. 28-29.
28. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. — М.: Едиториал УРСС, 2001. — 320 с.
29. Эйнасто Я., Рюммель У. Галактика Андромеды М31. Гидродинамическая модель. Результаты. // Астрофизика. — 1970. — Т. 6. — С. 241-259.
30. Якоби К. Лекции по динамике / К. Якоби; пер. с нем. под ред. Н.С. Кошлякова, О.А. Полосухиной. — Ленинград: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. — 271 с.
31. Allen C., Santillan A. An improved model of the galactic mass distribution for orbit computations // Revista Mexic. Astron. Astrofisica. — 1991. — V. 22. — P. 255-263.

32. Batsleer P., Dejonghe H. The generation of Staekel potentials for galactic dynamical modeling // *Astronomy and astrophysics*. — 1994. — V. 287. — P. 43-54.
33. Bienayme O., Robin A.C., Famaey B. Quasi integral of motion for axisymmetric potentials // *Astronomy and Astrophysics*. — 2015. — V. 581. — id. 123.
34. Binney J., Davies R., Illingworth G. Velocity Mapping and Models of the Elliptical Galaxies NGC 720, NGC 1052, and NGC 4697 // *ApJ*. — 1990. — V. 361. — P. 78-97.
35. Binney J., Tremaine S. *Galactic Dynamics* / J. Binney, S. Tremaine. — Princeton: Princeton University Press, 1994. — 733 p.
36. Binney J., Merrifield M. *Galactic Astronomy* / J. Binney, M. Merrifield. — Princeton: Princeton University Press, 1998. — 632 p.
37. Binney J. Distribution functions for the Milky Way // *MNRAS*. — 2010. — V. 401. — P. 2318-2330.
38. Binney J., McMillan P. Models of our Galaxy - II // *MNRAS*. — 2011. — V. 413. — P. 1889-1898.
39. Binney J. Actions for axisymmetric potentials // *MNRAS*. — 2012. — V. 426. — P. 1324-1327.
40. Binney J. Self-consistent flattened isochrones // *MNRAS*. — 2014. — V. 440. — P. 787-798.
41. Binney J., Wong L.K. Modelling the Milky Way's globular cluster system // *MNRAS*. — 2017. — V. 467. — P. 2446-2457.
42. Bland-Hawthorn J., Gerhard O. The Galaxy in Context: Structural, Kinematic, and Integrated Properties // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* — 2016. — V. 54. — P. 529-596.
43. Bozis G. On the existence of a new integral in the restricted three-body problem // *AJ*. — 1966. — V. 71. — P. 404-414.

44. Chandrasekhar S. The Dynamics of Stellar Systems // *ApJ*. — 1939. — V. 90. — P. 1-154.
45. Contopoulos G. On the existence of a third integral of motion // *AJ*. — 1968. — № 1306. — P. 1-14.
46. Deason A.J, Belokurov V., Evans N.W. Broken degeneracies: the rotation curve and velocity anisotropy of the Milky Way halo // *MNRAS*. — 2012. — V. 424. — P. 44-48.
47. Debattista V.P, Ness M., Gonzalez O.A., et al. Separation of stellar populations by an evolving bar: implications for the bulge of the Milky Way // *MNRAS*. — 2017. — V. 469. — P. 1587-1611.
48. De Bruyne V., Leeuwin F., Dejonghe H. Orbits in a Stäckel approximation // *MNRAS*. — 1999. — V. 311. — P. 297-298.
49. Dehnen W. Simple Distribution Functions for Stellar Disks // *AJ*. — 1999. — V. 118. — P. 1201-1208.
50. Dejonghe H., de Zeeuw T. A Simple Dynamical Model for Stars in the Galactic Halo // *ApJ*. — 1988. — V. 329. — P. 720-728.
51. de Vega H.J., Sanchez N.G. Constant Surface Gravity and Density Profile of Dark Matter // *Inter. J. of Modern Phys.* — 2011. — V. 26. — P. 1057-1072.
52. de Zeeuw T. Elliptical galaxies with separable potentials // *MNRAS*. — 1985. — V. 216. — P. 273-334.
53. de Zeeuw T. A generalization of Kuzmin's theorem // *MNRAS*. — 1985. — V. 216. — P. 599-612.
54. de Zeeuw T., Peletier R., Franx M. Mass models with Staeckel potentials // *MNRAS*. — 1986. — V. 221. — P. 1001-1022.
55. Donato F., Gentile G., Salucci P., et al. A constant dark matter halo surface density in galaxies // *MNRAS*. — 2009. — V. 397. — P. 1169-1176.
56. Eddington A.S. The dynamics of a stellar system. Third paper: oblate and other distributions // *MNRAS*. — 1915. — V. 76. — P. 37-60.

57. Eilers A.-C., Hogg D.W., Rix H.-W., and Ness M.K. The Circular Velocity Curve of the Milky Way from 5 to 25 kpc // *Astrophys. J.* — 2019. — V. 871. — id. 120.
58. Einasto J., Einasto L. Descriptive functions of the Galaxy // *Tables of galactic descriptive functions.* — 1972. — P. 46-54.
59. Famaey B., Van Caelenberg K., Dejonghe H. Three-integral models for axisymmetric galactic discs // *MNRAS.* — 2002. — V. 335. — P. 201-215.
60. Famaey B., Dejonghe H. Three-component Stäckel potentials satisfying recent estimates of Milky Way parameters // *MNRAS.* — 2003. — V. 340. — P. 752-762.
61. Fellhauer M., Belokurov V., Evans N.W., et al. The Origin of the Bifurcation in the Sagittarius Stream // *ApJ.* — 2006. — V. 651. — P. 167-173.
62. Gardner E., Nurmi P., Flynn C. The effect of the solar motion on the flux of long-period comets // *MNRAS.* — 2011. — V. 411. — P. 947-954.
63. Gromov A.O., Nikiforov I.I., Osipkov L.P. On the possibility of applying the quasi-isothermal Stäckel's model to our Galaxy // *Baltic Astron.* — 2015. — V. 24. — P. 150-156.
64. Hénon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments // *AJ.* — 1964. — V. 69. — P. 73-79.
65. Hernquist L. An Analytical Model for Spherical Galaxies and Bulges // *ApJ.* — 1990. — V. 356. — P. 359-364.
66. Hori G. The Motion of a Star in the Galaxy // *Publ. Astron. Soc. Japan.* — 1962. — V. 14. — P.353-373.
67. Ibata R., Diakogiannis F., Famaey B., Monari G., arXiv:2012.05250.
68. Imai H., Kurayama T., Honma M., Miyaji T. Annual Parallax Distance and Secular Motion of the Water Fountain Source IRAS 18286-0959 // *PASJ.* — 2013. — V. 65. — id. 28.
69. Irrgang A., Wilcox B., Tucker E., Schiefelbein L. Milky Way mass models for orbit calculations // *Astron. Astrophys.* — 2013. — V. 549. — id. A137.

70. Jasevicius V. The Galaxy Gravitational Potential in a Stackel Approximation // Balt. Astron. — 1994. — V. 3. — P. 232-251.
71. Kaasalainen M., Binney J. Torus construction in potentials supporting different orbit families // MNRAS. — 1994. — V. 268. — P. 1033-1040.
72. Larson R.B. Turbulence and star formation in molecular clouds // MNRAS. — 1981. — V. 194. — P. 809-826.
73. Levi Civita T. Sopra la equazione di Kepler // Astronomische Nachrichten. — 1904. — V. 165. — P. 313-318.
74. Lynden-Bell D. Stellar dynamics. Potentials with isolating integrals // MNRAS. — 1962. — V. 124. — P. 95-123.
75. Manabe S. Applicability of Approximate Third Integral of Motion for Stellar Orbits in the Galaxy // Publ. Astron. Soc. Japan. — 1979. — V. 31. — P. 369-394.
76. Merrifield M. Modeling edge-on elliptical galaxies: are two integrals enough? // AJ. — 1991. — V. 102. — P. 1335-1342.
77. Miyamoto M., Nagai R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies // Publ. Astron. Soc. Japan. — 1975. — V. 27. — P. 533-543.
78. Nikiforov I.I. Exclusion of measurements with excessive residuals (blunders) in estimating model parameters // Astron. and Astrophys. Trans. — 2012. — V. 27. — P. 537-538.
79. Nikiforov I.I., Veselova A.V. Numerical Study of Statistical Properties of the Galactic Center Distance Estimate from the Geometry of Spiral Arm Segments // Astronomy Letters. — 2018. — V. 44. — P. 699-719.
80. Oort J. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems // Bull. Astron. Netherl. — 1932. — № 238. — P. 249-287.
81. Osipkov L.P. Models of galaxies with quaternary equipotentials // Astronomy Letters. — 1997. — V. 23. — P. 385-390.

82. Piffl T., Binney J., McMillan P.J., et al. Constraining the Galaxy's dark halo with RAVE stars // MNRAS. — 2014. — V. 445. — P. 3133-3151.
83. Reid M.J., Menten K.M., Zheng X.W., et al. Trigonometric Parallaxes of Massive Star-Forming Regions. VI. Galactic Structure, Fundamental Parameters, and Noncircular Motions // ApJ. — 2009. — V. 700. — P. 137-148.
84. Reid M.J., Menten K.M., Brunthaler A., et al. Trigonometric Parallaxes of High Mass Star Forming Regions: The Structure and Kinematics of the Milky Way // ApJ. — 2014. — V. 783. — id. 130.
85. Reid M.J., Menten K.M., Brunthaler A., et al. Trigonometric Parallaxes of High-mass Star-forming Regions: Our View of the Milky Way // ApJ. — 2019. — V. 885. — id. 131.
86. Sanders J. Angle-action estimation in a general axisymmetric potential // MNRAS. — 2012. — V. 426. — P. 128-139.
87. Sanders J., Binney J. A fast algorithm for estimating actions in triaxial potentials // MNRAS. — 2015. — V. 447. — P. 2479-2496.
88. Sanders J., Binney J. A review of action estimation methods for galactic dynamics // MNRAS. — 2016. — V. 457. — P. 2107-2121.
89. Satoh S., Miyamoto M. A hydrostatic equilibrium of our Galaxy under three unequal velocity dispersions of stars // Publ. Astron. Soc. Japan. — 1976. — V. 28. — P. 599-615.
90. Schmidt M. A model of the distribution of mass in the Galactic System // Bull. Astron. Inst. Netherl. — 1956. — V. 13. — P. 15-41.
91. Snaith O., Haywood M., Di Matteo P., et al. Reconstructing the star formation history of the Milky Way disc(s) from chemical abundances // Astron. Astrophys. — 2015. — V. 578. — id. A87.
92. Stäckel P. Ueber die Bewegung eines Punktes in einern-fachen Mannigfaltigkeit // Math. Ann. — 1893. — V. 42, P. 537-563.
93. Stodolkiewicz I.S. On the Third Integral of Motion in Stellar Dynamics // Acta astron. — 1974. — V. 22. — P. 319-326.

94. Tafuya D., Imai H., Gomez Y., et. al. Measurement of the Distance and Proper Motions of the H₂O Masers in the Young Planetary Nebula K 3-35 // PASJ. — 2011. — V. 63. — P. 71-80.
95. van der Marel R.P., Binney J., Davies R. Models of Elliptical Galaxies — NGC3379 NGC4261 NGC4278 and NGC4472 // MNRAS. — 1990. — V. 245. — P. 582-596.
96. Vandervoort P. Isolating integrals of the motion for stellar orbits in a rotating galactic bar // AJ. — 1979. — V. 232. — P. 91-105.
97. VERA collaboration, T. Hirota, T. Nagayama, M. Honma, et al. The First VERA Astrometry Catalog // Publ. Astron. Soc. Pacific. — 2020. — V. 72. — id. 50.
98. Wayman P.A. Velocity ellipsoids and the gravitational potential of the Galaxy // MNRAS. — 1959. — V. 119. — P. 34-45.
99. Whittaker E.T. Analytical Dynamics / E.T. Whittaker. — Cambridge University press, 1917. — 456 p.
100. Williams A.A., Evans N.W. Haloes light and dark: dynamical models of the stellar halo and constraints on the mass of the Galaxy // MNRAS. — 2015. — V. 454. — P. 698-707.