

На правах рукописи



Громов Анатолий Олегович

**ПРИМЕНЕНИЕ ШТЕККЕЛЕВСКИХ
ПОТЕНЦИАЛОВ В ДИНАМИЧЕСКОМ
МОДЕЛИРОВАНИИ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 01.03.01 — Астрометрия и небесная механика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

Научный руководитель:

НИКИФОРОВ Игорь Иванович,

кандидат физико-математических наук,

доцент кафедры небесной механики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

Официальные оппоненты:

РАСТОРГУЕВ Алексей Сергеевич,

доктор физико-математических наук, профессор

заведующий кафедрой экспериментальной астрономии физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ)

ХРАПОВ Сергей Сергеевич,

кандидат физико-математических наук, доцент

доцент кафедры информационных систем и компьютерного моделирования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Волгоградский государственный университет» (ВолГУ)

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» (УрФУ)

Защита состоится «16» сентября 2022 г. в 11 час. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д 002.120.01 на базе Главной (Пулковской) астрономической обсерватории Российской академии наук по адресу: 196140, Санкт-Петербург, Пулковское шоссе, д. 65, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ГАО РАН

http://www.gaoran.ru/wp-content/uploads/2022/06/Dissertation_Gromov.pdf

Автореферат разослан «16» августа 2022 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 002.120.01

кандидат физико-математических наук

А.А. Осипова

Общая характеристика работы

Актуальность исследования

Построение моделей звездных систем (в частности, нашей Галактики) — одна из фундаментальных проблем современной астрономии. Математическое моделирование позволяет изучать далекие космические объекты, их происхождение и эволюцию. Особое значение имеет построение реалистичной, то есть наиболее точно описывающей наблюдательные данные, модели нашей Галактики.

Интерес к штеккелевским потенциалам обусловлен разработанным Бинни [8] алгоритмом описания моделей звездных систем в переменных действие–угол. В литературе известно большое количество выражений для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и скоростей в таких переменных. Однако предлагаемый авторами метод штеккелевской подгонки имеет ряд неразрешимых недостатков: третий интеграл движения является многозначным (а значит не может быть аргументом фазовой плотности); требуется неоднократное численное интегрирование, что ведет к вычислительным трудностям. Используемый в данной работе метод штеккелевского обобщения лишен этих недостатков: он прост в использовании и позволяет получать аналитические выражения для штеккелевского потенциала и, например, пространственной плотности. Реализации и модификации данного подхода и посвящена данная работа.

Кроме того, в литературе известно немного работ, в которых бы строились штеккелевские модели на основе наблюдательных данных. Работа Сато и Миямото [19] устарела. Фамаэ и Дейонге [14] используют только динамические характеристики Галактики, хотя сами подчеркивают о необходимости учета кинематических данных. В работе Бинни и Вона [9] используется метод штеккелевской подгонки, о недостатках которого уже было сказано. Таким образом, предложенная в диссертационной работе модель является наиболее точной штеккелевской моделью из всех предложенных в литературе.

Целью данной работы является разработка и реализация алгоритма построения штеккелевской модели звездной системы, согласующейся с кинематическими данными о вращении, рядом динамических характеристик и имеющей реалистичное вертикальное распределение пространственной плотности.

Научная новизна работы

Были построены трехкомпонентные штеккелевские модели нашей Галактики **наиболее точно** описывающие кинематические и динамические наблюдательные данные. При решении данной задачи был предложен оригинальный алгоритм, позволяющий учитывать природную дисперсию азимутальных скоростей, исключать объекты с избыточными невязками (выбросы), а также учитывать и устранять кинематическую неоднородность групп объектов, относящихся к разным классам.

Впервые были предложены методы решения задачи получения реалистичного вертикального распределения в штеккелевских моделях. Данная проблема возникает во всех известных работах по штеккелевскому моделированию. Один из алгоритмов, основанный на методе эквипотенциалей, фактически дает математический аппарат, позволяющий управлять вертикальной структурой. Были построены трехкомпонентные модели нашей Галактики при разных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих.

Впервые было произведено сравнение двух подходов к штеккелевскому моделированию (штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки). Было установлено, что метод штеккелевского обобщения в ряде случаев оказался более точным. Учитывая его простоту, однозначность в определении третьего интеграла движения, он видится наиболее предпочтительным при дальнейших исследованиях по штеккелевскому моделированию.

Практическая значимость работы

Разработанные алгоритмы могут быть применены при моделировании кривой вращения, распределения плотности и массы в нашей Галактике. Построенные модели при различных предположениях о вертикальной составляющей компонент, а также при различных предположениях о массах тонкого и толстого диска представляют самостоятельный интерес. Полученные в диссертации результаты могут послужить основой для дальнейших масштабных исследований в области фазового моделирования звездных систем и, в частности, нашей Галактики.

Проводимые исследования были поддержаны грантом РФФИ в рамках научного проекта 19-32-90144.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. По данным о кинематике мазеров с тригонометрическими параллаксами построены трехкомпонентные модели потенциала Галактики в ее плоскости. При этом разработан и реализован алгоритм, позволяющий учитывать возможную кинематическую неоднородность мазеров в областях образования массивных звезд по отношению к мазерам остальных типов. Найдено значимое и существенное различие значений природных (неизмерительных) дисперсий азимутальных скоростей для разных групп мазеров. Аналогичные модели потенциала получены по ярким красным гигантам с фотометрическими расстояниями, представляющим более удаленную от центра часть Галактики.
2. Методом штеккелевского обобщения из экваториальной плоскости на все пространство построены модели потенциала Галактики, согласующиеся с ее кривой вращения и рядом динамических характеристик.

3. Разработан и реализован основанный на методе эквипотенциалей подход к решению проблемы нереалистичности вертикального распределения в штеккелевских моделях, который позволяет регулировать сжатие или вертикальный масштаб модели путем варьирования дополнительных параметров. Этим методом в результате обобщения моделей, полученных для галактической плоскости, впервые построены физически адаптированные штеккелевские модели Галактики при разных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих. Модели являются наиболее реалистичными в классе штеккелевских из предложенных в литературе.
4. На примере построенных моделей впервые проведено сравнение двух подходов в рамках штеккелевского моделирования — штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки. Для всего трехкомпонентного потенциала Галактики результаты применения двух методов хорошо согласуются друг с другом. Для отдельных компонент метод штеккелевского обобщения обладает существенным преимуществом по точности. Для метода штеккелевской подгонки разработанный алгоритм на основе эквипотенциалей был с успехом применен с целью достижения реалистичности вертикального распределения плотности.

Личный вклад автора

Первоначальная идея и постановка задачи была предложена Л.П. Осипковым. И.И. Никифорову принадлежат основные идеи алгоритма построения трехкомпонентной модели потенциала Галактики в ее плоскости. Автором диссертационной работы была осуществлена реализация данного алгоритма по данным о кинематике мазеров и ярких красных гигантов. Совместно с автором была осуществлена обработка наблюдательных данных. Соискателем было получено штеккелевское обобщение данной модели, построены эквиденситы. Автором был предложен алгоритм получения реалистичного вертикального распределения плотности в штеккелевских моделях, который основывается на методе эквипотенциалей, разработанном С.А. Кутузовым и Л.П. Осипковым. На основе данного алгоритма лично построены модели Галактики при различных предположениях о вертикальной структуре ее составляющих. Соискателем было проведено сравнение двух подходов к штеккелевскому моделированию. Модификации алгоритмов, анализ и интерпретация результатов проводились совместно с соавторами публикаций.

Апробация результатов

Результаты, полученные в диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедр Небесной механики и Космических технологий и прикладной астродинамики Санкт-Петербургского государственного университета, на семинарах в ГАО

РАН, а также на различных конференциях, среди которых: «Современная звездная астрономия» (ГАИШ, Москва, 2012 г., 2015 г., 2018 г.; САО РАН, Карачаево-Черкессия, 2019 г.); «Всероссийская астрономическая конференция» (ГАО РАН, Санкт-Петербург, 2013 г.); «Пулковская молодежная астрономическая конференция» (ГАО РАН, Санкт-Петербург, 2013 г., 2014 г.); «Физика космоса» (Коуровская АО, Свердловская обл., 2015 г.); «Физика космоса, структура и динамика планет и звездных систем» (УдГУ, Ижевск, 2012 г.); «Процессы управления и устойчивость» (СПбГУ, Санкт-Петербург, 2012 г., 2013 г., 2014 г., 2016 г.).

Публикации автора по теме диссертации

Журналы из списка ВАК:

1. Громов А.О. Модели галактик со штеккелевским потенциалом // Вестник СПбГУ, сер. 1, 2014, вып. 2, с. 322;
2. Gromov A.O., Nikiforov I.I., Ossipkov L.P. On the possibility of applying the quasi-isothermal Staekel's model to our Galaxy // Baltic Astronomy, 2015, vol. 24, p. 150;
3. Gromov A.O., Nikiforov I.I., Ossipkov L.P. Staekel-type dynamic model of the Galaxy based on maser kinematic data // Baltic Astronomy, 2016, vol. 25, p. 53;
4. Громов А.О., Никифоров И.И. Трехкомпонентная штеккелевская модель Галактики, основанная на кривой вращения по данным о мазерах // Астрофизический бюллетень, 2021, т. 76, вып. 2, с. 187;
5. Громов А.О., Никифоров И.И. Построение штеккелевской модели Галактики: решение проблемы реалистичности вертикального распределения // Письма в астрономический журнал, 2021, Т. 47, № 6, с. 383.

Другие публикации

1. Громов А.О. Штеккелевские изотермические модели галактик // Процессы управления и устойчивость: труды 43-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2012, с. 125;
2. Gromov A.O. New quasi-isothermal models of Galaxy // Astronomicheskii Tsirkulyar, 2012, № 1579, p. 1;
3. Громов А.О. Проекция плотности для моделей звездных систем с обобщенно-изотермическим потенциалом // Процессы управления и устойчивость: труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2013, с. 187;

4. Громов А.О. Новые штеккелевские модели галактик // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, 2013, № 221, с. 129;
5. Громов А.О. Оценка параметров для обобщенно-изотермической модели Галактики // Процессы управления и устойчивость: труды 45-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2014, с. 117;
6. Gromov A.O. Staekel models of galaxies with generalized isothermal potential // Astronomical and Astrophysical Transactions, 2014, vol. 28, issue 4, p. 331;
7. Громов А.О. Модель распределения массы в звездных системах с квази-изотермическим потенциалом // Физика космоса: труды 44-й международной студенческой научной конференции, 2015, с. 178;
8. Громов А.О., Никифоров И.И. Модель Галактики с квази-изотермическим потенциалом // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове, 2015, № 222, с. 31;
9. Громов А.О. Сравнение штеккелевских моделей с моделями, полученными методом эквипотенциалей // Процессы управления и устойчивость: труды 47-й международной научной конференции аспирантов и студентов, СПб: Издательство СПбГУ, 2016, с. 163;
10. Громов А.О., Никифоров И.И. Трехкомпонентная штеккелевская модель галактики // Астрономия-2018. т. 1. Современная звездная астрономия 2018. М.: Тривант, 2018, с. 137.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 140 страниц, из них 131 страница текста, включая 34 рисунка и 44 таблицы. Список литературы включает в себя 100 наименований на 9 страницах.

Содержание диссертации

Во **введении** обосновывается актуальность темы, ее цели, научная новизна, практическая значимость. Перечисляются выносимые на защиту результаты, публикации по теме диссертации, указывается апробация результатов.

В **первой** главе представлены общие сведения о штеккелевских потенциалах, которые являются наиболее известным классом сепарабельных потенциалов. В таких потенциалах уравнение Гамильтона–Якоби допускает разделение переменных, а значит штеккелевские модели могут быть описаны в переменных действие–угол. В

литературе известно много работ (например, [7], [12]), в которых в таких переменных задаются выражения для фазовой плотности в шестимерном пространстве координат и скоростей. Построение реалистичной штеккелевской модели видится первым шагом на пути к решению глобальной задачи фазового моделирования.

Штеккелевские потенциалы задаются в эллиптических координатах ξ_1 и ξ_2 , которые связаны с цилиндрическими координатами R и z следующими формулами

$$R = z_0 \sqrt{(\xi_1^2 - 1)(1 - \xi_2^2)}, \quad z = z_0 \xi_1 \xi_2, \quad \xi_1 \in [1, \infty), \quad \xi_2 \in [-1, 1].$$

В этих координатах штеккелевские потенциалы представляются в виде

$$\Phi = \frac{\varphi_1(\xi_1) - \varphi_2(\xi_2)}{\xi_1^2 - \xi_2^2}. \quad (1)$$

В настоящее время известны два подхода к штеккелевскому моделированию: методы штеккелевского обобщения и штеккелевской подгонки. В первой главе приводятся основные формулы и этапы моделирования двух этих методов. Большой вклад в разработку первого из них внес Родионов [6]. Им были предложены формулы определения функций $\varphi(\xi)$, если потенциал задан в экваториальной плоскости

$$\varphi(\xi) = \xi^2 \Phi \left(R = z_0 \sqrt{\xi^2 - 1}, z = 0 \right), \quad (2)$$

на оси симметрии

$$\varphi(\xi) = \Phi(R = 0, z = 0) - (1 - \xi^2) \Phi(R = 0, z = z_0 \xi), \quad (3)$$

а также для потенциала, заданного в некотором столбе. Было установлено и доказано, что функции $\varphi(\xi)$ должны обладать некоторыми свойствами, а именно

- 1) $\varphi(0) = 0$;
- 2) $\varphi(1) = \Phi_0$, где Φ_0 — значение потенциала в центре модели;
- 3) При $\xi \rightarrow \infty$ $\frac{\varphi(\xi)}{\xi} \rightarrow \frac{GM}{z_0}$, где G — гравитационная постоянная, M — полная масса.
- 4) Для того, чтобы не возникало особенностей распределения плотности в штеккелевских моделях, необходима шестикратная непрерывная дифференцируемость потенциала в центре модели, что эквивалентно $\varphi_1^{(n)}(\xi_1 = 1) = \varphi_2^{(n)}(\xi_2 = 1)$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

Условие существования штеккелевских потенциалов в цилиндрических координатах имеет вид

$$3 \left(z \frac{\partial \Phi}{\partial R} - R \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) - (R^2 + z_0^2 - z^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial z} + Rz \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Данное равенство, в свою очередь, является условием существования третьего квадратичного интеграла движения

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\lambda^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*),$$

где

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}.$$

Наличие в модели третьего интеграла движения (помимо двух классических интегралов: энергии и площадей) позволяет, например, объяснить наблюдаемую в окрестности Солнца трехосность эллипсоида скоростей, не выходя за рамки теории стационарной Галактики. Сохранение третьего интеграла является ключевым разногласием двух подходов штеккелевского моделирования. В методе штеккелевского обобщения, модифицированного и реализованного в данной работе, параметр z_0 фиксируется, тем самым третий интеграл сохраняет свое значение во всей рассматриваемой области. В методе штеккелевской подгонки значения z_0 меняются при переходе от одной рассматриваемой точки пространства к другой, таким образом меняется и значение I_3 . О невозможности многозначных интегралов быть аргументом фазовой плотности в своих работах утверждал Антонов [1].

Таким образом, в первой главе обосновывается необходимость построения методом штеккелевского обобщения модели некоторой звездной системы, которая бы согласовывалась с наблюдательными данными. В литературе известно немного работ, в которых бы строились подобные модели. Одна из первых работа Сато и Миямото [19]. В ней авторы определяют значения параметров путем сравнения кривой круговой скорости с 18-ю наблюдательными значениями, полученными в результате наблюдения движения газа в центральной области $R < 10$ кпк. Работа представляет интерес, так как является первой попыткой построения штеккелевской модели на основе наблюдательных данных, однако в настоящее время используемые данные устарели, да и их количество мало.

В работе Фамаэ и Дейонге [14] заранее выбранные формы штеккелевских потенциалов подгонялись под соответствие значениям производных, динамических характеристик. В частности исследуемые потенциалы должны давать плоскую кривую вращения. Постоянные Оорта, значения круговой скорости и пространственной плотности принимались фиксированными. Используя данные величины как критерий отбора авторы получили сетку значений параметров потенциала и более подробно исследовали пять из них. Формально модель потенциала является трехкомпонентной (гало, тонкий диск и толстый диск). Вероятно, данная работа является первой попыткой построения многокомпонентной штеккелевской модели Галактики по наблюдательным данным. Однако, как отмечают сами авторы, для построения

реалистичной модели Галактики вместе с динамическими характеристиками необходимо использовать и кинематические данные. К сожалению, ими это так и не было сделано.

Стоит отметить работу Бинни и Вона [9], в которой строится фазовая модель для системы шаровых скоплений. Заданные выражения функции фазовой плотности диска и гало (двухкомпонентная модель мотивирована бимодальным распределением металличности) явно зависят от переменных действия, значения которых находятся при помощи штеккелевских потенциалов. Однако для получения штеккелевского приближения разработанной ранее модели Пиффла и др. [17] используется алгоритм штеккелевской подгонки, о недостатках которого уже было сказано.

Во **второй** главе предложен алгоритм построения штеккелевской модели Галактики с учетом кинематических данных. В экваториальной плоскости гало задается квази-изотермическим потенциалом [3]

$$\Phi_1(R, 0) = \Phi_{0,1} \ln \left(1 + \frac{\beta}{w(R)} \right), \quad q = \frac{\beta}{\beta + 1}, \quad (5)$$

где функция $w(R)$ определяется как

$$w^2(R) = 1 + \kappa_1^2 \frac{R^2}{R_0^2}, \quad (6)$$

$R_0 = 8.15$ кпк [18] — расстояние до центра Галактики.

Диск описывался обобщенно-изохронным потенциалом [2]

$$\Phi_2(R, 0) = \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 R^2}}. \quad (7)$$

Для центральной компоненты был выбран потенциал Миямото–Нагая [16]

$$\Phi_3(R, 0) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{R^2 + \kappa_3^2}}. \quad (8)$$

Функции φ для различных компонент потенциала (5) — (8) выражаются в явном виде:

$$\varphi_h(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,1} \ln \left[1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}} \right], \quad (9)$$

$$\varphi_d(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 z_0^2 (\xi^2 - 1)}}, \quad (10)$$

$$\varphi_b(\xi) = \xi^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi^2 - 1) + \kappa_3^2}}. \quad (11)$$

Для всей Галактики

$$\varphi(\xi) = \varphi_h(\xi) + \varphi_d(\xi) + \varphi_b(\xi).$$

Параметры потенциала оценивались путем оптимизации модельной кривой круговой скорости с наблюдательными значениями азимутальных скоростей. В результате минимизировалась целевая функция

$$L^2 = \sum_{i=1}^N p_i [\theta_i - \theta_C(R_i)]^2, \quad (12)$$

с весами

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (13)$$

где θ_i — измеренное значение азимутальной скорости, $\theta_C^2 = -R_i \frac{d\Phi}{dR_i}$ — модельное значение круговой скорости на R_i , σ_i — ошибка измерения азимутальной скорости.

При решении задачи были использованы три выборки объектов:

HMSFRs: наиболее однородная, состояла только из областей образования массивных звезд: все объекты из каталога Рида и др. [18], два HMSFRs (G125.51+02.03 и IRAS21379+5106) из каталога Коллаборации VERA [21] и один (G305.20+0.208) из каталога в работе Расторгуева и др. [5].

SFRs: содержала только области образования звезд (различных масс) из каталога Коллаборации VERA [21].

VERA: включала объекты каталога Коллаборации VERA [21] всех типов: SFRs, звезды на асимптотической ветви гигантов, красные сверхгиганты (далее выборка VERA).

Значения характеристики χ^2 , которая вычислялась как L^2/N_{free} , где $N_{\text{free}} = N - M$ — число степеней свободы, M — число определяемых параметров, получились много больше единицы, а следовательно необходимо учитывать природную дисперсию скоростей σ_0 . Она была включена в выражение для весовых коэффициентов

$$p_i = (\sigma_i^2 + \sigma_0^2)^{-1}; \quad (14)$$

и определялась из уравнения

$$L^2(\sigma_0^2) = N_{\text{free}} \quad (15)$$

при фиксированных значениях параметров потенциала. Также в алгоритм была добавлена возможность учета двух различных значений природной дисперсии для подвыборок объектов, относящихся к разным классам. Благодаря этому удалось выявить значительную кинематическую неоднородность некоторых из них.

На третьем этапе выявлялись и исключались объекты с избыточными весами (выбросы), которые сильно смещали решение. Для выборок SFRs и VERA в центральной области находился лишь один объект (SgrB2). Определение параметров потенциала

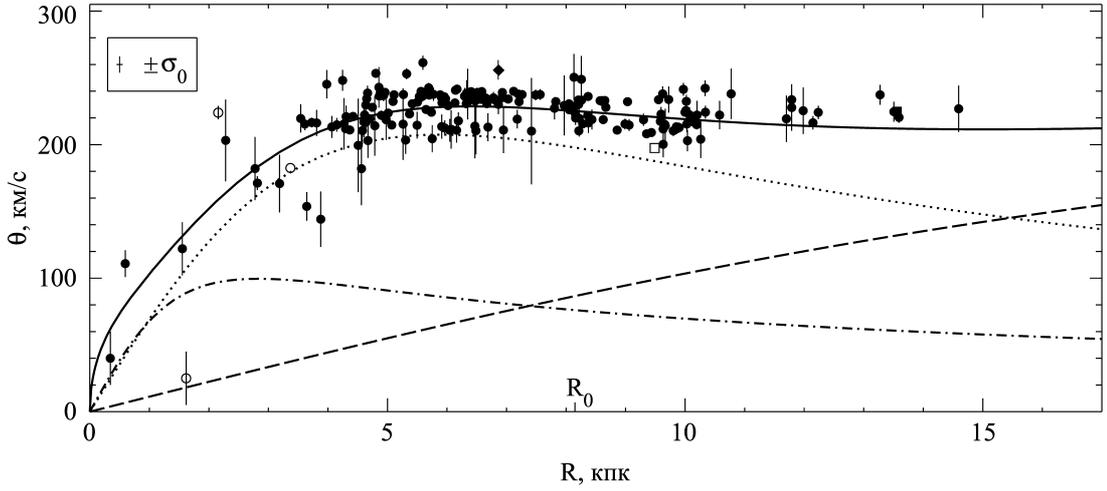


Рис. 1: Кривые круговой скорости Галактики для моделей потенциала, аппроксимирующих данные о мазерных источниках для выборки HMSFRs. Кружки — объекты каталога Рида и др. [18], квадраты — два объекта из каталога Коллаборации VERA и др. [21], ромб — объект из каталога Расторгуева и др. [5]. Кривые круговой скорости: сплошная линия — трехкомпонентная модель; штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрих-пунктирная линия — центральная компонента.

по одному объекту заведомо невозможно. Поэтому при работе с данными выборки значения параметров $\Phi_{0,3}$ и κ_3 принимались равными тем, что были получены в результате оценки по выборке HMSFRs.

Из-за ненулевой дисперсии скоростей мазеров модельные кривые описывают зависимость от R , строго говоря, не круговой скорости, а средней азимутальной. Для трех выборок мазеров был оценен асимметричный сдвиг $\Delta\theta_{\text{ad}} = v_{\odot} - [\theta_{\odot} - \theta_C(R_0)]$ при $v_{\odot} = 11.0 \pm 2$ км/с [10], $\theta_{\odot} = 247 \pm 4$ км/с [18]. На четвертом этапе данные каждой из выборок были скорректированы на полученный для нее асимметричный сдвиг: $\theta_{i,\text{corr}} = \theta_i - \Delta\theta_{\text{ad}}$.

На рис. 1 представлен пример кривой круговой скорости для выборки HMSFRs.

С целью выявления истинности разложения кривой круговой скорости по компонентам были получены матрицы корреляций параметров потенциала. Установлено отсутствие полного вырождения какой-либо пары, однако между некоторыми параметрами существует сильная корреляция.

Для определения параметра z_0 необходимо использовать другой подход, так как он не входит в выражение для пространственной плотности. Он оценивался с помощью формулы

$$z_0^2(R) = \frac{3 \frac{\partial \Phi(R, 0)}{\partial R} + R \left(\frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial R^2} - 4 \frac{\partial^2 \Phi(R, 0)}{\partial z^2} \right)}{\frac{\partial^3 \Phi(R, 0)}{\partial z^2 \partial R}} - R^2. \quad (16)$$

Так как для работы с данной формулой необходим потенциал, заданный во всем пространстве, то для оценки z_0 использовался потенциал Гарднера [15], так как он

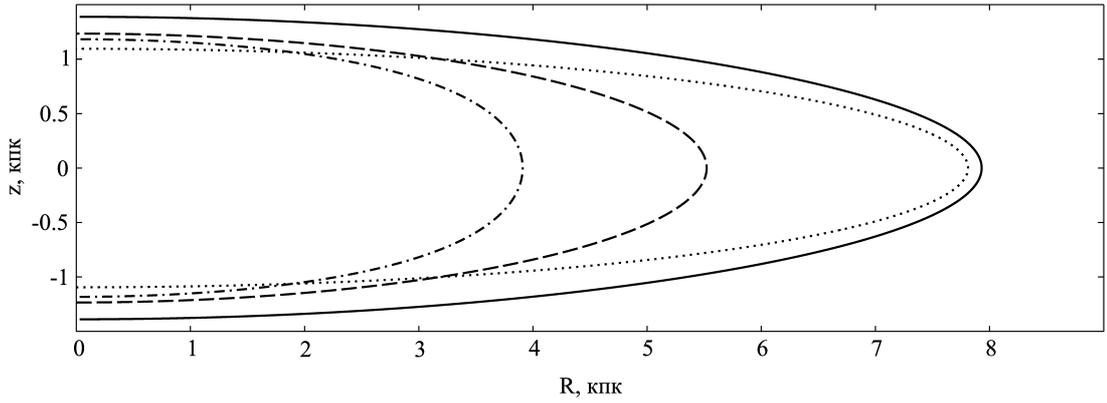


Рис. 2: Эквиденситы для выборки HMSFRs. Кривые: сплошная линия — трехкомпонентная модель; штриховая линия — гало; пунктирная линия — диск; штрихпунктирная линия — центральная компонента.

давал меньшие вариации z_0 при изменении R . В итоге получилось значение $z_0 = 5.3$ кпк, которое и использовалось в данной главе.

Зная выражения для функций $\varphi(\xi)$ можно получить аналитическое выражение для пространственной плотности. На рис. 2 приведены эквиденситы (кривые равной плотности) при $\rho = 0.1 M_{\odot}/\text{пк}^3$ для отдельных компонент и для всей Галактики. Стоит заметить, что полученные эквиденситы получились мало правдоподобными в вертикальном распределении плотности. Так по звездным подсчетам сжатие внутреннегo гало Галактики составляет 0.65 ± 0.05 , внешнего — 0.8 ± 0.1 [10]; в моделях гало часто принимается сферическим. Сжатие модельного гало 0.24 противоречит этим данным. Центральная компонента, если говорить о классическом балдже, также предполагается сферической. Если представлять ею галактический бар, то отношение осей должно быть ~ 0.35 [10]. Полученные балджи моделей с отношением осей 0.27 на рис. 2 являются избыточно сжатыми. Неправдоподобным видится и вертикальное распределение пространственной плотности дисков, полутолщина которых составляет от 300 ± 50 пк для тонкого диска до 900 ± 180 пк для толстого [10]. Модельный диск получился толще этих значений. Несмотря на это модельные значения плотности в окрестности Солнца давали близкие к наблюдаемым значения [10]. Также с работами других авторов (например, [22]) согласовывались результаты по массе в шаре различных радиусов.

Решению задачи построения реалистичного вертикального распределения в штекелевских моделях посвящена **третья** глава. Предложены два метода.

В первом, основанном на условной оптимизации, на параметры потенциала накладывались дополнительные ограничения. Так для диска полагалось, что ход вертикальной плотности подчиняется барометрическому закону $\rho(z) = \rho_0 \exp(-|z|/h_z)$, а для гало условие постоянства центральной поверхностной плотности $\mu_{0D} \equiv r_0 \rho_0 \approx \text{const}$, где r_0 — радиус ядра профиля темной материи, ρ_0 — центральная плотность. Таким методом удалось решить локальную задачу построения толстого диска с полутолщиной $h_z = 600$ пк, однако попытки сжать его до меньших размеров, так же

как и попытки добиться сферичности гало, не увенчались успехом.

Во втором методе используются две различные функции $\varphi(\xi)$, одна из которых отвечает за радиальное, а другая за вертикальное распределения. Для этого потенциал из экваториальной плоскости обобщался на все пространство методом эквипотенциалей [4]. Суть его состоит в том, что в результате замены переменной вида $r^2 = f(R, z)$, где r — галактоцентрическое расстояние, заданный в экваториальной плоскости потенциал $\Phi(r) = \Phi(R, 0)$, обобщается на все пространство потенциалом $\Phi(f(R, z))$, который зависит от обеих цилиндрических координат R и z .

Ниже приведены аналитические выражения для функций $\varphi(\xi)$, которые и использовались при дальнейшем штеккелевском моделировании.

Для гало (5) со сферическим обобщением $f(R, z) = R^2 + z^2$:

$$\varphi_1(\xi_1) = \Phi_{0,1} \xi_1^2 \ln \left[1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 (\xi_1^2 - 1)}} \right], \quad (17)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,1} \ln(1 + \beta) - \Phi_{0,1} (1 - \xi_2^2) \ln \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \kappa_1^2 z_0^2 \xi_2^2}} \right). \quad (18)$$

Для центральной компоненты (8) при $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2\mu\sqrt{(1 - \varepsilon)z^2 + \varepsilon^2}$:

$$\varphi_1(\xi_1) = \xi_1^2 \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2\mu\varepsilon + \kappa_3^2}}, \quad (19)$$

$$\varphi_2(\xi_2) = \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{2\mu\varepsilon + \kappa_3^2}} - (1 - \xi_2^2) \Phi_{0,3} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 \xi_2^2 + 2\mu\sqrt{(1 - \varepsilon)z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon^2} + \kappa_3^2}}. \quad (20)$$

Для диска (7) при $f(R, z) = R^2 + z^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{(\mu^2 z^2 + \varepsilon^2)}$:

$$\varphi_1(\xi_1) = \Phi_{0,2} \xi_1^2 \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 [z_0^2 (\xi_1^2 - 1) + 2(1 - \varepsilon)\varepsilon]}}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi_2) = & \Phi_{0,2} \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + 2(1 - \varepsilon)\varepsilon\kappa_2^2}} - \\ & - \Phi_{0,2} (1 - \xi_2^2) \frac{\alpha}{(\alpha - 1) + \sqrt{1 + \kappa_2^2 [z_0^2 \xi_2^2 + 2(1 - \varepsilon)\sqrt{\mu^2 z_0^2 \xi_2^2 + \varepsilon^2}]}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Введение дополнительных параметров $\mu_2, \varepsilon_2, \mu_3, \varepsilon_3$, а также возможность варьирования параметра z_0 позволяет непосредственно управлять вертикальным распределением. В алгоритм была добавлена возможность корректировки параметров с целью совпадения потенциалов, использованного во второй главе и после применения метода эквипотенциалей, в экваториальной плоскости. Были построены физически адаптивные модели Галактики при различных предположениях о вертикальной структуре компонент: «сферическое гало — тонкий диск — сферическая центральная компонента», «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента», «сжатое гало — тонкий диск — сферическая центральная компонента» и «сжатое га-

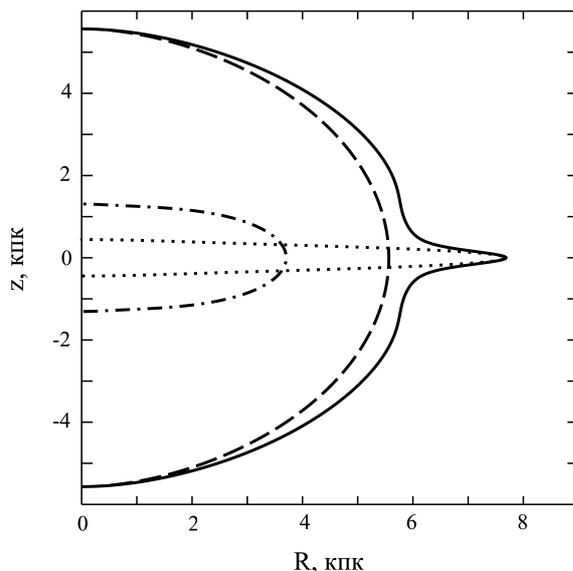


Рис. 3: Эквиденситы по выборке HMSFRs; случай «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента». Обозначения кривых такие же как и на рис. 2.

ло — тонкий диск — сжатая центральная компонента». На рис. 3 в качестве примера представлен второй вариант для выборки HMSFRs, как наиболее реалистичный.

Разработанный алгоритм построения штеккелевских моделей был применен также к данным о зависимости круговой скорости от галактоосевого расстояния R , полученным Айлерс и др. [13] по данным о $> 23\,000$ ярких красных гигантов (ЯКГ). В качестве исходных данных использовались приведенные Айлерс и др. [13] средние значения круговой скорости и их доверительные интервалы для 38 значений R .

Масса тонкого диска в построенной модели получилась почти в 5 раз больше массы толстого. Вместе с тем ряд данных говорит в пользу того, что масса толстого диска может составлять $\sim 50\%$ массы всего диска Галактики (см., например, [11], [20]). Поэтому по данным о ЯКГ была также построена штеккелевская модель при условии равенства масс двух дисковых компонент (решение дает $M_{\text{thin}} = M_{\text{thick}} = 3.5 \times 10^{10} M_{\odot}$) в тех же остальных предположениях.

На рис. 4 представлены сравнения кривых круговой скорости с наблюдательными данными, а на рис. 5 эквиденситы для случая «сферическое гало — тонкий диск — сжатая центральная компонента» при разных предположениях о массах дисков.

В **четвертой** главе впервые сравниваются два подхода к штеккелевскому моделированию: метод штеккелевского обобщения и метод штеккелевской подгонки. На первом этапе последним методом строилась модель с потенциалом (5) — (8). Рассматривалась конечная область пространства, в которой, как ожидалось, метод штеккелевской подгонки работает лучше всего: $R \in [0; 10]$, $z \in [0; 3]$. В качестве пробных точек рассматривалась сетка с шагом в 1 кпк. Таким образом, исследовалось поведение функции $\varphi(\xi)$ в 44 точках пространства, что близко к количеству, которое в своей работе использовали Бинни и Вон (40 точек) [9].

Далее для каждой из 44 точек по формуле (16) вычислялось значение параметра

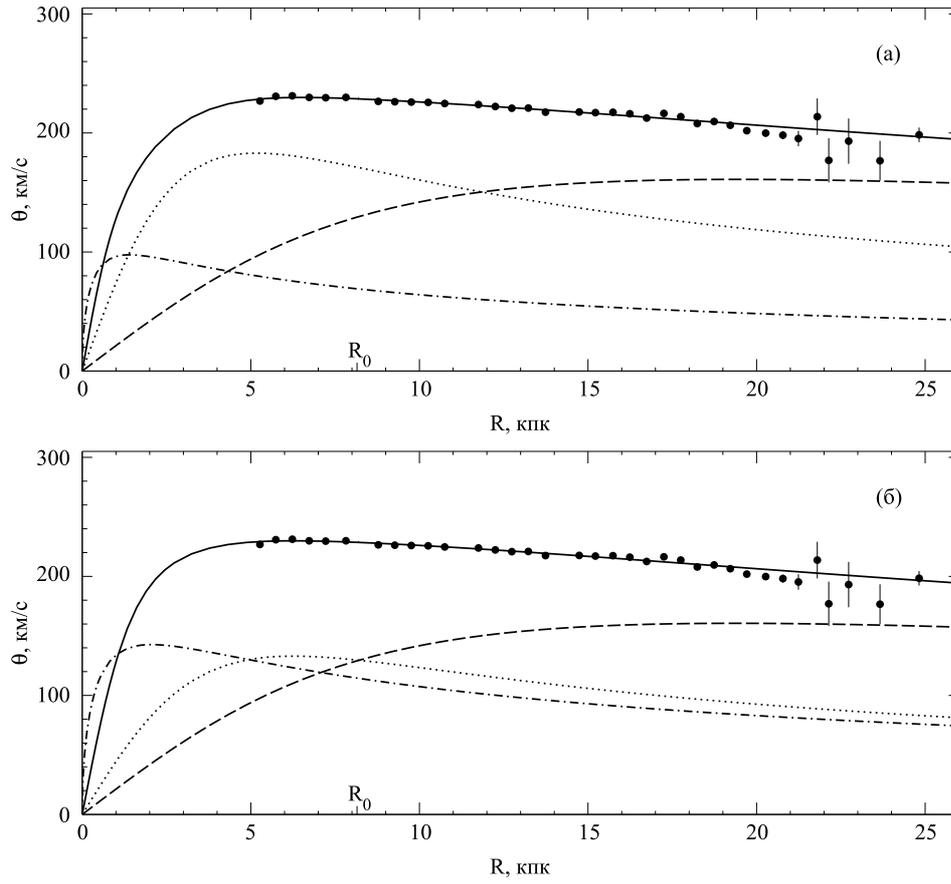


Рис. 4: Кривые круговой скорости, полученные по данным о ЯКГ. (а) — при разных массах дисков, (б) — при одинаковых массах дисков. Обозначения кривых такие же как и на рис. 1.

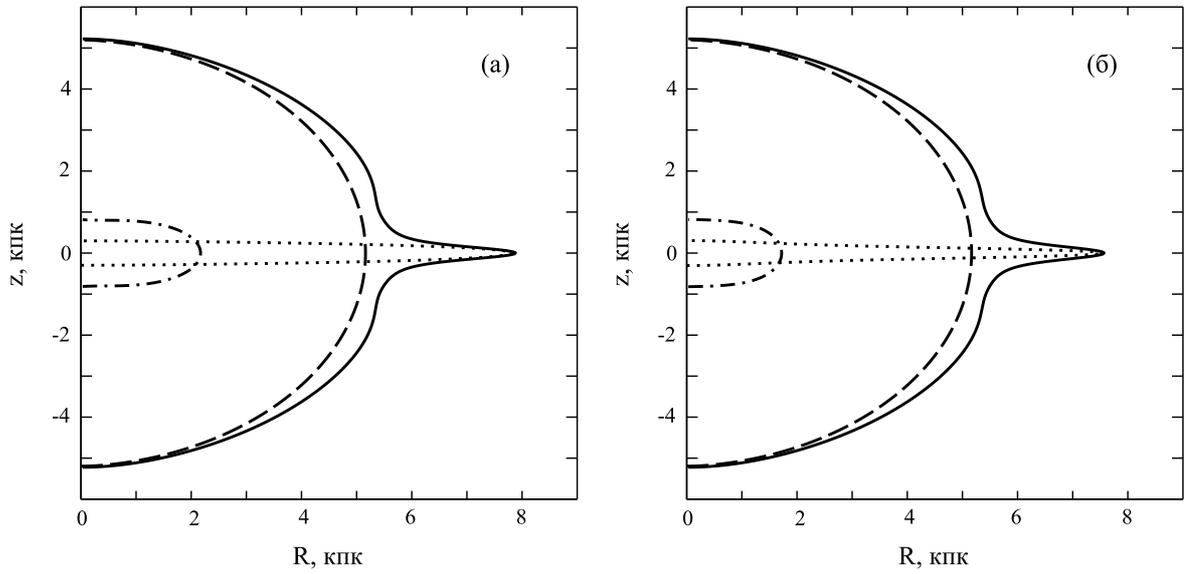


Рис. 5: Эквиденситы, полученные по данным о ЯКГ. (а) — при разных массах дисков, (б) — при одинаковых массах дисков. Обозначения кривых такие же как и на рис. 2.

z_0 . Постоянство z_0 является ключевым условием для сохранения третьего интеграла движения.

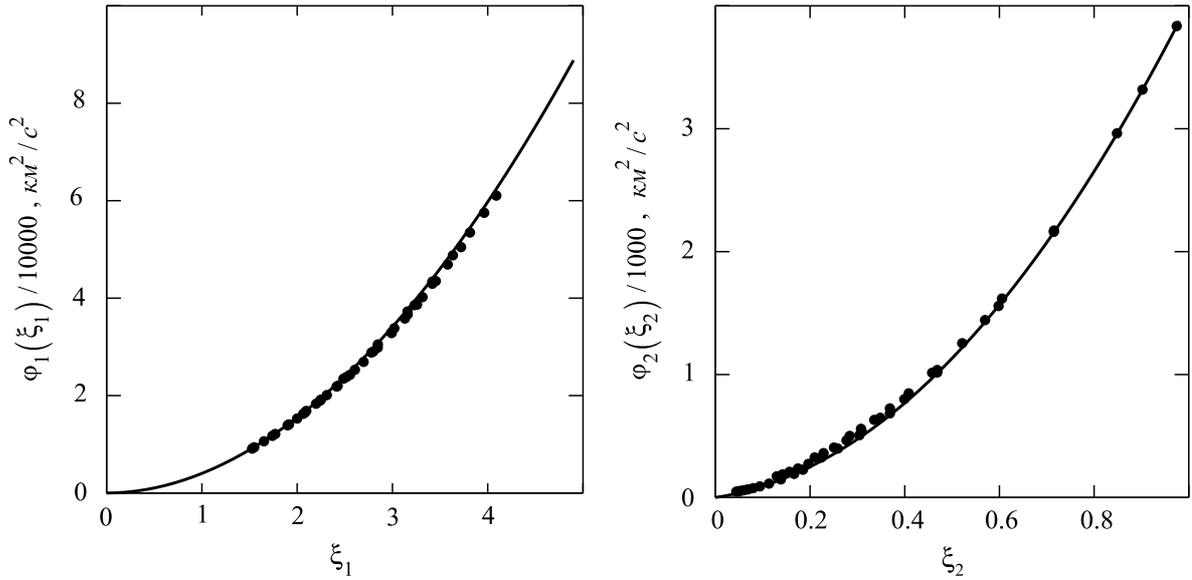


Рис. 6: Сравнение функций $\varphi_1(\xi_1)$ (слева) и $\varphi_2(\xi_2)$ (справа) для трехкомпонентной модели, полученных методом штеккелевского обобщения (сплошные линии) со значениями этих функций, полученных методом штеккелевской подгонки (точки).

Следующим шагом в алгоритме штеккелевской подгонки является определение значений функций $\varphi_1(\xi_1)$ и $\varphi_2(\xi_2)$ в заданных точках, после чего они аппроксимировались квадратичными функциями.

На рис. 6 представлено сравнение функций $\varphi(\xi)$ для всей Галактики, полученных в третьей главе, со значениями, полученными методом штеккелевской подгонки. Согласие получилось хорошим. Однако такое поведение характерно не для всех компонент. Так для диска прослеживаются 4 ветви данных, соответствующие четырем плоскостям $z = \text{const}$. Для центральной же компоненты поведение пробных точек метода штеккелевской подгонки и вовсе выглядит хаотичным. На рис. 7 представлены относительные отклонения для трехкомпонентной модели $\delta\varphi(\xi)$ метода штеккелевской подгонки (φ_{fudge}) от метода штеккелевского обобщения (φ_{gen}), которые вычислялись по формуле:

$$\delta\varphi(\xi) = \frac{|\varphi_{\text{gen}}(\xi) - \varphi_{\text{fudge}}(\xi)|}{\varphi_{\text{gen}}(\xi)} \cdot 100\%.$$

Среднее отклонение для функции $\varphi_1(\xi_1)$ для гало составило 0.7%, а $\varphi_2(\xi_2)$ — 6.3%; для диска — 18.9% и 9.6%; для центральной компоненты — 28.7% и 25.7%; а для всей модели — 2.1% и 8.4% соответственно.

С использованием метода эквипотенциалей удалось построить эквиденситы, соответствующие желаемым профилям. Таким образом, разработанный алгоритм показал свою универсальность независимо от используемого к штеккелевскому моделированию подхода.

Из проведенного сравнения можно сделать вывод, что для трехкомпонентной модели метод штеккелевского обобщения и метод штеккелевской подгонки давали сопоставимые результаты. Однако при исследовании отдельных компонент Галактики

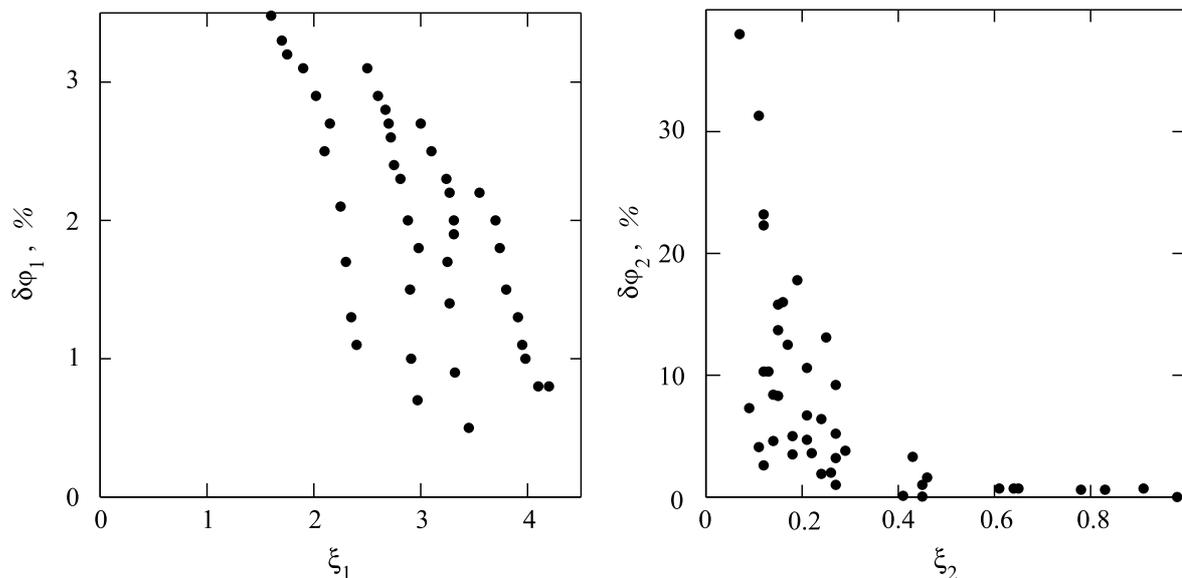


Рис. 7: Распределение отклонений (в %) функций $\varphi_1(\xi_1)$ (слева) и $\varphi_2(\xi_2)$ (справа), полученных методом штеккелевского обобщения от значений соответствующих функций, полученных в отдельных точках методом штеккелевской подгонки.

метод штеккелевского обобщения был заметно лучше. Учитывая явную вычислительную простоту и однозначность третьего интеграла движения, метод штеккелевского обобщения видится наиболее предпочтительным.

В **заключении** кратко сформулированы основные результаты проведенного в диссертационной работе исследования.

Предложенный в данной диссертации алгоритм гибок к изменению представлений о виде компонент Галактики, способен учитывать новые кинематические данные, а также принимать во внимание различные динамические аспекты. Он позволяет построить штеккелевскую модель, начиная с этапа выбора потенциала в экваториальной плоскости, охватывая различные стороны динамического моделирования, а отдельные главы могут применяться для усовершенствования уже существующих методов. Построенные модели видятся наиболее реалистичными штеккелевскими моделями из известных в литературе. Они представляют как самостоятельный интерес, так и могут служить фундаментом для дальнейших научных исследований в области фазового моделирования и динамики звездных систем в целом.

Список литературы

1. Антонов В.А. Проблема третьего интеграла движения в звездной системе // Итоги науки Астрономия. — 1966. — С. 61-92.
2. Кузмин Г.Г., Маласидзе Г.А. Форма гравитационного потенциала для решения уравнений движения в плоскости с использованием эллиптических интегралов // Сообщ. АН ГрузССР. — 1969. — Т. 54. — С. 565-568.

3. Кузмин Г.Г., Велтманн Ю.-И.К., Теньес П.Л. Квази-изотермические модели сферических звездных систем // Публ. Тарт. обсерв. — 1986. — Т. 51. — С. 232-242.
4. Кутузов С.А., Осипков Л.П. Модель крупномасштабного гравитационного поля галактик // Вест. Ленингр. ун-та. Сер. 1. — 1981. — С. 99-105.
5. Расторгуев А.С., Уткин Н.Д., Заболотских М.В. и др. Галактические мазеры: кинематика, спиральная структура и динамическое состояние диска // Астрофиз. бюлл. — 2017. — Т. 72. — С. 134-155.
6. Родионов В.И. О построении моделей звездных систем, допускающих третий квадратичный интеграл движения звезд // Вест. Ленингр. ун-та. — 1974. — Т. 13. — С. 142-148.
7. Binney J., McMillan P. Models of our Galaxy - II // MNRAS. — 2011. — V. 413. — P. 1889-1898.
8. Binney J. Actions for axisymmetric potentials // MNRAS. — 2012. — V. 426. — P. 1324-1327.
9. Binney J., Wong L.K. Modelling the Milky Way's globular cluster system // MNRAS. — 2017. — V. 467. — P. 2446-2457.
10. Bland-Hawthorn J., Gerhard O. The Galaxy in Context: Structural, Kinematic, and Integrated Properties // Ann. Rev. Astron. Astrophys. — 2016. — V. 54. — P. 529-596.
11. Debattista V.P, Ness M., Gonzalez O.A., et al. Separation of stellar populations by an evolving bar: implications for the bulge of the Milky Way // MNRAS. — 2017. — V. 469. — P. 1587-1611.
12. Dehnen W. Simple Distribution Functions for Stellar Disks // AJ. — 1999. — V. 118. — P. 1201-1208.
13. Eilers A.-C., Hogg D.W., Rix H.-W., and Ness M.K. The Circular Velocity Curve of the Milky Way from 5 to 25 kpc // Astrophys. J. — 2019. — V. 871. — id. 120.
14. Famaey B., Dejonghe H. Three-component Stäckel potentials satisfying recent estimates of Milky Way parameters // MNRAS. — 2003. — V. 340. — P. 752-762.
15. Gardner E., Nurmi P., Flynn C. The effect of the solar motion on the flux of long-period comets // MNRAS. — 2011. — V. 411. — P. 947-954.
16. Miyamoto M., Nagai R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies // Publ. Astron. Soc. Japan. — 1975. — V. 27. — P. 533-543.
17. Piffl T., Binney J., McMillan P.J., et al. Constraining the Galaxy's dark halo with RAVE stars // MNRAS. — 2014. — V. 445. — P. 3133-3151.

18. Reid M.J., Menten K.M., Brunthaler A., et al. Trigonometric Parallaxes of High-mass Star-forming Regions: Our View of the Milky Way // *ApJ*. — 2019. — V. 885. — id. 131.
19. Satoh S., Miyamoto M. A hydrostatic equilibrium of our Galaxy under three unequal velocity dispersions of stars // *Publ. Astron. Soc. Japan*. — 1976. — V. 28. — P. 599-615.
20. Snaith O., Haywood M., Di Matteo P., et al. Reconstructing the star formation history of the Milky Way disc(s) from chemical abundances // *Astron. Astrophys.* — 2015. — V. 578. — id. A87.
21. VERA collaboration, T. Hirota, T. Nagayama, M. Honma, et al. The First VERA Astrometry Catalog // *Publ. Astron. Soc. Pacific*. — 2020. — V. 72. — id. 50.
22. Williams A.A., Evans N.W. Haloes light and dark: dynamical models of the stellar halo and constraints on the mass of the Galaxy // *MNRAS*. — 2015. — V. 454. — P. 698-707.