



## К использованию нового метода пикселизации сферы SREAG

З.М. Малкин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН

### Аннотация

В работе Z. Malkin (2019) был предложен новый метод SREAG (Spherical Rectangular Equal-Area Grid) для деления сферической поверхности на прямоугольные ячейки равной площади. Сетка SREAG состоит из колец параллельных экватору примерно равной ширины, каждое из которых разделено на ячейки, количество которых варьируется в зависимости от средней широты кольца. В настоящей работе представлены некоторые более подробные характеристики SREAG. Максимальное количество колец, которое может быть получено с помощью метода SREAG при использовании 32-битной целой арифметики составляет 41068, что соответствует наивысшему разрешению сетки  $\sim 16''$ . При этом полный доступный диапазон разрешений составляет от  $\sim 45^\circ$  до  $\sim 16''$ , что достаточно для решения любых астрономических задач, описанных в литературе. Также в работе оценена вычислительная точность метода SREAG. Выведены простые выражения для расчета базового параметра сетки SREAG, количества колец, исходя из желаемого количества ячеек и требуемого разрешения сетки.

## 1 Введение

Новый метод деления сферической поверхности на ячейки равной площади SREAG (Spherical Rectangular Equal-Area Grid) был предложен в Z. Malkin (2019). Вообще говоря, проблема разбиения сферы на равновеликие площадки не нова и для ее решения предложено много различных методов, но их анализ не входит в задачу настоящей работы. Можно лишь заметить, что в последние годы в астрономических исследованиях большую популярность приобрел метод HEALPix (Górski и др., 2005), который обладает многими достоинствами, включая развитый математический аппарат для анализа данных. Однако, как показано в Z. M. Malkin (2022), этот метод не обладает достаточным набором разрешений координатной сетки для работы с относительно малыми каталогами, включающими несколько тысяч объектов. Для них сетка HEALPix с параметром  $N_{side}=2$  является слишком грубой (содержит всего 48 ячеек на сфере), а следующая сетка с  $N_{side}=4$  имеет 192 ячейки, которые слишком малы для обеспечения достаточного числа источников в каждой ячейке, учитывая их неравномерное распределение по небу. Поэтому HEALPix оказывается практически непригодным к работе с каталогами ICRF (Z. M. Malkin, 2022).

Координатная сетка SREAG состоит из колец примерно равной ширины, границы которых параллельны экватору. Каждое кольцо разделено на ячейки, количество которых зависит от средней широты кольца. Этот метод был разработан для получения сетки ячеек, в лучшей мере удовлетворяющей следующим свойствам:

- сетка состоит из прямоугольных ячеек, границы которых ориентированы вдоль кругов долготы и широты;
- все ячейки имеют равную площадь;
- все кольца сетки имеют одинаковую ширину;
- форма ячеек близка к квадратной в экваториальной области;
- метод является простым в вычислительном отношении.

В следующей секции настоящей работы более подробно рассматриваются свойства метода SREAG и некоторые детали его практической реализации. В частности, выводятся некоторые простые соотношения между параметрами координатной сетки SREAG, которые реализованы в виде запрограммированных функций, включенных в набор открыто доступных программ, облегчающих практическое применение метода SREAG заинтересованными пользователями. Также оценивается вычислительная точность вычисления параметров сетки SREAG, ограниченной точностью машинных вычислений.

## 2 Метод SREAG и особенности его применения

Приведем краткое описание метода SREAG, как он был предложен в Z. Malkin (2019). Базовым параметром метода является число колец  $N_{ring}$ , которое должно быть четным числом не менее 4. На первом шаге построения координатной сетки SREAG сфера делится на  $N_{ring}$  параллельных экватору колец постоянной ширины по широте  $dB = 180^\circ/N_{ring}$ . Затем каждое кольцо делится на несколько одинаковых по площади ячеек. Долготная ширина каждой ячейки вычисляется как  $dL_i = dB \sec b_0^i$ , где  $i$  – номер кольца и  $b_0^i$  – центральная широта кольца. Далее определяется приблизительное число ячеек в данном кольце как  $360/dL_i$ . Полученное число округляется до ближайшего целого, которое определяет окончательное число ячеек в кольце. В результате этой процедуры получают начальная конфигурация сетки и общее число ячеек  $N_{cell}$ . После этого легко вычислить площадь ячейки в окончательной сетке путем деления площади сферы на  $N_{cell}$ . На финальном шаге производится уточнение широтных границ колец, начиная с северного полюса, следующим образом. Пусть  $b^u$  есть верхняя граница кольца и  $b^l$  есть его нижняя граница. Тогда, учитывая, что площадь ячейки равна  $A = dL * (\sin b^u - \sin b^l)$ , легко вычисляются окончательные границы колец северного полушария в простом цикле:

```

 $b_1^u = \pi/2$ 
do i=1,  $N_{ring}/2$ 
     $b_i^l = \arcsin(\sin b_i^u - A/dL_i)$ 
     $b_{i+1}^u = b_i^l$ 
end do

```

Для южного полушария сетка северного полушария симметрично отражается относительно экватора. Пример сетки SREAG для  $N_{ring}=10$  показан на рис. 1. Последняя величина в вычислительном цикле  $b_{N_{ring}/2}^l$  соответствует экватору и должна быть равна нулю, но практически, из-за ограничений машинной точности, имеет ненулевое значение. Отличие  $b_{N_{ring}/2}^l$  от нуля характеризует машинную точность вычислений, которая показана на рис. 2. Приведенные на рисунке данные показывают, что вычислительная точность метода при применении стандартной 32-битной арифметики изменяется от  $\approx 1 \cdot 10^{-14}$  до  $\approx 8 \cdot 10^{-12}$  при изменении разрешения сетки от минимального ( $N_{ring} = 4$ ) до максимального ( $N_{ring} = 41068$ ).

На рис. 3 приведена зависимость числа ячеек  $N_{cell}$  от числа колец  $N_{ring}$ . При вычислениях с 32-битной арифметикой максимальное число колец составляет 41068. Набор доступных значений  $N_{ring}$  позволяет получать сетки с широким диапазоном разрешений. Для  $N_{ring} = 4 \dots 41068$  разрешение сетки составляет от  $\sim 45^\circ$  до  $\sim 16''$ , как показано на рис. 4. Анализ астрономических работ, в которых используется пикселизация данных на сфере разными методами, показал, что на практике используются разрешения сеток в диапазоне  $7.3^\circ$  до  $26''$ , что полностью обеспечивается при применении метода SREAG.

Если задаться желаемым числом ячеек в сетке  $N_{cell}$ , соответствующее число колец может быть вычислено как  $0.886227\sqrt{N_{cell}}$  с последующим округлением до ближайшего четного целого.

Другое простое соотношение связывает число колец сетки с её разрешением, выраженным в мин. дуги:  $10800/N_{ring}$ . Эта зависимость позволяет определить требуемое число колец исходя из желаемого разрешения.

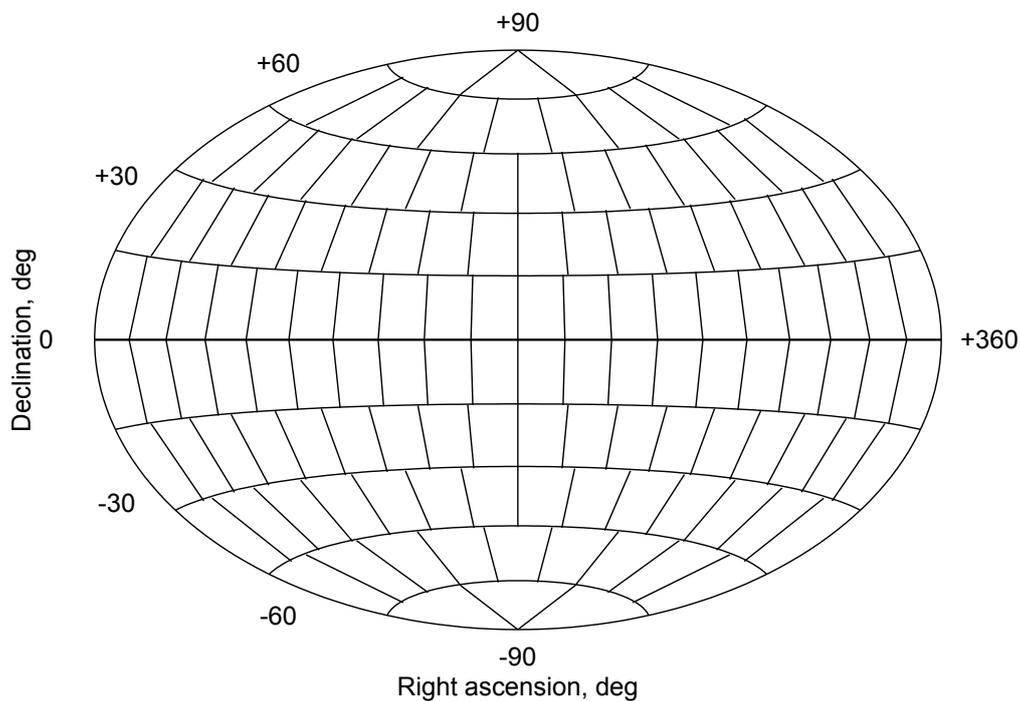


Рис. 1: Схематический пример сетки SREAG, состоящей из 128 ячеек ( $N_{ring}=10$ ).

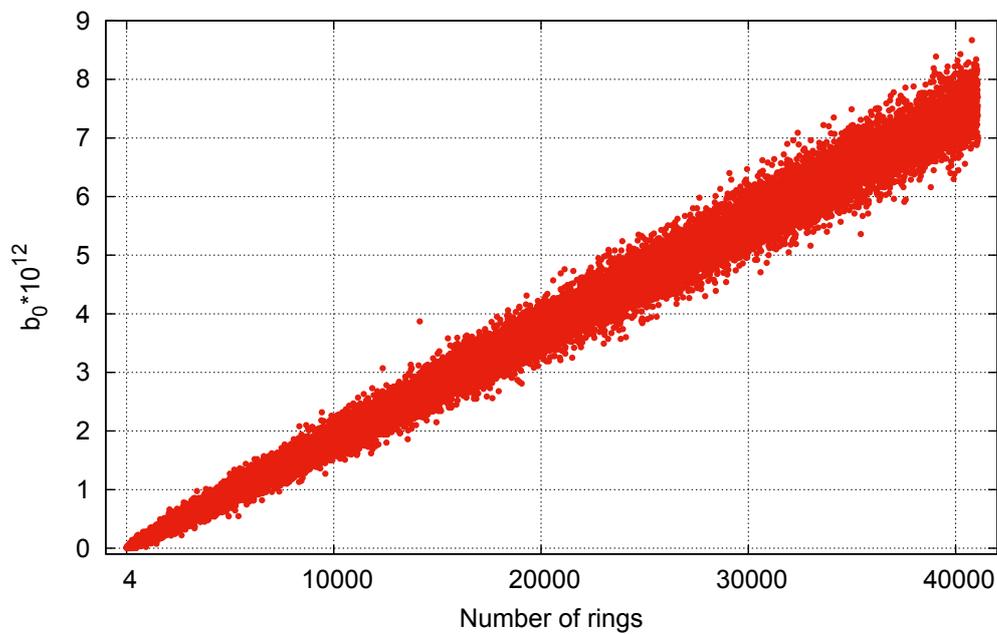
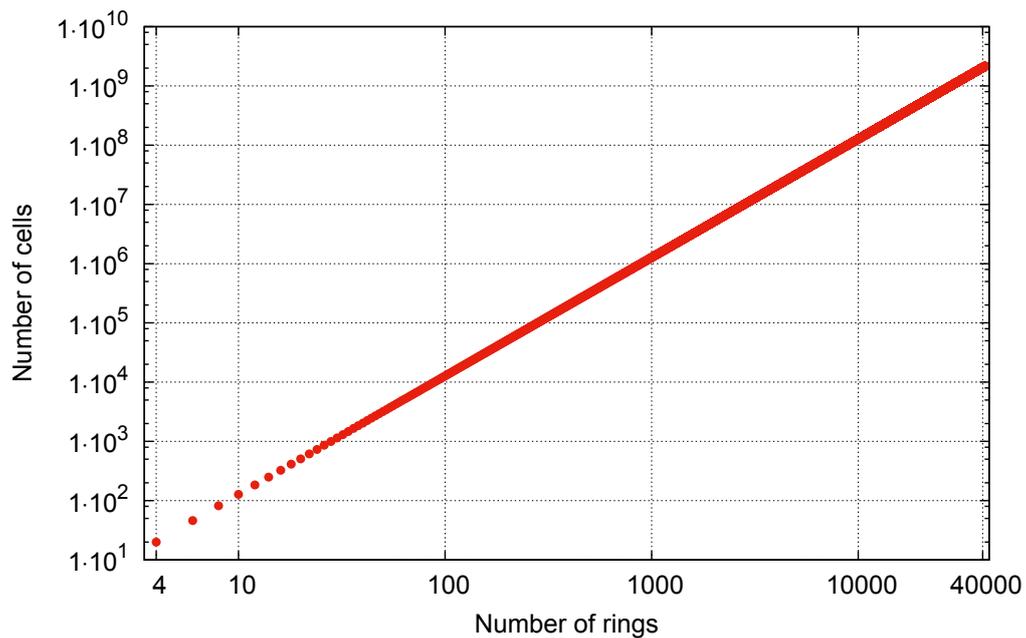
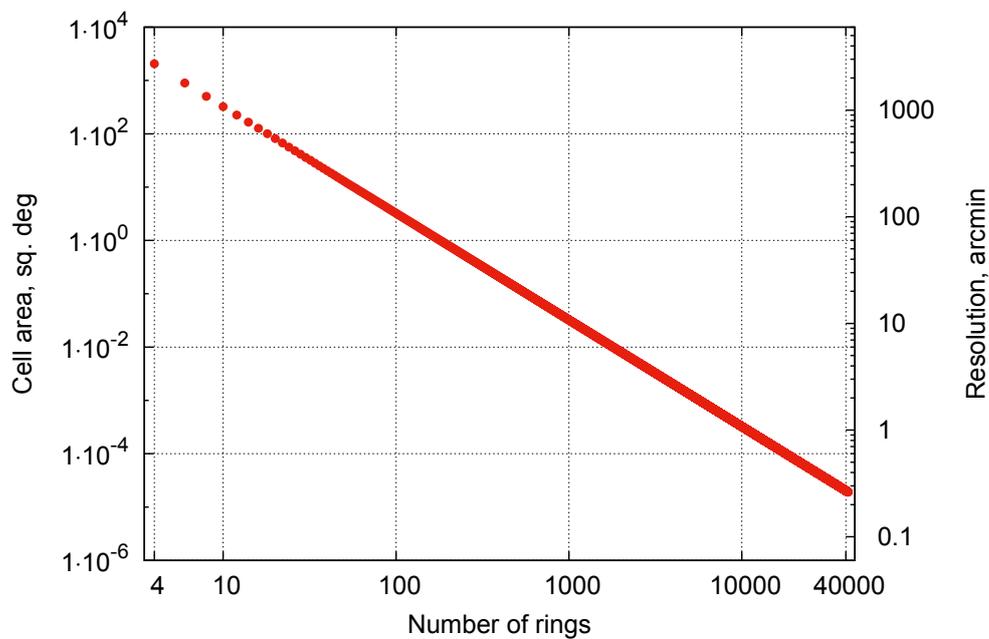


Рис. 2: Вычислительная точность SREAG. По вертикальной оси отложены значения  $b_0$ , увеличенные в  $10^{12}$  раз.

Рис. 3: Число ячеек в зависимости от числа колец  $N_{ring}$ .Рис. 4: Зависимость площади одной ячейки (кв. град.) и разрешения (мин. дуги) от числа колец сетки  $N_{ring}$ .

Для удобства использования метода SREAG предлагается несколько подпрограмм на языке Fortran. Они доступны на [http://www.gaoran.ru/english/as/ac\\_vlbi/#SREAG](http://www.gaoran.ru/english/as/ac_vlbi/#SREAG). Этот набор подпрограмм включает в себя:

GRIDPAR.FOR	Вычисление основных параметров сетки по числу колец
CELLPAR.FOR	Вычисление параметров ячейки по ее номеру
POS2CN2.FOR	Вычисление номера ячейки по координатам
CN2POS2.FOR	Вычисление координат центра ячейки по ее номеру
NR2NC.FOR	Вычисление числа ячеек сетки по числу колец
NC2NR.FOR	Вычисление ближайшего числа колец по данному числу ячеек

### 3 Заключение

В настоящей работе проведено исследование некоторых практических деталей применения метода SREAG деления сферической поверхности на ячейки равной площади. Этот метод может быть применен для широкого класса задач астрономии, геодезии, геофизики и в других случаях, где возникают аналогичные задачи. Практический опыт его применения показал эффективность для решения различных задач в широком диапазоне разрешений координатной сетки для изучения как крупномасштабных, так и мелкомасштабных структур данных, заданных на сфере. При этом число ячеек сетки SREAG ограничено только возможностями используемых вычислительных средств. Результаты настоящей работы позволяют упростить применение обсуждаемого метода пикселизации и выбор наиболее подходящих параметров сетки для решения конкретной задачи, стоящей перед исследователем.

### Список литературы

- Malkin, Z. (2019). *A New Equal-area Isolatitudinal Grid on a Spherical Surface*. AJ 158.4, 158.  
 Górski, K. M. и др. (2005). *HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere*. ApJ 622, с. 759–771.  
 Malkin, Z. M. (2022). *On Densification of the ICRF Catalog and the Reliability of Its Link to the Gaia Catalog*. Astronomy Reports 66.9, с. 778–785.

To use the new sphere pixelization method SREAG

Z.M. Malkin

Central Astronomical Observatory at Pulkovo of RAS

#### Abstract

A new method SREAG (Spherical Rectangular Equal-Area Grid) was proposed in Malkin (2019) to divide a spherical surface into rectangular cells of equal area. SREAG grid consists of a set of rings parallel to the equator, and each ring is divided into several cells, the number of which depends on the mean latitude of the ring. This paper presents some SREAG features in more details. The minimum number of rings is four. The maximum number of SREAG rings that can be achieved when using a 32-bit integer is 41068, which corresponds to the full range of resolution from  $\sim 45^\circ$  to  $\sim 16''$ . The computational accuracy of SREAG is also estimated. Simple expressions were derived to calculate the basic SREAG parameter, number of rings, for the desired number of cells or for the required grid resolution.