doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67
Известия Главной Астрономической Обсерватории в Пулкове, № 233

Изменение параметров Стокса при прохождении излучения в замагниченной атмосфере

Н. А. Силантьев[1]*, Г. А. Алексеева[1], Ю. К. Ананьевская[1]

[1] ГАО РАН

Поступила в редакцию 3 апреля 2024 / Принята к публикации 26 мая 2024

Аннотация

Прохождение поляризованного излучения в замагниченной атмосфере описывается системой связанных уравнений переноса для параметров Стокса. При описании многократного рассеяния необходимо знать, как изменяются параметры Стокса при прохождении излучения от одного случая рассеяния до следующего. В работе даны формулы, описывающие трансформацию параметров Стокса для ряда случаев. Эти формулы непосредственно описывают изменение параметров Стокса при прохождении излучения в оптически тонких замагниченных оболочках звёзд. Представлены также формулы, описывающие многократно рассеянное излучение в уравнении переноса, учитывающие трансформацию параметров Стокса. Основным параметром во всех случаях является $x = \omega_B/\omega = 0,933 \times 10^{-8}\lambda(\text{мкм})B(\text{Гс})$, где ω_B - циклотронная частота вращения электрона и ω - круговая частота рассматриваемого монохроматического излучения.

ключевые слова: перенос излучения - поляризация - магнитное поле

Введение

Поляризованное излучение от звёзд наблюдается с середины двадцатого века. Поляризация может возникнуть от несферичного распределения источников излучения в отсутствие магнитного поля. Наличие магнитного поля в звёздах (вспомним Солнце) и околозвёздных оболочках также проявляется в возникновении поляризации излучения, идущего от этих объектов. Вспомним, что в замагниченной плазме возникают, так называемые, нормальные электромагнитные волны, имеющие свои коэффициенты преломления, т.е. характеризующиеся своими коэффициентами поглощения и различными фазовыми скоростями. Это приводит к большому разнообразию поляризационных эффектов в источниках с магнитным полем. Поэтому рассмотрение переноса излучения в замагниченной атмосфере является актуальной задачей. Важной частью этой проблемы является вычисление трансформации параметров Стокса в замагниченной атмосфере при прохождении излучения между случаями рассеяния для различных значений параметра x, зависящего от длины волны излучения λ и значения магнитного поля $\boldsymbol{B}$.

Система уравнений переноса для всех параметров Стокса I, V, U, Q в замагниченной атмосфере представлена в книге ((Долгинов и др., 1979), глава 3), где принято, что магнитное поле $B < 10^{10}$ Гс и температура $T < 10^8 K$, т.е. не учитываются комптоновское рассеяние и электрон-позитронная вакуумная поляризация. Отметим, что случай вакуумной поляризации был рассмотрен в работе (Kaminker et al., 1982), где было показано, что при $10^{-26}B^4(\text{Гс}) \geq x^2 N_e$ ею можно пренебречь (N_e является концентрацией свободных электронов в среде).

Изложенная ниже теория может быть использована при оценках магнитных полей и их структуры при рассмотрении замагниченных A, B и O звёзд, а также многих типов двойных и нейтронных звёзд. Полученные формулы позволяют непосредственно оценить магнитное поле в оптически тонких околозвёздных оболочках. Детальное обсуждение наблюдаемой поляризации этих

*e-mail: nsilant@bk.ru

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

объектов представлено во многих работах (см., например, работы: (Lamb and Sutherland, 1974; Gnedin and Silant'ev, 1984; Mignani et al., 2007; Harding, 2013; Taverna et al., 2015; Ferrario et al., 2020)).

1 Система уравнений переноса

В теории переноса излучения удобно использовать сферические координаты с ортами: $\boldsymbol{e}_{-1} = (\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_{+1} = (-\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2}$. Эти орты обладают следующими свойствами: $(\boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}^*_m) = \delta_{nm}$, где комплексно сопряжённые $\boldsymbol{e}^*_m = (-1)^m \boldsymbol{e}_{-m}$. Напомним связь декартовых ортов со сферическими: $(\boldsymbol{e}_x = (\boldsymbol{e}_{-1} - \boldsymbol{e}_{+1})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{e}_y = -i(\boldsymbol{e}_{-1} + \boldsymbol{e}_{+1})/\sqrt{2}\,)$, а также выражения электрического поля в обеих системах координат:

$$\begin{gathered} E_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y),\ E_0 = E_z,\ E_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y), \\ E_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{-1} - E_1),\ E_z = E_0,\ E_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(E_{-1} + E_1). \end{gathered} \tag{1}$$

Как известно, электрическое поле $\boldsymbol{E} = E_{-1}\boldsymbol{e}_{-1} + E_0\boldsymbol{e}_0 + E_1\boldsymbol{e}_{+1}$ перпендикулярно направлению распространения волны $\boldsymbol{n}$ (см. Рис.1). В системе координат $|\boldsymbol{n})$ с осью z вдоль вектора $\boldsymbol{n}$ компонента $E_0 = E_z$ равна нулю.

Матрица плотности определена формулами:

$$\rho_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = \frac{c}{8\pi} E_\alpha E^*_\beta \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + V, & -Q + iU \\ -Q - iU, & I - V \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь и далее греческие индексы (в частности, α и β) принимают значения -1 и $+1$. По повторяющимся индексам производится суммирование. Величины $I(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}), V(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}), U(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ и $Q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ являются параметрами Стокса излучения в точке $\boldsymbol{r}$, распространяющегося в направлении $\boldsymbol{n}$. Для краткости, часто мы будем опускать в формулах зависимость от $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{r}$. Отметим, что правое и левое вращения электрического поля описываются величинами $I_r = (c/8\pi)|E_{-1}|^2$ и $I_l = (c/8\pi)|E_{+1}|^2$.

Согласно книге (Долгинов и др., 1979), система уравнений переноса для параметров Стокса в замагниченной атмосфере имеет вид:

$$\begin{gathered} (\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla})I(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = -N_e(\boldsymbol{r})[\,\sigma^{(t)}_I I + \sigma^{(t)}_V V + \sigma^{(t)}_U U + \sigma^{(t)}_Q Q\,] + J_I(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) + S_I(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}), \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla})V(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = -N_e(\boldsymbol{r})[\,\sigma^{(t)}_V I + \sigma^{(t)}_I V + g_Q U - g_U Q\,] + J_V(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) + S_V(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}), \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla})U(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = -N_e(\boldsymbol{r})[\,\sigma^{(t)}_U I + \sigma^{(t)}_I U - g_Q V + g_V Q\,] + J_U(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) + S_U(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}), \\ (\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla})Q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = -N_e(\boldsymbol{r})[\,\sigma^{(t)}_Q I + \sigma^{(t)}_I Q - g_V U + g_U V\,] + J_Q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} + S_Q(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}). \end{gathered} \tag{3}$$

Величины $S_m(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ описывают возможные источники излучения, а величины $J_m(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ описывают источники многократно рассеянного излучения $(m = I, V, U, Q)$.

Часто мы будем использовать соотношения вида: $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\nabla})I(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) \equiv dI/ds$, которые описывают изменение параметров Стокса вдоль направления распространения $\boldsymbol{n}$. Явный вид коэффициентов $\sigma^{(s)}_m(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ и $g_m(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ будет дан ниже, в формулах (14) and (15).

Система (3) без членов $J_m(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ и $S_m(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ описывает свободное распространение излучения между актами рассеяния. В этом случае система (3) приводит к соотношению:

$$\frac{d[I^2 - (V^2 + U^2 + Q^2)]}{ds} = -2N_e(s)\sigma^{(t)}_I(s)[I^2 - (V^2 + U^2 + Q^2)]. \tag{4}$$

Это соотношение показывает, что коэффициент $\sigma^{(t)}_I(s)$ определяет поглощение неполяризованной части излучения. Коэффициенты $\sigma^{(t)}_m = \sigma^{(a)}_m + \sigma^{(s)}_m$ описывают изменения параметров Стокса

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

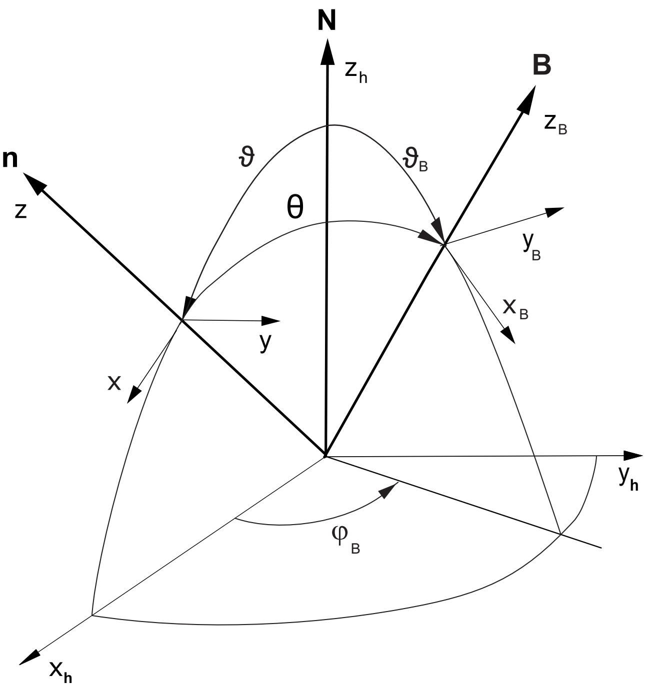

Рис. 1: Основные координатные системы. $\boldsymbol{N}$ является нормалью к атмосфере.

$I(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$,$V(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$, $U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ и $Q(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ в среде с наличием поглощения. Напомним, что $\sigma_m^{(s)}$ и $\sigma_m^{(a)}$ являются сечениями рассеяния и поглощения света. Коэффициент g_V определяет Фарадеевское вращение плоскости линейной поляризации, а коэффициенты g_Q и g_U соответствуют появлению круговой поляризации в линейно поляризованном пучке излучения.

Матрица рассеяния $t_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_0)$ связывает падающую вдоль направления $\boldsymbol{n}_0$ электромагнитную волну напряжённостью $E_\beta(\boldsymbol{n}_0)$ с величиной $E_\alpha(\boldsymbol{n}_1)$, рассеянного электроном излучения в направлении $\boldsymbol{n}_1$:

$$E_\alpha(\boldsymbol{n}_1) = \frac{1}{r} t_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_0) E_\beta(\boldsymbol{n}_0). \tag{5}$$

Здесь r является расстоянием от электрона.

Многократно рассеянное излучение описывается величинами J_m, которые являются компонентами матрицы $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$:

$$\begin{gathered} J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} J_I + J_V, & -J_Q + iJ_U \\ -J_Q - iJ_U, & J_I - J_V \end{pmatrix} = \\ N_e(\boldsymbol{r}) \int d\boldsymbol{n'} t_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n'}) \boldsymbol{\rho}_{\gamma\nu}(\boldsymbol{n'},\boldsymbol{r}) t^+_{\nu\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n'}). \end{gathered} \tag{6}$$

Величина $t^+_{\nu\beta} = t^*_{\beta\nu}$ является Эрмитово сопряжённой матрицей.

Мы считаем, что рассеянное излучение возникает вследствие дипольного момента $\boldsymbol{d}$ электрона, индуцированного падающей электромагнитной волной. Этот диполь определяется тензором поляризуемости β_{pq} ($d_p = \beta_{pq} E_q$). В системе координат с осью z вдоль магнитного поля $\boldsymbol{B}$ этот тензор диагонален: $\beta_{pq} = \delta_{pq}\beta_p$ (см. (Долгинов и др., 1979)):

$$\begin{gathered} \beta_p \equiv \beta(\omega)\overline{\beta}_p, \qquad \overline{\beta}_p = \overline{\beta}'_p + i\,\overline{\beta}''_p, \\ \overline{\beta}_1 = \frac{1}{1 + i\gamma_\perp + x} \to \frac{1}{1+x}, \quad \overline{\beta}_0 = \frac{1}{1 + i\gamma_\parallel} \to 1, \quad \overline{\beta}_{-1} = \frac{1}{1 + i\gamma_\perp - x} \to \frac{1}{1-x}, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\beta(\omega) = -(r_e^2/k^2)$ является поляризуемостью свободного электрона; безразмерные параметры $\overline{\beta}_s$ определяют зависимость поляризуемостей от параметров $\nu_\perp$, $\nu_\parallel$ и параметра $x = \omega_B/\omega =$

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

$0,933 \times 10^{-8}\lambda$(мкм)$B$(Гс); r_e - классический радиус электрона; $r_e = e^2/m_ec^2 \simeq 2,82 \cdot 10^{-13}$ см; $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ - волновое число; ω - угловая частота излучения; λ - длина волны; c - скорость света; $\gamma_\perp = \nu_\perp/\omega$ и $\gamma_\| = \nu_\|/\omega$, где $\nu_\perp$ и $\nu_\|$ - частоты столкновений электронов перпендикулярно или параллельно магнитному полю, изменяющие энергию электрона. Они связаны с сечениями поглощения. Стрела означает переход к $\gamma_s = 0$. Томсоновское сечение рассеяния $\sigma_\mathrm{T} = (8\pi/3)r_e^2 \simeq 6,65 \cdot 10^{-25}$ см^2.

Формулы для матрицы рассеяния приобретают простой вид, если использовать матрицы вращений Вигнера (см. (Варшалович и др., 1975; Долгинов и др., 1979)):

$$t_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n_0}) = k^2\beta(\omega)D^{(1)}_{p\alpha}(\boldsymbol{n}_1|\boldsymbol{N})\overline{\beta}_{pq}(|\boldsymbol{N})D^{*(1)}_{q\beta}(\boldsymbol{n}_0|\boldsymbol{N}). \tag{8}$$

Напомним, что повторяющиеся индексы означают суммирование по ним (p,q = -1, 0, 1). Символ $|\boldsymbol{N})$ означает, что зависимости от направлений $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_0$ взяты в системе координатат с осью z вдоль направления $\boldsymbol{N}$ (см. Рис.1). Так, направление $\boldsymbol{n}$ характеризуется Эйлеровыми углами ϑ , φ, γ, а направление $\boldsymbol{n}_0$ - углами ϑ_0 , φ_0 и γ_0.

2 Матрицы Вигнера

Матрицы Вигнера определяются соотношением:

$$D^{(l)}_{pq}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{h}) = e^{-ip\varphi}e^{-iq\gamma}d^{(l)}_{pq}(\vartheta). \tag{9}$$

Система координат $|\boldsymbol{h})$ имеет ось z вдоль вектора $\boldsymbol{h}$. Углы ϑ и φ являются обычными полярным и азимутальным углами направления $\boldsymbol{n}$ в системе координат $|\boldsymbol{h})$, а угол γ описывает вращение оси x координатной системы, связанной с $\boldsymbol{n}$ от плоскости $(\boldsymbol{nh})$. Матрицы Вигнера описывают переход сферических компонент вектора $\boldsymbol{A}$ от координатной системы $|\boldsymbol{h}')$ к системе $|\boldsymbol{h})$:

$$A_p(|\boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{e}_q^{(h')} \cdot \boldsymbol{e}_p^{*(h)})A_q(|\boldsymbol{h}') \equiv D^{(1)}_{qp}(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{h}')A_q(|\boldsymbol{h}'). \tag{10}$$

Тензоры преобразуются как произведение $A_p(|\boldsymbol{h})A_q^*(|\boldsymbol{h})$. Так, тензор $\beta_{pq}(|\boldsymbol{N})$ связан с поляризуемостями β_s формулой:

$$\beta_{pq}(|\boldsymbol{N}) = D^{*(1)}_{ps}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{N})\beta_s D^{(1)}_{qs}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{N}), \tag{11}$$

где $|\boldsymbol{N})$ является системой координат с осью z вдоль внешней нормали $\boldsymbol{N}$ к атмосфере (см. Рис.1). По индексу s производится суммирование.

Отметим, что часто используются следующие формулы:

$$\begin{gathered} D^{*(1)}_{pq}(\boldsymbol{h}'|\boldsymbol{h}) = D^{(1)}_{qp}(\boldsymbol{h}|\boldsymbol{h}'), \\ D^{*(1)}_{sp}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{h})D^{(1)}_{sq}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{h}) = \delta_{pq}, \qquad D^{(1)}_{ps}(\mathbf{n}|\boldsymbol{h})D^{*(1)}_{qs}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{h}) = \delta_{pq}, \\ D^{(1)}_{pq}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{B}) = D^{*(1)}_{sp}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{h})D^{(1)}_{sq}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{h}), \end{gathered} \tag{12}$$

где $d^{(1)}_{pq}(\vartheta)$ определяют зависимость от угла ϑ:

$$\begin{gathered} d^{(1)}_{-1-1}(\vartheta) = d^{(1)}_{11}(\vartheta) = (1 + \cos\vartheta)/2, \quad d^{(1)}_{00}(\vartheta) = \cos\vartheta, \\ d^{(1)}_{-11}(\vartheta) = d^{(1)}_{1-1}(\vartheta) = (1 - \cos\vartheta)/2, \\ d^{(1)}_{-10}(\vartheta) = d^{(1)}_{01}(\vartheta) = -d^{(1)}_{0-1}(\vartheta) = -d^{(1)}_{10}(\vartheta) = (1/\sqrt{2})\sin\vartheta. \end{gathered} \tag{13}$$

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

3 Выражения для коэффициентов переноса

Коэффициенты $g_V(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}), g_Q(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ and $g_U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
g_V(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \frac{2\pi}{k}[t'_{-1-1}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) - t'_{11}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})] \equiv \sigma_{\mathrm{T}}\underline{g}_V = \\
2\pi k\beta(\omega)(\overline{\beta}'_{-1} - \overline{\beta}'_1)\cos\Theta \to \sigma_{\mathrm{T}}\frac{3}{2kr_e}\left(\frac{\omega_B}{\omega}\right)\cos\Theta \simeq 0.790\,\sigma_{\mathrm{T}}\lambda^2(\mu)B(G)\cos\Theta, \\
g_Q(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi}{k}[t'_{-11}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) + t'_{1-1}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})] \equiv \sigma_{\mathrm{T}}\underline{g}_Q = \\
4\pi k\beta(\omega)\left[\overline{\beta}'_0 - \frac{\overline{\beta}'_{-1} + \overline{\beta}'_1}{2}\right]\frac{\sin^2\Theta}{2}\cos 2\varphi_{Bn} \to \sigma_{\mathrm{T}}\frac{3}{2kr_e}\cdot\left(\frac{\omega_B}{\omega}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\Theta}{2}\cos 2\varphi_{Bn} \to \\
0.368\,\sigma_{\mathrm{T}}\,10^{-8}\lambda^3(\mu)B^2(G)\sin^2\Theta\cos 2\varphi_{Bn}, \\
g_U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \frac{2\pi}{k}[t''_{-11}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}) - t''_{1-1}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})] = g_Q(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\tan 2\varphi_{Bn}.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Здесь Θ является углом между направлением излучения $\boldsymbol{n}$ и вектором магнитного поля $\boldsymbol{B}$: $\cos\Theta = \cos\theta_B\cos\theta + \sin\theta_B\sin\theta\cos\varphi$ (см. Рис.1). Угол φ_{Bn} является азимутальным углом магнитного поля $\boldsymbol{B}$ в системе координат $|\boldsymbol{n})$, , связанной с направлением рассеянного излучения, т.е. в системе наблюдателя: $\sin\varphi_{Bn} = \sin\theta_B\sin\varphi/\sin\Theta$. Напомним, что штрих символ означает реальную часть матрицы рассеяния $t'_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})$. Двойной штрих означает мнимую часть этой матрицы. В формуле (14) используются латинские обозначения: $\mu =$ мкм и $G =$Гс.

Сечения рассеяния $\sigma_m^{(s)}$ определяются формулами:

$$
\begin{gathered}
\sigma_I^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \sigma_{\mathrm{T}}\left[|\overline{\beta}_0|^2\frac{\sin^2\Theta}{2} + \frac{|\overline{\beta}_{-1}|^2 + |\overline{\beta}_1|^2}{2}\cdot\frac{1+\cos^2\Theta}{2}\right] \to \\
\sigma_{\mathrm{T}}\left[\frac{\sin^2\Theta}{2} + \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\cdot\frac{1+\cos^2\Theta}{2}\right], \\
\sigma_Q^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})) = \sigma_{\mathrm{T}}\left[|\overline{\beta}_0|^2 - \frac{|\overline{\beta}_{-1}|^2 + |\overline{\beta}_1|^2}{2}\right]\frac{\sin^2\Theta}{2}\cos 2\varphi_{Bn} \to \\
\sigma_{\mathrm{T}}\left[1 - \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right]\frac{\sin^2\Theta}{2}\cos 2\varphi_{Bn}, \\
\sigma_U^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \sigma_Q^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\tan 2\varphi_{Bn}, \\
\sigma_V^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})) = \sigma_{\mathrm{T}}\frac{|\overline{\beta}_{-1}|^2 - |\overline{\beta}_1|^2}{2}\cos\Theta \to \sigma_{\mathrm{T}}\frac{2x}{(1-x^2)^2}\cos\Theta, \\
\sigma_m^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) \equiv \sigma_{\mathrm{T}}\underline{\sigma}_m^{(s)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}).
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Здесь $m = I, V, U, Q$.

Сечения поглощения $\sigma_m^{(a)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ получаются из коэффициентов (15) подстановкой $\sigma_{\mathrm{T}}|\overline{\beta}_m|^2 \to 4\pi k\beta(\omega)\overline{\beta}''_m$ (или $|\overline{\beta}_m|^2 \to (3/2kr_e)\overline{\beta}''_m$). Напомним, что $\overline{\beta}_m = \overline{\beta}'_m + i\overline{\beta}''_m$, и стрелки означают переход к $\gamma_m = 0$. Ниже мы также используем подчёркнутые коэффициенты, т.е. коэффициенты без Томсоновского сечения σ_{T}. Например, $g \equiv \sigma_{\mathrm{T}}\underline{g}$. В этих случаях используется Томсоновская оптическая толщина $d\tau = N_e(s)\sigma_{\mathrm{T}}ds$.

Отметим, что коэффициенты $\underline{g}_V$ и $\underline{g}_{Q,U}$ имеют большой множитель $3/2kr_e \simeq 0,85\cdot 10^8\lambda$(мкм). Из выражений (14) and (15) следуют неравенства: при $x \ll 1$ следует, что $g_{Q,U}/g_V \ll 1$ и $\sigma_{Q,U}^{(t)}/\sigma_V^{(t)} \ll 1$. При $x \gg 1$ выполняются противоположные неравенства: $g_{Q,U}/g_V \gg 1$ и $\sigma_{Q,U}^{(t)}/\sigma_V^{(t)} \gg 1$.

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

Используя выражение (6), матрица $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ может быть записана в виде:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = N_e(\boldsymbol{r})\sigma_{\mathrm{T}}\frac{3}{8\pi}T^{\alpha\beta}_{pp'}(\boldsymbol{n})\times$$
$$\overline{\beta}_{pq}(|\boldsymbol{N})\overline{\beta}^*_{p'q'}(|\boldsymbol{N})\int d\boldsymbol{n'}\,T^{\nu\gamma}_{q'q}(\boldsymbol{n'})\boldsymbol{\rho}_{\gamma\nu}(\boldsymbol{n'},\boldsymbol{r}), \tag{16}$$
$$T^{\alpha\beta}_{pp'}(\boldsymbol{n}) = D^{(1)}_{p\alpha}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{N})D^{*(1)}_{p'\beta}(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{N}).$$

Отметим, что зависимости $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ от $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n'}$ разделены. Заметим также, что зависимость от $\underline{\sigma}^{(t)}_I$ может быть выделена в явном виде для всех параметров Стокса:

$$I(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \exp(-\underline{\sigma}^{(t)}_I\tau)I_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}),\quad V(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \exp(-\underline{\sigma}^{(t)}_I\tau)V_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}),$$
$$U(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \exp(-\underline{\sigma}^{(t)}_I\tau)U_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}),\quad Q(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}) = \exp(-\underline{\sigma}^{(t)}_I\tau)Q_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}). \tag{17}$$

4 Трансформация параметров Стокса между актами рассеяния

Ниже мы рассмотрим изменения параметров Стокса излучения при прохождении между актами соударениия в однородно замагниченной атмосфере, т.е. рассмотрим уравнения переноса без источников $J_I(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$ и $S_I(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})$. Здесь мы будем считать магнитное поле однородным и пренебрегать зависимостью от поглощения.

Частные случаи трансформаций

а) Случай $x \ll 1$ (здесь $|\underline{\sigma}^{(s)}_V| \ll 1$ и $|\underline{g}_V| \ll 1$).

В этом случае $\sigma^{(s)}_V/\sigma^{(s)}_I \sim x$, $\sigma^{(s)}_V/\sigma^{(s)}_Q \sim (1/x)$, $g_V/g_Q \sim (1/x)$ и система уравнений (3) для I_1, V_1, U_1, Q_1 распадается на две подсистемы:

$$\frac{dI_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{d\tau} = -\underline{\sigma}^{(t)}_V V_1,\qquad \frac{dV_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{d\tau} = -\underline{\sigma}^{(t)}_V I_1. \tag{18}$$

Вторая подсистема описывает Фарадеевское вращение плоскости поляризации:

$$\frac{dU_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{d\tau} = -\underline{g}_V Q_1,\qquad \frac{dQ_1(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})}{d\tau} = \underline{g}_V U_1. \tag{19}$$

При решении систем (18) и (19) проще всего использовать матричный метод, изложенный в книге (Беллман, 1969). В результате имеем:

$$I_1(\tau) = I(0)\,\mathrm{ch}(\sigma_0\tau) - V(0)\,\mathrm{sh}(\underline{\sigma}^{(t)}_V\tau),\quad V_1(\tau) = V(0)\,\mathrm{ch}(\underline{\sigma}^{(t)}_V\tau) - I(0)\,\mathrm{sh}(\underline{\sigma}^{(t)}_V\tau),$$
$$U_1(\tau) = U(0)\cos(\underline{g}_V\tau) - Q(0)\sin(\underline{g}_V\tau),\quad Q_1(\tau) = Q(0)\cos(\underline{g}_V\tau) + U(0)\sin(\underline{g}_V\tau). \tag{20}$$

Легко проверить, что $U_1^2(\tau) + Q_1^2(\tau) = U^2(0) + Q^2(0)$, т. е. формула (20) описывает поворот плоскости поляризации света, не меняя степени поляризации. Длина свободного пробега излучения в атмосфере соответствует $\tau \simeq 1/\underline{\sigma}^{(t)}_I$. На этой длине имеет место возникновение круговой поляризации: $\Delta V/I_1(0) \simeq \mathrm{sh}(\underline{\sigma}^{(t)}_V/\underline{\sigma}^{(t)}_I) \simeq x \ll 1$.

б) Случай $x \gg 1$ (здесь $|\underline{\sigma}^{(s)}_V| \sim 1/x^3 \ll 1, |\underline{\sigma}^{(s)}_{U,Q}| \sim 1$, $\underline{g}_{Q,U} \sim x^2, \underline{g}_V \sim x$).

Здесь мы не учитываем члены $\underline{\sigma}^{(s)}_V$ и $\underline{g}_V$. Система уравнений (3) для I_1, V_1, U_1, Q_1 в этом случае распадается на следующие две подсистемы:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} I_1(\tau)\\ V_1(\tau)\end{pmatrix} = -\,\hat{\alpha}_1\begin{pmatrix} U_1(\tau)\\ Q_1(\tau)\end{pmatrix},\quad \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} U_1(\tau)\\ Q_1(\tau)\end{pmatrix} = -\,\hat{\alpha}_2\begin{pmatrix} I_1(\tau)\\ V_1(\tau)\end{pmatrix}, \tag{21}$$

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

где матрицы $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ имеют следующий вид:

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_U, & \underline{\sigma}_Q \\ \underline{g}_Q, & -\underline{g}_U \end{pmatrix}, \qquad \hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_U, & -\underline{g}_Q \\ \underline{\sigma}_Q, & \underline{g}_U \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Системы второго порядка (21) могут быть представлены как одна система четвертого порядка для всех параметров Стокса. Такая система решается прямым и обратным преобразованиеми Лапласа (см. книги (Дёч, 1971; Милн, 1951)).

Из формул (14) и (15) видно, что $\underline{\sigma}_Q \equiv \sigma_0 \cos 2\phi_{Bn}$, $\underline{\sigma}_U \equiv \sigma_0 \sin 2\phi_{Bn}$ и $\underline{g}_Q \equiv g_0 \cos 2\phi_{Bn}$, $\underline{g}_U \equiv g_0 \sin 2\phi_{Bn}$. При решении системы (21) часто встречаются комбинации $\underline{\sigma}_Q^2 + \underline{\sigma}_U^2 \equiv \sigma_0^2$ и $\underline{g}_Q^2 + \underline{g}_U^2 \equiv g_0^2$. Они сильно упрощают окончательные формулы. Напомним, что $\sigma_0 \sim 1$ (зависимость от σ_T вошла в определение τ). В итоге имеем для интенсивности и круговой поляризации:

$$\begin{gathered} I_1(\tau) = \mathrm{ch}(\sigma_0\tau)I(0) - \sin(g_0\tau)[Q(0)\sin 2\varphi_{Bn} - U(0)\cos 2\varphi_{Bn}], \\ V_1(\tau) = \cos(g_0\tau)V(0) - \sin(\sigma_0\tau)[Q(0)\cos 2\varphi_{Bn} + U(0)\sin 2\varphi_{Bn}]. \end{gathered} \tag{23}$$

Выражения для линейной поляризации более громоздкие:

$$\begin{gathered} U_1(\tau) = -I(0)\,\mathrm{sh}(\sigma_0\tau)\sin 2\varphi_{Bn} + V(0)\sin(g_0\tau)\cos 2\varphi_{Bn} + \\ U(0)[\mathrm{ch}(\sigma_0\tau)\sin^2 2\varphi_{Bn} + \cos(g_0\tau)\cos^2 2\varphi_{Bn}] + Q(0)[(\mathrm{ch}(\sigma_0\tau) - \cos(g_0\tau))\sin 2\varphi_{Bn}\cos 2\varphi_{Bn}], \\ Q_1(\tau) = -I(0)\,\mathrm{sh}(\sigma_0\tau)\cos 2\varphi_{Bn} + V(0)\sin(g_0\tau)\sin 2\varphi_{Bn} + \\ U(0)[(\mathrm{ch}(\sigma_0\tau) - \cos(g_0\tau))\sin 2\varphi_{Bn}\cos 2\varphi_{Bn}] + Q(0)[\mathrm{ch}(\sigma_0\tau)\cos^2 2\varphi_{Bn} + \cos(g_0\tau)\sin^2 2\varphi_{Bn}]. \end{gathered} \tag{24}$$

Легко видеть, что при $\tau = 0$ все выражения для параметров Стокса переходят в исходные значения. Отметим также, что $Q(0)\cos 2\varphi_{Bn} + U(0)\sin 2\varphi_{Bn} \equiv Q'$ и $U(0)\cos 2\varphi_{Bn} - Q(0)\sin 2\varphi_{Bn} \equiv U'$ являются параметрами Стокса Q' и U' в системе координат, повернутой на угол φ_{Bn} относительно исходной системы координат.

в) Представляет интерес случай (например, в оптически тонкой околозвёздной оболочке), когда можно пренебречь сечениями рассеяния и поглощения, т.е. принять $\sigma^{(t)}_{V,U,Q} = 0$. Согласно работе (Silant'ev et al., 2023), в этом случае имеет место формула:

$$\boldsymbol{P_1}(\tau) = \cos(g\tau)\boldsymbol{P}(0) + \frac{\sin(g\tau)}{g}(\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{P}(0)) + \frac{1-\cos(g\tau)}{g^2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{P}(0)). \tag{25}$$

Здесь, для краткости, мы приняли обозначения: вектор $\boldsymbol{P_1}(\tau)$ с компонентами (аналог координатам x, y, z) $V(\tau), U(\tau), Q(\tau)$, вектор $\boldsymbol{g}$ с компонентами $\underline{g}_V, \underline{g}_U, \underline{g}_Q$ и $g^2 = \underline{g}_V^2 + \underline{g}_U^2 + \underline{g}_Q^2$.

5 Выражение для $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$

При рассмотрении многократного рассеяния излучения в атмосфере главную роль играет матрица $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$. Согласно этой матрицы излучение из точки $\boldsymbol{r'}$ идёт в точку $\boldsymbol{r}$, где рассеивается в направлении $\boldsymbol{n}$. По пути $|\boldsymbol{r}$ - $\boldsymbol{r'}|$ излучение испытывает трансформацию, которую мы уже рассмотрели в предыдущих разделах. Удобно эту трансформацию представить в виде:

$$\rho_{\gamma\nu}(\boldsymbol{n'}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \Pi^{\gamma'\nu'}_{\gamma\nu}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|, \boldsymbol{n'})\rho_{\gamma'\nu'}(\boldsymbol{n'}, \boldsymbol{r'}). \tag{26}$$

Учитывая общее ослабление излучения (см.(17)), мы приходим к следующему выражению для $J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})$ для замагниченной атмосферы:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = N_e(\boldsymbol{r}) \int d\boldsymbol{n'} \int d\boldsymbol{r'}\, t_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n'}) \exp\left(-|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|\sigma^{(t)}_I\right)\Pi^{\gamma'\nu'}_{\gamma\nu}(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}|, \boldsymbol{n'})\rho_{\gamma'\nu'}(\boldsymbol{n'}, \boldsymbol{r'})t^{+}_{\nu\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n'}). \tag{27}$$

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

Обычно в астрофизике принимают, что атмосфера является полубесконечной, плоско-параллельной и однородной, где параметры Стокса зависят от Томсоновской оптической τ, отсчитываемой перпендикулярно поверхности. В этом случае формула (27) принимает вид (Silant'ev et al., 2024):

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n},\tau) = \frac{3}{8\pi} T^{\alpha\beta}_{pp'}(\boldsymbol{n})\overline{\beta}_{pq}(|\boldsymbol{N})\overline{\beta}^{*}_{p'q'}(|\boldsymbol{N})\times$$
$$\int d\boldsymbol{n'}\, T^{\nu\gamma}_{q'q}(\boldsymbol{n'}) \int_0^\infty \frac{\sigma_I^{(t)}(\mathbf{n}')d\tau'}{|\mu'|} \exp\left(-\frac{\sigma_I^{(t)}(\mathbf{n}')|\tau-\tau'|}{|\mu'|}\right)\times \tag{28}$$
$$\Pi^{\gamma'\nu'}_{\gamma\nu}\left(\boldsymbol{n'}, \frac{|\tau-\tau'|}{|\mu'|}\right) J_{\gamma'\nu'}(\boldsymbol{n'},\tau').$$

Здесь $\tau = N_e(z)\sigma_T z$, где z - координата, отсчитываемая по вертикали вглубь атмосферы, $\mu = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_z$. Отметим, что для магнитного поля, направленного вдоль нормали к атмосфере, в силу симметрии проблемы линейная поляризация может быть либо перпендикулярна плоскости $(\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}_z)$, либо может лежать в этой плоскости, т.е. при соответствующем выборе осей x и y параметр Стокса U= 0. В случае $x \ll 1$ можно пренебречь параметром V и решать систему уравнений переноса для параметров I и Q.

Заключение

В работе представлена теория переноса монохроматического излучения в разреженной замагниченной плазме с широким спектром значений параметра $x = \omega_B/\omega = 0.933\times10^{-8}\lambda$(мкм) B(Гс), где ω_B - циклотронная частота вращения электрона и ω - круговая частота рассматриваемого излучения. Уравнение переноса учитывает однократное дипольное рассеяние излучения с отдельным электроном плазмы, что соответствует малости длины волны излучения по сравнению с дебаевским радиусом $\lambda \ll r_D = \sqrt{k_B T_e/4\pi N_e e^2}$ (здесь k_B - постоянная Больцмана, T_e - температура электронного газа, e - заряд электрона). Кроме того, выполняются условия $\hbar\omega_B \ll k_B T_e \ll m_e c^2$, когда можно пренебречь квантовыми и релятивисткими эффектами. В общем случае перенос излучения описывается системой четырёх уравнений для всех параметров Стокса. Коэффициенты переноса для параметров Стокса существенно разные для случаев $x \ll 1$ и $x \gg 1$. Это приводит к самым разным трансформациям параметров Стокса при прохождении излучения между актами рассеяния. В работе приведены формулы, описывающие трансформацию для ряда значений параметра x, имеющим место в замагниченным звёздах типа A, B и O и многих типов двойных и нейтронных звёзд. Полученные формулы непосредственно применимы к описанию оптически тонких околозвёздных оболочек с магнитным полем. Эти формулы также существенны при решении задачи Милна в замагниченной атмосфере и могут служить как для оценок магнитного поля, так и для установления его структуры.

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

Список литературы

Беллман, Р. (1969). Введение в теорию матриц. М: Наука. – 367 с.

Варшалович, Д.А., Москалёв, А.Н., Херсонский, В.К. (1975). Квантовая теория углового момента. Л: Наука. – 439 с.

Дёч, Г.(1971). Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М: Наука. – 288 с.

Долгинов, А.З., Гнедин, Ю.Н., Силантьев, Н.А. (1979). Распространение и поляризация излучения в космической среде. М.: Наука, 1979. – 424 с.

Ferrario, L., Wickramasinghe, D.T., Kawka, A. (2020). Magnetic fields in isolated and interacting white dwarfs. AdvSpR, 66, p. 1025 -1056.

Gnedin,Yu.N. and Silant'ev, N.A. (1984). The appearance of polarization in radiation from hot stars due to Faraday rotatation effect as a possible method of determining stellar magnetic field. Astrophys. Space Sci. 102, p. 375 - 395.

Harding, A.K. (2013). The neutron stars zoo. Frontiers of Physics, vol. 8, Issue 6, p. 679 - 692.

Kaminker, A.D., Pavlov, G.G., Shibanov, Yu.A. (1982). Radiation from strongly magnetized plasma - the case of predominant scattering. Astroph. Space Sci. 86, p. 249 - 297.

Lamb, F. K. and Sutherland P.G. (1974). Continuum polarization in magnetic white dwarfs. IAUS, 53, p. 265 - 285.

Mignani, R.P., Bagnulo, S., Dyks, J., Lo Curto, G., Slowikowska, A. (2007). The optical polarization of the Vela pulsar revisited. A&A, 467, p. 1156 -1162.

Милн, В. Е. (1951). Численный анализ. М: ИЛ, – 292 с.

Silant'ev, N.A., Alekseeva G.A., Ananjevskaja Yu.K. (2023). Scattering of light in thin magnetized envelopes II. MNRAS, 514, p. 3685 - 3694.

Silant'ev, N.A., Alekseeva G.A., Ananjevskaja Yu.K. (2024). General theory of radiative transfer in a magnetized atmosphere with scattering by electrons. MNRAS, 528, p. 1081- 1093.

Taverna, R., Turolla, R., Gonzalez Caniulef, D., Zan, S., Mulieri, F. (2015). Polarization of neutron stars surface emission: a systematic analysis. MNRAS, 454, p. 3254-3266.

doi:10.31725/0367-7966-2024-233-58-67

Publications of the Pulkovo Observatory, 233

Transformation of the Stokes parameters at propagation of radiation in magnetized atmosphere

N.A. Silant'ev[1], G.A. Alekseeva[1], Yu.K. Ananjevskaya[1]

[1] The Central Astronomical Observatory of the RAS at Pulkovo

Received 3 April 2024 / Accepted 26 May 2024

Abstract

The pass of polarized radiation in magnetized atmosphere is described by the system of connected radiative transfer equations for the Stokes parameters. At multiple scattering of radiation it is necessary to know how the change of the Stokes parameters between the cases of scattering occurs. The paper presents the explicit formulas describing the transformation of the Stokes parameters for the number of situations. These formulas describe directly the transformation of the Stokes parameters in optically thin circumstellar envelopes. The formulas for mutiply scattered radiation in the system of transfer equations take into account this transformation of the Stokes parameters. The basic parameter in all cases is $x = \omega_B/\omega = 0.933 \times 10^{-8}\lambda(\mu)B(G)$, where ω_B is cyclotron frequency of the electron rotation and ω is the frequency of monochromatic radiation.

key words: radiative transfer - polarization - magnetic field