doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21

Известия Главной Астрономической Обсерватории в Пулкове, № 234

# К использованию векторных сферических функций

З. М. Малкин*

Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН

Поступила в редакцию 24 июля 2024 / Принята к публикации 3 сентября 2024

**Аннотация**

Во многих астрономических работах производится анализ структуры векторных полей, таких как разности координат небесных объектов в каталогах или скорости небесных объектов, путём разложения по векторным сферическим функциям (ВСФ). Этот метод показал высокую эффективность во многих исследованиях, но в то же время сравнение результатов, полученных разными авторами, может вызвать трудности, связанные с различными подходами к построению системы ВСФ и даже с их различными обозначениями. Для облегчения этой задачи в настоящей работе приводится сравнение трех систем ВСФ, наиболее часто применяющихся в работах по астрометрии и звездной астрономии.

**Ключевые слова:** Астрометрия, каталоги, сравнение каталогов, векторные сферические функции

## 1 Введение

Векторные сферические функции (ВСФ), которые иногда также называются гармониками, широко используются в астрономических исследованиях для анализа векторных полей на небесной сфере. В частности, их активное применение в астрометрии началось в 1990-х годах после выхода работы Mignard и Morando (1990). Исторически ВСФ-разложения в астрометрии и смежных областях применялись при анализе и сравнении каталогов положений и скоростей звезд, а также при анализе движений звезд для изучения кинематики и динамики Галактики.

При большом количестве объектов применяется пикселизация (Витязев, 2017). При этом ВСФ-разложение применяется не к отдельным звездам, а к средним данным по некоторому набору (сетке) ячеек (пикселей) на небесной сфере. В качестве примеров можно привести метод HEALPix (Górski и др., 2005), широко применяющийся в астрономии, или новый метод SREAG (Malkin, 2019; Малкин, 2023). Дополнительным преимуществом процедуры пикселизации является более равномерное распределение усредненных данных по небесной сфере по сравнению с одиночными объектами. При пикселизации данные в ячейке могут не только усредняться, к ним также может быть применена медианная фильтрация, что позволяет существенно ослабить влияние аномальных (ошибочных) данных на конечный результат (Malkin, 2021).

Важным обстоятельством применения ВСФ является тот факт, что разные авторы реализуют несколько различные варианты разложения по ВСФ и используют различные обозначения гармоник. Получаемые при этом в каждой конкретной работе результаты в конечном счете корректно описывают физику изучаемого явления, например систематические разности между каталогами или параметры вращения Галактики. Но сравнение результатов, получаемых разными авторами, ввиду указанных различий не всегда бывает очевидной задачей. Для ее облегчения в настоящей работе рассматривается взаимное соответствие между коэффициентами ВСФ-разложений для разных реализаций этого метода.

*e-mail:malkin@gaoran.ru

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21


## 2 Варианты ВСФ-разложений и их сравнение

Общая формула для ВСФ задается выражением (V. Vityazev и Shuksto, 2004; V. V. Makarov и Murphy, 2007; Mignard и S. Klioner, 2012):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{lm}(\alpha,\delta) &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\delta}\,\boldsymbol{e}_\alpha - \frac{1}{\cos\delta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\alpha}\,\boldsymbol{e}_\delta\right], \\ \boldsymbol{S}_{lm}(\alpha,\delta) &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\frac{1}{\cos\delta}\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\alpha}\,\boldsymbol{e}_\alpha + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial\delta}\,\boldsymbol{e}_\delta\right], \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\delta\\ \sin\alpha\cos\delta\\ \sin\delta\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\alpha = \frac{1}{\cos\delta}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\alpha} = \begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\delta = \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\delta} = \begin{pmatrix}-\cos\alpha\sin\delta\\ -\sin\alpha\,\sin\delta\\ \cos\delta\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{T}_{lm}$ и $\boldsymbol{S}_{lm}$ – тороидальные и сфероидальные функции (которые в литературе часто называются магнитными и электрическими функциями соответственно) степени $l$ и порядка $m$, $Y_{lm}$ – скалярные сферические функции от полиномов и присоединенных функций Лежандра. Как исходные сферические функции $Y_{lm}$, так и ВСФ образуют наборы ортонормированных базисных функций, заданных на сфере.

Эта общая формулировка допускает различные подходы при её практической реализации. Можно построить набор ВСФ в виде вещественных или комплексных функций, применить различные методы нормализации, использовать разные соглашения о знаках. Нет даже общего подхода к терминологии. Например, Mignard и S. Klioner (2012) считают термины сфероидальные/тороидальные функции и магнитные/электрические функции синонимами, т.е. определяющими одни и те же функции под разными названиями, а Витязев (2017) считает их разными и выводит для них разные математические выражения.

Но с точки зрения использования аппарата ВСФ для научного анализа эти различия в практической реализации метода не имеют принципиального значения, их необходимо знать и учитывать только для корректного сравнения результатов разных авторов. В любом случае каждый член ВСФ-разложения состоит из тригонометрической функции сферических координат объекта и нормализующего множителя. В данной работе рассматриваются три независимые реализации разложений по ВСФ, наиболее часто используемые в работах по астрометрии и звездной астрономии: подход Миньяра и Клионера (Mignard и Morando (1990) и Mignard и S. Klioner (2012), далее обозначаемый MK), подход Витязева (Витязев (2017) и V. Vityazev и Shuksto (2004), далее обозначаемый VV) и подход Макарова (V. V. Makarov и Murphy (2007), далее обозначаемый VM). Для полноты обзора можно отметить другие реализации ВСФ-разложений, например Gwinn и др. (1997) и Marco, Martínez и López (2015), но они используются редко и легко могут быть добавлены в сравнение заинтересованным читателем.

На практике задача разложения исследуемого векторного поля $\boldsymbol{v}(\alpha,\delta)$ по ВСФ сводится к определению методом наименьших квадратов (МНК) коэффициентов $a_i$ из следующей системы уравнений:

$$\boldsymbol{v}(\alpha_j,\delta_j) = \sum_{i=1}^{N_{coeff}} a_i \boldsymbol{F}_i(\alpha_j,\delta_j)\,, \tag{2}$$

где j –номер объекта (звезды, источника) или ячейки в случае использования пикселизации, $\boldsymbol{F}$ – обобщенное обозначение ВСФ, $N_{coeff}$ – число коэффициентов разложения, которое зависит от заданной максимальной степени разложения $l_{max}$. При $l_{max} > 0$ $N_{coeff}$=$2\,l_{max}(l_{max}+2)$, для $l_{max}$=0 $N_{coeff}$=3 (только вращение). В табл. 1 приведены значения $N_{coeff}$ для $l_{max} \le 10$.

В радиоастрометрии в последние годы широко применяется разложение по ВСФ для анализа систематических разностей между каталогами координат радиоисточников и их скоростей. С этой целью чаще всего используется разложение до $l$=2, как, например, в работах N. Liu, Zhu

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21


Таблица 1: Число коэффициентов ВСФ в зависимости от $l_{max}$.

| $l_{max}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{coeff}$ | 3 | 6 | 16 | 30 | 48 | 70 | 96 | 126 | 160 | 198 | 240 |

и J. .-. Liu (2018), Karbon и Nothnagel (2019), N. Liu, S. B. Lambert и др. (2020), Charlot и др. (2020), Titov и S. Lambert (2013) и Yao и др. (2024):

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha^* \ = \ & R_1\cos\alpha\sin\delta + R_2\sin\alpha\sin\delta - R_3\cos\delta \\
& - G_1\sin\alpha + G_2\cos\alpha \\
& + M_{2,0}\sin 2\delta \\
& - (M^{\mathrm{Re}}_{2,1}\cos\alpha - M^{\mathrm{Im}}_{2,1}\sin\alpha)\cos 2\delta \\
& + (E^{\mathrm{Re}}_{2,1}\sin\alpha + E^{\mathrm{Im}}_{2,1}\cos\alpha)\sin\delta \\
& - (M^{\mathrm{Re}}_{2,2}\cos 2\alpha - M^{\mathrm{Im}}_{2,2}\sin 2\alpha)\sin 2\delta \\
& - 2\,(E^{\mathrm{Re}}_{2,2}\sin 2\alpha + E^{\mathrm{Im}}_{2,2}\cos 2\alpha)\cos\delta, \\
\Delta\delta \ = \ & -R_1\sin\alpha + R_2\cos\alpha \\
& - G_1\cos\alpha\sin\delta - G_2\sin\alpha\sin\delta + G_3\cos\delta \\
& + E_{2,0}\sin 2\delta \\
& - (M^{\mathrm{Re}}_{2,1}\sin\alpha + M^{\mathrm{Im}}_{2,1}\cos\alpha)\sin\delta \\
& - (E^{\mathrm{Re}}_{2,1}\cos\alpha - E^{\mathrm{Im}}_{2,1}\sin\alpha)\cos 2\delta \\
& + 2\,(M^{\mathrm{Re}}_{2,2}\sin 2\alpha + M^{\mathrm{Im}}_{2,2}\cos 2\alpha)\cos\delta \\
& - (E^{\mathrm{Re}}_{2,2}\cos 2\alpha - E^{\mathrm{Im}}_{2,2}\sin 2\alpha)\sin 2\delta,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\Delta\alpha^* = \Delta\alpha\cos\delta$, $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ – разности координат объекта в сравниваемых каталогах.

Как можно видеть из данного примера, в практике использования ВСФ часто производится определение коэффициентов модели непосредственно при тригонометрических функциях без учета нормализующего множителя. Такой подход часто может быть оправдан прямым соответствием между найденными коэффициентами и параметрами физического явления, например взаимного вращения между системами каталогов или кинематическими параметрами Галактики.

Шесть гармоник первой степени образуют вектор вращения $\mathbf{R} = (R_1, R_2, R_3)^{\mathrm{T}}$ и вектор дипольной деформации $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)^{\mathrm{T}}$, названный в Mignard и S. Klioner (2012) *glide* (соскальзывание), а в Titov и S. Lambert (2013) *secular aberration drift*, и ассоциирующийся с такими явлениями, как Галактическая аберрация в собственных движениях, вызываемая центростремительным ускорением Солнечной системы при её вращении вокруг центра Галактики. Заметим, что в выражении (3) знаки при компонентах вектора вращения соответствуют классическому определению направления вращения между каталогами (Walter и Sovers, 2000):

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha^* \ = \ & R_1\cos\alpha\sin\delta + R_2\sin\alpha\sin\delta - R_3\cos\delta\,, \\
\Delta\delta \ = \ & -R_1\sin\alpha + R_2\cos\alpha\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

В некоторых работах, например (N. Liu, Zhu и J. .-. Liu, 2018; N. Liu, S. B. Lambert и др., 2020), компоненты векторов $\mathbf{R}$ и $\mathbf{G}$ даны с противоположным знаком, но это не представляет трудностей в сравнении результатов, хотя и должно отслеживаться и учитываться.

В табл. 2 выражения (3) даны в виде набора функций, коэффициенты перед которыми непосредственно уравниваются МНК (см. уравнение 2), если вычисления производятся без учета нормализующих множителей.

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21
Известия Главной Астрономической Обсерватории в Пулкове, № 234

Таблица 2: Коэффициенты ВСФ до $l_{max}$=2, соответствующие выражению (3).

| Term | $\Delta\alpha^*$ | $\Delta\delta$ |
|---|---|---|
| $R_1$ | $\cos\alpha\sin\delta$ | $-\sin\alpha$ |
| $R_2$ | $\sin\alpha\sin\delta$ | $\cos\alpha$ |
| $R_3$ | $-\cos\delta$ | — |
| $G_1$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha\sin\delta$ |
| $G_2$ | $\cos\alpha$ | $-\sin\alpha\sin\delta$ |
| $G_3$ | — | $\cos\delta$ |
| $M_{2,0}$ | $\sin 2\delta$ | — |
| $E_{2,0}$ | — | $\sin 2\delta$ |
| $M_{2,1}^{\mathrm{Re}}$ | $-\cos\alpha\cos 2\delta$ | $-\sin\alpha\sin\delta$ |
| $M_{2,1}^{\mathrm{Im}}$ | $\sin\alpha\cos 2\delta$ | $-\cos\alpha\sin\delta$ |
| $E_{2,1}^{\mathrm{Re}}$ | $\sin\alpha\sin\delta$ | $-\cos\alpha\cos 2\delta$ |
| $E_{2,1}^{\mathrm{Im}}$ | $\cos\alpha\sin\delta$ | $\sin\alpha\cos 2\delta$ |
| $M_{2,2}^{\mathrm{Re}}$ | $-\cos 2\alpha\sin 2\delta$ | $2\sin 2\alpha\cos\delta$ |
| $M_{2,2}^{\mathrm{Im}}$ | $\sin 2\alpha\sin 2\delta$ | $2\cos 2\alpha\cos\delta$ |
| $E_{2,2}^{\mathrm{Re}}$ | $-2\sin 2\alpha\cos\delta$ | $-\cos 2\alpha\sin 2\delta$ |
| $E_{2,2}^{\mathrm{Im}}$ | $-2\cos 2\alpha\cos\delta$ | $\sin 2\alpha\sin 2\delta$ |

Явные выражения для ВСФ более высоких степеней даны в работах Mignard и S. Klioner (2012) (разложение MK, $l_{max}$=4) и Витязев (2017) (разложение VV, $l_{max}$=3). Выражения для разложения VM до $l_{max}$=4 были любезно предоставлены их автором (V. V. Makarov, 2024). В табл. 3 приведены 24 тороидальных гармоники, а в табл. 4 приведены 24 сфероидальных гармоники, вместе образующие полный набор из 48 ВСФ для $l_{max}$=4, для трех сравниваемых вариантов разложений ВСФ. При этом необходимо заметить, что в разложении MK все нормализующие множители положительны, а в разложениях VV и VM набор нормализующих множителей является знакопеременным. В двух последних случаях знак был перенесен в тригонометрическую функцию. Таким образом, знаки в табл. 3 и 4 соответствуют случаю определения коэффициентов разложения по ВСФ без учета нормализующих множителей. Из данных этих таблиц можно заметить, что знаки одинаковых функций у VM и MK совпадают для четных значений $l$+$m$, а знаки одинаковых функций у VV и MK совпадают для четных $m$.

Отдельно опишем структуру обозначений ВСФ для трех рассматриваемых разложений. Разложение MK в оригинальной работе представлено в комплексном виде, поэтому обозначение функций этого разложения в настоящей работе имеет вид $\{\boldsymbol{T}|\boldsymbol{S}\}_{lm}^{\{Re|Im\}}$, где $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{S}$ означают тороидальные и сфероидальные функции соответственно, а верхние индексы $Re$ и $Im$ означают вещественные и мнимые составляющие функций соответственно. Разложения VV и VM сделаны в вещественных функциях и представлены в настоящей работе в оригинальных обозначениях. Обозначения VV аналогичны обозначениям MK с той лишь разницей, что вместо индекса вещественной или мнимой части используется третий нижний индекс (1 соответствует вещественной части и 0 – мнимой части). Обозначения функций в разложении VM состоят из четырех индексов и имеют вид $(\{mag|ele\}, k, l, m)$, где $mag$ и $ele$ означают тороидальные и сфероидальные функции соответственно, а индекс $k$ имеет значение 0 при $m = 0$, а при $m > 0$ $k$=1 соответствует вещественной части и $k$=2 – мнимой части.

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21


Таблица 3: Тороидальные гармоники до $l_{max}$=4. L2 – разложение (3), MK – Mignard и S. Klioner (2012), VV – Витязев (2017), VM – V. V. Makarov (2024).

| MK | L2 | VV | VM | $\alpha^*$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{T}_{10}$ | $-R_3$ | $\boldsymbol{T}_{1,0,1}$ | $-$(mag,0,1,0) | $\cos\delta$ | — |
| $\boldsymbol{T}_{11}^{\mathrm{Re}}$ | $R_1$ | $-\boldsymbol{T}_{1,1,1}$ | (mag,1,1,1) | $\sin\delta\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{11}^{\mathrm{Im}}$ | $R_2$ | $-\boldsymbol{T}_{1,1,0}$ | (mag,2,1,1) | $\sin\delta\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{20}$ | $M_{2,0}$ | $\boldsymbol{T}_{2,0,1}$ | (mag,0,2,0) | $\sin 2\delta$ | — |
| $\boldsymbol{T}_{21}^{\mathrm{Re}}$ | $M_{2,1}^{\mathrm{Re}}$ | $-\boldsymbol{T}_{2,1,1}$ | $-$(mag,1,2,1) | $-\cos 2\delta\cos\alpha$ | $-\sin\delta\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{21}^{\mathrm{Im}}$ | $-M_{2,1}^{\mathrm{Im}}$ | $-\boldsymbol{T}_{2,1,0}$ | $-$(mag,2,2,1) | $-\cos 2\delta\sin\alpha$ | $\sin\delta\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{22}^{\mathrm{Re}}$ | $M_{2,2}^{\mathrm{Re}}$ | $\boldsymbol{T}_{2,2,1}$ | (mag,1,2,2) | $-\sin 2\delta\cos 2\alpha$ | $2\cos\delta\sin 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{22}^{\mathrm{Im}}$ | $-M_{2,2}^{\mathrm{Im}}$ | $\boldsymbol{T}_{2,2,0}$ | (mag,2,2,2) | $-\sin 2\delta\sin 2\alpha$ | $-2\cos\delta\cos 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{30}$ | | $\boldsymbol{T}_{3,0,1}$ | $-$(mag,0,3,0) | $\cos\delta(5\sin^2\delta-1)$ | — |
| $\boldsymbol{T}_{31}^{\mathrm{Re}}$ | | $-\boldsymbol{T}_{3,1,1}$ | (mag,1,3,1) | $\sin\delta(15\sin^2\delta-11)\cos\alpha$ | $-(5\sin^2\delta-1)\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{31}^{\mathrm{Im}}$ | | $-\boldsymbol{T}_{3,1,0}$ | (mag,2,3,1) | $\sin\delta(15\sin^2\delta-11)\sin\alpha$ | $(5\sin^2\delta-1)\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{32}^{\mathrm{Re}}$ | | $\boldsymbol{T}_{3,2,1}$ | $-$(mag,1,3,2) | $-\cos\delta(3\sin^2\delta-1)\cos 2\alpha$ | $\sin 2\delta\sin 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{32}^{\mathrm{Im}}$ | | $\boldsymbol{T}_{3,2,0}$ | $-$(mag,2,3,2) | $-\cos\delta(3\sin^2\delta-1)\sin 2\alpha$ | $-\sin 2\delta\cos 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{33}^{\mathrm{Re}}$ | | $-\boldsymbol{T}_{3,3,1}$ | (mag,1,3,3) | $\cos^2\delta\sin\delta\cos 3\alpha$ | $-\cos^2\delta\sin 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{33}^{\mathrm{Im}}$ | | $-\boldsymbol{T}_{3,3,0}$ | (mag,2,3,3) | $\cos^2\delta\sin\delta\sin 3\alpha$ | $\cos^2\delta\cos 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{40}$ | | | (mag,0,4,0) | $\sin 2\delta(7\sin^2\delta-3)$ | — |
| $\boldsymbol{T}_{41}^{\mathrm{Re}}$ | | | $-$(mag,1,4,1) | $(28\sin^4\delta-27\sin^2\delta+3)\cos\alpha$ | $-\sin\delta(7\sin^2\delta-3)\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{41}^{\mathrm{Im}}$ | | | $-$(mag,2,4,1) | $(28\sin^4\delta-27\sin^2\delta+3)\sin\alpha$ | $\sin\delta(7\sin^2\delta-3)\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{42}^{\mathrm{Re}}$ | | | (mag,1,4,2) | $-\sin 2\delta(7\sin^2\delta-4)\cos 2\alpha$ | $\cos\delta(7\sin^2\delta-1)\sin 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{42}^{\mathrm{Im}}$ | | | (mag,2,4,2) | $-\sin 2\delta(7\sin^2\delta-4)\sin 2\alpha$ | $-\cos\delta(7\sin^2\delta-1)\cos 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{43}^{\mathrm{Re}}$ | | | $-$(mag,1,4,3) | $\cos^2\delta(4\sin^2\delta-1)\cos 3\alpha$ | $-3\cos^2\delta\sin\delta\sin 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{43}^{\mathrm{Im}}$ | | | $-$(mag,2,4,3) | $\cos^2\delta(4\sin^2\delta-1)\sin 3\alpha$ | $3\cos^2\delta\sin\delta\cos 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{44}^{\mathrm{Re}}$ | | | (mag,1,4,4) | $-\cos^3\delta\sin\delta\cos 4\alpha$ | $\cos^3\delta\sin 4\alpha$ |
| $\boldsymbol{T}_{44}^{\mathrm{Im}}$ | | | (mag,2,4,4) | $-\cos^3\delta\sin\delta\sin 4\alpha$ | $-\cos^3\delta\cos 4\alpha$ |

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21


Таблица 4: Сфероидальные гармоники до $l_{max}$=4. L2 – разложение (3), МК – Mignard и S. Klioner (2012), VV – Витязев (2017), VM – V. V. Makarov (2024).

| MK | L2 | VV | VM | $\alpha^*$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{S}_{10}$ | $G_3$ | $\boldsymbol{S}_{1,0,1}$ | −(ele,0,1,0) | — | $\cos\delta$ |
| $\boldsymbol{S}_{11}^{\mathrm{Re}}$ | $-G_1$ | $-\boldsymbol{S}_{1,1,1}$ | (ele,1,1,1) | $\sin\alpha$ | $\sin\delta\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{11}^{\mathrm{Im}}$ | $-G_2$ | $-\boldsymbol{S}_{1,1,0}$ | (ele,2,1,1) | $-\cos\alpha$ | $\sin\delta\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{20}$ | $E_{2,0}$ | $\boldsymbol{S}_{2,0,1}$ | (ele,0,2,0) | — | $\sin 2\delta$ |
| $\boldsymbol{S}_{21}^{\mathrm{Re}}$ | $E_{2,1}^{\mathrm{Re}}$ | $-\boldsymbol{S}_{2,1,1}$ | −(ele,1,2,1) | $\sin\delta\sin\alpha$ | $-\cos 2\delta\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{21}^{\mathrm{Im}}$ | $-E_{2,1}^{\mathrm{Im}}$ | $-\boldsymbol{S}_{2,1,0}$ | −(ele,2,2,1) | $-\sin\delta\cos\alpha$ | $-\cos 2\delta\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{22}^{\mathrm{Re}}$ | $E_{2,2}^{\mathrm{Re}}$ | $\boldsymbol{S}_{2,2,1}$ | (ele,1,2,2) | $-2\cos\delta\sin 2\alpha$ | $-\sin 2\delta\cos 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{22}^{\mathrm{Im}}$ | $-E_{2,2}^{\mathrm{Im}}$ | $\boldsymbol{S}_{2,2,0}$ | (ele,2,2,2) | $2\cos\delta\cos 2\alpha$ | $-\sin 2\delta\sin 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{30}$ | | $\boldsymbol{S}_{3,0,1}$ | −(ele,0,3,0) | — | $\cos\delta(5\sin^2\delta-1)$ |
| $\boldsymbol{S}_{31}^{\mathrm{Re}}$ | | $-\boldsymbol{S}_{3,1,1}$ | (ele,1,3,1) | $(5\sin^2\delta-1)\sin\alpha$ | $\sin\delta(15\sin^2\delta-11)\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{31}^{\mathrm{Im}}$ | | $-\boldsymbol{S}_{3,1,0}$ | (ele,2,3,1) | $-(5\sin^2\delta-1)\cos\alpha$ | $\sin\delta(15\sin^2\delta-11)\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{32}^{\mathrm{Re}}$ | | $\boldsymbol{S}_{3,2,1}$ | −(ele,1,3,2) | $-\sin 2\delta\sin 2\alpha$ | $-\cos\delta(3\sin^2\delta-1)\cos 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{32}^{\mathrm{Im}}$ | | $\boldsymbol{S}_{3,2,0}$ | −(ele,2,3,2) | $\sin 2\delta\cos 2\alpha$ | $-\cos\delta(3\sin^2\delta-1)\sin 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{33}^{\mathrm{Re}}$ | | $-\boldsymbol{S}_{3,3,1}$ | (ele,1,3,3) | $\cos^2\delta\sin 3\alpha$ | $\cos^2\delta\sin\delta\cos 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{33}^{\mathrm{Im}}$ | | $-\boldsymbol{S}_{3,3,0}$ | (ele,2,3,3) | $-\cos^2\delta\cos 3\alpha$ | $\cos^2\delta\sin\delta\sin 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{40}$ | | | (ele,0,4,0) | — | $\sin 2\delta(7\sin^2\delta-3)$ |
| $\boldsymbol{S}_{41}^{\mathrm{Re}}$ | | | −(ele,1,4,1) | $\sin\delta(7\sin^2\delta-3)\sin\alpha$ | $(28\sin^4\delta-27\sin^2\delta+3)\cos\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{41}^{\mathrm{Im}}$ | | | −(ele,2,4,1) | $-\sin\delta(7\sin^2\delta-3)\cos\alpha$ | $(28\sin^4\delta-27\sin^2\delta+3)\sin\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{42}^{\mathrm{Re}}$ | | | (ele,1,4,2) | $-\cos\delta(7\sin^2\delta-1)\sin 2\alpha$ | $-\sin 2\delta(7\sin^2\delta-4)\cos 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{42}^{\mathrm{Im}}$ | | | (ele,2,4,2) | $\cos\delta(7\sin^2\delta-1)\cos 2\alpha$ | $-\sin 2\delta(7\sin^2\delta-4)\sin 2\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{43}^{\mathrm{Re}}$ | | | −(ele,1,4,3) | $3\cos^2\delta\sin\delta\sin 3\alpha$ | $\cos^2\delta(4\sin^2\delta-1)\cos 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{43}^{\mathrm{Im}}$ | | | −(ele,2,4,3) | $-3\cos^2\delta\sin\delta\cos 3\alpha$ | $\cos^2\delta(4\sin^2\delta-1)\sin 3\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{44}^{\mathrm{Re}}$ | | | (ele,1,4,4) | $-\cos^3\delta\sin 4\alpha$ | $-\cos^3\delta\sin\delta\cos 4\alpha$ |
| $\boldsymbol{S}_{44}^{\mathrm{Im}}$ | | | (ele,2,4,4) | $\cos^3\delta\cos 4\alpha$ | $-\cos^3\delta\sin\delta\sin 4\alpha$ |

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21


## 3 Заключение

Метод разложения по ВСФ предоставляет мощный математический аппарат для анализа векторных полей на небесной сфере, например собственных движений звезд или разностей координат звезд или внегалактических источников в двух каталогах. Поэтому ВСФ часто применяются для решения разнообразных астрономических задач, в частности в области астрометрии и Галактической астрономии. Кроме примеров, приведенных выше, можно отметить ряд важных, в первую очередь астрометрических, результатов, полученных с применением этого метода. V. V. Vityazev и Tsvetkov (2014) провели детальный анализ поля скоростей звезд по данным каталогов UCAC4, XPM и PPMXL с уточнением данных о вращении Галактики. Систематические различия между координатами и скоростями звезд в этих трех каталогах изучались в Витязев и Цветков (2015a) и Витязев и Цветков (2015b). Совместная обработка координат, собственных движений, параллаксов и лучевых скоростей звезд из каталогов RAVE5, UCAC4, PPMXL и Gaia TGAS позволила существенно уточнить кинематические параметры Галактики (Витязев, Цветков и др., 2017). В работе Valeri V. Makarov, Johnson и Secrest (2023) с помощью ВСФ-разложения изучены систематические разности каталогов положений внегалактических радиоисточников по данным РСДБ (ICRF3, Charlot и др. (2020)) и космических (*Gaia*-CRF3, Gaia Collaboration, S. A. Klioner и др. (2022)) наблюдений и на этой основе был впервые получен сводный каталог, основанный на двух методах наблюдений. Анализ разностей каталогов ICRF3 и *Gaia*-CRF2 (Gaia Collaboration, Mignard и др., 2018) был использован для верификации и ориентации последнего. Применение ВСФ-разложения к полю скоростей радиоисточников, полученных по РСДБ-наблюдениям позволил уточнить параметры Галактоцентрического ускорения Солнечной системы (Titov и S. Lambert, 2013). Этот список можно многократно увеличить.

Однако практическая реализация теории ВСФ допускает некоторую свободу в выборе деталей разложения. Для научной интерпретации результатов, получаемых в ходе того или иного исследования, это не играет существенной роли, но для корректного сравнения результатов, приводимых в различных публикациях, необходимо учитывать детали примененных для их получения вариантах ВСФ-разложения, позволяющие определить соответствие получаемых коэффициентов разложений. Данная работа является попыткой хотя бы частично облегчить эту задачу.

Одним из выводов из настоящей работы может служить рекомендация при публикации результатов, получаемых с помощью метода ВСФ приводить подробную информацию о применяемых разложениях.

В заключение следует заметить, что автор не ставил своей задачей полное сравнение всех использующихся (и, тем более, всех возможных) вариантов разложений ВСФ. Основная цель этой работы – обратить внимание на эту проблему.

## Благодарности

Автор благодарен В. Макарову за предоставление явных выражений гармоник своего ВСФ-разложения, которые использованы в работе.

Автор благодарен рецензенту за полезные предложения по улучшению первоначального варианта статьи.

## Список литературы

Mignard, F. и B. Morando (1990). Analyse de catalogues stellaires au moyen des harmoniques vectorielles. В: *Journées 1990: Systèmes de Référence Spatio-Temporels*. Observatoire de Paris, с. 151—158.

Витязев, В. В. (2017). *Анализ астрометрических каталогов с помощью сферических функций*. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та.

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21


Górski, K. M. и др. (2005). HEALPix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere. ApJ 622, с. 759—771.

Malkin, Zinovy (2019). A New Equal-area Isolatitudinal Grid on a Spherical Surface. AJ 158.4, с. 158.

Малкин, З. М. (2023). К использованию нового метода пикселизации сферы SREAG. *Известия Главной Астрономической Обсерватории в Пулкове* 228, с. 142—146.

Malkin, Zinovy (2021). Towards a robust estimation of orientation parameters between ICRF and Gaia celestial reference frames. MNRAS 506.4, с. 5540—5547.

Vityazev, Veniamin и Alexey Shuksto (2004). Stellar Kinematics by Vectorial Harmonics. В: *Order and Chaos in Stellar and Planetary Systems*. Под ред. Gene G. Byrd, Konstantin V. Kholshevnikov, Aleksandr A. Myllri, Igor I. Nikiforov и Victor V. Orlov. Т. 316. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, с. 230.

Makarov, V. V. и D. W. Murphy (2007). The Local Stellar Velocity Field via Vector Spherical Harmonics. AJ 134.1, с. 367—375.

Mignard, F. и S. Klioner (2012). Analysis of astrometric catalogues with vector spherical harmonics. A&A 547, A59.

Gwinn, Carl R., T. Marshall Eubanks, Ted Pyne, Mark Birkinshaw и Demetrios N. Matsakis (1997). Quasar Proper Motions and Low-Frequency Gravitational Waves. ApJ 485.1, с. 87—91.

Marco, F. J., M. J. Martínez и J. A. López (2015). Application of Vector Spherical Harmonics and Kernel Regression to the Computations of OMM Parameters. AJ 149.4, с. 129.

Liu, N., Z. Zhu и J. -C. Liu (2018). Possible systematics in the VLBI catalogs as seen from Gaia. A&A 609, A19.

Karbon, M. и A. Nothnagel (2019). Realization of a multifrequency celestial reference frame through a combination of normal equation systems. A&A 630, A101.

Liu, N., S. B. Lambert, Z. Zhu и J. -C. Liu (2020). Systematics and accuracy of VLBI astrometry: A comparison with Gaia Data Release 2. A&A 634, A28.

Charlot, P. и др. (2020). The third realization of the International Celestial Reference Frame by very long baseline interferometry. A&A 644, A159.

Titov, O. и S. Lambert (2013). Improved VLBI measurement of the solar system acceleration. A&A 559, A95.

Yao, Jun, Jia-Cheng Liu, Niu Liu, Zi Zhu и Zhen-Wei Wang (2024). The Astrometric Performance of the China Space Station Telescope (CSST) Sky Survey in Extending the Gaia Celestial Reference Frame. *Research in Astronomy and Astrophysics* 24.8, с. 085011.

Walter, Hans G. и Ojars J. Sovers (2000). *Astrometry of fundamental catalogues: the evolution from optical to radio reference frames*. Heidelberg: Springer-Verlag.

Makarov, V. V. (2024). *Personal communication*.

Vityazev, V. V. и A. S. Tsvetkov (2014). Intercomparison of kinematics derived from catalogues UCAC4, PPMXL and XPM with vector spherical harmonics. MNRAS 442.2, с. 1249—1264.

Витязев, В. В. и А. С. Цветков (2015a). Систематические разности положений и собственных движений звезд каталогов PPMXL и UCAC4. *Письма в Астрон. журн.* 41.7, с. 350—366.

— (2015b). Сравнение каталогов XPM и UCAC4. *Письма в Астрон. журн.* 41.10, с. 624—641.

Витязев, В. В., А. С. Цветков, В. В. Бобылев и А. Т. Байкова (2017). Кинематика Галактики по данным звездных каталогов RAVE5, UCAC4, PPMXL и Gaia TGAS. *Астрофизика* 60.4, с. 503—526.

Makarov, Valeri V., Megan C. Johnson и Nathan J. Secrest (2023). Radio-optical Reference Catalog, Version 1. AJ 166.1, с. 8.

Gaia Collaboration, S. A. Klioner и др. (2022). Gaia Early Data Release 3. The celestial reference frame (Gaia-CRF3). A&A 667, A148.

Gaia Collaboration, F. Mignard и др. (2018). Gaia Data Release 2. The celestial reference frame (Gaia-CRF2). A&A 616, A14.

doi:10.31725/0367-7966-2024-234-13-21



# On using vector spherical harmonics

Z.M. Malkin

Central Astronomical Observatory at Pulkovo of RAS

Received 24 July 2024 / Accepted 3 September 2024

**Abstract**

In many astronomical works, the structure of vector fields is analyzed, such as the differences in the celestial object coordinates in catalogs or the celestial object velocities, by decomposition into vector spherical harmonics (VSH). This method has shown high efficiency in many studies, but, at the same time, comparing the results obtained by different authors can cause difficulties associated with different approaches to building the VSH system and even with their different designations. To facilitate this task, this paper provides a comparison of the three VSH systems most often used in works on astrometry and stellar astronomy.

**Key words:** Astrometry, catalogs, comparison of catalogs, vector spherical harmonics