



# Построение эфемерид событий гравитационного микролинзирования на основе данных *Gaia*

А.М. Фархутдинова<sup>1\*</sup>, С.С. Котельников<sup>1</sup>

<sup>1</sup> СПбГУ

Поступила в редакцию 11 октября 2025 / Принята к публикации 6 ноября 2025

## Аннотация

Наблюдения событий гравитационного линзирования и микролинзирования уже давно стали повседневным явлением в современной астрономии. Анализ таких событий предоставляет уникальные данные, позволяющие решать широкий спектр задач — от изучения распределения тёмной материи до поиска и характеристики экзопланет.

В данной работе представлена методика и программное обеспечение для вычисления параметров событий микролинзирования, вызванных тесными (до десятков и сотен миллисекунд дуги) сближениями звёзд в Галактике на основе данных миссии *Gaia*. Основная цель исследования — продемонстрировать корректность и эффективность предложенного метода построения эфемерид таких событий и сопоставить полученные результаты с уже опубликованными данными.

**ключевые слова:** гравитационное линзование, микролинзование, анализ данных, астрометрия

## 1 Введение

Гравитационное линзование — это одно из фундаментальных проявлений общей теории относительности. Лучи света от удалённого источника, проходя вблизи массивного объекта (гравитационной линзы), искривляются, вследствие чего наблюдатель видит несколько искажённых, усиленных и смешённых изображений источника. Количество изображений и степень искажения зависят от конфигурации линзы и взаимного расположения источника и наблюдателя. При идеальном выравнивании по лучу зрения изображение источника образует характерную структуру вокруг линзы — кольцо Эйнштейна.

Роль линзы может играть любой компактный массивный объект — от планеты и коричневого карлика до скопления галактик. Источником же может быть любой светящийся объект: звезда, квазар или целая галактика.

Особый интерес представляет частный случай — гравитационное микролинзование. Это линзование, при котором и линза, и источник имеют звёздную массу и могут рассматриваться как точечные объекты. Такое явление позволяет напрямую измерять массу линзы, что делает микролинзование одним из немногих способов получения прямых оценок масс одиночных объектов — особенно тёмных или слабосветящихся, таких как нейтронные звёзды, белые карлики (Sahu, Anderson, Casertano, H. E. Bond, Bergeron *et al.* 2017), коричневые карлики, экзопланеты и изолированные чёрные дыры (Sahu, Anderson, Casertano, H. E. Bond, Andrzej Udalski *et al.* 2022).

При микролинзировании образуются два изображения источника: основное — расположено вне радиуса кольца Эйнштейна, ближе к источнику (кольцо Эйнштейна рассматривается не как наблюдаемая структура источника, а в первую очередь как характеристика системы линза-источник), и второстепенное — находящееся внутри кольца, ближе к линзе. Чем ближе по лучу

\*e-mail:alsinafar333@gmail.com

зрения подходят друг к другу объекты, тем ближе к кольцу Эйнштейна становятся изображения источника, в конечном итоге образуя само кольцо Эйнштейна при идеальном выравнивании. В зависимости от проявлений различают два типа микролинзирования: *фотометрическое* — проявляется как временное изменение блеска источника; *астрометрическое* — проявляется как смещение видимого положения источника на небе.

Фотометрические события успешно регистрируются в рамках крупных обзоров, таких как OGLE (A. Udalski, 2003) и MOA (I. A. Bond *et al.* 2001). Однако для прямого измерения массы линзы необходимо астрометрическое сопровождение, что стало возможным с запуском миссии *Gaia* (Gaia Collaboration *et al.* 2016). Именно точность астрометрии *Gaia* делает реальными предсказания событий астрометрического микролинзирования задолго до их наступления.

Используя данные *Gaia*, различные исследовательские группы уже предсказали тысячи будущих событий. Так, по данным *Gaia* DR2 в работе J. Klüter *et al.* 2018 определены параметры для 3914 событий, а по данным *Gaia* eDR3 — для 4842 событий (Jonas Klüter *et al.* 2022). На основе *Gaia* DR3 Su *et al.* 2024 ожидают около 4500 событий микролинзирования в период с 2010 по 2070 год.

Одной из задач нашей работы является разработка и реализация программного инструмента для построения эфемерид событий микролинзирования на основе данных *Gaia*. Такой инструмент позволяет, с одной стороны, предсказывать будущие события, а с другой — связывать наблюдения фотометрических обзоров (например, OGLE) с объектами *Gaia*, что открывает путь к прямому определению масс линз и уточнению характеристик звёздных популяций Галактики.

## 2 Базовые соотношения для вычисления эфемерид событий гравитационного микролинзирования

В большинстве случаев при микролинзировании система, состоящая из линзы и изображений источника, остаётся неразрешимой даже для современных наземных и космических телескопов, поскольку типичные угловые расстояния между компонентами составляют доли миллисекунды дуги. В этом разделе рассмотрены три возможных сценария наблюдения: в подразделе 2.1 обсуждается идеализированный случай полностью разрешённого микролинзирования, в подразделе 2.2 — наиболее распространённый неразрешённый случай, а в подразделе 2.3 — промежуточная, частично разрешённая конфигурация, реализующаяся при наблюдении более массивных, близких или менее ярких линз. Все представленные в этом разделе соотношения (формулы (1) — (15)) и иллюстрации (рис. 1) основаны на работе Bramich, 2018.

### 2.1 Полностью разрешённое микролинзирование

В теории микролинзирования все основные величины — сдвиги фотоцентров и усиления потоков — зависят от безразмерного расстояния (прицельного параметра)  $u = |\mathbf{u}|$ , который является двумерным вектором и выражается через векторы угловых положений линзы ( $\phi_L$ ) и источника ( $\phi_S$ ) на небесной сфере:

$$\mathbf{u} = \frac{\phi_S - \phi_L}{\theta_E}, \quad (1)$$

где

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \delta(t) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\alpha(t)$  и  $\delta(t)$  — экваториальные координаты объекта как функции времени. Они изменяются вследствие собственного движения звезды и её параллактического смещения. Величина  $\theta_E$  в уравнении (1) представляет собой радиус Эйнштейна:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{D_S - D_L}{D_S D_L}} = 2.854 \text{ mas} \sqrt{\frac{M_L}{M_\odot} \frac{\varpi_L - \varpi_S}{1 \text{ mas}}}. \quad (2)$$

Здесь  $M_L$  — масса линзы,  $D_S$  и  $D_L$  — расстояния до источника и линзы соответственно, а  $\varpi_S$  и  $\varpi_L$  — их параллаксы.

Как уже упоминалось в разделе 1, при идеальном выравнивании источника и линзы по лучу зрения изображение источника будет наблюдаться в виде кольца Эйнштейна с центром в линзе и радиусом  $\theta_E$ . В остальных же случаях при микролинзировании образуются два изображения источника:  $I_1$  — основное (расположено вне гипотетического кольца Эйнштейна) и  $I_2$  — второстепенное (внутри кольца Эйнштейна). Они всегда лежат на одной прямой  $I_2 - L - S - I_1$  и разделены угловым расстоянием:

$$\theta_{sep} = \theta_1 + \theta_2 = \theta_E \sqrt{u^2 + 4}, \quad (3)$$

где угловое расстояние  $\theta_1$  (между линзой и изображением  $I_1$ ) определяется как

$$\theta_1 = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4}}{2} \theta_E, \quad (4)$$

а расстояние между линзой и второстепенным изображением  $I_2$  (равное  $S - I_1$ ) вычисляется по формуле:

$$\theta_2 = \theta_{I_1 S} = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4}}{2} \theta_E = \theta_1 - \theta_E u. \quad (5)$$

Увеличения потоков отдельных изображений:

$$A_1 = \frac{u^2 + 2}{2u\sqrt{u^2 + 4}} + \frac{1}{2}, \quad A_2 = A_1 - 1. \quad (6)$$

## 2.2 Неразрешённое микролинзирование

В неразрешённом случае наблюдается только общее увеличение потока и сдвиг фотоцентра системы. Если линза не вносит собственного излучения («тёмная» линза), суммарное увеличение потока системы определяется выражением:

$$A = \frac{u^2 + 2}{u\sqrt{u^2 + 4}}. \quad (7)$$

Если же линза или другие близкие объекты вносят дополнительный световой вклад, видимое усиление уменьшается:

$$A_{lum} = \frac{f_{LS} + A}{f_{LS} + 1}, \quad (8)$$

где  $f_{LS}$  — отношение потока линзы к потоку источника. Соответствующее изменение блеска системы в звёздных величинах:

$$\Delta m = 2.5 \log_{10} A_{lum}. \quad (9)$$

До начала микролинзирования фотоцентр системы  $C_{LS}$  находится на угловом расстоянии

$$\theta_{LS} = \frac{\theta_E u}{1 + f_{LS}} \quad (10)$$

от линзы.

Во время микролинзирования преобладает вклад изображения  $I_1$ , и фотоцентр системы  $C_{mic}$  смещается относительно линзы на угол

$$\theta_{mic} = \frac{A_1 \theta_1 - A_2 \theta_2}{A_1 + A_2 + f_{LS}} = \frac{u^2 + 3}{u^2 + 2 + f_{LS} u \sqrt{u^2 + 4}} \theta_E u. \quad (11)$$

Сдвиг фотоцентра, соответствующий положению  $C_{mic}$ :

$$\delta_{mic} = \theta_{mic} - \theta_{LS} = \frac{\theta_E u}{1 + f_{LS}} \frac{1 + f_{LS} (u^2 + 3 - u \sqrt{u^2 + 4})}{u^2 + 2 + f_{LS} u \sqrt{u^2 + 4}}. \quad (12)$$

Если линза не излучает ( $f_{LS} = 0$ ), сдвиг fotoцентра относительно исходного положения источника равен:

$$\delta = \frac{u}{u^2 + 2} \theta_E. \quad (13)$$

### 2.3 Частично разрешённое микролинзирование

В некоторых случаях разрешающая способность инструмента достаточна, чтобы отделить изображение  $I_1$  от линзы  $L$ , в то время как  $I_2$  и  $L$  остаются неразрешёнными. В этом случае отношение потока системы  $L - I_2$  к потоку линзы равно:

$$A_{LI_2} = \frac{A_2 + f_{LS}}{f_{LS}} = \frac{u^2 + 2 + (2f_{LS} - 1)u\sqrt{u^2 + 4}}{2f_{LS}u\sqrt{u^2 + 4}}. \quad (14)$$

Фотоцентр этой подсистемы  $C_{LI_2}$  смещается от линзы на угол:

$$\theta_{LI_2} = \frac{A_2\theta_2}{A_2 + f_{LS}} = \theta_E \frac{(u^2 + 1)(\sqrt{u^2 + 4} - u) - 2u}{u^2 + 2 + (2f_{LS} - 1)u\sqrt{u^2 + 4}}. \quad (15)$$

## 3 Построение эфемерид событий микролинзирования

Для расчёта эфемерид событий гравитационного микролинзирования по формулам, приведённым в разделе 2, и для проверки корректности работы разработанной нами программы были использованы данные из онлайн-таблицы GAVO<sup>1</sup> предвычислённых событий астрометрического микролинзирования, основанных на каталоге *Gaia* eDR3. Таблица содержит 4842 события, максимум которых приходится на период с 2010 по 2066 гг. (Jonas Klüter *et al.* 2022, далее **K22**).

В таблице приведены астрометрические параметры звёзд линз и источников — координаты, собственные движения и параллаксы (пять астрометрических параметров решения *Gaia*), а также звёздные величины в полосе  $G$ , взятые из каталога *Gaia* eDR3. Дополнительно указаны оценки масс линз и рассчитанные авторами моменты наибольшего сближения пары «линза–источник». Все эти параметры использовались нами в качестве исходных данных.

В таблице также содержатся вычисленные авторами **K22** величины, представляющие интерес для настоящей работы: минимальное угловое расстояние между компонентами пары, радиус кольца Эйнштейна  $\theta_E$ , прицельный параметр  $u$ , а также эфемериды микролинзирования  $\theta_{I_1S}, \delta, \delta_{mic}, \Delta t$ . Все эти величины зависят, прежде всего, от прицельного параметра  $u$ , который, в свою очередь, определяется угловым расстоянием  $d(t)$  и радиусом Эйнштейна  $\theta_E$ . Поэтому дальнейшее внимание будет сосредоточено именно на анализе этих двух параметров, особенно на точности вычисления углового расстояния.

Первоначально мы попытались полностью воспроизвести (в идеальном и методологическом плане) вычисления, представленные в **K22**, с целью последующего сравнения результатов и проверки корректности созданного программного кода. Однако в процессе анализа были выявлены отдельные допущения и упрощения, с которыми мы не могли согласиться. В связи с этим было принято решение реализовать две версии расчётов с помощью кода на языке Python:

1. максимально приближенную к подходу, описанному в **K22**;
2. альтернативную, учитывающую разнообразные астрометрические эффекты и источники систематических ошибок.

Поскольку каталог *Gaia* eDR3, использованный в работе **K22**, является подмножеством более полного каталога *Gaia* DR3, в наших расчётах использовались обновлённые данные DR3.

<sup>1</sup><https://dc.g-vo.org/amlensing/q3/q/form>

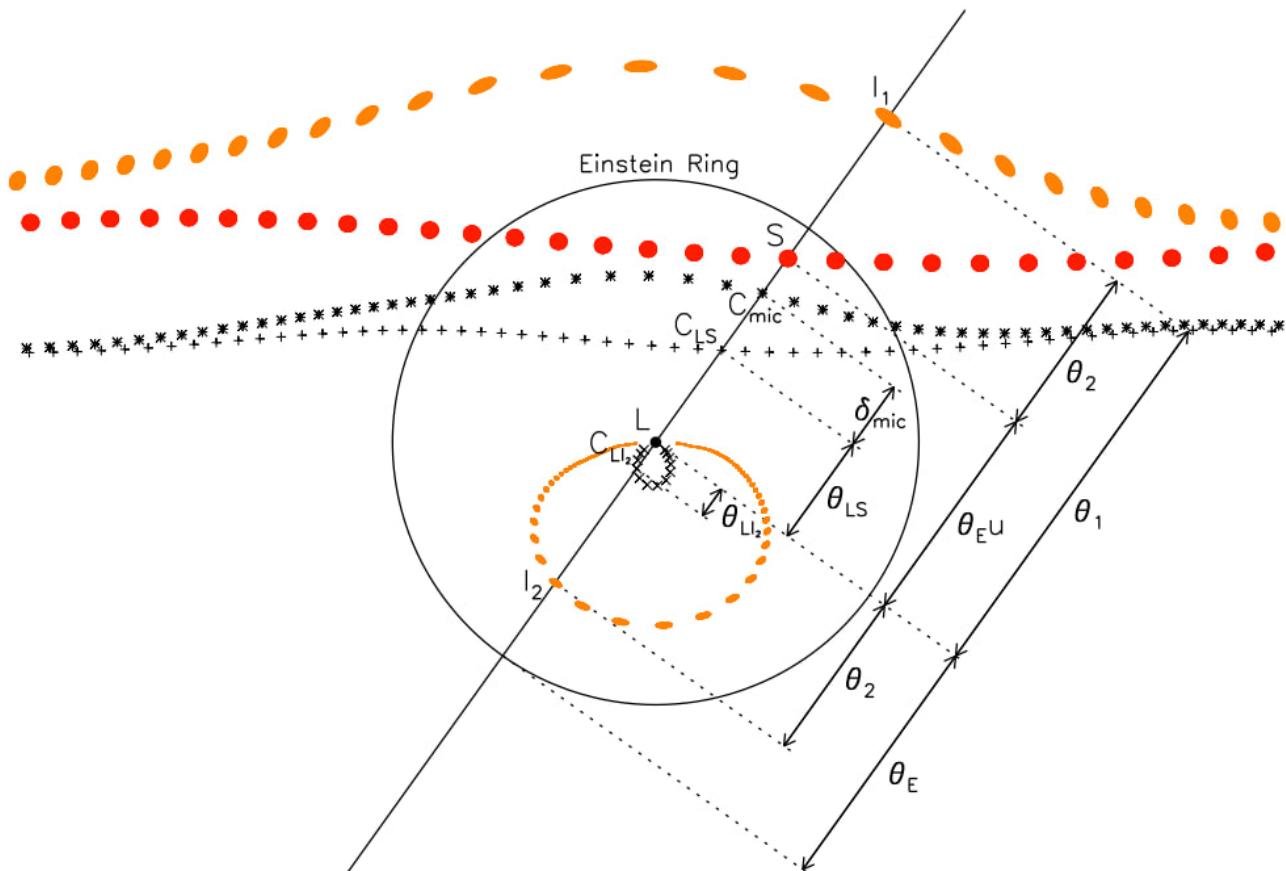


Рис. 1: Схематическая конфигурация события микролинзирования, наблюдаемая с Земли, иллюстрирующая полностью разрешённый, неразрешённый и частично разрешённый случаи. Красными кружками показан источник  $S$ , движущийся относительно линзы  $L$  (чёрный кружок) через равные промежутки времени. Относительное движение источника включает равномерное собственное движение и годичный параллакс, что приводит к кажущейся нелинейности траектории. Основное и второстепенное изображения  $I_1$  и  $I_2$  показаны оранжевыми эллипсами. В каждый момент времени точки  $I_1$ ,  $S$ ,  $L$  и  $I_2$  лежат на одной прямой, на которой также расположены фотоценры  $C_{mic}$  (звездочки),  $C_{LS}$  (плюсы) и  $C_{LI_2}$  (крестики). Фотоцентры показаны для  $f_L/f_S = 1$ . На диаграмме отмечены все угловые расстояния, определённые в тексте.

### 3.1 Первая версия ( основанная на вычислениях **K22**)

Для вычисления прицельного параметра необходимо определить угловое расстояние между линзой и источником, а также радиус Эйнштейна. Радиус вычисляется по формуле (2). Угловое расстояние, в свою очередь, находится из положений обоих объектов в экваториальных декартовых координатах как функций времени  $t$ , отсчитываемого от опорной эпохи  $Gaia$   $t_0 = J2016.0$ .

Изменение направления на объект во времени описывается совокупным действием двух факторов: движения звезды в пространстве (включающего тангенциальную и радиальную компоненты) и движения наблюдателя вокруг Солнца (параллактический эффект). В работе **K22** положение небесного тела в декартовых координатах вычислялось по формуле:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\delta + \mu_\delta t) \cos(\alpha + \mu_\alpha t) \\ \cos(\delta + \mu_\delta t) \sin(\alpha + \mu_\alpha t) \\ \sin(\delta + \mu_\delta t) \end{pmatrix} \cdot dist + \mathbf{E}(t + t_0), \quad (16)$$

где  $\alpha, \delta$  — экваториальные координаты на момент времени  $t_0$ ;  $\mu_\delta, \mu_\alpha = \mu_{\alpha^*} / \cos \delta$  — компоненты собственного движения;  $dist$  — расстояние до объекта;  $\mathbf{E}(t + t_0)$  — геоцентрическое положение Солнца в экваториальных координатах на момент времени  $t + t_0$ , получаемое при помощи модуля `astroquery.jplhorizons`, который обращается к онлайн-сервису JPL Horizons<sup>2</sup>.

Угловое расстояние между линзой и источником далее вычисляется как:

$$d(t) = 2 \cdot \arcsin \left( \left| \frac{\mathbf{x}_l(t)}{|\mathbf{x}_l(t)|} - \frac{\mathbf{x}_s(t)}{|\mathbf{x}_s(t)|} \right| \cdot 0.5 \right). \quad (17)$$

Из всей выборки 4842 событий микролинзирования у 1027 объектов источника параллакс имеет отрицательное значение, а у 823 отсутствует вовсе. В случаях с отрицательным параллаксом источника в формуле (16) подставляется нулевое значение параллакса, а в формулу (2) — отрицательное, как в **K22**. Для событий, где источник имеет 2-параметрическое решение (параллакс и собственное движение отсутствуют в каталоге  $Gaia$  eDR3), параллакс в формуле радиуса Эйнштейна (2) принимается равным нулю, а в формуле движения звезды (16) оценивается через выражение

$$\varpi = 4.74 \frac{\mu}{v_t}, \quad (18)$$

где тангенциальная скорость принимается типичной:  $v_t = 75$  км/с. Собственное движение определяется как разность положений звезды в каталогах  $Gaia$  DR2 и  $Gaia$  eDR3. Ошибки параллакса и собственного движения задаются как полуширины распределений для всех источников с 5-параметрическими решениями, что соответствует 3 мсд и 5 мсд соответственно.

### 3.2 Вторая версия

Для надёжного прогнозирования событий астрометрического микролинзирования необходимы высокоточные астрометрические данные (на уровне мсд дуги в положениях) и строгая модель движения звёзд на больших интервалах времени. Как показано в работе Butkevich, Lindegren, 2014, даже при использовании простейшей кинематической модели равномерного прямолинейного движения относительно барицентра следует учитывать перспективное ускорение, обусловленное радиальной скоростью, и эффект конечности скорости света. Последний эффект, однако, для временных масштабов и точности  $Gaia$  оказывается пренебрежимо малым, поэтому в данной реализации он не учитывается, хотя формулы приведены в виде, позволяющем легко включить его при необходимости.

Вектор направления на объект за пределами Солнечной системы относительно наблюдателя на Земле изменяется по закону:

<sup>2</sup><https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r}(1 + \mu_{r0}(t - t_0)) + \boldsymbol{\mu}_0(t - t_0) - \varpi \mathbf{b}_\oplus(t)/A_u, \quad (19)$$

где  $t$  — время наблюдения (TCB);  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$  — ортонормированные единичные векторы, определяемые через координаты  $\alpha_0, \delta_0$  на эпоху  $t_0$ :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \sin \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \sin \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos \delta_0 \cos \alpha_0 \\ \cos \delta_0 \sin \alpha_0 \\ \sin \delta_0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Здесь  $\mathbf{b}_\oplus(t)$  — барицентрическое положение Земли,  $A_u$  — астрономическая единица, а вектор собственного движения задаётся как  $\boldsymbol{\mu}_0 = \mathbf{p}\mu_{0\alpha*} + \mathbf{q}\mu_{0\delta}$ , где  $\mu_{0\alpha*} = \mu_{0\alpha} \cos \delta_0$  и  $\mu_{0\delta}$  — компоненты движения вдоль направлений  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  соответственно,  $\mu_{r0} = v_{r0}\varpi_0/A_u$  — радиальное собственное движение, связанное с перспективным ускорением.

Так как расстояние до объекта изменяется со временем, вариируются и собственные движения с параллаксом:

$$\varpi = \varpi_0 f_D, \quad \boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_0(1 + \mu_0 t) - \mathbf{r}_0 \mu_0^2 t] f_D^3, \quad \mu_r = [\mu_{r0} + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t] f_D^2,$$

где фактор расстояния  $f_D$  определяется как

$$f_D = [1 + 2\mu_{r0}(t - t_0)f_T + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2)((t - t_0)f_T)^2]^{-1/2}. \quad (21)$$

Для вычисления углового расстояния используется формула (17).

Известно, что в *Gaia* DR3 наблюдается систематический сдвиг нуль-пункта параллакса, зависящий от положения, блеска и цвета объекта (Lindegren *et al.* 2021). Применяя предложенный в этой работе рецепт коррекции, мы пересчитали параллаксы всех звёзд с известными 5-параметрическими решениями из нашей выборки.

Для звёзд с 2-параметрическими решениями *Gaia* DR3 процедура определения собственных движений оставалась идентичной методике, изложенной в подразделе 3.1. Вместе с тем, оценка погрешностей этих величин производилась по иному алгоритму, в основу которого были положены ошибки координат, приведенные в каталогах DR2 и DR3. В случаях отсутствия объекта в каталоге DR2, значения собственных движений принимались равными нулю, а их статистические неопределенности устанавливались на уровне 5 миллисекунд дуги, в соответствии с подходом, описанным в подразделе 3.1. Определение параллаксов и их ошибок выполнялось на основе анализа распределения данного параметра для звёзд из DR3, обладающих сопоставимой звёздной величиной (в диапазоне  $G \pm 0.1$  mag) и находящихся в близкой небесной окрестности. Радиус этой области варьировался в пределах от 0.5 до 5 градусов, адаптируясь для достижения репрезентативной статистики. Если в результате отбора идентифицировалось менее 100 звёзд, удовлетворяющих указанным критериям, параллакс для исследуемого объекта принимался нулевым, а его ошибка назначалась равной 3 миллисекундам дуги, что также следует установкам подраздела 3.1.

В данной реализации при вычислении эфемерид микролинзирования в формулы радиуса Эйнштейна и углового расстояния подставлялись одни и те же значения параллаксов — независимо от того, были они положительными, отрицательными (после коррекции нуль-пункта) или приближёнными по формуле (18). Даже для положительных параллаксов возможны ситуации, когда ошибка  $\sigma$  или её кратные ( $5\sigma$  и т.п.) захватывают область отрицательных значений. Эти значения, формально допустимые с точки зрения математической модели, не имеют физического смысла, однако продолжают участвовать в вычислениях методом Монте–Карло, что следует учитывать при интерпретации получаемых распределений.

### 3.3 Учёт неопределённостей величин

В работе K22 авторы вычисляют значения многих параметров — в том числе  $d$  и  $\theta_E$  — непосредственно по формулам, а их ошибки оценивают аналитически, используя стандартное выражение

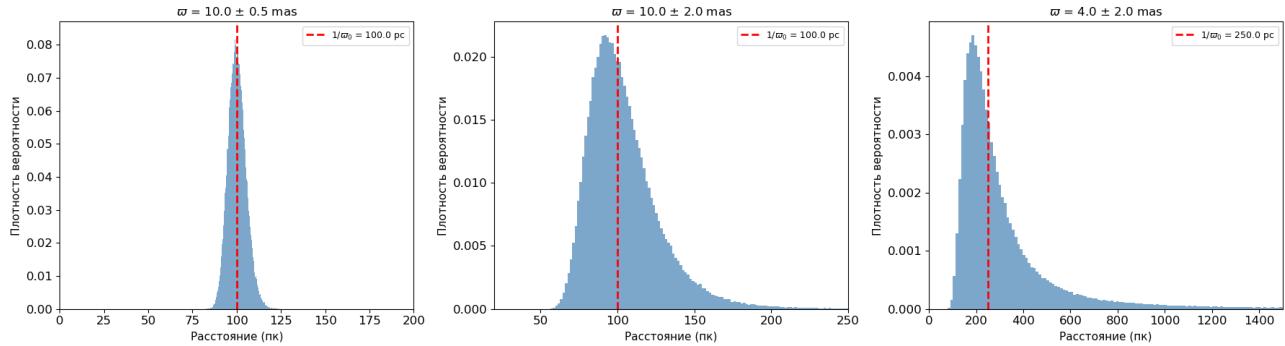


Рис. 2: Распределения расстояний, полученных из обратных параллаксов с гауссовыми ошибками, при разных уровнях относительной погрешности параллакса.

для распространения ошибок сложной величины (22), не учитывая при этом корреляции между входными параметрами.

$$\sigma_f^2 = \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \text{Cov}(x_i, x_j), \quad (22)$$

где  $f = f(x_1, x_2, \dots)$  — вычисляемая функция,  $\sigma_{x_i}$  — дисперсии исходных параметров, а  $\text{Cov}(x_i, x_j)$  — ковариации между ними.

Даже при учёте ковариаций такой подход корректен лишь при условии близости распределений к гауссовым и линейности преобразования. Однако в задачах микролинзирования это часто не выполняется: распределения выходных величин оказываются асимметричными, и медиана или мода сдвигаются относительно значения, получаемого прямым подстановочным расчётом.

Метод Монте–Карло позволяет учесть эти эффекты честным образом, моделируя истинное распределение выходной величины с сохранением всех асимметрий и корреляций.

**Пример.** Для наглядности рассмотрим простейшую задачу определения расстояния как обратной величины параллакса:

$$d = \frac{1}{\varpi}. \quad (23)$$

Пусть параллакс  $\varpi$  распределён нормально со средним  $\varpi_0$  и дисперсией  $\sigma_\varpi^2$ . Тогда распределение расстояний  $d$  будет существенно асимметричным. В частности, наиболее вероятное значение  $d$  не совпадает с  $1/\varpi_0$ , а для больших относительных ошибок параллакса сдвиг моды и медианы относительно  $1/\varpi_0$  может быть очень значительным. Это хорошо иллюстрирует преимущества метода Монте–Карло: вместо единственного симметричного доверительного интервала мы получаем распределение расстояний, которое отражает реальную неопределённость задачи (рис. 2). Более обстоятельно этот эффект и другие рассмотрены в статье Luri *et al.* 2018.

В работе K22 метод Монте–Карло применяется лишь начиная с расчёта прицельного параметра  $u$  и далее для эфемерид микролинзирования. Однако важно подчеркнуть, что корректная оценка ошибок для  $d$  и  $\theta_E$  принципиальна, так как именно эти величины напрямую входят во все остальные зависимости.

**Наша реализация.** Для оценки неопределённостей мы используем многомерное Монте–Карло распределение, генерируя  $N = 10^4$  реализаций параметров с учётом ковариационной матрицы  $6 \times 6$ :  $(\alpha, \delta, \mu_{\alpha*}, \mu_\delta, \varpi, \mu_r)$ , где корреляции для первых пяти параметров берутся из *Gaia DR3*. Дополнение матрицы для радиального собственного движения проводится по формулам (Butkevich, Lindegren, 2014):

$$[C_0]_{i6} = [C_0]_{6i} = [C_0]_{i3}(v_{r0}/A_u), \quad i = 1 \dots 5, \quad (24)$$

$$[C_0]_{66} = [C_0]_{33} (v_{r0}^2 + \sigma_{v_{r0}}^2) / A_u^2 + (\varpi_0 \sigma_{v_{r0}} / A_u)^2 \quad (25)$$

Для звёзд, лишенных измеренных значений радиальной скорости в каталоге *Gaia* DR3, по умолчанию принимается величина  $v_r = 0$ . Однако сопутствующая стандартная неопределенность этой величины задаётся на уровне  $\sigma_{v_{r0}} = 75$  км/с. Выбор данного значения является консервативной оценкой, обоснованной тремя факторами: во-первых, она приблизительно соответствует общей дисперсии пространственных скоростей звёзд в Галактике; во-вторых, она служит грубым приближением стандартного отклонения для полного распределения радиальных скоростей в *Gaia* DR3 (рис. 11 в Katz *et al.* 2023); и, в-третьих, представляет собой завышенную оценку относительно стандартного отклонения  $\sigma_{v_{r0}}$  для распределения радиальных скоростей звёзд-линз, которое составляет приблизительно 60 км/с. Исключение из этого правила составляют звёзды со звёздной величиной  $G < 17.5$  mag. Для объектов, удовлетворяющих этому критерию блеска, используются априорные оценки  $v_{r0}$  и  $\sigma_{v_{r0}}$ , заимствованные из каталога байесовских оценок для DR3 (Naik, Widmark, 2023). При этом из данного источника принимаются лишь те оценки, для которых значение  $\sigma_{v_{r0}}$  оказывается менее 75 км/с.

Следует отметить, что наш метод всё же не учитывает всех возможных источников неопределенности: например, погрешности поправки за нуль-пункт параллакса или ошибки барицентрических координат Земли не учитываются. Также для более корректного учёта ошибки радиальной скорости при её отсутствии в каталоге можно провести дополнительный анализ характеристик звезд, позволяющий уточнить оценку дисперсии скоростей для разных типов и подсистем.

В результате каждой серии моделирования мы получаем распределения для углового расстояния  $d$ , радиуса Эйнштейна  $\theta_E$ , прицельного параметра  $i$  и всех эфемерид микролинзирования (см. раздел 2) на момент наибольшего сближения с учетом его ошибок. Дополнительно учитываются ошибки массы линзы и блеска звёзд, которые моделируются нормальными распределениями.

## 4 Результаты

Как отмечалось в предыдущих разделах, построение эфемерид микролинзирования напрямую зависит от двух ключевых параметров — углового расстояния между звёздами и радиуса Эйнштейна. Следовательно, основное внимание в настоящей работе уделено методам вычисления именно этих величин и их влиянию на точность дальнейших расчётов. В этом разделе представлены результаты сравнительного анализа значений  $d$  и  $\theta_E$ , полученных различными способами.

На рис. 3 показаны зависимости разностей радиусов Эйнштейна от разностей угловых расстояний, нормированные на соответствующие ошибки. Сравнение выполнено для трёх вариантов реализации расчётов эфемерид:

1. результаты **K22** ( $d_0, \theta_0 \equiv \theta_{E0}$ );
2. наши вычисления, максимально приближённые к **K22**, но с другим способом учёта неопределённостей, описанным в подразделе 3.1 ( $d_{kl}, \theta_{kl} \equiv \theta_{Ekl}$ );
3. наша независимая реализация, основанная на уточнённой модели движения, описанной в подразделе 3.2 ( $d_{new}, \theta_{new} \equiv \theta_{Enew}$ ).

В первом ряду графиков на рис. 3 приведено сравнение результатов третьего метода с расчётами **K22**, во втором — второго метода с первым, и в третьем — сопоставление двух наших подходов.

Синим цветом в левой колонке обозначены события, в которых звезда-источник имеет 5-параметрическое решение в *Gaia* DR3; оранжевым — случаи с 2-параметрическими решениями (все линзы изначально отобраны только с 5-параметрическими решениями). В правой колонке показаны только события с 5-параметрическими решениями. Ошибки, на которые нормируются разности, вычислялись как объединённые ошибки разности двух величин:  $\Delta a_3 = \sqrt{(\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2}$ .

Из первой и третьей строк графиков видно, что длинные «хвосты» по оси  $y$  создают события, где звезда-источник имеет 2-параметрическое решение в *Gaia* DR3. Это связано с тем, что для таких объектов параллаксы в третьем способе оцениваются иначе, чем в остальных способах.

Главный вывод из анализа рис. 3 состоит в том, что различия между методами в целом лежат в пределах  $3\sigma$ -ошибки, то есть являются статистически несущественными. Таким образом, все три способа дают согласованные результаты. Однако при прогнозировании конкретных событий микролинзирования важно учитывать наиболее вероятное значение внутри диапазона неопределенности, так как это напрямую влияет на оценку параметров события и, в конечном счёте, на определение массы линзы.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только тех событий, где источники имеют 5-параметрические решения в *Gaia DR3*. Как и ожидалось, второй метод даёт минимальные расхождения с первым (второй ряд графиков), что подтверждает корректность воспроизведения вычислений **K22**. Тем не менее небольшие отличия присутствуют и в основном связаны с разными способами учёта неопределённостей, о чём подробнее говорилось в разделе 3.3. На графиках также заметна тонкая крестообразная структура, возникающая из-за деления на очень малые ошибки. Этот эффект становится менее выраженным при переходе к рис. 4.

На рис. 4 показаны аналогичные зависимости, но выраженные в миллисекундах дуги. Первый график демонстрирует сравнение наших независимых расчётов (третий метод) с результатами **K22**; второй — сравнение второго метода с первым; третий — различия между двумя нашими реализациями.

Рис. 5 и рис. 6 дают более детализированный анализ структур предыдущих диаграмм. Масштаб здесь несколько увеличен, из-за чего часть точек не показана. Цветовая кодировка отражает логарифмы ошибок углового расстояния, параллакса и собственного движения источника, радиуса Эйнштейна и массы линзы.

Из рис. 5 видно, что горизонтальный «рукав» крестообразной структуры возникает из-за деления на слишком малые ошибки углового расстояния, тогда как вертикальные выбросы, вероятно, связаны с асимметрией распределений выходных величин. Как показано в подразделе 3.3, медиана и мода в асимметричных распределениях могут значительно смещаться при больших разбросах параметров. Анализ второй колонки рис. 6 показывает, что вытянутое облако точек на рис. 5 и на рис. 6 по горизонтальной оси обусловлено именно различиями между аналитическим и Монте–Карло подходами к учёту ошибок: чем больше  $\Delta d$ , тем сильнее проявляется несимметричность распределений.

Графики также демонстрируют взаимное влияние неопределённостей — как ошибки параллакса и собственного движения влияют на ошибку углового расстояния, а ошибка массы линзы — на радиус Эйнштейна. Эти эффекты оказываются взаимосвязанными и вносят совокупный вклад в форму итогового распределения.

Обобщая результаты анализа (рис. 6), можно отметить следующее: вторая колонка демонстрирует отличие двух почти идентичных методов, различающихся лишь способом учёта неопределённостей; третья — различия двух подходов, использующих метод Монте–Карло, но отличающихся по формулировке уравнений и частным допущениям; первая колонка объединяет оба эффекта, показывая совокупное влияние различий как в формулах, так и в моделировании ошибок.

Таким образом, основной вклад в расхождение величины  $d$  между методами вносит именно способ учёта неопределённостей. Формулы и другие различия между реализациями оказывают значительно меньший эффект. Тем не менее для высокоточных прогнозов астрометрического микролинзирования важно учитывать эти систематические различия.

Наконец, на рис. 7 показаны зависимости разности прицельного параметра от разностей эфемерид микролинзирования — смещения основного изображения источника относительно его истинного положения ( $\theta_{LS}$ ), сдвига фотоцентра при «тёмной» линзе относительно источника ( $\delta$ ), и смещения фотоцентра при «светящейся» линзе относительно исходного фотоцентра системы «линза–источник» ( $\delta_{mic}$ ). Все величины нормированы на соответствующие ошибки. Графики приведены для всей выборки событий микролинзирования.

Разработанный в рамках настоящего исследования программный код, предназначенный для вычисления эфемерид событий гравитационного микролинзирования двумя независимыми методами на основе данных астрометрической миссии *Gaia*, находится в открытом доступе на плат-

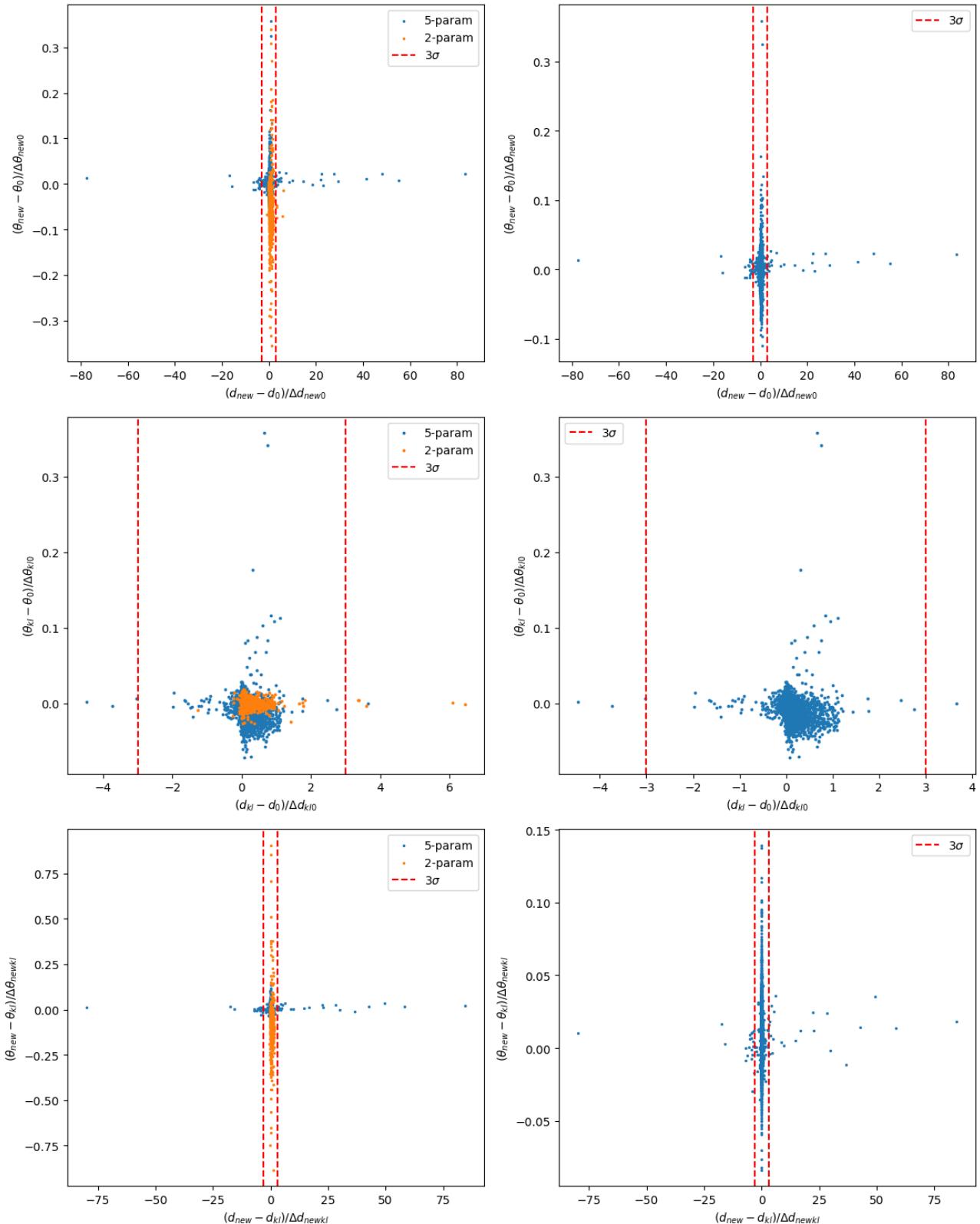


Рис. 3: Зависимость разности радиусов Эйнштейна от разности угловых расстояний, нормированные на соответствующие ошибки. Сравниваются результаты трёх реализаций: расчёты **K22** ( $d_0, \theta_0$ ), наши вычисления, приближённые к **K22**, но с иным учётом неопределённостей ( $d_{kl}, \theta_{kl}$ ), и наша независимая реализация ( $d_{new}, \theta_{new}$ ). Синим обозначены события с 5-параметрическим решением источника, оранжевым — с 2-параметрическим.

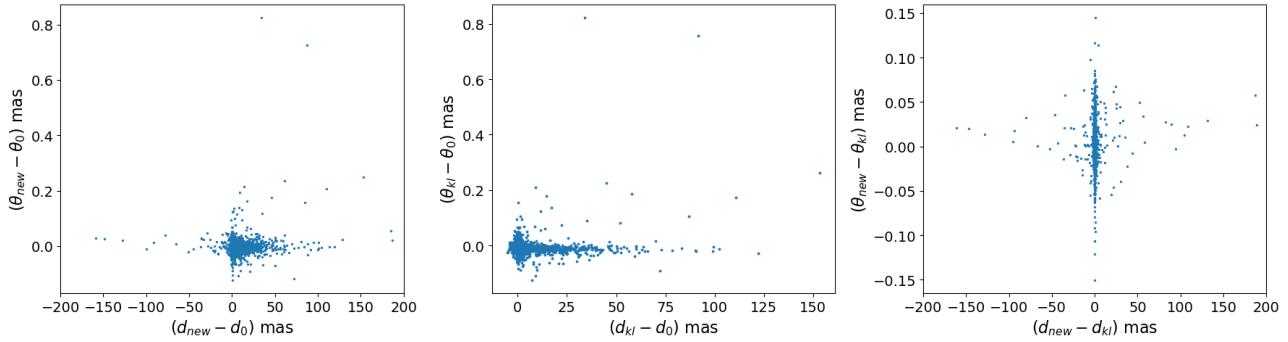


Рис. 4: Зависимость разности радиусов Эйнштейна от разности угловых расстояний в единицах мсд. Сравниваются три реализации расчётов: **K22** ( $d_0, \theta_0$ ), наши расчёты, приближённые к **K22** ( $d_{kl}, \theta_{kl}$ ), и независимые расчёты ( $d_{new}, \theta_{new}$ ). Приведены события, где источник имеет 5-параметрическое решение в *Gaia DR3*.

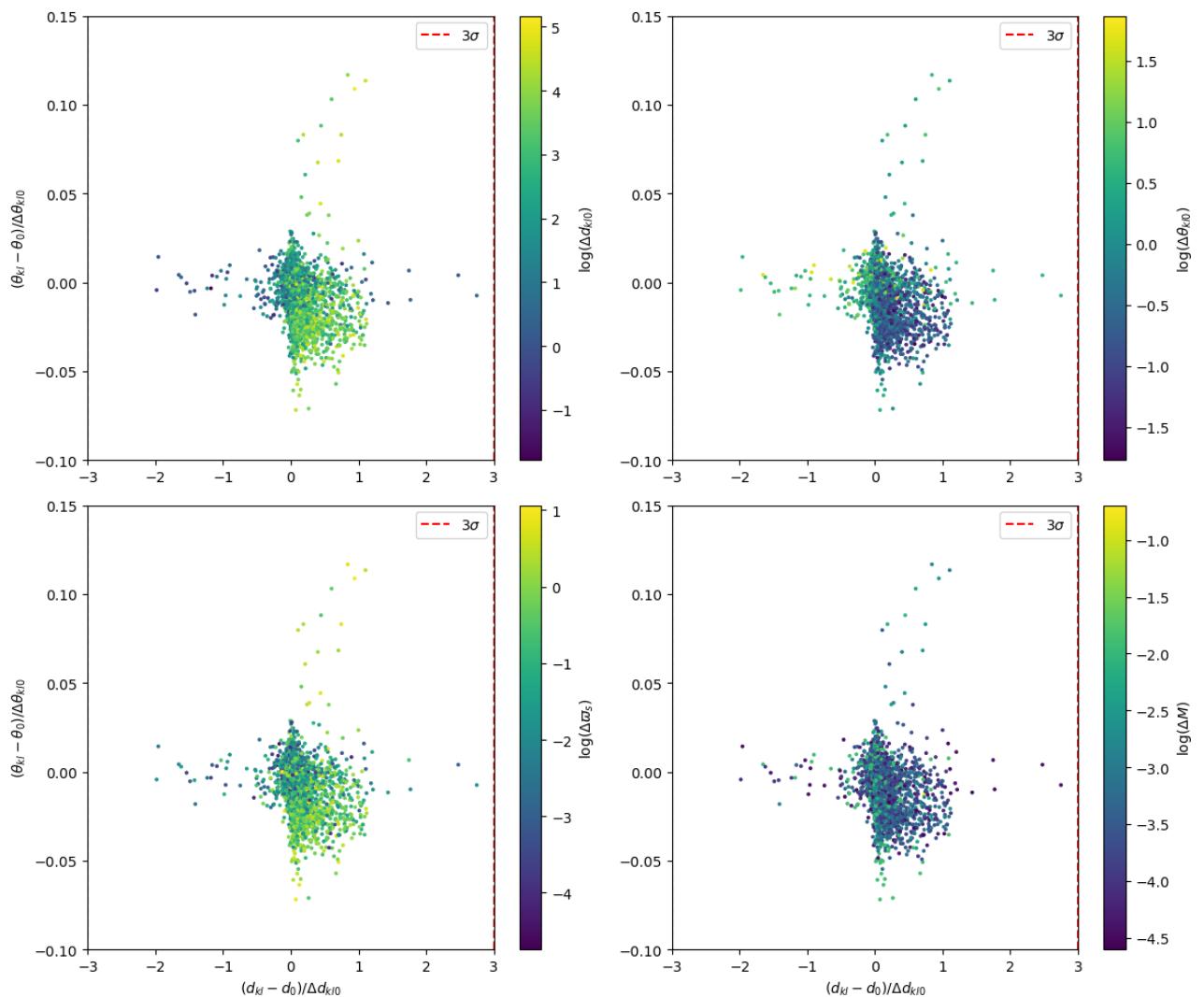


Рис. 5: Зависимость разности радиусов Эйнштейна от разности угловых расстояний, нормированные на соответствующие ошибки. Сравниваются расчёты **K22** ( $d_0, \theta_0$ ) и наши вычисления, приближённые к **K22**, но с иным способом учёта неопределённостей ( $d_{kl}, \theta_{kl}$ ). Приведены события с 5-параметрическими решениями *Gaia DR3*.

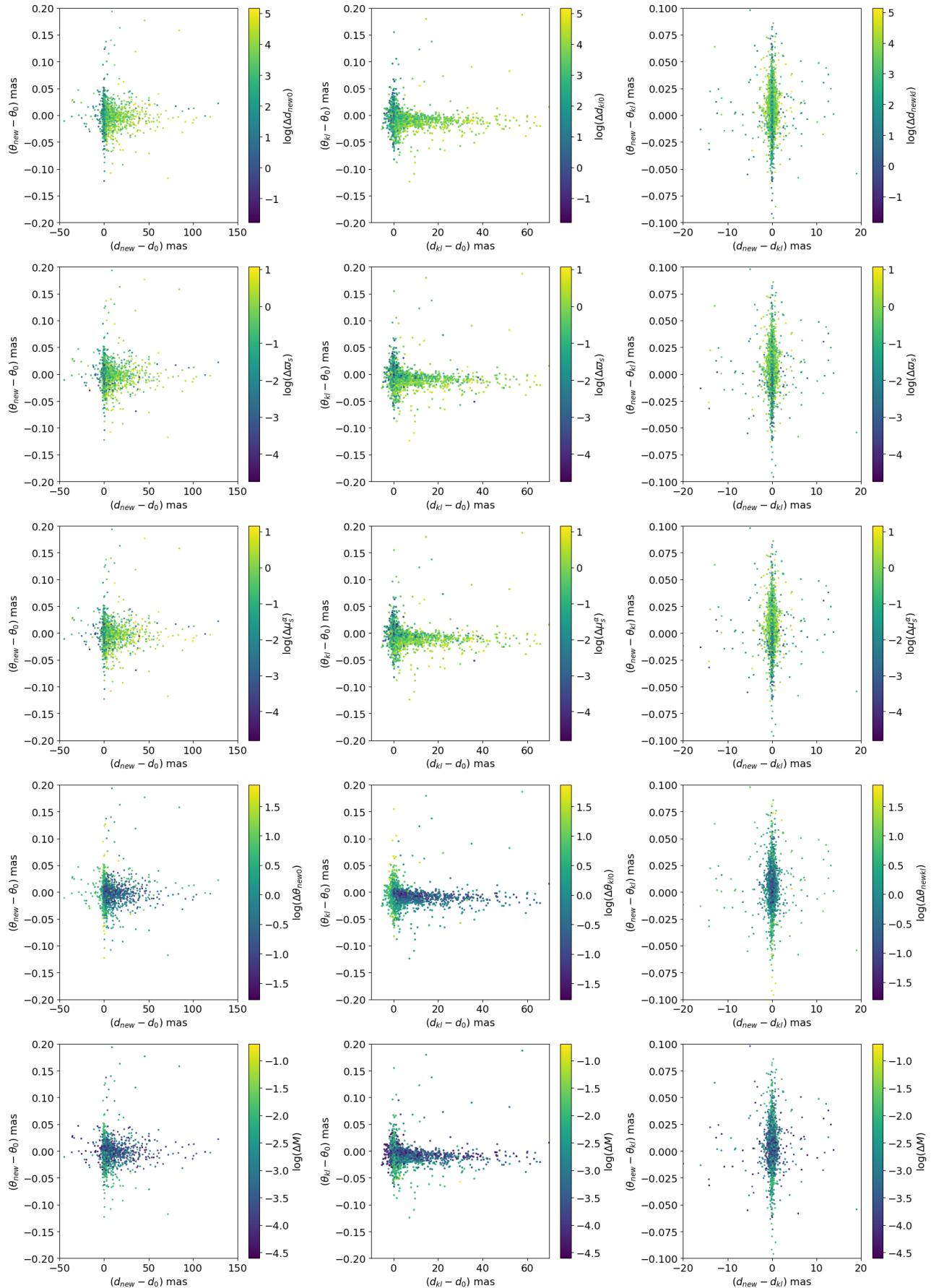


Рис. 6: Зависимость разности радиусов Эйнштейна от разности угловых расстояний для событий с 5-параметрическим решением *Gaia DR3*. Цветом обозначены логарифмы ошибок углового расстояния, параллакса и собственного движения источника, радиуса Эйнштейна и массы линзы.

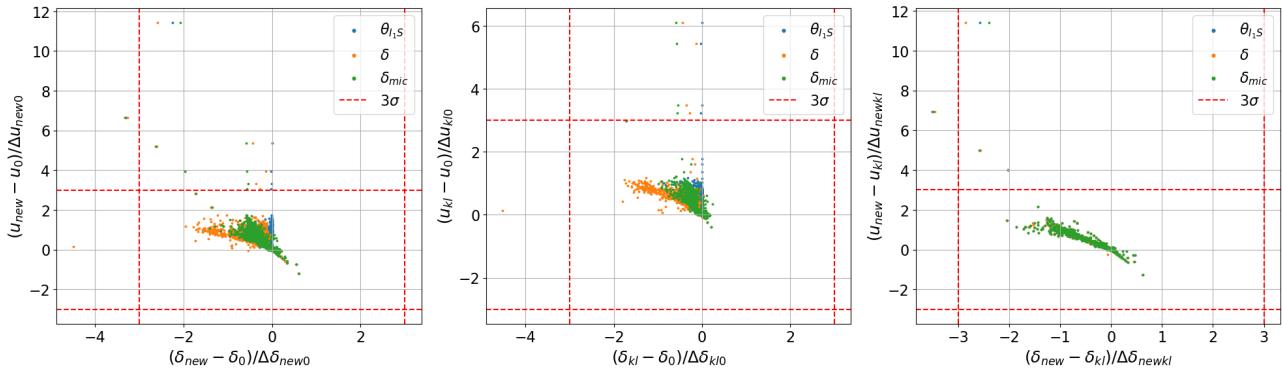


Рис. 7: Зависимость разности прицельного параметра от разностей эфемерид микролинзирования ( $\theta_{I1S}$ ,  $\delta$ ,  $\delta_{lum}$ ), нормированные на соответствующие ошибки, для всей выборки событий микролинзирования.

форме GitHub<sup>3</sup>. В качестве входных параметров программа использует идентификаторы объектов из каталога *Gaia* DR3 (для линзы и источника), временную метку наблюдения, а также маску линзы. Последняя может быть задана пользователем на основании различных эмпирических соотношений. При использовании методики расчётов, описанной в подразделе 3.2, программное обеспечение предоставляет возможность оценить угловое расстояние между компонентами, а также рассчитать эфемериды микролинзирования даже для систем, в которых либо источник, либо линза, либо оба объекта имеют 2-параметрические решения в *Gaia* DR3. Важным условием при этом является корректная работа с параллаксами: в ходе применения предлагаемого метода оценки необходимо отслеживать, чтобы оцененный параллакс линзы не оказывался меньше параллакса источника, что было бы физически некорректно.

## 5 Обсуждение

В работах J. Klüter *et al.* 2018, Bramich, 2018 и Jonas Klüter *et al.* 2022 рассматривается задача, решение которой стало возможным благодаря исключительно высокой точности данных *Gaia* — от микросекунд дуги до нескольких миллисекунд дуги в координатах и от десятков до нескольких миллисекунд дуги в год в собственных движениях. Однако при всей точности исходных данных, экваториальные координаты звёзд на эпоху наблюдения во многих работах вычисляются по упрощённым формулам.

Так, например, в Jonas Klüter *et al.* 2022 собственное движение по прямому восхождению учитывается как  $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \mu_\alpha(t-t_0)/\cos\delta$ . Подобное приближение допустимо для звёзд с малыми собственными движениями и расположенных вдали от небесных полюсов. Тем не менее можно показать, что расхождения с точными формулами в таком случае могут достигать десятков миллисекунд дуги — что уже неприемлемо при вычислении эфемерид событий микролинзирования, где требуется микросекундная точность.

Экспериментальный анализ показал, что в действительности К22 использовали более точную реализацию, вычисляя собственные движения в тангенциальной плоскости, хотя по представленной ими формуле (16) это явно не следует. Кроме того, учёт перспективного ускорения, возникающего вследствие радиального движения звезды, даёт небольшой, но измеримый на больших временах вклад в изменение её параметров — параллакса, собственного и радиального собственных движений, что влияет в конечном итоге и на положение самой звезды. Поэтому наиболее корректным подходом является использование радиальных скоростей (там, где они известны) и применение полной модели движения звёзд, предложенной в работе Butkevich, Lindegren, 2014.

Отдельно отметим, что астрометрические параметры в *Gaia* приведены относительно бари-

<sup>3</sup>[https://github.com/Alsina14/microlensing\\_Gaia](https://github.com/Alsina14/microlensing_Gaia)

центра Солнечной системы. Следовательно, при вычислении изменения направления на объект со стороны наблюдателя на Земле необходимо использовать координаты Земли относительно барицентра, а не относительно Солнца, как это делается в **K22**. Также, на наш взгляд, подстановка одинакового значения параллакса в формулы для углового расстояния и радиуса Эйнштейна (даже если этот параллакс отрицателен или оценён приближённо) является более физически обоснованной, чем использование различных параллаксов при разных условиях, как предложено в подразделе 3.1 и реализовано в работе **K22**.

Результаты, представленные в разделе 4, показывают, что ключевое влияние на достоверность вычислений оказывает способ учёта неопределённостей. Использование метода Монте–Карло позволяет корректно воспроизводить асимметрию и смещение выходных распределений, в то время как аналитическая оценка, основанная на предположении о нормальности распределений, даёт систематически смещённые результаты. Разница, вызванная выбором метода обработки ошибок, значительно превосходит различия, обусловленные вариациями в формулах движения. Хотя для астрометрического микролинзирования этот эффект относительно невелик (так как амплитуда смещения масштабируется как  $1/u$  при  $u \gg 1$ ), для фотометрического микролинзирования влияние оказывается гораздо более существенным, поскольку усиление светимости изменяется как  $1/u^4$  при  $u \gg 1$ .

Таким образом, корректный учёт неопределённостей и реалистичное моделирование астрометрических ошибок являются ключевыми условиями надёжного прогнозирования и анализа событий микролинзирования.

## 6 Заключение

В данной работе рассмотрены и сравнены несколько подходов к построению эфемерид событий гравитационного микролинзирования на основе данных *Gaia*. Предложена и реализована программа, позволяющая моделировать поведение системы «линза–источник» с учётом ошибок измерений и корреляций между параметрами (программа находится в открытом доступе<sup>4</sup>). Приведено сравнение различных методик расчёта, включая подход **K22**, его воспроизведение и альтернативную реализацию с использованием более точных кинематических моделей движения звёзд и метода Монте–Карло для учёта неопределённостей.

Показано, что различия между методами в большинстве случаев укладываются в статистическую погрешность, однако именно способ учёта ошибок оказывает наибольшее влияние на итоговые параметры событий. Разработанное программное обеспечение позволяет не только строить эфемериды, но и служит основой для решения обратной задачи микролинзирования — оценки массы линзы по наблюдаемым данным. Этот инструмент может быть применён к широкому классу задач: от уточнения масс звёзд и компактных объектов до предсказания будущих событий астрометрического микролинзирования, наблюдения которых станут возможны в рамках текущих и будущих миссий *Gaia*, *Roman*<sup>5</sup> и *LSST*<sup>6</sup>.

## Благодарности

Авторы выражают благодарность М.Ю. Ховричеву за ценные советы.

<sup>4</sup>[https://github.com/Alsina14/microlensing\\_Gaia](https://github.com/Alsina14/microlensing_Gaia)

<sup>5</sup><https://roman.gsfc.nasa.gov/>

<sup>6</sup><https://www.lsst.org/>

## Список литературы

- Sahu, Kailash C., Jay Anderson, Stefano Casertano, Howard E. Bond, Pierre Bergeron *et al.* (2017). Relativistic deflection of background starlight measures the mass of a nearby white dwarf star. *Science*, 356.6342, 1046–1050. arXiv: [1706.02037 \[astro-ph.SR\]](#).
- Sahu, Kailash C., Jay Anderson, Stefano Casertano, Howard E. Bond, Andrzej Udalski *et al.* (2022). An Isolated Stellar-mass Black Hole Detected through Astrometric Microlensing. *ApJ*, 933.1, 83. arXiv: [2201.13296 \[astro-ph.SR\]](#).
- Udalski, A. (2003). The Optical Gravitational Lensing Experiment. Real Time Data Analysis Systems in the OGLE-III Survey. *Acta Astron.*, 53, 291–305. arXiv: [astro-ph/0401123 \[astro-ph\]](#).
- Bond, I. A. *et al.* (2001). Real-time difference imaging analysis of MOA Galactic bulge observations during 2000. *MNRAS*, 327.3, 868–880. arXiv: [astro-ph/0102181 \[astro-ph\]](#).
- Gaia Collaboration *et al.* (2016). The Gaia mission. *A&A*, 595, A1. arXiv: [1609.04153 \[astro-ph.IM\]](#).
- Klüter, J., U. Bastian, M. Demleitner, J. Wambsganss (2018). Prediction of astrometric microlensing events from Gaia DR2 proper motions. *A&A*, 620, A175. arXiv: [1807.11077 \[astro-ph.SR\]](#).
- Klüter, Jonas, Ulrich Bastian, Markus Demleitner, Joachim Wambsganss (2022). Prediction of Astrometric-microlensing Events from Gaia eDR3 Proper Motions\*†. *The Astronomical Journal*, 163.4, 176.
- Su, Jie, Jiancheng Wang, Yigong Zhang, Xiangming Cheng, Lei Yang (2024). Predicting astrometric microlensing events from Gaia Data Release 3. *MNRAS*, 527.1, 1177–1193. arXiv: [2310.20176 \[astro-ph.SR\]](#).
- Bramich, D. M. (2018). Predicted microlensing events from analysis of Gaia Data Release 2. *A&A*, 618, A44. arXiv: [1805.10630 \[astro-ph.SR\]](#).
- Butkevich, A. G., L. Lindegren (2014). Rigorous treatment of barycentric stellar motion. Perspective and light-time effects in astrometric and radial velocity data. *A&A*, 570, A62. arXiv: [1407.4664 \[astro-ph.IM\]](#).
- Lindegren, L. *et al.* (2021). Gaia Early Data Release 3. Parallax bias versus magnitude, colour, and position. *A&A*, 649, A4. arXiv: [2012.01742 \[astro-ph.IM\]](#).
- Luri, X. *et al.* (2018). Gaia Data Release 2. Using Gaia parallaxes. *A&A*, 616, A9. arXiv: [1804.09376 \[astro-ph.IM\]](#).
- Katz, D. *et al.* (2023). Gaia Data Release 3. Properties and validation of the radial velocities. *A&A*, 674, A5. arXiv: [2206.05902 \[astro-ph.GA\]](#).
- Naik, Aneesh P, Axel Widmark (2023). The missing radial velocities of Gaia: a catalogue of Bayesian estimates for DR3. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 527.4, 11559–11574. eprint: <https://academic.oup.com/mnras/article-pdf/527/4/11559/55279966/stad3822.pdf>.

# Calculation of ephemerides of gravitational microlensing events based on *Gaia* data

A.M. Farkhutdinova<sup>1</sup>, S.S. Kotelnikov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Saint Petersburg State University

Received 11 October 2025 / Accepted 6 November 2025

## Abstract

Observations of gravitational lensing and microlensing events have become a routine part of modern astronomy. The analysis of these phenomena provides crucial information for addressing a wide range of astrophysical problems — from studying the distribution of dark matter to the detection and characterization of exoplanets. In this work, we present a methodology and a dedicated software tool for calculating the parameters of microlensing events caused by very close (down to tens or hundreds of milliarcseconds) apparent stellar encounters in the Galaxy based on data from the *Gaia* mission. The main goal of this study is to demonstrate the accuracy and efficiency of the developed method for constructing microlensing event ephemerides and to compare its results with previously published data.

**key words:** gravitational lensing, microlensing, data analysis, astrometry