



О критериях устойчивости долговременной орбитальной динамики спутников экзопланет

А.В. Мельников^{1,2} 

¹ ГАО РАН, ²ИПА РАН

Поступила в редакцию 22 ноября 2025 / Принята к публикации 8 декабря 2025

Аннотация

Посредством вычисления характеристических показателей Ляпунова в иерархической задаче трех тел («звезда – планета – спутник планеты») проведен анализ применимости ряда критериев для оценки максимально возможной величины большой полуоси орбиты спутника a_s^c , соответствующей его долговременной устойчивой орбитальной динамике. Показано, что часто используемый для определения потенциально возможных орбит экзолун (спутников экзопланет) эмпирический критерий из работы (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006) существенно завышает величину a_s^c . В плоской задаче для проградной орбиты экзолуны при оценке a_s^c следует использовать критерий, предложенный Rosario-Franco *et al.* (2020), для ретроградной орбиты экзолуны — критерий из работы (Quarles *et al.* 2021). Если наклон орбиты экзолуны к плоскости орбиты планеты существенен, оценку a_s^c можно получить путем численного моделирования долговременной орбитальной динамики экзолуны и использованием строгих методов анализа устойчивости движения (вычисление характеристических показателей Ляпунова, параметра MEGNO и пр.).

ключевые слова: экзопланеты, спутники экзопланет (экзолуны), устойчивость движения, показатели Ляпунова

Введение

В настоящее время одной из наиболее актуальных задач астрономии является поиск спутников экзопланет — экзолун (D. M. Kipping, 2009; Heller *et al.* 2014; Teachey, 2024). Важность этой задачи обусловлена тем, что число потенциально существующих экзолун должно быть весьма существенным. В Солнечной системе, состоящей из 8 планет, число открытых спутников уже почти достигло пяти сотен. Причем число спутников у планет-гигантов составляет от нескольких десятков до двух сотен. Немаловажным обстоятельством является и то, что на спутнике планеты-гиганта, находящегося в зоне потенциальной обитаемости родительской звезды, могут существовать подходящие для жизни условия (Heller *et al.* 2014; Williams, Kasting, Wade, 1997; Heller, 2012).

Существенный прогресс, достигнутый в последнее десятилетие в развитии методов наблюдений и последующего анализа высокоточных наблюдательных данных, позволил выявить ряд кандидатов в экзолуны. В работе (Teachey, D. M. Kipping, Schmitt, 2018) был представлен первый кандидат в экзолуны у планеты Kepler-1625b. Fox, P. Wiegert (2021) указали на восемь планетных систем, в которых присутствуют наблюдательные признаки наличия спутников. Недавно D. Kipping *et al.* (2022) отметили возможность существования спутника у планеты Kepler-1708b.

Долговременная орбитальная динамика для спутника, реально существующего в планетной системе, должна быть устойчивой. Численное моделирование, а именно исследование устойчивости движения (подробнее о методах см. Morbidelli, 2002; Shevchenko, 2020) позволяет оценить

*e-mail: melnikov@gaoran.ru

возможность обнаружения экзолун из анализа наблюдений и получить/уточнить информацию об орбитальных и физических параметрах выявленных кандидатов в экзолуны. Анализ устойчивости долговременной орбитальной динамики перечисленных выше кандидатов в экзолуны проводился нами ранее (Melnikov, 2022; Melnikov, 2023). В настоящей работе мы рассмотрим ряд критериев, полученных различными исследователями, для определения максимального размера устойчивой орбиты экзолуны. Зная возможный размер орбиты экзолуны можно оценить вероятность ее наблюдательной идентификации. Посредством вычисления максимального характеристического показателя Ляпунова (ХПЛ) на представительных множествах начальных условий для орбитальных параметров экзопланеты и ее спутника проведем оценку применимости рассматриваемых критериев.

1 КРИТИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА БОЛЬШОЙ ПОЛУОСИ ОРБИТЫ СПУТНИКА ПЛАНЕТЫ

1.1 Устойчивость орбитальной динамики экзолуны

Далее будем рассматривать иерархическую задачу трех тел — «звезда – планета – спутник планеты». Предполагаем для масс звезды M , планеты m_p и спутника планеты (экзолуны) m_s : $M \gg m_p \gg m_s$. Расстояние «планета – спутник»: $r_s = a_s(1 - e_s^2)/(1 + e_s \cos f_s)$, где a_s и e_s — большая полуось и эксцентриситет орбиты спутника, f_s — истинная аномалия. Согласно (Murray, Dermott, 1999), орбита реально существующего спутника планеты должна соответствовать следующим условиям (см. Рис. 1) :

- находиться вне сферы Роша планеты ($r_s > R_R$)

$$R_R \approx 2.4 R_p \left(\frac{\rho_p}{\rho_s} \right)^{1/3}, \quad (1)$$

где R_p , ρ_p — радиус и плотность планеты, ρ_s — плотность спутника,

- находиться внутри сферы Хилла планеты ($r_s < R_H$)

$$R_H \approx a_p(1 - e_p) \left(\frac{m_p}{3M} \right)^{1/3}, \quad (2)$$

где a_p и e_p — большая полуось и эксцентриситет орбиты планеты,

- быть *устойчивой*.

Под устойчивой орбитой обычно подразумевается, что на весьма длительном интервале времени спутник не разрушится и столкнется с планетой (не пересечет сферу Роша) и не выйдет из сферы Хилла планеты. Значительное число исследований (см. далее) посвящено определению критической величины большой полуоси орбиты спутника — a_s^c при превышении которой ($a_s > a_s^c$) его орбитальная динамика является неустойчивой. Можно предположить (Holman, P. A. Wiegert, 1999)

$$a_s^c \propto \alpha R_H, \quad (3)$$

где α — искомый коэффициент. Величина α будет различна для прямых (проградных) орбит спутника, когда направления орбитального движения планеты и спутника совпадают (см. Рис. 1) и ретроградных (обратных) орбит спутника — направления орбитальных движений указанных тел противоположны. Как уже отмечалось, величина α определялась многими авторами в различных постановках задачи трех тел. Далее перечислим ряд из этих работ.

В работах Чеботарева (1961–1965, см. ссылки в Hunter, 1967) и Hunter (1967) на основе численного анализа орбитальной динамики спутников Юпитера установлено (согласно Domingos,

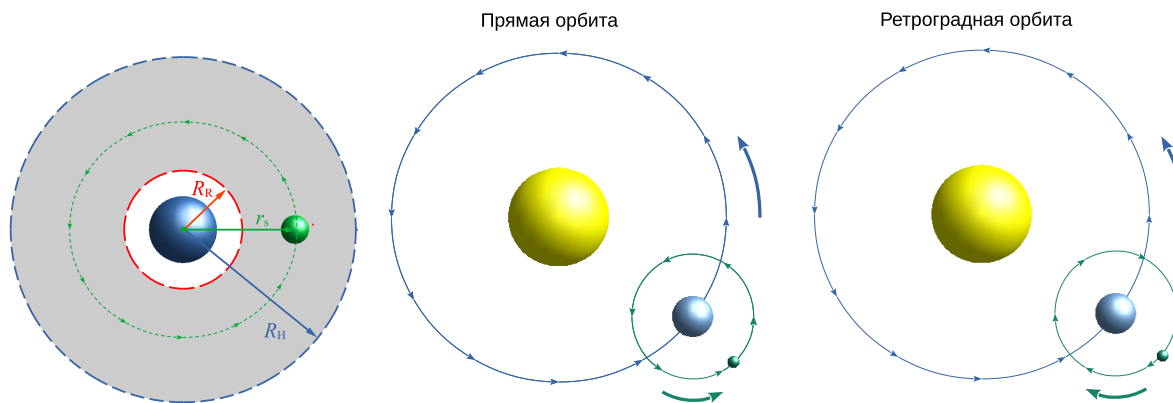


Рис. 1: Слева: схематическое изображение области существования (серая заливка) спутника планеты. Указаны радиусы сфер Роша (R_R) и Хилла (R_H) планеты. Справа: схематическое изображение прямой и ретроградной орбит спутника.

Winter, Yokoyama, 2006), что для проградных орбит $\alpha = 0.44$, ретроградных — $\alpha = 0.74$. Рассмотрев в рамках плоской круговой ограниченной задачи трех тел динамику далекого (т.е. возмущения в движении со стороны Солнца существенны) спутника астероида Hamilton, Krivov (1997) показали, что для потенциально возможных проградных орбит спутника $\alpha = 0.3$, ретроградных — $\alpha = 0.69$. В работе (Holman, P. A. Wiegert, 1999) рассматривалась динамика планет в двойных звездных системах, однако полученные результаты могут быть применимы и в задаче о динамике экзолуны. Для проградной орбиты (ретроградные орбиты не рассматривались) в (Holman, P. A. Wiegert, 1999) было получено $\alpha = 0.36$. Barnes, O'Brien (2002) в численных экспериментах по исследованию устойчивости долговременной орбитальной динамики гипотетического спутника внесолнечной планеты-гиганта также полагали $\alpha = 0.36$ для проградных орбит, а для ретроградных орбит приняли $\alpha = 0.50$. Последняя оценка была получена на основе анализа известных размеров орбит ряда ретроградных спутников планет Солнечной системы. В цикле работ (Donnison, 2010; Donnison, 2014; Donnison, 2020) были рассмотрены ограничения на размеры орбит у возможных спутников планет-гигантов.

В работе Domingos, Winter, Yokoyama (2006), ставшей в своем роде классической для задачи об устойчивости орбитальной динамики экзолун, были получены эмпирические критерии устойчивости для проградных ($\alpha = 0.4895$) и ретроградных ($\alpha = 0.9309$) орбит экзолуны. Указанные критерии в дальнейшем использовались и продолжают использоваться многими авторами. В работе (Weidner, Horne, 2010) на основе этих критериев были получены оценки размеров орбит и масс экзолун, потенциально существующих в ряде планетных систем. Недавно критерии из (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006) использовались в работе (Dobos *et al.* 2022) при составлении списка планет, где могут существовать потенциально обитаемые экзолуны. Критерии, полученные Domingos, Winter, Yokoyama (2006), часто используются для определения границ областей возможных значений параметров в численных симуляциях орбитальной динамики экзолун (см., например, Hansen (2023)). Они применялись в (Dencs, Dobos, Regály, 2025) при моделировании процесса образования экзолун из протопланетного диска и оценке параметров их обитаемости.

Cuntz *et al.* (2013), рассматривая устойчивость орбитальной динамики потенциально существующей экзолуны в зоне обитаемости планеты HD 23079b, указали, что критерий Domingos, Winter, Yokoyama (2006) хорошо определяет a_s^c для проградных орбит, но для ретроградных орбит дает неточные оценки. К аналогичным выводам пришли Payne *et al.* (2013), причем эти выводы были сделаны на основе анализа устойчивости, проведенного путем вычисления характеристических показателей Ляпунова (см. обсуждение далее). Недавно в работах (Rosario-Franco *et al.* 2020) и (Quarles *et al.* 2021) были получены новые критерии устойчивости: для проградных орбит экзолун $\alpha = 0.4031$, для ретроградных — $\alpha = 0.6684$.

1.2 Эмпирические критерии устойчивости

Приведем здесь ряд критериев устойчивости долговременной орбитальной динамики спутника экзопланеты, полученных различными авторами. Для проградной орбиты экзолуны в работе (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006) получено

$$a_s^c \approx 0.4895 R_H (1.0000 - 1.0305e_p - 0.2738e_s). \quad (4)$$

Позднее Rosario-Franco *et al.* (2020) установили для прямой орбиты

$$a_s^c \approx 0.4031 R_H (1.0000 - 1.1230e_p - 0.1862e_s). \quad (5)$$

Для ретроградной орбиты экзолуны Domingos, Winter, Yokoyama (2006) получили

$$a_s^c \approx 0.9309 R_H (1.0000 - 1.0764e_p - 0.9812e_s + 0.9446e_p e_s). \quad (6)$$

В работе (Quarles *et al.* 2021) для ретроградной орбиты найдено

$$a_s^c \approx 0.6684 R_H (1.000 - 1.236e_p). \quad (7)$$

Далее посредством использования строгого критерия для анализа устойчивости движения — вычисления характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) — рассмотрим применимость приведенных выше критериев. Отметим, что в работе Payne *et al.* (2013) критерии из (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006) использовались для верификации численных алгоритмов вычисления ХПЛ в рамках задачи четырех тел (звезда, две планеты, спутник планеты). В следующем разделе приведено краткое определение ХПЛ и даны результаты проведенных численных экспериментов.

2 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

2.1 Характеристические показатели Ляпунова

Рассмотрим две близкие по начальным условиям траектории фазового пространства динамической системы (см. Рис. 2). Одну из траекторий будем называть «опорной», другую — «теневой». Пусть $d(t_0)$ — длина вектора смещения \mathbf{d} , направленного от опорной траектории к теневой, в начальный момент времени t_0 , $d(t)$ — длина этого вектора в произвольный момент времени t . Тогда ХПЛ определяется формулой (Morbidelli, 2002; Shevchenko, 2020):

$$L = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(t_0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{d(t)}{d(t_0)} \quad (8)$$

и представляет собой среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких (по начальным условиям) траекторий фазового пространства.

Системе с N степенями свободы может быть поставлен в соответствие набор из $2N$ постоянных — характеристических показателей Ляпунова: $L_i \geq L_{i+1}$, где $i = 1, \dots, 2N - 1$. В случае автономной (не зависящей от времени) гамильтоновой системы по крайней мере два из $2N$ показателей равны нулю. Ненулевые показатели разбиваются на пары равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку показателей $L_i = -L_{i+N}$, где $i = 1, \dots, N$. Численные алгоритмы определения ХПЛ были изложены в работах (Benettin, Galgani, Strelcyn, 1976; Benettin, Galgani, Giorgilli *et al.* 1980).

Ненулевая величина максимального ХПЛ (МХПЛ) указывает на хаотический (неустойчивый), а нулевая — на регулярный (устойчивый) характер движения. Зная величину МХПЛ $L \equiv L_1$ можно определить ляпуновское время (характерное время предсказуемой динамики системы), полагая для него (Shevchenko, 2024) $T_L = 1/L$. В настоящей работе мы оценивали ляпуновское время орбитальной динамики спутника экзопланеты посредством вычисления МХПЛ численным методом, представленным в (von Bremen, Udvardi, Proskurowski, 1997) и реализованном в виде программного комплекса на языке ФОРТРАН в работе (Shevchenko, Kourprianov, 2002). Подробнее о методах получения численных и аналитических оценок МХПЛ в задачах небесной механики см. (Morbidelli, 2002; Shevchenko, 2020).

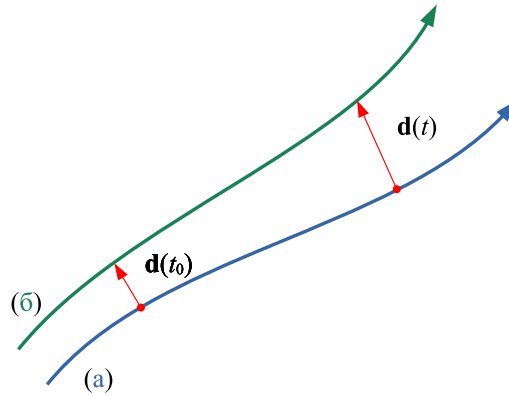


Рис. 2: Две близкие по начальным условиям траектории фазового пространства — «опорная» (а) и «теньевая» (б); \mathbf{d} — вектор смещения.

2.2 Анализ применимости эмпирических критериев устойчивости

Проведем оценку применимости эмпирических критериев устойчивости (4)–(7) для исследования динамики спутников экзопланет. Для этого оценим ляпуновские времена орбитальной динамики экзолуны на множествах возможных значений (a_s, i_s) и (a_s, e_p) при $e_s = 0$ и 0.1 . Для параметров планетной системы были приняты следующие значения: $M = 1$ (в массах Солнца), $m_p = 0.001M$, $m_s = 3 \cdot 10^{-6}M$. Начальные параметры орбит: $a_p = 1$ а.е., $i_p = \varpi_p = \Omega_p = 0$, $\varpi_s = \Omega_s = 0$. Предполагалось, что в начальный момент времени планета расположена в перигеетрии своей орбиты — средняя аномалия $M_p = 0$. Оценки величины ляпуновского времени (вычисление МХПЛ) проводились для четырех возможных начальных значений средней аномалии экзолуны: $M_s = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$. Для построения диаграмм устойчивости и при дальнейшем анализе использовались наименьшие из оценок ляпуновского времени, полученных на данной выборке начальных значений M_s .

Численные эксперименты проводились с использованием интегратора DOP853 (Hairer, Norsett, Wanner, 1993), реализующего явный метод Рунге–Кутты 8-го порядка. Интервал времени интегрирования уравнений движения для вычисления МХПЛ составлял $t = 10^5$ лет; максимальный шаг интегрирования был принят равным $\Delta t_{\max} = 10^{-2}$ года, величина локальной (на одном шаге) погрешности интегрирования $\varepsilon = 10^{-12}$. На основе заданного значения ε интегратор DOP853 автоматически подбирает необходимую величину шага интегрирования, не превышающую Δt_{\max} (см. подробнее Hairer, Norsett, Wanner (1993)).

Орбита экзолуны считалась неустойчивой и численное интегрирование останавливалось, если происходило тесное сближение/столкновение с планетой, либо экзолуна покидала сферу Хилла планеты ($a_s \geq R_H$). Факт тесного сближения/столкновения экзолуны с планетой фиксировался при уменьшении a_s до величины, равной радиусу сферы Роша планеты ($a_s \leq R_R$), либо при изменении относительной энергии системы «планета–экзолуна» $\Delta E \geq 10^{-7}$ (величина определена эмпирически). Численные эксперименты показали, что при тесном сближении интегратор DOP853 автоматически существенно уменьшает величину шага интегрирования. При достижении указанного значения ΔE наблюдается замедление хода интегрирования задолго до момента достижения спутником сферы Роша. Критерий, основанный на оценке изменения ΔE , позволил существенно ускорить процесс численной оценки устойчивости динамики спутника. Отметим, что в случае устойчивой динамики при интегрировании на промежутке времени 10^5 лет изменение энергии $\Delta E \leq 10^{-10}$. Если интегрирование успешно завершалось при достижении конца заданного промежутка времени, то вывод об устойчивости орбитальной динамики экзолуны делался на основе определенной для нее величины ляпуновского времени T_L .

Ляпуновские времена вычислялись на множестве начальных значений (a_s, i_s) , заданном путем наложения равномерной сетки 100×100 на область $0.1R_H \leq a_s \leq 0.8R_H$, $0^\circ \leq i_s \leq 180^\circ$. Для множества начальных значений (a_s, e_p) использовалась равномерная сетка 30×30 , наложенная

на область:

- $0 \leq e_p \leq 0.8$, $0.1R_H \leq a_s \leq 0.6R_H$ при $i_s = 0^\circ$ (прямая орбита экзолуны);
- $0 \leq e_p \leq 0.8$, $0.1R_H \leq a_s \leq 0.8R_H$ при $i_s = 180^\circ$ (ретроградная орбита экзолуны).

Начальные значения параметров орбит, соответствовали узлам указанных выше сеток.

Для разделения орбит на выборке начальных значений параметров на устойчивые и неустойчивые путем анализа вычисленных значений ляпуновских времен использовался метод, предложенный в (Mel'nikov, Shevchenko, 1998). Метод основан на анализе распределения величин МХПЛ, вычисленных на множестве начальных данных либо множестве значений параметров. Из представленных на Рис. 3 примеров распределений значений ляпуновских времен T_L , вычисленных для разных t на множестве (a_s, i_s) при $e_s = 0$, видно, что уже на интервале интегрирования $t = 10^4$ лет можно разделить устойчивые и неустойчивые орбиты. Распределения строилось путем подсчета числа орбит F экзолуны с величинами T_L попадающими в ячейку $(T_L, T_L + \Delta T_L)$, где было положено $\Delta T_L = 100$ лет при $t = 10^4$ лет и $\Delta T_L = 500$ лет при $t = 10^5$ лет. Видно, что с ростом промежутка времени, на котором вычисляются МХПЛ, правый пик в распределении, соответствующий регулярным (устойчивым) орбитам экзолуны, смещается в сторону увеличения значений T_L . Далее мы предполагали, что динамика экзолуны является устойчивой при $T_L \geq 6000$ лет.

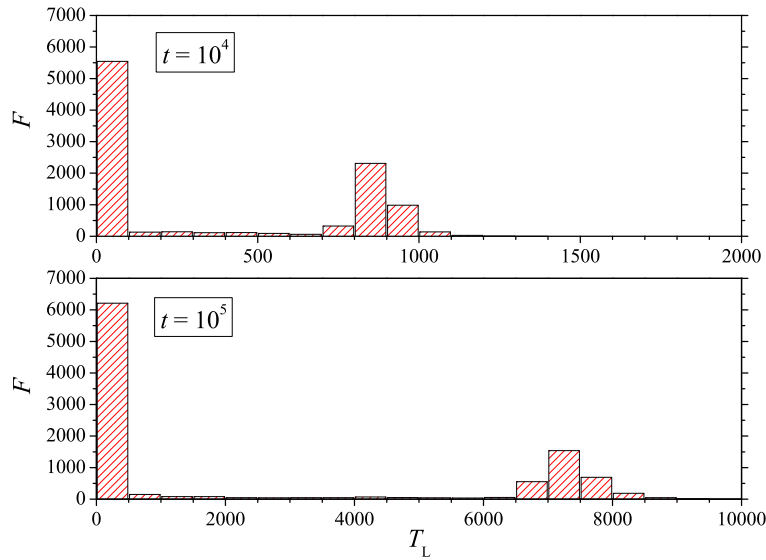


Рис. 3: Дифференциальные распределения значений ляпуновских времен (в годах) T_L , вычисленных на одной выборке начальных условий но на промежутках времени интегрирования t (в годах) разной длины, для спутниковой системы планеты.

На Рис. 4 представлены построенные нами на плоскости (a_s, i_s) диаграммы устойчивости для $e_p = 0$ и двух значений $e_s = 0$ и 0.1 . На рисунке вертикальными линиями отмечены приведенные выше эмпирические критерии (4)–(7). Отметим, что горизонтальная область из неустойчивых орбит при $60^\circ < i_s < 120^\circ$ связана с резонансом Лидова–Козаи (см. подробнее Shevchenko (2017)). На Рис. 5 в увеличенном масштабе (по сравнению с Рис. 4) приведены диаграммы для прямых и ретроградных орбит экзолуны в случае $e_p = e_s = 0$.

В работе (Grishin *et al.* 2017) для иерархической системы трех тел была построена полиномиальная аппроксимация зависимости положения границы области устойчивости от взаимного наклона орбит. Ее можно адаптировать и для случая динамики экзолуны (см. также Hamers *et al.* 2018). В нашей задаче имеем (Grishin *et al.* 2017; Hamers *et al.* 2018):

$$a_s^c(i_s) = f_{\text{fudge}} R_H g(i_s)^{-2/3} p(i_s). \quad (9)$$

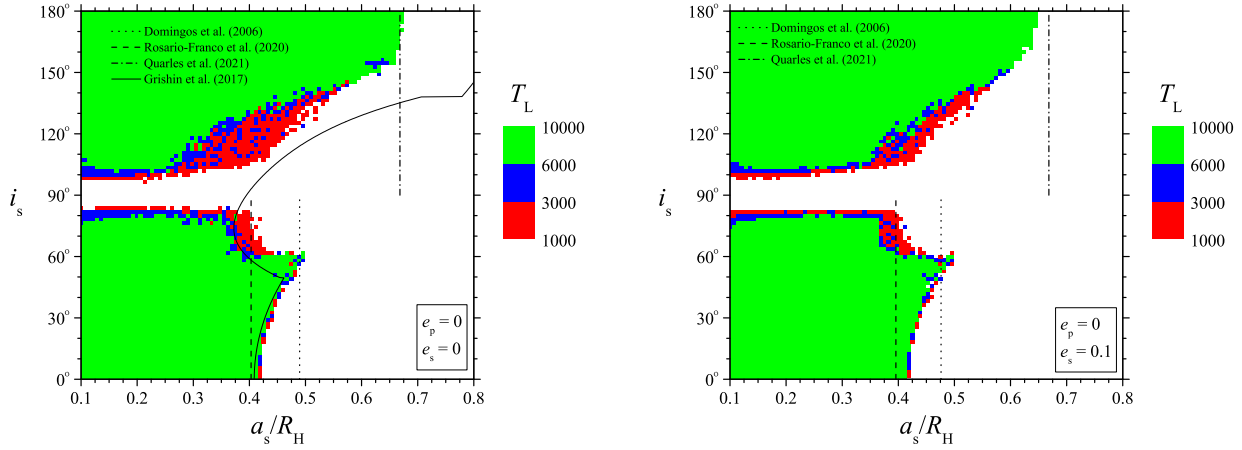


Рис. 4: Ляпуновские времена (в годах) спутниковой подсистемы, вычисленные на множестве начальных условий (a_s, i_s) для $e_p = 0$ и $e_s = 0, 0.1$. Белый цвет соответствует неустойчивым орбитам экзолуны. Штриховой линией, линией из точек и штрих-пунктирной линией отмечены эмпирические критерии (4)–(7) для максимальной величины a_s , соответствующей устойчивой динамике спутника планеты. Непрерывная кривая на левой панели соответствует зависимости (9).

где

$$g(i_s) = \cos i_s + \sqrt{3 + \cos^2 i_s},$$

полагая величину i_s в радианах, при $0.867 < i_s < 2.41$

$$p(i_s) = 0.35161117i_s^4 - 2.431451i_s^3 + 6.54177136i_s^2 - 8.01396441i_s + 4.40019183,$$

иначе $p(i_s) = 1$ (см. пояснение в Hamers *et al.* 2018). Для масштабного множителя было принято $f_{\text{fudge}} = 0.87$, чтобы зависимость (9) при $i_s = 0$ соответствовала нашим численным результатам. Зависимость (9) нанесена на Рис. 4 и 5.

Анализ построенных диаграмм устойчивости показывает, что во всех случаях критерии для ретроградной орбиты (6) экзолуны дает существенно завышенные оценки a_s^c (во всех случаях $a_s^c > 0.8R_H$), поэтому он не отмечен на рисунках. В случае прямой орбиты экзолуны критерий (4) также дает завышенные оценки a_s^c . Предложенный Rosario-Franco *et al.* (2020) критерий (5) для прямой орбиты позволяет достаточно точно оценить величину a_s^c для малых наклонов орбиты экзолуны к плоскости орбиты родительской планеты ($i_s \leq 10^\circ$) и может быть использован в плоской задаче. Отметим, что с ростом e_s область, занятая на плоскости (a_s, i_s) устойчивыми заметно изменяется (см. Рис. 4). Критерий (7), предложенный Quarles *et al.* (2021) для ретроградной орбиты экзолуны, не учитывает e_s , он завышает (см. Рис. 4) оценки a_s^c если орбита экзолуны существенно отличается от круговой. Однако для ретроградных орбит экзолун близких к круговым критерий (7) позволяет весьма точно оценивать a_s^c при $150^\circ < i_s \leq 180^\circ$.

Что касается зависимости (9), полученной в работе (Grishin *et al.* 2017), то она хорошо аппроксимирует границу области устойчивости при $i_s < 50^\circ - 60^\circ$ и сильно завышает ее границы при других наклонах орбиты (см. также Рис. 4 в Hamers *et al.* 2018). Отметим, что в работе (Hamers *et al.* 2018) путем численного интегрирования на длительном интервале времени динамики ряда реальных планетных систем были построены диаграммы устойчивости на плоскости (a_s, i_s) . Они имеют схожий вид с диаграммами, приведенными на Рис. 4, однако последние получены нами путем использования строгого критерия устойчивости — вычисления МХПЛ.

Большинство орбит крупных (средний радиус фигуры более 500 км) спутников планет Солнечной системы имеют малые наклоны орбит (см. обсуждение в Melnikov, Shevchenko, 2022), в

экзопланетных системах вероятно имеет место такая же конфигурация. В то же время значительная часть экзопланет имеет существенные эксцентриситеты — согласно современным данным с сайта <http://exoplanet.eu/> для 950 планет (около 15% известных экзопланет) $e_p > 0.2$. Поэтому далее рассмотрим зависимость a_s^c от e_p для плоского случая (плоскости орбит планеты и ее спутника совпадают).

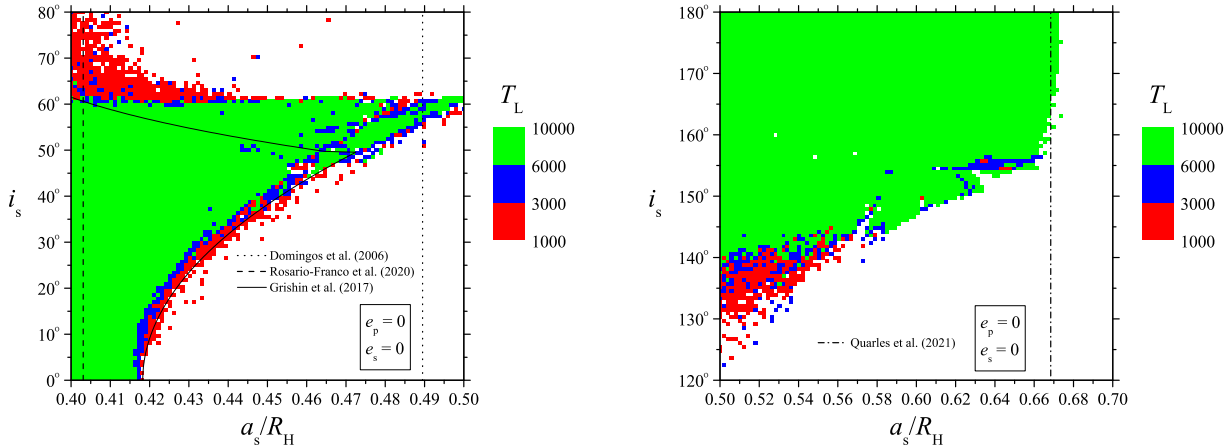


Рис. 5: Ляпуновские времена (в годах) спутниковой подсистемы, вычисленные на множестве начальных условий (a_s, i_s) для $e_p = e_s = 0$ (круговые начальные орбиты). По сравнению с Рис. 4 увеличен масштаб по осям. Белый цвет соответствует неустойчивым орбитам экзолуны. Штриховой линией, линией из точек и штрих-пунктирной линией отмечены эмпирические критерии (4)–(7) для максимальной величины a_s , соответствующей устойчивой динамике спутника планеты. Непрерывная кривая на левой панели соответствует зависимости (9).

На Рис. 6 представлены полученные нами на множестве начальных условий (a_s, e_p) диаграммы устойчивости для случая прямой $i_s = 0^\circ$ и ретроградной $i_s = 180^\circ$ орбит экзолуны при $e_s = 0$ и 0.1. На рисунке наклонными линиями отмечены все приведенные выше эмпирические критерии (4)–(7). Из рисунка видно, что, как уже было отмечено нами ранее, критерии (5) и (7) хорошо оценивают величину a_s^c , а критерии, предложенные в работе (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006), заметно завышают значения a_s^c .

ВЫВОДЫ

В настоящей работе мы рассмотрели ряд критериев для оценки максимально возможного размера орбиты спутника планеты (критической величины большой полуоси орбиты спутника a_s^c), соответствующей устойчивой долговременной динамике. Эмпирические критерии для оценки a_s^c в иерархической задаче трех тел (звезда — планета — спутник планеты) были получены ранее в нескольких работах (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006; Rosario-Franco *et al.* 2020; Quarles *et al.* 2021) и активно используются в настоящее время для оценок возможных параметров кандидатов в спутники экзопланет — экзолун. Посредством использования строгого критерия для определения характера устойчивости движения — вычисления характеристических показателей Ляпунова (ХПЛ) мы оценили применимость ряда полученных ранее критериев оценки a_s^c в задачах о долговременной динамике экзолун. Установлено, что критерии, предложенные Domingos, Winter, Yokoyama (2006) завышают величину a_s и не могут быть рекомендованы для использования. Для случая прямых орбит экзолун при малых наклонах к плоскости орбиты родительской планеты ($i_s \leq 10^\circ$) можно использовать критерий, предложенный Rosario-Franco *et al.* (2020). В случае ретроградной орбиты экзолуны для малых наклонов ($150^\circ < i_s \leq 180^\circ$) и близких к круговым орбитам успешно работает критерий оценки a_s^c из работы (Quarles *et al.* 2021). Если ор-

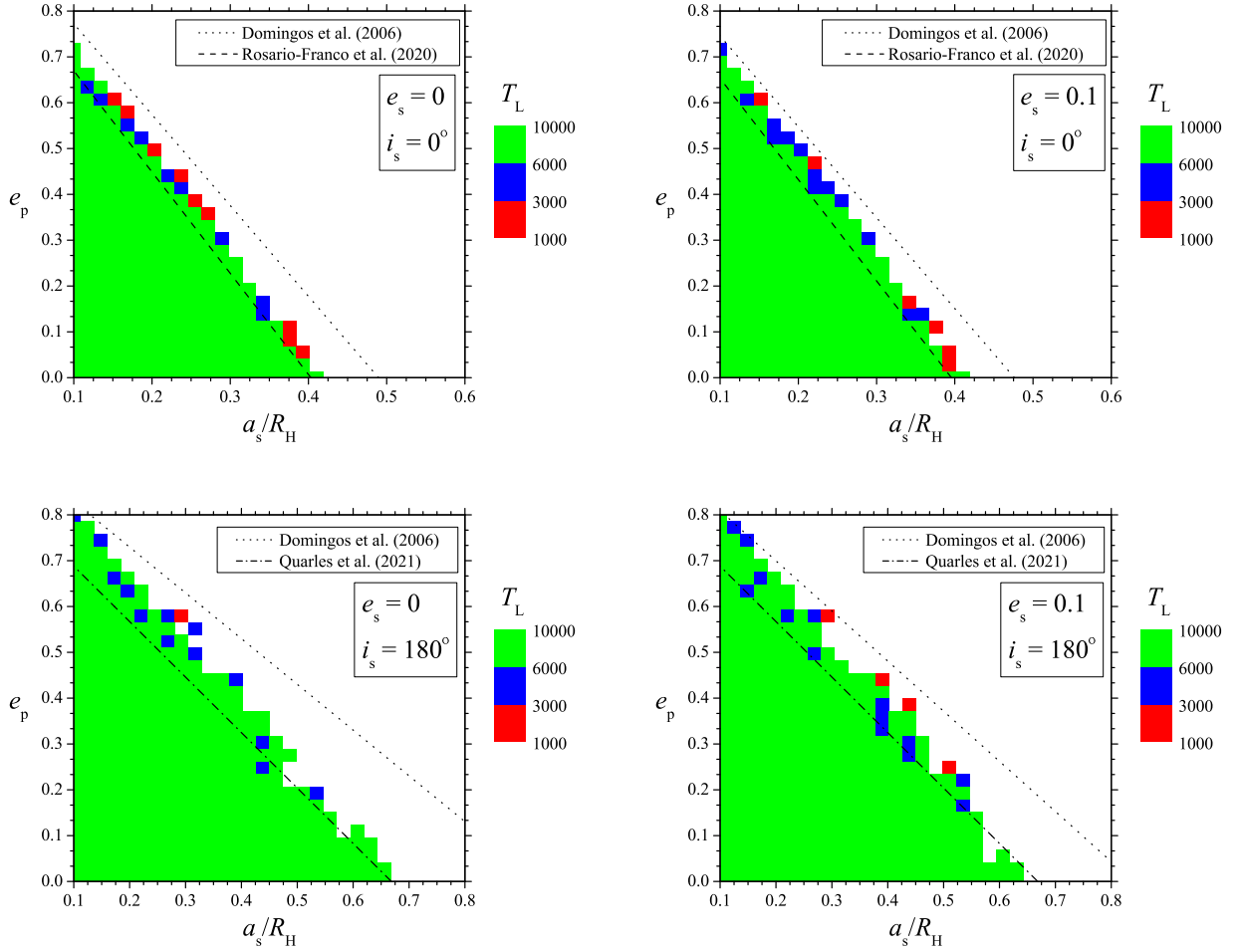


Рис. 6: Ляпуновские времена (в годах) спутниковой подсистемы, вычисленные на множестве начальных условий (a_s , e_p) для различных значений i_s (указаны на врезках); принято $e_s = 0$. Белый цвет соответствует неустойчивым орбитам экзолуны. Штриховой линией, линией из точек и штрих-пунктирной линией отмечены эмпирические критерии (4)–(7) для максимальной величины a_s , соответствующей устойчивой динамике спутника планеты.

бита экзолуны существенно наклонена к плоскости орбиты родительской планеты ($10^\circ < i_s < 60^\circ$ или $120^\circ < i_s < 150^\circ$) рассмотренные критерии не позволяют получить точную оценку a_s . Оценку возможных значений орбитальных параметров экзолуны при существенных наклонах орбиты следует проводить посредством использования строгих методов исследования устойчивости движения — вычисления ХПЛ, параметра MEGNO и пр. (см., например, Patel, Quarles, Cuntz, 2025).

Список литературы

- Domingos, R. C., O. C. Winter, T. Yokoyama (2006). *Stable satellites around extrasolar giant planets*. MNRAS, 373.3, 1227—1234.
- Rosario-Franco, M., B. Quarles, Z. E. Musielak, Manfred Cuntz (2020). *Orbital Stability of Exomoons and Submoons with Applications to Kepler 1625b-I*. AJ, 159.6, 260. arXiv: 2005 . 06521 [astro-ph.EP].
- Quarles, B., S. Eggl, M. Rosario-Franco, Gongjie Li (2021). *Exomoons in Systems with a Strong Perturber: Applications to α Cen AB*. AJ, 162.2, 58. arXiv: 2105.00034 [astro-ph.EP].
- Kipping, D. M. (2009). *Transit timing effects due to an exomoon*. MNRAS, 392.1, 181—189. arXiv: 0810.2243 [astro-ph].
- Heller, R. *et al.* (2014). *Formation, Habitability, and Detection of Extrasolar Moons*. *Astrobiology*, 14.9, 798—835. arXiv: 1408.6164 [astro-ph.EP].
- Teachey, A. (2024). *Detecting and Characterizing Exomoons and Exorings (Handbook of Exoplanets, 2nd Edition)*. *arXiv e-prints*, arXiv:2401.13293. arXiv: 2401.13293 [astro-ph.EP].
- Williams, D. M., J. F. Kasting, R. A. Wade (1997). *Habitable moons around extrasolar giant planets*. *Nature*, 385.6613, 234—236.
- Heller, R. (2012). *Exomoon habitability constrained by energy flux and orbital stability*. A&A, 545, L8. arXiv: 1209.0050 [astro-ph.EP].
- Teachey, A., D. M. Kipping, A. R. Schmitt (2018). *HEK. VI. On the Dearth of Galilean Analogs in Kepler, and the Exomoon Candidate Kepler-1625b I*. AJ, 155.1, 36. arXiv: 1707 . 08563 [astro-ph.EP].
- Fox, C., P. Wiegert (2021). *Exomoon candidates from transit timing variations: eight Kepler systems with TTVs explainable by photometrically unseen exomoons*. MNRAS, 501.2, 2378—2393. arXiv: 2006.12997 [astro-ph.EP].
- Kipping, D. *et al.* (2022). *An exomoon survey of 70 cool giant exoplanets and the new candidate Kepler-1708 b-i*. *Nature Astronomy*, 6, 367—380. arXiv: 2201.04643 [astro-ph.EP].
- Morbidelli, A. (2002). *Modern celestial mechanics : Aspects of solar system dynamics*. London: Taylor и Francis.
- Shevchenko, I. I. (2020). *Dynamical Chaos in Planetary Systems*. T. 463. Cham: Springer International Publishing, 376.
- Melnikov, A. V. (2022). *On the orbital stability of exoplanet satellites*. *Publications of the Pulkovo Observatory*, 227, 113—122.
- (2023). *Secular Orbital Dynamics of Exoplanet Satellite Candidates*. *Solar System Research*, 57.4, 380—387.
- Murray, C. D., S. F. Dermott (1999). *Solar System Dynamics*.
- Holman, M. J., P. A. Wiegert (1999). *Long-Term Stability of Planets in Binary Systems*. AJ, 117.1, 621—628. arXiv: astro-ph/9809315 [astro-ph].
- Hunter, R. B. (1967). *Motions of satellites and asteroids under the influence of Jupiter and the Sun-I. Stable and unstable orbits*. MNRAS, 136, 245.
- Hamilton, D. P., A. V. Krivov (1997). *Dynamics of Distant Moons of Asteroids*. *Icarus*, 128.1, 241—249.
- Barnes, J. W., D. P. O’Brien (2002). *Stability of Satellites around Close-in Extrasolar Giant Planets*. ApJ, 575.2, 1087—1093. arXiv: astro-ph/0205035 [astro-ph].
- Donnison, J. R. (2010). *The Hill stability of the possible moons of extrasolar planets*. MNRAS, 406.3, 1918—1934.
- (2014). *Limits on the Orbits of Possible Eccentric and Inclined Moons of Extrasolar Planets Orbiting Single Stars*. *Earth Moon and Planets*, 113.1-4, 73—97.
- (2020). *Limits on the orbits of possible exomoons around Kepler giant planets in the habitable zone*. *Planet. Space Sci.*, 192, 105033.
- Weidner, C., K. Horne (2010). *Limits on the orbits and masses of moons around currently-known transiting exoplanets*. A&A, 521, A76. arXiv: 1007.4500 [astro-ph.EP].

- Dobos, V., A. Haris, I. E. E. Kamp, Floris F. S. van der Tak (2022). [A target list for searching for habitable exomoons](#). MNRAS, 513.4, 5290—5298. arXiv: [2204.11614 \[astro-ph.EP\]](#).
- Hansen, B. M. S. (2023). [Consequences of dynamically unstable moons in extrasolar systems](#). MNRAS, 520.1, 761—772. arXiv: [2210.02603 \[astro-ph.EP\]](#).
- Dencs, Z., V. Dobos, Z. Regály (2025). [Grand theft moons: Formation of habitable moons around giant planets](#). A&A, 699, A166. arXiv: [2505.18144 \[astro-ph.EP\]](#).
- Cuntz, M., B. Quarles, J. Eberle, A. Shukayr (2013). [On the Possibility of Habitable Moons in the System of HD 23079: Results from Orbital Stability Studies](#). PASA, 30, e033. arXiv: [1304.1157 \[astro-ph.EP\]](#).
- Payne, M. J., K. M. Deck, M. J. Holman, Hagai B. Perets (2013). [Stability of Satellites in Closely Packed Planetary Systems](#). ApJ, 775.2, L44. arXiv: [1308.4402 \[astro-ph.EP\]](#).
- Benettin, G., L. Galgani, J.-M. Strelcyn (1976). [Kolmogorov entropy and numerical experiments](#). Phys. Rev. A, 14.6, 2338—2345.
- Benettin, G., L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn (1980). [Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems - A method for computing all of them. I - Theory. II - Numerical application](#). *Meccanica*, 15, 9—30.
- Shevchenko, I. I. (2024). [Lyapunov Exponents in Fundamental Models of Nonlinear Resonance](#). *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 120.8, 622—629. arXiv: [2411.01939 \[astro-ph.EP\]](#).
- von Bremen, H.F., F.E. Udawadia, W. Proskurowski (1997). [An efficient QR based method for the computation of Lyapunov exponents](#). *Physica D Nonlinear Phenomena*, 101.1-2, 1—16.
- Shevchenko, I. I., V. V. Kouprianov (2002). [On the chaotic rotation of planetary satellites: The Lyapunov spectra and the maximum Lyapunov exponents](#). A&A, 394, 663—674.
- Hairer, E., S. P. Norsett, G. Wanner (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. SpringerVerlag.
- Mel'nikov, A. V., I. I. Shevchenko (1998). [The Stability of the Rotational Motion of Nonspherical Natural Satellites with Respect to Tilting the Axis of Rotation](#). *Solar System Research*, 32, 480.
- Shevchenko, I. I. (2017). *The Lidov-Kozai Effect - Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy*. T. 441. Springer International Publishing Switzerland, 194.
- Grishin, E., H. B. Perets, Y. Zenati, E. Michaely (2017). [Generalized Hill-stability criteria for hierarchical three-body systems at arbitrary inclinations](#). MNRAS, 466.1, 276—285. arXiv: [1609.05912 \[astro-ph.EP\]](#).
- Hamers, A. S., M. X. Cai, J. Roa, Nathan Leigh (2018). [Stability of exomoons around the Kepler transiting circumbinary planets](#). MNRAS, 480.3, 3800—3811. arXiv: [1806.06075 \[astro-ph.EP\]](#).
- Melnikov, A. V., I. I. Shevchenko (2022). [Rotational Dynamics and Evolution of Planetary Satellites in the Solar and Exoplanetary Systems](#). *Solar System Research*, 56.1, 1—22.
- Patel, S. D., B. Quarles, M. Cuntz (2025). [Orbital stability of hierarchical three- and four-body systems with inclination: results for Kepler-1625, 1708, and HD 23079](#). MNRAS, 537.3, 2291—2302. arXiv: [2501.12258 \[astro-ph.EP\]](#).

On the criteria for the stability of long-term orbital dynamics of exomoons

A.V. Melnikov^{1,2} ¹ The Central Astronomical Observatory of the RAS at Pulkovo²The Institute of Applied Astronomy of the RAS

Received 22 November 2025 / Accepted 8 December 2025

Abstract

By calculating the Lyapunov characteristic exponents in the hierarchical three-body problem (“star – planet – moon”), an analysis was made of the applicability of a number of criteria for estimating the maximum possible value of the semi-major axis of a satellite’s orbit a_s^c , corresponding to its long-term stable dynamics. It is shown that the empirical criterion from (Domingos, Winter, Yokoyama, 2006), often used to determine potential orbits of exomoons (satellites of exoplanets), significantly overestimates the value of a_s^c . In the planar problem for a prograde exomoon orbit, when estimating a_s^c , the criterion proposed by Rosario-Franco et al. (2020) should be used. For a retrograde exomoon orbit, the criterion from (Quarles et al., 2021) should be used. If the inclination of the exomoon’s orbit to the planet’s orbital plane is significant, an estimate of a_s^c can be obtained by numerically modeling the exomoon’s long-term orbital dynamics and using rigorous stability analysis methods (calculating Lyapunov characteristic exponents, the MEGNO parameter, etc.).

key words: exoplanets, exomoons, stability of motion, Lyapunov exponents