

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория
Российской академии наук

На правах рукописи

Буткевич Алексей Геннадьевич

**Новые методы анализа данных миллисекундной
оптической космической астрометрии**

Специальность 1.3.1 – Физика космоса, астрономия

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2026

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Стандартная астрометрическая модель	18
1.1. Астрометрические параметры	22
1.2. Преобразование астрометрических параметров	30
1.3. Преобразование ошибок и корреляций	31
1.4. Пример упрощённого преобразования эпохи	40
1.5. Применимость стандартной модели	42
1.6. Выводы к первой главе	47
Глава 2. Влияние нестабильности базового угла на систематические ошибки параллаксов для сканирующего астрометрического спутника	49
2.1. Основные уравнения	52
2.2. Результаты численных экспериментов	65
2.3. Обсуждение	72
2.4. Выводы ко второй главе	77
Глава 3. Использование априорной информации для построения астрометрического каталога при малом объёме наблюдательных данных	80
3.1. Теоретическое обоснование	83
3.2. Астрометрическое решение с априорной информацией	90
3.3. Аналитическая иллюстрация	100
3.4. Численные эксперименты	103
3.5. Априорная информация в каталогах Gaia	106

3.6. Выводы к третьей главе	110
Глава 4. Модификация стандартной астрометрической модели с учётом конечности скорости света	113
4.1. Эффекты запаздывания для равномерного движения	115
4.2. Преобразование эпохи с эффектами запаздывания	121
4.3. Обсуждение	131
4.4. Якобиан преобразования с эффектами запаздывания	141
4.5. Приближённые формулы для эффектов запаздывания	146
4.6. Выводы к четвёртой главе	148
Глава 5. Влияние орбитального движения Земли на астрометрическое обнаружение экзопланет	150
5.1. Эффекты орбитального движения Земли	154
5.2. Корреляционная функция	163
5.3. Обсуждение	175
5.4. Предельная масса астрометрически детектируемой экзопланеты	186
5.5. Выводы к пятой главе	187
Глава 6. Ограничения на тестирование постньютоновской гравитации с использованием сканирующего астрометрического спутника	190
6.1. Теория	193
6.2. Корреляция между параметром γ и параллаксами	198
6.3. Взаимодействие систематических ошибок	206
6.4. Проверка теоретических предсказаний методом Монте-Карло	212
6.5. Асимметрия в смещении параллаксов	226
6.6. Выводы к шестой главе	230
Заключение	232

Список литературы	239
Приложение А. Дифференцирование векторов в сканирующей системе отсчёта	256

Введение

Высокий уровень развития технологий, достигнутый в последнее время, позволил использовать специализированные космические аппараты для проведения астрометрических наблюдений. Наблюдения из космоса имеют ряд существенных преимуществ перед наблюдениями наземными. Можно отметить три наиболее существенных положительных момента [29]. Во-первых, наблюдения из космоса свободны от искажений, вносимых рефракцией и атмосферной турбулентностью. Во-вторых, это одновременный обзор всей небесной сферы, что позволяет создавать каталоги в единой системе для звёзд как северного, так и южного полушарий. В-третьих, достигается высокая временная плотность наблюдений, что позволяет выполнять массовые наблюдательные программы в короткие сроки.

Первым полностью реализованным космическим астрометрическим экспериментом был проект Hipparcos (High Precision PARallax Collecting Satellite), выполненный рядом европейских астрономических учреждений под эгидой Европейского космического агентства (ESA – European Space Agency). В результате обработки данных, собранных в течение 37 месяцев работы космического аппарата, получены два астрометрических каталога: Hipparcos и Tycho [139]. Основным каталог Hipparcos содержит 118 тысяч звёзд и представляет собой каталог миллисекундной точности. Дополнительный (обзорный) каталог Tycho содержит около 1 млн. звёзд с точностью положений, собственных движений и параллаксов не хуже 20 мсд. В 2000 году был выпущен каталог Tycho-2 [74], содержащий положения и собственные движения, а также двухцветные фотометрические данные для 2.5 миллионов самых ярких звёзд на небесной сфере. В 2005 были опубликованы результаты новой обработки наблюдательных данных, что позволило улучшить точность каталога [142; 144]. В 2012 году была состав-

лена расширенная компилятивная версия каталога Hipparcos [2], содержащая большой объём дополнительной информации. Основные результаты, полученные с помощью наблюдений космического аппарата Hipparcos, изложены в [86; 91; 112; 122].

Успешное выполнение проекта Hipparcos вызвало всплеск интереса к космической астрометрии. Среди предлагаемых проектов имелись как сканирующие спутники, предназначенные для выполнения массовых наблюдательных программ, это проекты Diva [125; 126], Gaia [95; 104], FAME [78] и “Струве” [6; 11; 12; 80], так и аппараты, работающие в режиме наведения и служащие для высокоточных наблюдений избранных объектов, это проекты SIM [131], “Ломоносов” [18] и “Зодиак” [4]. Рассматриваемые проекты различались и по способу выполнения наблюдений. Если в аппаратах FAME, “Ломоносов” и “Струве” предполагалось использовать обычные телескопы, то спутники Diva, Gaia, SIM и “Зодиак” разрабатывались как оптические интерферометры, при этом DIVA рассматривается как тестовый проект для миссии Gaia.

По тем или иным причинам осуществлённым оказался только проект Gaia, при этом его концепция претерпела значительные изменения. Первоначально космический аппарат задумывался как оптический интерферометр. В дальнейшем, однако, от этих планов отказались в пользу обычного телескопа.

Хотя в настоящей работе речь идёт исключительно о космической астрометрии в оптическом диапазоне, нельзя не отметить достижения радиоастрометрии. Так, в ходе выполнения проекта “Радиоастрон”, представляющего собой космический радиоинтерферометр со сверхдлинной базой [14], была достигнута очень высокая точность единичного наблюдения в 7 мксд на базе длиной 26.9 земного диаметра или 342 тыс. км [32].

Космический телескоп Gaia основан на тех же принципах, которые хорошо зарекомендовали себя при выполнении проекта Hipparcos. Космический аппарат вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Бортовой телескоп обладает двумя полями зрения, линии визирования которых лежат в

плоскости, перпендикулярной к оси вращения, поэтому за один оборот, который занимает 6 часов, осуществляется сканирование одного большого круга. Для обеспечения сканирования всей небесной сферы ось вращения непрерывно смещается, находясь в прецессионном движении вокруг мгновенного направления на Солнце. Период прецессии составляет 63 дня, а наклонение оси вращения к направлению на Солнце равно 45° . Этот угол поддерживается постоянным для равномерного нагрева космического аппарата солнечным излучением [70].

Космический телескоп Gaia был запущен с космодрома Куру с помощью ракеты-носителя “Союз” и разгонного блока “Фрегат” 19 декабря 2013 года. Выполнение наблюдательной программы началось спустя семь месяцев после старта. 15 января 2025 года космический телескоп прекратил свою работу, что обусловлено исчерпанием топлива, необходимого для выполнения сканирования небесной сферы. Таким образом, наблюдения непрерывно велись на протяжении десяти с половиной лет. К настоящему времени осуществлено три выпуска данных. Первый выпуск (Gaia DR1), опубликованный в сентябре 2016 года, был основан на наблюдениях, собранных за первые 14 месяцев работы. Во втором выпуске (Gaia DR2), осуществлённом в апреле 2018 года, использовались данные, полученные за 22 месяца. Третий выпуск, опирающийся на наблюдения, собранные за первые 34 месяца работы космического аппарата с 25 июля 2014 года по 28 мая 2017 года, состоял из двух частей: так называемого раннего релиза Gaia EDR3, опубликованного в декабре 2020 года, и собственно Gaia DR3, опубликованного в июне 2022 года. Согласно информации, опубликованной Европейским космическим агентством, планируется осуществить ещё два выпуска. Четвёртый выпуск (Gaia DR4) ожидается к середине 2026 года, а последний пятый выпуск (Gaia DR5) будет закончен не ранее 2030 года.

Основные результаты, полученные с помощью данных Gaia DR2, изложены в обзоре [42]. Весьма информативное изложение научных результатов, основанных на использовании Gaia DR3, приводится в статье [23]. Основные статистическо-кинематические свойства каталога Gaia EDR3 обсуждаются в работе

[30]. Среди большого количества публикаций, посвящённых Gaia DR3, можно выделить такую интересную работу, как определение орбит для 150 тысяч астероидов [138]. Наличие подобных данных, без сомнения, послужит для уточнения масс планет и малых тел Солнечной системы, что необходимо для улучшения теории их движения [1].

Проект Hipparcos потребовал многих уточнений в анализе астрометрических наблюдений. Эффекты, которые ранее игнорировались при построении звездных каталогов, такие как гравитационное отклонение света телами в Солнечной системе и релятивистская звездная абберация, должны были систематически учитываться для того, чтобы достичь точности в миллисекунду дуги (мсд), которая стала возможной благодаря наблюдениям из космоса. Процедура редукции, использованная в проекте Hipparcos, была основана на подходе, разработанном в [20]. Миссия Gaia, нацеленная на достижение точности на уровне 10 микросекунд дуги (мксд) [58], требует дальнейшего усложнения моделирования данных для учета слабых физических эффектов, которые вступают в игру при этой точности. Практическая модель для релятивистской редукции астрометрических наблюдений с точностью до 1 мксд была сформулирована [82] и является основой для астрометрической обработки данных Gaia [99].

Появление массовых астрометрических каталогов потребовало разработки новых методов анализа и сравнения астрометрических данных. Наиболее мощными из них являются методы, основанные на использовании векторных сферических функций [7; 8; 19]. Эти методы были успешно применены для сравнения каталогов PRMXL, UCAC4 и XPM [147] и других задач.

Актуальность темы исследования

Наблюдательная астрометрия совершила качественный скачок в своем развитии за последние десятилетия. Особенно хорошо это видно на примере оптической космической астрометрии, где за 25 лет, прошедшие от каталога Hipparcos до последней версии каталога Gaia, точность уже улучшилась на два порядка от миллисекунд до десятков микросекунд дуги. При этом, в будущих

выпусках данных Gaia ожидается дальнейшее повышение точности, сопряжённое со значительным увеличением объёма наблюдательных данных. Необходимость разработки новых аналитических методов обусловлена по меньшей мере тремя причинами. Во-первых, при переходе на новый уровень точности становятся значимыми эффекты, которыми ранее можно было пренебречь ввиду их малости. Во-вторых, колоссальный объём наблюдательных данных приводит к появлению качественно новых статистических эффектов. В-третьих, непредвиденные обстоятельства, открывшиеся в ходе проведения эксперимента, привели к необходимости пересмотра модели наблюдений. Таким образом, как усовершенствование имеющихся, так и разработка новых методов анализа данных для миллисекундной оптической космической астрометрии являются весьма актуальными задачами.

Цели и задачи диссертационной работы:

- Исследование влияния механической неустойчивости сканирующего космического аппарата на появление систематических ошибок в параллаксах.
- Создание методики, позволяющей использовать дополнительную информацию в процессе построения астрометрического каталога при недостаточном объёме наблюдательных данных.
- Обобщение стандартной астрометрической модели, основанной на предположении о равномерном прямолинейном движении звезды относительно барицентра Солнечной системы, с учётом конечности скорости света.
- Строгое рассмотрение процедуры преобразования астрометрической и звёздно-кинематической информации от одной эпохи к другой.
- Изучение влияния орбитального движения Земли на обнаружение экзопланет средствами астрометрии.
- Решение задачи о влиянии систематических ошибок параллаксов на ре-

зультаты тестирования постньютоновской гравитации с использованием сканирующего астрометрического спутника.

Научная новизна

- Выполнен анализ систематических ошибок параллаксов, обусловленных нестабильностью базового угла на для сканирующего астрометрического спутника.
- Разработана методика построения астрометрического каталога при малом объёме наблюдательных данных с использованием априорной информации.
- Получено строгое решение задачи о модификации стандартной астрометрической модели с учётом конечности скорости света.
- Разработана процедура преобразования астрометрической и звёздно-кинематической информации от одной эпохи к другой как с учётом конечности скорости света, так и без оного.
- Исследованы эффекты орбитального движения Земли на астрометрическое обнаружение экзопланет.
- Установлены ограничения на тестирование постньютоновской гравитации с использованием сканирующего астрометрического спутника.

Научная и практическая ценность

Результаты, изложенные в диссертации, с успехом применялись и будут использованы в дальнейшем

- при выполнении редукции данных в проекте Gaia;
- при составлении астрометрических каталогов Gaia.

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для

- выполнении редукции данных в будущих космических проектах, основанных на тех принципах, которые были воплощены в проектах Hipparcos и Gaia, т.е. сканирующий аппарат с двумя полями зрения;
- построения астрометрических каталогов с недостаточным объёмом наблюдательных данных вне зависимости от способа выполнения наблюдений;
- преобразования астрометрической и звёздно-кинематической информации от одной эпохи к другой;
- оптимизации поиска экзопланет астрометрическими методами с целью устранения эффектов, связанных с орбитальным движением Земли;
- организации проверки общей теории относительности с помощью сканирующего астрометрического спутника.

Положения, выносимые на защиту:

1. Доказано аналитически и подтверждено численными экспериментами, что определяемые сканирующим астрометрическим спутником параллаксы подвержены глобальному сдвигу вследствие периодических изменений базового угла, вызванных нагревом спутника солнечным излучением.
2. Показана высокая эффективность разработанной и опробованной на реальных наблюдениях Gaia методики построения астрометрического каталога с использованием априорной информации для звёзд с малым объёмом наблюдательных данных.
3. Получено строгое решение задачи о равномерном движении звезды относительно барицентра Солнечной системы с учётом конечности скорости света и найдена удобная параметризация эффектов запаздывания, на основании чего построена общая процедура преобразования астрометрической и звёздно-кинематической информации от одной эпохи к другой.

4. Доказано посредством разработанного математического аппарата, что движение родительской звезды, вызванное наличием экзопланеты с орбитальным периодом около одного года, может быть полностью или частично поглощено эффектом параллакса, что ведёт как к понижению вероятности астрометрического обнаружения подобных систем, так и к смещённым оценкам их параллаксов.
5. Показано, что микросекундный глобальный сдвиг параллаксов ограничивает точность определения ППН параметра γ с использованием сканирующего астрометрического спутника на уровне $\sim 3.5 \times 10^{-4}$.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах ГАО РАН, на семинарах кафедры астрономии СПбГУ, на семинарах Лормановской обсерватории Дрезденского технического университета, на семинарах Лундской и Туринской обсерваторий, а также на ряде всероссийских и международных конференций:

- IAU Symposium 248. A Giant Step: From Milli- to Micro-Arcsecond Astrometry. Schanghai, China, October 2007;
- The Twelfth Marcel Grossmann Meeting: On Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics and Relativistic Field Theories. Paris, France, July 2009;
- IAU Symposium 261. Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis. Virginia Beach, USA, October 2009.
- The Eleventh Meeting on Gaia Relativistic Models and Tests. Madrid, Spain, September 2011;
- The Twelfth Meeting on Gaia Relativistic Models and Tests. Paris, France, July 2013;

- Meeting on Gaia Astrometric Global Iterative Solution. Dresden, Germany, May 2014;
- Gaia CU3 Plenary Meeting. Edinburgh, Great Britain, June 2015;
- IAU XXIXth General Assembly. Honolulu, USA, August, 2015.
- Всероссийская астрономическая конференция (ВАК-2017) «Астрономия: познание без границ». Ялта, Россия, сентябрь 2017 г.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 15 печатных работах, из них – 14 в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов докторской диссертации: [43–48; 66–70; 83; 96; 106] и 1 статья в сборниках трудов конференций [73].

Личный вклад автора. Основные результаты диссертации изложены в 15 статьях (без тезисов). Во всех совместных работах, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов докторской диссертации, личный вклад автора заключается в следующем: [44] – постановка задачи, создание математического аппарата, решение полученных уравнений; [46; 48] – постановка задачи, создание математического аппарата, разработка программного обеспечения, выполнение численных экспериментов; [47] – постановка задачи, создание математического аппарата, разработка программного обеспечения, выполнение численных экспериментов; [66] – участие в постановке задачи, вывод математических формул, разработка программного обеспечения, выполнение численных экспериментов; [67–70; 96] – интерпретация результатов наблюдений и редукции данных; [73] – участие в разработке математического аппарата, интерпретация полученных результатов; [83] – создание программного обеспечения, обработка наблюдений и их интерпретация; [106] – участие в разработке математического аппарата, интерпретация полученных результатов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, списка цитируемой литературы (155 наименований) и приложения. Диссертация содержит 258 страниц, 25 рисунков, 6 таблиц.

Содержание работы

В первой главе представлена так называемая стандартная астрометрическая модель, базирующаяся на положении о равномерном прямолинейном движении одиночных звёзд относительно барицентра Солнечной системы. В рамках этой модели вводятся шесть астрометрических параметров: прямое восхождение, склонение, тригонометрический параллакс, компоненты собственного движения по прямому восхождению и склонению, а также радиальное собственное движение, представляющее собой лучевую скорость, делённую на расстояние. Эти величины описывают мгновенное кинематическое состояние звезды, отнесённое к барицентру Солнечной системы. В рамках этой модели разработана математически строгая процедура преобразования астрометрических параметров от одной эпохи к другой.

Вторая глава посвящена исследованию влияния колебаний базового угла на глобальный сдвиг тригонометрических параллаксов, полученных из наблюдений сканирующего астрометрического спутника с двумя полями зрения. Для абсолютной астрометрии в рамках проекта Gaia требуется стабильность базового угла на микросекундном уровне. На практике, к сожалению, этого достичь не удалось. В космическом аппарате Gaia присутствуют колебания базового угла с амплитудой около одной миллисекунды дуги, что может привести к значительному глобальному сдвигу параллаксов. Ситуация усугубилась тем обстоятельством, что в литературе существовали две различные формулы для сдвига. Поэтому возникла задача устранить это противоречие, что и было сделано. Вопрос был исследован как аналитически, так и численно. Полученные результаты составили основу для устранения эффектов, вызванных имеющимися колебаниями базового угла, в редукции данных в проекте Gaia.

В третьей главе разработана методика использования априорной инфор-

мации для построения астрометрического каталога при недостаточном объёме наблюдательных данных, когда из наблюдений какого-либо объекта не удаётся надёжно определить все пять астрометрических параметров. Первоначально полагалось, что такая ситуация будет иметь место только для первого выпуска данных Gaia из-за короткого ряда наблюдений. Впоследствии, однако оказалось, что эта методика имеет гораздо более широкое применение. Она используется, например, для объектов переменной яркости и для слабых звёзд близких к порогу чувствительности инструмента. Внесение априорной информации позволяет получить не только надёжные оценки положения, но и их формальные ошибки, которые правильно характеризуют ошибки фактические. Решения с априорной информацией с успехом применялись во всех трёх выпусках данных Gaia и, без сомнения, будут использоваться в дальнейшем.

Четвёртая глава посвящена исследованию вопроса о влиянии эффектов запаздывания, обусловленных конечностью скорости света, на преобразование эпохи для астрометрических каталогов. В современной высокоточной астрометрии все эффекты такого рода должным образом учитываются при обработке наблюдений [15; 16; 82; 84]. Опорный каталог, основанный на редуцированных рядах наблюдений, содержит информацию о положении и скорости объектов, наблюдаемых (фиктивным наблюдателем) из барицентра Солнечной системы в определённую эпоху. Ввиду конечности скорости света наблюдаемые величины отличаются от величин истинных, поскольку изменения состояния звезды становятся известны наблюдателю по истечении срока, за который свет от звезды достигнет наблюдателя, причём время распространения света непрерывно меняется вследствие движения звезды относительно барицентра. Возникает вопрос о том, как наблюдаемые барицентрические величины изменяются со временем в рамках стандартной астрометрической модели. Эта задача рассматривалась рядом авторов, [63; 129; 136], в результате чего было найдено несколько приближённых решений. В ходе проведённого исследования удалось найти полные аналитические решения для всех физических эффектов. Полу-

чено и решено уравнение движения звезды в терминах наблюдаемых величин. Найдены явные выражения для зависимости астрометрических параметров от времени с учётом эффектов запаздывания, а также получены строгие и полностью обратимые формулы для преобразования астрометрических параметров от одной эпохи к другой. Вычислены все элементы якобиана, используемые для преобразования стандартных ошибок и корреляций. Таким образом, выведен полный набор формул для строгого и полностью обратимого преобразования астрометрических данных между различными эпохами. Также показано, что влияние эффектов запаздывания на астрометрические параметры пропорционально третьей степени собственного движения.

В пятой главе изучено влияние орбитального движения Земли на астрометрическое обнаружение экзопланетных систем. Было продемонстрировано, что в некоторых случаях движение родительской звезды, обусловленное присутствием планеты, может быть полностью или частично поглощено эффектом параллакса. Это снижает вероятность обнаружения такой системы и, кроме того, приводит к смещённой оценке параллакса. Статистический анализ невязок, описывающих отклонение от стандартной астрометрической модели позволил найти смещение параллакса в общем случае и ввести удобную количественную меру, характеризующую возможность детектирования подобных систем. Это величина, названная эффективной астрометрической сигнатурой, учитывает орбитальное движение Земли и влияние поглощения параллакса на астрометрические невязки. Подобная задача рассматривалась впервые.

Шестая глава посвящена использованию измерений, выполняемых сканирующим космическим аппаратом, для экспериментальной проверки общей теории относительности. Астрометрические измерения позволяют оценить параметр γ , который определяет величину гравитационного отклонения света в рамках параметризованного постньютоновского формализма [26]. На сегодняшний день наиболее точная оценка этого параметра составляет $(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$. Ожидалось, что в ходе выполнения проекта Gaia точность определения пара-

метра γ будет улучшена минимум на порядок. Однако, следует отметить, что эти выводы основывались только на наблюдательном шуме и большом объёме данных и не принимали во внимание систематические ошибки. Как известно, в тригонометрических параллаксах Gaia EDR3 присутствует как глобальный сдвиг, так и зональные вариации. Кроме того, методика выполнения измерений, реализованная в эксперименте Gaia, характеризуется существенной корреляцией между параллаксами и параметром γ . Вопрос о влиянии систематических ошибок параллаксов на определение параметра γ ранее не рассматривался в литературе. В настоящей работе эта проблема была исследована с различных точек зрения. Во-первых, было рассмотрено влияние гипотетического отклонения от общей теории относительности на появление глобального сдвига параллаксов. Во-вторых, была решена обратная задача о влиянии глобального смещения параллаксов на оценку параметра γ . Во всех этих случаях были получены новые аналитические выражения, ранее не упоминавшиеся в литературе. Кроме того, в ходе выполнения численных экспериментов было обнаружено, что чувствительность сканирующей астрометрии к параметру γ зависит от эклиптической широты. Дальнейшие исследования показали, что этот эффект является следствием неизвестной ранее асимметрии, присущей используемой в проекте Gaia схеме сканирования небесной сферы. Этот результат вошел в список «Важнейших достижений в области астрономии» Научного совета по астрономии ОФН РАН.

Глава 1

Стандартная астрометрическая модель

В настоящей главе описывается стандартная астрометрическая модель, в основании которой лежит предположение о том, что звезды движутся с постоянными скоростями относительно барицентра Солнечной системы (БСС). Для двойных и кратных звёзд, а также для систем с невидимыми спутниками, включая экзопланетные системы, вместо этого предполагается, что их центры масс движутся с постоянной скоростью. Хотя термин «стандартная астрометрическая модель» и не является общеупотребительным (например, в книге [13] применяется термин «стандартная модель движения»), его использование представляется вполне правомерным ввиду того, что такая модель является фундаментальной в нескольких отношениях.

Прежде всего, она позволяет компактно описать движение любой звезды или центра масс кратной системы в терминах нескольких легко каталогизируемых параметров. Во-вторых, она даёт возможность экстраполировать их движения вперед и назад во времени, что позволяет легко сравнивать наблюдения в произвольные эпохи. В-третьих, она обеспечивает эталонную модель или нулевую гипотезу для обнаружения нелинейных движений, вызванных, например, планетарными компаньонами. Действительно, равномерная прямолинейная модель используется в качестве эталона во всех современных наблюдательных исследованиях звездной кинематики, включая неастрометрические методы, такие как высокоточный доплеровский мониторинг [54]. При анализе таймингов пульсаров учитывается кривизна галактических звездных орбит [61], но только как известная поправка к равномерному движению.

Физические ограничения стандартной астрометрической модели обсуждаются в разделе 1.5.

Основной целью этой главы является применение модели равномерного барицентрического движения к задаче преобразования астрометрической и звёздно-кинематической информации от одной эпохи к другой.

Давно признано, что точное преобразование положений звёзд должно учитывать их радиальные движения, а также тангенциальные (собственные) движения. Таким образом, лучевая скорость неразрывно связана с астрометрическими данными и иногда рассматривается как «шестой астрометрический параметр», дополняющий стандартные пять (для положения, параллакса и собственного движения) при определении звёздных координат в шестимерном фазовом пространстве. В настоящей статье мы принимаем эту точку зрения, хотя радиальное движение обычно определяется спектроскопическим методом.

Астрометрические параметры звезды выводятся из наблюдений с использованием специальных процедур для коррекции различных физических эффектов, таких как гравитационное отклонение света и абберация, как подробно описано в работах [82; 84]. Аналогично, спектроскопические доплеровские измерения должны быть скорректированы с учетом локальных и астрофизических эффектов, как указано в [94]. Фактически, результатом является набор параметров, описывающих наблюдаемые явления, как они выглядели бы для фиктивного наблюдателя, находящегося в барицентре в отсутствие гравитационных полей всех тел Солнечной системы. Последующий анализ полученных данных затем может быть выполнен чисто классическим образом или, если необходимо, с привлечением эффектов специальной теории (см. главу 4).

Точное соотношение между однородной прямолинейной моделью и астрометрическими параметрами (включая лучевую скорость) просто в принципе, но довольно сложно на практике, в первую очередь из-за значительно различающихся неопределенностей в радиальных и тангенциальных компонентах звёздных координат. Хотя расстояния до звезд редко известны с относительной точностью лучше, чем 10^{-2} , их угловые координаты могут быть определены по крайней мере на шесть порядков точнее. Вследствие этого обстоятельства

астрометрические наблюдения нелегко смоделировать напрямую в терминах прямоугольных координат положений и скоростей звезд. Астрометрические параметры, использующие сферические координаты и параллакс, были введены для преодоления этой трудности.

Как впервые было отмечено в работе Шлезингера [128], движение звезды в пространстве вызывает вековые изменения не только в положении, но и в ее собственном движении, параллаксе и лучевой скорости, наблюдаемых из барицентра. Это чисто геометрические эффекты, обусловленные изменением расстояния и угла между лучом зрения и направлением движения. Шлезингер предположил, что результирующий квадратичный член в угловом положении, известный как вековое ускорение, может быть использован для определения лучевых скоростей некоторых звезд «независимо от спектроскопа и с превосходной степенью точности». До сих пор это было возможно только для очень немногих звезд [60; 141]. Тем не менее, эта работа стала пионерской в использовании модели равномерного прямолинейного движения для преобразования астрометрических данных на длительных интервалах времени.

Традиционно преобразуемые величины представляются разложениями в ряды по времени, что приводит к известным формулам для векового ускорения и производной по времени собственного движения [20; 109; 130; 137]. Недостатком этого подхода является то, что его применимость ограничена определенным временным интервалом, зависящим от требуемой точности и размеров игнорируемых членов. Этого можно избежать, используя преобразования, которые напрямую связывают сферические координаты в различные эпохи посредством декартовых векторов. Это также приводит к значительному упрощению математической формулировки задачи. Такой подход был впервые предложен в работе [62], где были получены выражения для изменения собственного движения, пригодные для любых, не обязательно малых, промежутков времени. Эта процедура в дальнейшем была использована при редукции данных в проекте Hipparcos [100] и сформировала теоретическую основу для разработки мето-

дики построения астрометрического каталога в космической астрометрической системе “Струве” [6] .

Поскольку знание неопределенностей необходимо для использования астрометрических данных, преобразование эпох должно сопровождаться соответствующим преобразованием ошибок. Строго говоря, из-за корреляции между элементами данных неопределенности как таковые не имеют смысла в этом контексте, и вместо них следует использовать ковариации.

Математическое описание стандартной математической модели даётся выражением

$$\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}_0 + (T - T_0) \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

однородной прямолинейной модели барицентрический вектор в произвольную эпоху T определяется где \mathbf{R}_0 – барицентрическое положение звезды в начальную эпоху T_0 , $\mathbf{R}(T)$ – барицентрическое положение звезды на эпоху T , а \mathbf{v} – постоянная скорость. Модель имеет шесть кинематических параметров, а именно компоненты векторов \mathbf{R}_0 и \mathbf{v} в барицентрической системе отсчета. Время измеряется в шкале ТСВ.

Эквивалентная форма уравнения (1.1) получается путем рассмотрения двух различных моментов времени, отмеченных индексами 1 и 2:

$$\mathbf{R}(T_2) = \mathbf{R}(T_1) + (T_2 - T_1) \mathbf{v}. \quad (1.2)$$

В декартовых координатах преобразование эпохи представляет собой тривиальную задачу: компоненты вектора скорости остаются постоянными, тогда как компоненты вектора положения являются линейными функциями времени. В терминах же астрометрических параметров задача существенно усложняется.

1.1. Астрометрические параметры

В этом разделе определяются астрометрические параметры, соответствующие описанной выше кинематической модели, и вводятся соответствующие обозначения.

Мгновенное кинематическое состояние звезды в барицентрической системе отсчета традиционно задается с помощью шести параметров. Пять из шести астрометрических параметров являются классическими: прямое восхождение α , склонение δ , тригонометрический параллакс ϖ , собственное движение по прямому восхождению μ_{α^*} и собственное движение по склонению μ_{δ} . Шестым параметром может быть «астрометрическая лучевая скорость» v_r [94], эквивалентная «кажущейся лучевой скорости» [82], но по причинам, которые станут ясны позже, мы предпочитаем использовать «радиальное собственное движение» [99], определяемое как отношение лучевой скорости к расстоянию до звезды:

$$\mu_r = v_r/R. \quad (1.3)$$

Все шесть параметров являются барицентрическими в том смысле, что они выводятся из наблюдений, которые по необходимости являются небарицентрическими, посредством применения различных поправок, так что они фактически относятся к фиктивному наблюдателю в барицентре. Аналогично T – (фиктивное) время приема света в барицентре. Точное определение параметров в рамках общей теории относительности и изложение соответствующих поправок приведено в работах [82; 84]. Для наблюдений звёзд конечным результатом этого процесса является набор астрометрических параметров, которые с достаточной точностью можно интерпретировать полностью классическим способом, как указано выше.

Шесть астрометрических параметров α , δ , ϖ , μ_{α^*} , μ_{δ} , μ_r непрерывно из-

меняются с T из-за движения звезды в пространстве. Все величины считаются заданными на некоторую начальную эпоху T_0 . Впоследствии мы будем использовать $t = T - T_0$ в качестве аргумента времени во всех выражениях вместо T . Кроме того, величины, относящиеся к $t = 0$, обозначаются индексом 0, а величины, относящиеся к моменту времени t , обозначаются соответствующими значками без индекса.

Теперь мы дадим точное определение шести астрометрических параметров в терминах введённых выше кинематических величин. Положение звезды относительно барицентра, описываемое вектором \mathbf{R} не является величиной, непосредственно определяемой из наблюдений. Наблюдаемой величиной является барицентрическое направление, задаваемое единичным вектором

$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{R}}{R} \equiv \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad (1.4)$$

а равно и его производная по времени – вектор собственного движения

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{d\mathbf{u}_B}{dt}. \quad (1.5)$$

Обе эти величины обычно относят к международной небесной системе координат ICRS (International Celestial Reference System). Для компактной записи формул, аналогичных (1.4), удобно использовать оператор векторной нормализации, который будем обозначать двойными угловыми скобками: $\mathbf{u}_B = \langle\langle \mathbf{R} \rangle\rangle^1$.

Хотя векторы \mathbf{u}_B и $\boldsymbol{\mu}$ совокупно имеют шесть координат, они в то же время должны удовлетворять двум скалярным соотношениям, а именно $\mathbf{u}'_B \mathbf{u}_B = 1$ и $\boldsymbol{\mu}' \mathbf{u}_B = 0$. В силу этого обстоятельства имеется всего четыре степени свободы, отвечающие четырём астрометрическим параметрам α , δ , μ_{α^*} и μ_δ .

Для того, чтобы определить первые два параметра, прямое восхождение α и склонение δ , рассмотрим постоянный единичный вектор \mathbf{r} , совпадающие с вектором \mathbf{u}_B в определённый момент времени t . Его координатное представление

¹) В астрометрической литературе векторная нормализация обычно обозначается с помощью одинарных угловых скобок: $\langle \dots \rangle$. Во избежание путаницы со общепринятым обозначением усреднения, такое обозначение не используется в настоящей работе.

в системе ICRS имеет вид

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

служит основанием для получения величин α и δ .

Уместно подчеркнуть различие между векторами \mathbf{u}_B и \mathbf{r} . В то время как первый зависит от времени, второй является постоянной величиной, причём в рассматриваемый момент времени эти векторы совпадают друг с другом, $\mathbf{r} = \mathbf{u}_B(t)$, и, конечно, имеют одно и то же координатное представление. На первый взгляд могло бы показаться, что введение вектора \mathbf{r} является излишним и приводит к ненужным усложнениям; однако, как объяснено в разделе 1.3, это различие становится существенным при интерпретации компонентов собственного движения и их ошибок.

Прямое восхождение и склонение вычисляются из компонентов вектора \mathbf{r} с помощью стандартных формул

$$\alpha = \arctg \frac{r_y}{r_x} + \text{const}, \quad \delta = \arcsin r_z, \quad (1.7)$$

где константа учитывает тот факт, что область значений арктангенса лежит в интервале от $-\pi/2$ до $\pi/2$, в то время как α заключено между 0 и 2π :

$$\text{const} = \begin{cases} 0, & (r_x > 0, r_y > 0) \wedge (r_x = 0, r_y = 1) \wedge (r_x = 1, r_y = 0), \\ 2\pi, & (r_x > 0, r_y < 0) \wedge (r_x = 0, r_y = -1), \\ \pi, & r_x < 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Введенные таким образом экваториальные координаты полностью согласуются с общепринятым определением. Так, в книге Жарова [13] склонение определяется как дуга, отсчитываемая от небесного экватора до звезды вдоль большого круга, проходящего через полюсы мира и звезду (круга склонений), а прямое восхождение определяется как дуга небесного экватора от точки весеннего равноденствия до круга склонений звезды. Поскольку в системе ICRS оси X и Y

определяют небесный экватор, ось X направлена в точку весеннего равноденствия (на стандартную эпоху), а ось Z указывает на северный полюс мира, нетрудно видеть, что эти определения являются эквивалентными.

Зная α и δ , мы можем вычислить единичные векторы, которые направлены в сторону увеличения прямого восхождения и склонения в данной точке на небесной сфере:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\sin \delta \cos \alpha \\ -\sin \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.6) и (1.9) определяют три ортонормальных вектора, составляющих локальную координатную триаду $[\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}]$ в точке (α, δ) , отнесённую к системе координат ICRS [20].

Компоненты собственного движения определяются как координаты вектора $\boldsymbol{\mu}$ в картинной плоскости, задаваемой векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} :

$$\mu_{\alpha^*} = \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu}, \quad \mu_{\delta} = \mathbf{q}'\boldsymbol{\mu}; \quad (1.10)$$

наоборот, так как $\mathbf{r}'\boldsymbol{\mu} = 0$, то вектор собственного движения может быть построен из компонентов собственного движения посредством

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{p}\mu_{\alpha^*} + \mathbf{q}\mu_{\delta}. \quad (1.11)$$

Альтернативным образом, компоненты собственного движения можно получить из определения вектора $\boldsymbol{\mu}$ как производной барицентрического направления по времени. Поскольку координатные представления векторов \mathbf{u}_B и \mathbf{r} совпадают, мы можем записать, используя определения

$$\frac{d\mathbf{u}_B}{dt} = \mathbf{p} \cos \delta \frac{d\alpha}{dt} + \mathbf{q} \frac{d\delta}{dt}. \quad (1.12)$$

Сопоставляя эту формулу с выражением (1.11), мы видим, что

$$\mu_{\alpha^*} = \frac{d\alpha}{dt} \cos \delta, \quad \mu_{\delta} = \frac{d\delta}{dt}. \quad (1.13)$$

Тригонометрический параллакс обычно определяется как угол, под которым отрезок длиной в одну астрономическую единицу A [79] виден с рассматриваемой звезды (см., например, [110]). Интерпретируя «расстояние» как координатное расстояние $R = |\mathbf{R}|$ от барицентра Солнечной системы, это определение все еще неоднозначно относительно точного отношения к параллаксу ϖ : это может быть $\sin \varpi = A/R$ [13; 20], $\tan \varpi = A/R$ [36] или даже $2 \sin(\varpi/2) = A/R$ (если астрономической единицей является хорда угла); различия порядка $\varpi^3 < 10^{-10}$ сек. дуги действительно незначительны для всех звезд. Целесообразно принять принимаем математически простейшее соотношение [13; 82]

$$\varpi = \frac{A}{R}, \quad (1.14)$$

которое во втором порядке эквивалентно всем альтернативным выражениям. Может показаться странным определять параллакс, который, очевидно, является наблюдаемой величиной, в терминах R , которое не является величиной наблюдаемой непосредственно. Однако ϖ следует скорее рассматривать как параметр модели, позволяющий нам последовательно интерпретировать небарицентрические наблюдения, и тогда уравнение (1.14) является соотношением, которое следует использовать в модели для расчета его влияния на данные.

Из уравнения (1.3) видно, что радиальное собственное движение равно $\mu_r = v_r \varpi / A$. Это аналогично выражению для полного (тангенциального) собственного движения

$$\mu \equiv (\mu_{\alpha^*}^2 + \mu_{\delta}^2)^{1/2} = v_t \varpi / A \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\mu} \equiv \mathbf{v}_t \varpi / A, \quad (1.15)$$

где \mathbf{v}_t – тангенциальная скорость. Три компонента собственного движения μ_{α^*} , μ_{δ} и μ_r удобно выражать в одних и тех же единицах, например, мсд/год. Единицей времени в этом случае будет юлианский год, продолжительность которого определяется как $365.25 \times 86400 = 31\,557\,600$ с. Поскольку астрометрические параметры отнесены к барицентру Солнечной системы в качестве шкалы времени используется барицентрическое координатное время (ТСВ).

В завершение этого раздела выпишем явные выражения для кинематических параметров, составляющих стандартную астрометрическую модель, в терминах параметров астрометрических. Формула для пространственной скорости имеет вид

$$\mathbf{v} = \frac{A_V}{\varpi} (\mathbf{p}\mu_{\alpha^*} + \mathbf{q}\mu_{\delta} + \mathbf{r}\mu_r) , \quad (1.16)$$

где $A_V = 4.740\,470\,446$ – астрономическая единица, выраженная в км · год/с. Это соотношение подразумевает, что параллакс и собственные движения выражаются в совместимых единицах, например, мсд и мсд/год соответственно. Переходя от параллакса и расстояниям, находим

$$\mathbf{v} = \frac{A_V}{1000} R (\mathbf{p}\mu_{\alpha^*} + \mathbf{q}\mu_{\delta} + \mathbf{r}\mu_r) , \quad (1.17)$$

Окончательно, формула, определяющая зависимость барицентрического положения от времени принимает вид

$$\mathbf{R} = R [\mathbf{r} + (\mathbf{p}\mu_{\alpha^*} + \mathbf{q}\mu_{\delta} + \mathbf{r}\mu_r) t] . \quad (1.18)$$

Используя определение (1.4) и применяя оператор векторной нормализации, находим зависимость барицентрического направления от времени

$$\mathbf{u}_B = \langle\langle \mathbf{r} + (\mathbf{p}\mu_{\alpha^*} + \mathbf{q}\mu_{\delta} + \mathbf{r}\mu_r) t \rangle\rangle . \quad (1.19)$$

Следует отметить, что все величины в правых частях формул (1.18) и (1.19) относятся к начальному моменту времени $t = 0$.

Положение рассматриваемой звезды относительно наблюдателя, находящегося в точке, задаваемой барицентрическим вектором \mathbf{b} , определяется разностью $\mathbf{R} - \mathbf{b}$. Соответственно, наблюдаемое направление описывается выражением

$$\mathbf{u} = \langle\langle \mathbf{r} + (\mathbf{p}\mu_{\alpha^*} + \mathbf{q}\mu_{\delta} + \mathbf{r}\mu_r) t - \mathbf{b}\varpi/A \rangle\rangle . \quad (1.20)$$

Ниже нам понадобится также и выражение для малого изменения наблюдаемого направления, обусловленного малой вариацией тригонометрического парал-

лакса. Обозначая вектор, стоящий в угловых скобках, через \mathbf{U} и дифференцируя, получаем

$$d\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{U}}{U} - \mathbf{u} \left(\mathbf{u}' \frac{d\mathbf{U}}{U} \right) = \mathbf{u} \times \left[\frac{d\mathbf{U}}{U} \times \mathbf{u} \right]. \quad (1.21)$$

Вектор \mathbf{U} удобно представить в виде

$$\mathbf{U} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.22)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – пространственное смещение звезды относительно наблюдателя, нормированное на расстояние. Ввиду очевидного условия $\varepsilon \ll 1$, можно ограничиться линейными по $\boldsymbol{\varepsilon}$ величинами. Разложение $1/U$ с точностью до членов первого порядка дает

$$\frac{1}{U} = 1 - \mathbf{r}'\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.23)$$

Поскольку нас интересуют эффекты, связанные с вариацией параллакса, то можно написать

$$d\mathbf{U} = -(\mathbf{b}/A) d\varpi. \quad (1.24)$$

Используя разложение (1.23), получаем

$$\frac{d\mathbf{U}}{U} = d\mathbf{U} - (\mathbf{r}'\boldsymbol{\varepsilon}) d\mathbf{U}. \quad (1.25)$$

Член $(\mathbf{r}'\boldsymbol{\varepsilon}) d\mathbf{U}$ представляет собой величину второго порядка малости и может быть опущен, поэтому

$$\frac{d\mathbf{U}}{U} = d\mathbf{U}. \quad (1.26)$$

Поставляя (1.26) в (1.20), получаем

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u} \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{b}/A)] d\varpi. \quad (1.27)$$

Эта формула будет неоднократно использоваться в дальнейшем. Она описывает изменение наблюдаемого направления, вызванное малой вариацией параллакса и схематично проиллюстрирована на рисунке 1.1 для случая $d\varpi > 0$. Этот результат имеет простой геометрический смысл: наблюдаемое положение звезды смещается к барицентру при $d\varpi > 0$ и от барицентра при $d\varpi < 0$.

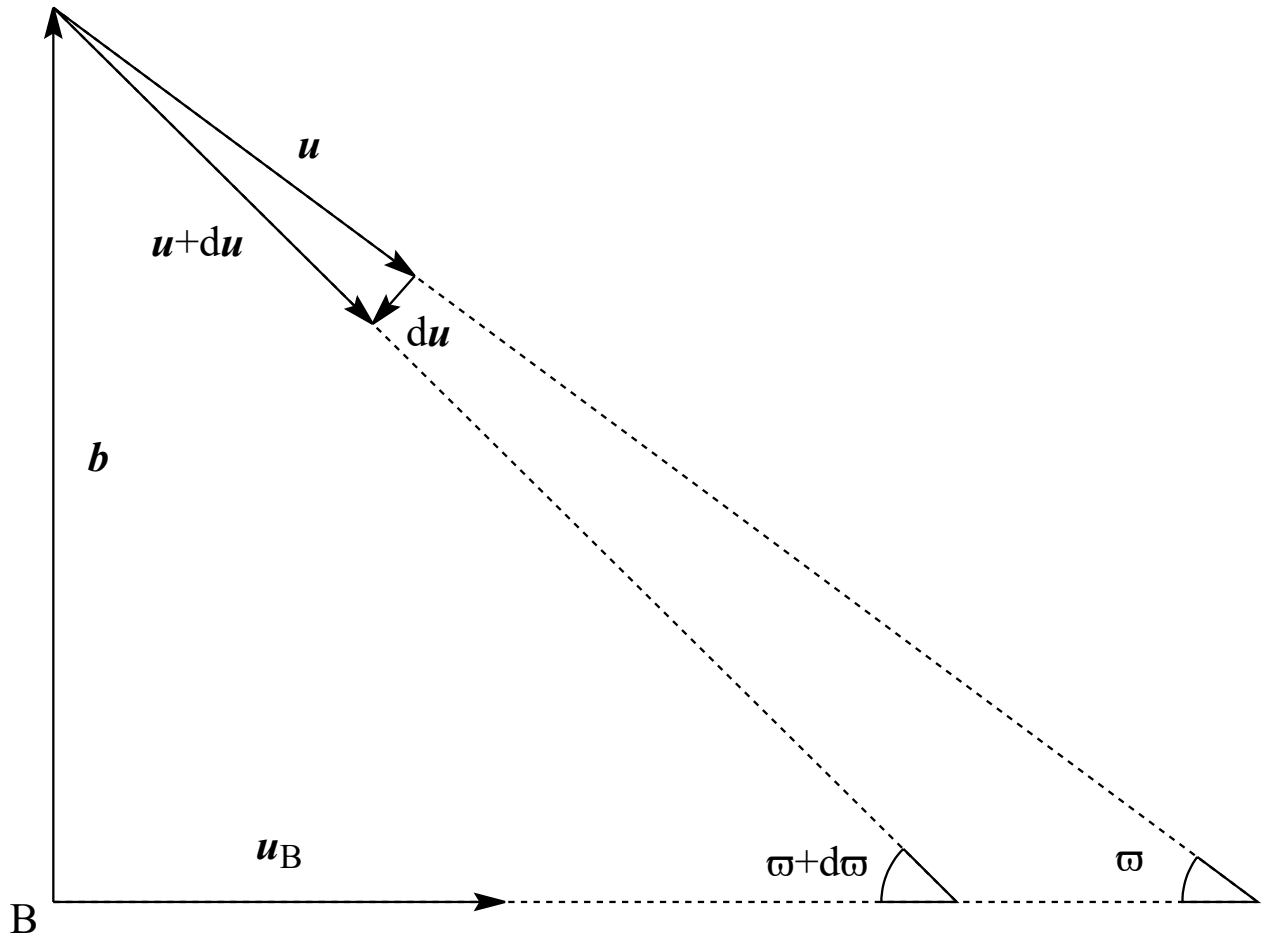


Рис. 1.1. – Схематическое изображение наблюдаемого смещения звезды $d\mathbf{u}$, обусловленного малым изменением тригонометрического параллакса $d\varpi$, согласно формуле (1.27). Вектор \mathbf{b} определяет положение наблюдателя относительно барицентра Солнечной системы, обозначенного точкой В. Единичные векторы \mathbf{u}_B и \mathbf{u} показывают барицентрическое и наблюдаемое направления на объект, задаваемые уравнениями (1.19) и (1.20) соответственно.

Следует подчеркнуть, что формула (1.27) выведена в системе координат ICRS. Во второй и пятой главах настоящего диссертационного исследования речь идёт о наблюдениях с борта сканирующего телескопа, для описания которых используется система координат, синхронно вращающаяся с космическим аппаратом. В связи с этим возникает вопрос о возможном изменении этого выражения при переходе от неподвижной системы отсчёта к вращающейся. Этот вопрос рассмотрен в Приложении А.

1.2. Преобразование астрометрических параметров

В этом разделе представлена процедура преобразования астрометрических параметров от одной эпохи к другой.

Выражение (1.18) описывает зависимость барицентрического положения от времени. Оно позволяет вычислить в заданный момент времени барицентрическое направление и тригонометрический параллакс, определяемые формулами (1.4) и (1.14) соответственно.

Возводя (1.18) в квадрат, получаем

$$R^2 = R_0^2 [1 + 2\mu_{r0}t + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t^2] . \quad (1.28)$$

Здесь мы использовали соотношения $\mathbf{R}'_0 \mathbf{v}_0 = R_0^2 \mu_{r0}$ и $v_0^2 = R_0^2 (\mu_{r0}^2 + \mu_0^2)$, в истинности которых нетрудно убедиться на основании формул (1.4), (1.14) и (1.16).

Вводя относительное изменение расстояния

$$f_D \equiv R_0/R = [1 + 2\mu_{r0}t + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t^2]^{-1/2} , \quad (1.29)$$

находим преобразованное барицентрическое направление

$$\mathbf{u}_B = [\mathbf{r}_0 (1 + \mu_{r0}t) + \boldsymbol{\mu}_0 t] f_D , \quad (1.30)$$

и преобразованный параллакс

$$\varpi = \varpi_0 f_D , \quad (1.31)$$

Преобразованные экваториальные координаты (α, δ) вычисляются из компонентов вектора \mathbf{u} обычным образом с использованием уравнения (1.7).

Непосредственное дифференцирование формулы (1.30) даёт преобразование вектора собственного движения

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{d\mathbf{u}_B}{dt} = [\boldsymbol{\mu}_0 (1 + \mu_{r0}t) - \mathbf{r}_0 \mu_0^2 t] f_D^3 , \quad (1.32)$$

и радиального собственного движение

$$\mu_r = \frac{dR}{dt} \frac{\varpi}{A} = [\mu_{r0} + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t] f_D^2. \quad (1.33)$$

Для того чтобы найти компоненты собственного движения $(\mu_{\alpha*}, \mu_\delta)$ из вектора $\boldsymbol{\mu}$, нужно спроецировать его на вектора \boldsymbol{p} and \boldsymbol{q} согласно (1.10), причём эти вектора должны быть заданы посредством направления \boldsymbol{u} , преобразованного на эпоху t , или, что то же самое, преобразованных координат (α, δ) согласно (1.9).

Соотношения, выведенные в настоящем разделе, описывают преобразование шести астрометрических параметров $(\alpha_0, \delta_0, \varpi_0, \mu_{\alpha*0}, \mu_{\delta 0}, \mu_{r0})$, отнесённых к эпохе t_0 , в соответствующий набор параметров $(\alpha, \delta, \varpi, \mu_{\alpha*}, \mu_\delta, \mu_r)$, отнесённый к произвольной эпохе t . Следует отметить, что полученное преобразование является строго обратимым: последующее преобразование от t к t_0 приводит к исходным параметрам.

1.3. Преобразование ошибок и корреляций

В этом разделе мы рассмотрим, как неопределенности в астрометрических параметрах $\alpha_0, \delta_0, \varpi_0, \mu_{\alpha*0}, \mu_{\delta 0}, \mu_{r0}$ в эпоху T_0 преобразуются в неопределенности в преобразованных параметрах $\alpha, \delta, \varpi, \mu_{\alpha*}, \mu_\delta, \mu_r$ в эпоху $T = T_0 + t$. Неопределенности количественно определяются с помощью 6×6 ковариационных матриц \boldsymbol{C}_0 и \boldsymbol{C} соответственно, в которых строки и столбцы соответствуют астрометрическим параметрам, взятым в указанном выше порядке.

1.3.1. Общее преобразование ковариационной матрицы

Хотя преобразование ошибок обсуждается во многих учебниках [см., например, 5; 35], мы считаем полезным для полноты изложения дать краткое изложение этой методики.

В контексте преобразования ошибок удобно представлять астрометрические параметры вектором \mathbf{a} , состоящим из шести элементов. Вся информация о стандартных ошибках σ параметров и корреляциях между ними содержится в ковариационной матрице \mathbf{C} размером 6×6 , элементами которой являются

$$c_{ii} = \sigma_i^2 \quad c_{ik} = \rho_{ik}\sigma_i\sigma_k, \quad (1.34)$$

где ρ_{ik} – коэффициент корреляции (или просто корреляция) между i -м и k -м параметрами.

Если исходный вектор параметров \mathbf{a}_0 подвергается некоторому преобразованию, в результате чего образуется новый набор параметров, $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{a}_0)$, то малые изменения параметров связаны посредством

$$\Delta a_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial a_k} \Delta a_{0k}. \quad (1.35)$$

В матричном виде это можно записать как

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{J} \Delta \mathbf{a}_0, \quad (1.36)$$

где \mathbf{J} – якобиан рассматриваемого преобразования:

$$J_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial a_k}, \quad (1.37)$$

вычисленный в точке \mathbf{a}_0 . Пусть $\Delta \mathbf{a}$ представляет собой вектор разностей между оценками параметров и их истинными значениями. Если оценки являются несмещёнными, то $\mathbf{E}(\Delta \mathbf{a}_0) = \mathbf{0}$, где \mathbf{E} – оператор математического ожидания,

а ковариационная матрица \mathbf{a}_0 задается как $\mathbf{C}_0 = \mathbb{E}(\Delta\mathbf{a}_0\Delta\mathbf{a}_0')$, где штрих обозначает транспонирование матрицы. Из (1.36) следует, что \mathbf{a} также несмещена, в первом порядке по ошибкам, и что ее ковариация задается как

$$\mathbf{C} = \mathbf{J}\mathbf{C}_0\mathbf{J}' . \quad (1.38)$$

Это уравнение является основой для преобразования ошибок, обсуждаемой ниже.

Если существует обратная функция \mathbf{f}^{-1} , то можно преобразовать набор данных $[\mathbf{a}, \mathbf{C}]$ обратно в исходную форму $[\mathbf{a}_0, \mathbf{C}_0]$, и два представления можно считать эквивалентными с точки зрения информационного содержания. Необходимым условием для этого является то, что $|\mathbf{J}_f| \neq 0$, в этом случае $\mathbf{J}_{f^{-1}} = (\mathbf{J}_f)^{-1}$. Преобразования, обсуждаемые здесь, удовлетворяют этому условию.

1.3.2. Вычисление дифференциалов астрометрических параметров

Для нахождения элементов ковариационной матрицы преобразованных астрометрических параметров \mathbf{C} из уравнения (1.38) требуется вычислить все 36 частных производных, составляющих элементы матрицы Якоби \mathbf{J} . Необходимые частные производные легко находятся, как только установлены соотношения между соответствующими дифференциалами. Ниже приводится полный вывод этих дифференциалов, поскольку он может представлять некоторый методологический интерес. Последующее определение частных производных является простым, хотя и несколько утомительным, а полные результаты приведены в разделе 1.3.3.

На этом этапе нам нужно сделать еще одно замечание относительно преобразования собственных движений. Компоненты собственного движения получаются путем разложения вектора собственного движения $\boldsymbol{\mu}$ по векторам \mathbf{p} и

\mathbf{q} , определяющим картинную плоскость: $\mu_{\alpha^*} = \mathbf{p}'\boldsymbol{\mu}$ и $\mu_{\delta} = \mathbf{q}'\boldsymbol{\mu}$. Рассмотрим теперь, что происходит, когда и векторы положения, и векторы собственного движения получают малые возмущения $\Delta\mathbf{u}_B$, $\Delta\boldsymbol{\mu}$. Возмущение положения явно влияет на α и δ , и возникает вопрос, изменяет ли это также \mathbf{p} и \mathbf{q} . Если это так, то общие возмущения компонентов собственного движения становятся

$$\Delta\mu_{\alpha^*} = \mathbf{p}'\Delta\boldsymbol{\mu} + \Delta\mathbf{p}'\boldsymbol{\mu}, \quad \Delta\mu_{\delta} = \mathbf{q}'\Delta\boldsymbol{\mu} + \Delta\mathbf{q}'\boldsymbol{\mu}, \quad (1.39)$$

где $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{q}$ — возмущения тангенциальных векторов, вызванные $\Delta\mathbf{u}_B$. Проблема здесь в том, что выражения для $\Delta\mathbf{p}$ и $\Delta\mathbf{q}$ содержат множители $\sec\delta$ и $\tan\delta$ и, следовательно, могут стать сколь угодно большими достаточно близко к небесным полюсам. В терминах неопределенностей в μ_{α^*} и μ_{δ} это означает, что они содержат вклады, которые не связаны с фактической неопределенностью собственного вектора движения и которые в принципе неограниченны.

В качестве альтернативы можно рассматривать \mathbf{p} и \mathbf{q} как фиксированную, свободную от ошибок систему отсчета для возмущений в картинной плоскости. В этом случае мы должны подставить $\Delta\mathbf{p} = \Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$ в уравнение (1.39) и все подобные выражения. Это приводит к более простым формулам и интуитивно более разумной интерпретации ошибок собственного движения. Этот вариант используется в дальнейшем. Практическим следствием является то, что нормальная триада $[\mathbf{p} \ \mathbf{q} \ \mathbf{r}]$ должна рассматриваться как фиксированная в контексте возмущений и неопределенностей. Триада традиционно определяется принятыми значениями (α, δ) . Это также мотивирует формальное различие между \mathbf{r} и \mathbf{u}_B , упомянутое в разделе 1.1.

Подводя итог в терминах локальных координатных триад, можно сказать, что приведенные ниже вычисления основаны на следующих постулатах:

1. $[\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{r}_0]$ фиксировано в пространстве и времени и не зависит от неопределенностей астрометрических параметров;
2. $[\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}]$ зависит от времени через преобразованное положение \mathbf{u}_B , как $\mathbf{r} =$

\mathbf{u}_B ;

3. в любой момент времени $[\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}]$ фиксировано в пространстве и не зависит от неопределенностей исходных астрометрических параметров.

Пусть координаты какой-либо звезды подвергаются малым изменениям $\Delta\alpha_{*0}$ и $\Delta\delta_0$, тогда направление на эту звезду испытает возмущение $\Delta\mathbf{u}_{B0}$ и станет

$$\mathbf{u}_{B0} + \Delta\mathbf{u}_{B0} = \mathbf{p}_0\Delta\alpha_{*0} + \mathbf{q}_0\Delta\delta_0 + \mathbf{r}_0 \left[1 - (\Delta\alpha_{*0})^2 - (\Delta\delta_0)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.40)$$

Наличие квадратичного члена обусловлено условием $|\mathbf{u}_{B0} + \Delta\mathbf{u}_{B0}| = 1$. Дифференцируя это соотношение по времени и используя определения (1.5) и (1.10), находим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_0 + \Delta\boldsymbol{\mu}_0 = & \mathbf{p}_0\mu_{\alpha*0} + \mathbf{q}_0\mu_{\delta 0} \\ & - \mathbf{r}_0 (\mu_{\alpha*0}\Delta\alpha_{*0} + \mu_{\delta 0}\Delta\delta_0) \left[1 - (\Delta\alpha_{*0})^2 - (\Delta\delta_0)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Это уравнение показывает, что полный дифференциал вектора собственного движения имеет вид

$$d\boldsymbol{\mu}_0 = -\mathbf{r}_0\mu_{\alpha*0}d\alpha_{*0} - \mathbf{r}_0\mu_{\delta 0}d\delta_0 + \mathbf{p}_0d\mu_{\alpha*0} + \mathbf{q}_0d\mu_{\delta 0}. \quad (1.42)$$

Слагаемые, содержащие вектор \mathbf{r}_0 имеют простой геометрический смысл: они обеспечивают перпендикулярность векторов $\mathbf{u}_{B0} + \Delta\mathbf{u}_{B0}$ и $\boldsymbol{\mu}_0 + \Delta\boldsymbol{\mu}_0$ в линейном приближении.

Мы начинаем с рассмотрения дифференциалов преобразованных астрометрических параметров. Дифференцируя формулу (1.6), имеем

$$d\mathbf{u}_B = \mathbf{p}d\alpha_* + \mathbf{q}d\delta. \quad (1.43)$$

Умножая это выражение скалярно на векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} , получаем

$$d\alpha_* = \mathbf{p}'d\mathbf{u}_B, \quad d\delta = \mathbf{q}'d\mathbf{u}_B. \quad (1.44)$$

Далее, находим из уравнения (1.31)

$$d\varpi = f_D d\varpi_0 + \varpi d \ln f_D, \quad (1.45)$$

тогда как формула (1.10) показывает, что

$$d\mu_{\alpha*} = \mathbf{p}' d\boldsymbol{\mu}, \quad d\mu_{\delta} = \mathbf{q}' d\boldsymbol{\mu}. \quad (1.46)$$

Непосредственное дифференцирование соотношения (1.33) даёт

$$d\mu_r = 2t f_D^2 (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) + (1 + 2\mu_{r0} t) f_D^2 d\mu_{r0} + 2\mu_r d \ln f_D. \quad (1.47)$$

Для того чтобы найти дифференциалы координат и компонентов собственного движения из уравнений (1.44) и (1.46), необходимо выразить $d\mathbf{u}_B$ и $d\boldsymbol{\mu}$ через начальные астрометрические параметры. Из формулы (1.30) находим дифференциал преобразованного направления

$$d\mathbf{u}_B = [(1 + \mu_{r0} t) d\mathbf{u}_{B0} + t (d\boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{r}_0 d\mu_{r0})] f_D + \mathbf{u}_B d \ln f_D. \quad (1.48)$$

Полезно заметить, что последний член здесь обращается в нуль при выполнении скалярного умножения на векторы \mathbf{p} и \mathbf{q} , так как $\mathbf{p}'\mathbf{u}_B = \mathbf{q}'\mathbf{u}_B = 0$; следовательно, этот член не входит в окончательные выражения для дифференциалов $d\alpha^*$ и $d\delta$. Дифференцирование уравнения (1.32) даёт

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\mu} = & -\mu_0^2 t f_D^3 d\mathbf{u}_{B0} + (1 + \mu_{r0} t) f_D^3 d\boldsymbol{\mu}_0 \\ & - 2\mathbf{r}_0 t f_D^3 (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) + \boldsymbol{\mu}_0 t f_D^3 d\mu_{r0} + 3\boldsymbol{\mu} d \ln f_D. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Приведённые выше выражения использованы в разделе 1.3.3 при вычислении элементов якобиана, которые необходимы для преобразований ковариационной матрицы, описываемого выражением (1.38).

1.3.3. Элементы матрицы Якоби

В этом разделе даны явные формулы для 36 частных производных, составляющих матрицу Якоби для преобразования астрометрических параметров. Соответствующие формулы получены из дифференциалов, найденных в разделе 1.3.2.

Прямое восхождение

$$\left. \begin{aligned}
 J_{11} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial \alpha_{*0}} = \mathbf{p}' \mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D - \mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha^* 0} t f_D, \\
 J_{12} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial \delta_0} = \mathbf{p}' \mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D - \mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} t f_D, \\
 J_{13} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial \varpi_0} = 0, \\
 J_{14} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial \mu_{\alpha^* 0}} = \mathbf{p}' \mathbf{p}_0 t f_D, \\
 J_{15} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial \mu_{\delta 0}} = \mathbf{p}' \mathbf{q}_0 t f_D, \\
 J_{16} &= \frac{\partial \alpha^*}{\partial \mu_{r0}} = -\mu_{\alpha^*} t^2.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.50)$$

Склонение

$$\left. \begin{aligned}
 J_{21} &= \frac{\partial \delta}{\partial \alpha_{*0}} = \mathbf{q}' \mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D - \mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha^* 0} t f_D, \\
 J_{22} &= \frac{\partial \delta}{\partial \delta_0} = \mathbf{q}' \mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D - \mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} t f_D, \\
 J_{23} &= \frac{\partial \delta}{\partial \varpi_0} = 0, \\
 J_{24} &= \frac{\partial \delta}{\partial \mu_{\alpha^* 0}} = \mathbf{q}' \mathbf{p}_0 t f_D, \\
 J_{25} &= \frac{\partial \delta}{\partial \mu_{\delta 0}} = \mathbf{q}' \mathbf{q}_0 t f_D, \\
 J_{26} &= \frac{\partial \delta}{\partial \mu_{r0}} = -\mu_{\delta} t^2.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Тригонометрический параллакс

$$\left. \begin{aligned} J_{31} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha_{*0}} = 0, \\ J_{32} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \delta_0} = 0, \\ J_{33} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \varpi_0} = f_D, \\ J_{34} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \mu_{\alpha*0}} = -\varpi \mu_{\alpha*0} t^2 f_D^2, \\ J_{35} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \mu_{\delta 0}} = -\varpi \mu_{\delta 0} t^2 f_D^2, \\ J_{36} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \mu_{r0}} = -\varpi (1 + \mu_{r0} t) t f_D^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Собственное движение по прямому восхождению

$$\left. \begin{aligned} J_{41} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \alpha_{*0}} = -\mathbf{p}' \mathbf{p}_0 \mu_0^2 t f_D^3 - \mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} (1 + \mu_{r0} t) f_D^3, \\ J_{42} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \delta_0} = -\mathbf{p}' \mathbf{q}_0 \mu_0^2 t f_D^3 - \mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} (1 + \mu_{r0} t) f_D^3, \\ J_{43} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \varpi_0} = 0, \\ J_{44} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \mu_{\alpha*0}} = \mathbf{p}' \mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D^3 - 2\mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} t f_D^3 - 3\mu_{\alpha*} \mu_{\alpha*0} t^2 f_D^2, \\ J_{45} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \mu_{\delta 0}} = \mathbf{p}' \mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D^3 - 2\mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} t f_D^3 - 3\mu_{\alpha*} \mu_{\delta 0} t^2 f_D^2, \\ J_{46} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \mu_{r0}} = \mathbf{p}' [\mu_0 f_D - 3\mu (1 + \mu_{r0} t)] t f_D^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Собственное движение по склонению

$$\left. \begin{aligned} J_{51} &= \frac{\partial \mu_{\delta}}{\partial \alpha_{*0}} = -\mathbf{q}' \mathbf{p}_0 \mu_0^2 t f_D^3 - \mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} (1 + \mu_{r0} t) f_D^3, \\ J_{52} &= \frac{\partial \mu_{\delta}}{\partial \delta_0} = -\mathbf{q}' \mathbf{q}_0 \mu_0^2 t f_D^3 - \mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} (1 + \mu_{r0} t) f_D^3, \\ J_{53} &= \frac{\partial \mu_{\delta}}{\partial \varpi_0} = 0, \\ J_{54} &= \frac{\partial \mu_{\delta}}{\partial \mu_{\alpha*0}} = \mathbf{q}' \mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D^3 - 2\mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} t f_D^3 - 3\mu_{\delta} \mu_{\alpha*0} t^2 f_D^2, \\ J_{55} &= \frac{\partial \mu_{\delta}}{\partial \mu_{\delta 0}} = \mathbf{q}' \mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0} t) f_D^3 - 2\mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} t f_D^3 - 3\mu_{\delta} \mu_{\delta 0} t^2 f_D^2, \\ J_{56} &= \frac{\partial \mu_{\delta}}{\partial \mu_{r0}} = \mathbf{q}' [\mu_0 f_D - 3\mu (1 + \mu_{r0} t)] t f_D^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Радиальное собственное движение

$$\left. \begin{aligned} J_{61} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \alpha_{*0}} = 0, \\ J_{62} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \delta_0} = 0, \\ J_{63} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \varpi_0} = 0, \\ J_{64} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \mu_{\alpha*0}} = 2\mu_{\alpha*0} (1 + \mu_{r0}t) t f_D^4, \\ J_{65} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \mu_{\delta 0}} = 2\mu_{\delta 0} (1 + \mu_{r0}t) t f_D^4, \\ J_{66} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \mu_{r0}} = \left[(1 + \mu_{r0}t)^2 - \mu_0^2 t^2 \right] f_D^4. \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

1.3.4. Инициализация ковариационной матрицы

Для вычисления ковариационной матрицы преобразованных астрометрических параметров \mathbf{C} нужно задать начальную матрицу \mathbf{C}_0 . Далеко не все астрометрические каталоги предоставляют данные о корреляциях между параметрами. Кроме того, они, как правило, не содержат лучевых скоростей, информация о которых необходима для точного пересчёта астрометрических параметров на другую эпоху. Отсутствие корреляций не представляет никаких трудностей, поскольку все внедиагональные элементы \mathbf{C}_0 в этом случае просто полагаются равными нулю, в то время как лучевая скорость требует особого рассмотрения. Такие каталоги как Hipparcos и Gaia предоставляют полные первые пять строк и столбцов \mathbf{C}_0 , эта матрица должна быть дополнена шестой строкой и столбцом, связанными с начальным радиальным собственным движением μ_{r0} . Если начальная лучевая скорость v_{r0} имеет стандартную ошибку $\sigma_{v_{r0}}$ и предполагается, что она статистически независима от астрометрических

параметров в каталоге, то требуемые дополнительные элементы в \mathbf{C}_0 равны

$$\left. \begin{aligned} [C_0]_{i6} = [C_0]_{6i} = [C_0]_{i3} (v_{r0}/A), \quad i = 1 \dots 5, \\ [C_0]_{66} = [C_0]_{33} (v_{r0}^2 + \sigma_{v_{r0}}^2) / A^2 + (\varpi_0 \sigma_{v_{r0}} / A)^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

Если лучевая скорость неизвестна, рекомендуется использовать $v_{r0} = 0$ вместе с соответствующим большим значением $\sigma_{v_{r0}}$, в качестве которой, например, можно взять ожидаемую дисперсию скоростей рассматриваемого класса звёздного населения. Такой приём гарантирует положительность $[C_0]_{66}$ и означает, что неизвестное вековое ускорение учитывается за счёт неопределенности остальных астрометрических параметров.

Следует отметить, что строгое обращение преобразования от t к t_0 , согласно стандартной модели движения звезд, возможно только при использовании полного шестимерного вектора параметров и полной ковариационной матрицы.

1.4. Пример упрощённого преобразования эпохи

Чтобы проиллюстрировать общую технику преобразования ошибок с использованием якобиана, уместно рассмотреть классическое преобразование экваториальных координат (α, δ) на разницу эпох t :

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + t\mu_{\alpha 0}, \\ \delta &= \delta_0 + t\mu_{\delta 0} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Полезно отметить, что в этом уравнении собственное движение по прямому восхождению не содержит фактор $\cos \delta$. Строго говоря, это не очень хорошая физическая модель того, как звезды движутся по небесной сфере: в общем случае она описывает спиральное движение к одному из полюсов, тогда как реальные (невозмущенные) звезды движутся по дугам большого круга. Хотя разница

по отношению к строгой модели, изложенной в разделе 1.2, часто очень мала, она становится существенной на больших интервалах времени или для звезд вблизи небесных полюсов. Тем не менее, эти формулы вполне приемлемы при небольших разностях эпох. Так, например, они были успешно применены для сравнительного анализа позиционной точности различных астрометрических каталогов [21; 22].

В этой модели изменения в компонентах собственного движения и в параллаксе пренебрегаются, и якобиан для преобразования эпох тогда имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

Обратное преобразование получается обобщением знака времени: $t \rightarrow -t$. Несложно проверить, что полученная таким образом матрица действительно является обратной по отношению к (1.58).

Ковариационная матрица шести астрометрических параметров на эпоху t находится из (1.38); это, в частности, даёт дисперсии координат:

$$\sigma_\alpha^2 = [\sigma_\alpha^2 + 2t\rho_\alpha^{\mu_\alpha} \sigma_\alpha \sigma_{\mu_\alpha} + t^2 \sigma_{\mu_\alpha}^2]_0, \quad (1.59)$$

$$\sigma_\delta^2 = [\sigma_\delta^2 + 2t\rho_\delta^{\mu_\delta} \sigma_\delta \sigma_{\mu_\delta} + t^2 \sigma_{\mu_\delta}^2]_0. \quad (1.60)$$

Все величины в правых частях уравнений (1.59) и (1.60) относятся к начальной эпохе. Символом ρ_x^y здесь обозначена корреляция между астрометрическими параметрами x и y .

Наконец, рассмотрим предельный случай очень большой разности эпох. Полагая формально $t \rightarrow \infty$, получаем

$$\sigma_\alpha \rightarrow t\sigma_{\mu_\alpha}, \quad \sigma_\delta \rightarrow t\sigma_{\mu_\delta}, \quad (1.61)$$

тогда как $\sigma_{\overline{\omega}}$, σ_{μ_α} , σ_{μ_δ} , и σ_{μ_r} остаются прежними. Аналогично, можно найти предельные величины всех девяти коэффициентов корреляции:

$$\left. \begin{aligned} \rho_\alpha^\delta &\rightarrow \rho_{\mu_\alpha}^{\mu_\delta}, & \rho_\alpha^{\overline{\omega}} &\rightarrow \rho_{\overline{\omega}}^{\mu_\alpha}, & \rho_\alpha^{\mu_\alpha} &\rightarrow 1, & \rho_\alpha^{\mu_\delta} &\rightarrow \rho_{\mu_\alpha}^{\mu_\delta}, & \rho_\alpha^{\mu_r} &\rightarrow \rho_{\mu_\alpha}^{\mu_r}, \\ \rho_\delta^{\overline{\omega}} &\rightarrow \rho_{\overline{\omega}}^{\mu_\delta}, & \rho_\delta^{\mu_{\alpha^*}} &\rightarrow \rho_{\mu_{\alpha^*}}^{\mu_\delta}, & \rho_\delta^{\mu_\delta} &\rightarrow 1, & \rho_\delta^{\mu_r} &\rightarrow \rho_{\mu_\delta}^{\mu_r}. \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

Таким образом, вся информация о начальных корреляциях между координатами (α, δ) и остальными четырьмя астрометрическими параметрами становится менее значимой по мере увеличения разницы эпох и окончательно забывается в долгосрочной перспективе. Аналогичные соображения остаются в силе и для строгого преобразования эпох, однако их непосредственная демонстрация сопряжена со значительными математическими трудностями.

1.5. Применимость стандартной модели

В этом разделе кратко рассмотрены условия, при которых движение звезд можно считать равномерным. Равномерное движение подразумевает отсутствие ускорения. На практике, однако, ускоренное движение можно считать равномерным, если наблюдаемые эффекты, вызванные ускорением, пренебрежимо малы по сравнению с требуемой астрометрической точностью. Влияние постоянного ускорения \mathbf{a} на барицентрическое положение звезды в течение промежутка времени t равно $\Delta \mathbf{R} \simeq \mathbf{a}t^2/2$. Соответствующее изменение углового положения θ звезды равно $\Delta \theta \simeq a_\perp t^2/(2b)$, где a_\perp – тангенциальная составляющая ускорения. Движение можно считать равномерным, если $|\Delta \theta| \ll \sigma_\theta$, где σ_θ – требуемая позиционная точность. Для собственного движения мы аналогично имеем условие $|\Delta \mu| \ll \sigma_\mu$, где $\Delta \mu \simeq a_\perp t/R$. Первый (позиционный) критерий является более строгим, если t превышает $2\sigma_\theta/\sigma_\mu$.

Ускорение вдоль луча зрения, a_{\parallel} (считающееся положительным, когда направлено от БСС), вызывает изменение параллакса $\Delta\varpi \simeq -Aa_{\parallel}t^2/(2b^2)$ и радиальной скорости $\Delta v_r \simeq a_{\parallel}t$. Если a_{\perp} и a_{\parallel} – величины одного порядка, мы обнаруживаем, что $|\Delta\varpi|/|\Delta\theta| \simeq A/R \ll 1$, поэтому влияние ускорения на параллакс пренебрежимо мало по сравнению его влиянием на видимое положение звезды.

Мы не рассматриваем здесь ускорение, вызванное звездными или планетарными спутниками, которое влияет на конкретные объекты весьма специфическим образом и может быть весьма важным. Действительно, одна из целей гипотезы равномерной прямолинейности как раз и заключается в том, чтобы обеспечить обнаружение таких случаев. Вместо этого нам нужно рассмотреть ускорения, которые влияют на все или большинство звезд и которые, следовательно, могут потенциально сделать модель неприменимой в качестве основы для высокоточного астрометрического анализа. Наиболее важное такое ускорение вызвано крупномасштабным гравитационным полем Галактики, т. е. кривизной галактических звездных орбит.

В произвольной точке \mathbf{R} в Галактике (относительно БСС) вектор ускорения можно оценить как $\mathbf{a} = -\nabla\psi$, где ψ – некоторая подходящая модель галактического потенциала [37]. Следует напомнить, что равномерная прямолинейная модель относится к движению звезд относительно барицентра солнечной системы, а сам барицентр подвержен некоторому ускорению $\mathbf{a}(\mathbf{0})$. Наблюдаемые эффекты поэтому должны быть оценены для относительного ускорения $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{R}) - \mathbf{a}(\mathbf{0})$, а обсуждаемые выше величины a_{\parallel} и a_{\perp} являются, следовательно, компонентами $\Delta\mathbf{a}$ вдоль и перпендикулярно лучу зрения. Обе компоненты исчезают при $R \rightarrow 0$. Следует отметить, ускорение БСС вызывает некоторые наблюдаемые эффекты в собственных движениях всех объектов из-за медленно меняющейся вековой аберрации [33; 85; 101]. Исследования галактических движений должны в принципе проводиться в галактоцентрической системе отсчета, и преобразование из барицентрических величин должно учи-

тивать этот эффект, а также саму вековую aberrацию (для положений). Мы не будем здесь подробно касаться этих вопросов.

Однако, вместо использования (довольно неопределенной) глобальной потенциальной модели, более наглядно проанализировать дифференциальные эффекты, основанные на нескольких относительно хорошо определенных структурных галактических параметрах. Мы предполагаем осесимметричный потенциал в галактоцентрических цилиндрических координатах (\mathcal{R}, z) и отдельно рассматриваем компоненты ускорения в галактической плоскости (вдоль \mathcal{R}) и перпендикулярно ей (вдоль z).

1.5.1. Ускорение в галактической плоскости

В осесимметричном приближении ускорение в плоскости Галактики направлено к центру Галактики и имеет величину $a = V(\mathcal{R})/\mathcal{R}^2$, где $V(\mathcal{R})$ обозначает круговую скорость на галактоцентрическом расстоянии \mathcal{R} . Солнечная система расположена близко к плоскости Галактики на расстоянии $\mathcal{R}_0 \simeq 8.4$ кпк от центра Галактики, где круговая скорость составляет $V_0 \equiv V(\mathcal{R}_0) \simeq 254$ км/с [123]. Ускорение в месте расположения Солнца составляет, таким образом, $a_0 = V_0^2/\mathcal{R}_0 \simeq 2.5 \times 10^{-10}$ м/с².

Как угловое смещение звезды, так и изменение собственного движения пропорциональны отношению a_{\perp}/R , которое оказывается независимым от расстояния для достаточно малых R , то есть в солнечной окрестности. Интересно вывести соответствующие локальные приближения для компонент ускорения. Это можно сделать в полной аналогии с известным выводом формул Оорта для радиальной и тангенциальной скоростей круговых движений в терминах постоянных Оорта A и B [36]. Если $a(\mathcal{R})$ обозначает ускорение по направлению к

галактическому центру на радиусе \mathcal{R} , то находим

$$a_{\perp}/R = -E \sin 2l, \quad a_{\parallel}/R = F + E \cos 2l, \quad (1.63)$$

где

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\mathcal{R}_0} - \frac{da}{d\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{R}=\mathcal{R}_0} \right) \quad \text{и} \quad F = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\mathcal{R}_0} - \frac{da}{d\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{R}=\mathcal{R}_0} \right) \quad (1.64)$$

представляют собой константы аналогичные постоянным Оорта A и B . Используя соотношение $a(\mathcal{R}) = V(\mathcal{R})/\mathcal{R}^2$, можно выразить E и F через постоянные Оорта следующим образом

$$E = 2A(A - B), \quad F = (A + B)(A - B). \quad (1.65)$$

В уравнении (1.63) ускорение a_{\perp} считается положительным в направлении возрастания галактической долготы l . Так как кривая галактического вращения слабо зависит от расстояния ($A + B = 0$), имеем $F \simeq 0$ и $E \simeq \Omega_0^2$, где $\Omega_0 = V_0/\mathcal{R}_0 \simeq 9.8 \times 10^{-16} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость, отвечающая положению Солнца. Угловое смещение звезды за время t , вызванное галактическим вращением можно поэтому оценить как

$$\Delta\theta \simeq -\frac{1}{2} (\Omega_0 t)^2 \sin 2l \simeq (-1.0 \text{ мксд}) \times \left(\frac{t}{100 \text{ лет}} \right)^2 \times \sin 2l. \quad (1.66)$$

Отсюда видно, что на микросекундном уровне точности этим эффектом можно пренебречь на интервале времени до 100 лет. Аналогично, изменение лучевой скорости составляет

$$\Delta v_r \simeq \Omega_0^2 R \cos 2l \simeq (0.09 \text{ м/с}) \times \left(\frac{t}{100 \text{ лет}} \right) \times \left(\frac{R}{1 \text{ кпк}} \right) \times \cos 2l. \quad (1.67)$$

При выводе этой формулы мы опять использовали независимость кривой вращения от расстояния.

На больших расстояниях от Солнечной системы дифференциальное ускорение по порядку величины совпадает с солнечным ускорением $a_0 = \Omega_0^2 \mathcal{R}_0$.

Астрометрические эффекты пропорциональны $a_{\perp}/R \sim a_0/\mathcal{R}_0 = \Omega_0^2$, поэтому они имеют тот же порядок величины, что и вычисленные выше для окрестности Солнца.

1.5.2. Ускорение перпендикулярно галактической плоскости

В солнечной окрестности компонент ускорения, перпендикулярный плоскости Галактики, на расстоянии z от плоскости, приблизительно определяется как $a(z) = -2\pi G\Sigma(z)$, где $\Sigma(z) = \int_{-z}^z \rho(z') dz'$ – поверхностная плотность в пределах $\pm z$ плоскости Галактики. В пределах нескольких сотен парсек от Солнца мы можем предположить приблизительно постоянную плотность массы ρ_0 , что дает $a(z) \simeq -Kz$, где $K = 4\pi G\rho_0$ – квадрат угловой частоты колебаний в z . Ускорение относительно БСС описывается такой же формулой, если z интерпретировать как вертикальную координату звезды относительно Солнца, то есть $z = R \sin b$. Для компонент $a(z)$, перпендикулярных лучу зрения и вдоль него, мы легко находим

$$a_{\perp}/R = -\frac{1}{2}K \sin 2b, \quad a_{\parallel}/R = -\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K \cos 2b, \quad (1.68)$$

где ускорение a_{\perp} считается положительным в направлении возрастания галактической широты b . Используя $\rho_0 \simeq 0.1 M_{\odot} \text{ пк}^{-3}$ [77], имеем $K \simeq 5.7 \times 10^{-30} \text{ с}^{-2}$, получаем оценку углового смещения звезды на время t :

$$\Delta\theta \simeq -\frac{1}{4}Kt^2 \sin 2b \simeq (-2.9 \text{ мксд}) \times \left(\frac{t}{100 \text{ лет}}\right)^2 \times \sin 2b \quad (1.69)$$

и соответствующее изменение лучевой скорости

$$\Delta v_r \simeq -KtR \sin^2 b \simeq (-0.28 \text{ м/с}) \times \left(\frac{t}{100 \text{ лет}}\right) \times \left(\frac{R}{1 \text{ кпк}}\right) \times \sin^2 b. \quad (1.70)$$

Эти формулы пригодны для расстояний R не превышающих несколько сотен парсек; на больших расстояниях величины рассматриваемых эффектов могут быть значительно меньше.

Таким образом, эффекты, вызванные ускорением, перпендикулярным плоскости Галактики, более значительны, чем эффекты, вызванные ускорением в плоскости Галактики. С физической точки зрения, это обусловлено более коротким периодом колебаний в направлении z , $2\pi K^{-1/2} \simeq 84 \cdot 10^6$ лет, по сравнению с круговым периодом $2\pi/\Omega_0 \simeq 200 \cdot 10^6$ лет. Однако общий вывод заключается в том, что на микросекундном уровне точности эффекты галактического ускорения пренебрежимо малы в течение периодов времени не менее 50 лет.

1.6. Выводы к первой главе

Представлена стандартная астрометрическая модель, базирующаяся на положении о равномерном прямолинейном движении одиночных звёзд относительно барицентра Солнечной системы. Хотя этот термин и не является общеупотребительным, его использование представляется правомерным ввиду формальной простоты этой модели и того обстоятельства, что в настоящее время она лежит в основе как обработки, так и использования высокоточных астрометрических данных. Существенной чертой этой модели является включение информации о радиальном движении звезды. С этой целью вводится радиальное собственное движение μ_r , представляющее собой лучевую скорость, делённую на расстояние. Эта величина имеет тот же порядок, что и обычные компоненты собственного движения и её удобно измерять в соответствующих единицах, например, в мсд/год.

Помимо собственно формулировки модели, установлены пределы её приме-

нимости: на микросекундном уровне точности влиянием галактического ускорения на барицентрическое движение звёзд можно пренебречь в течение по крайней мере пятидесяти лет.

В рамках стандартной астрометрической модели кинематическое состояние звезды описывается вектором из шести астрометрических параметров (α , δ , ϖ , μ_{α^*} , μ_{δ} , μ_r). Разработана математически строгая и полностью обратимая процедура перехода от одной эпохи к другой для полного вектора шести астрометрических параметров и соответствующих ковариаций. Эта процедура включена в официальную документацию по проекту Gaia и опубликована на сайте Европейского космического агентства [153].

Глава 2

Влияние нестабильности базового угла на систематические ошибки параллаксов для сканирующего астрометрического спутника

Космическая астрометрическая миссия Европейского космического агентства Gaia, направленная на определение астрометрических параметров по меньшей мере одного миллиарда звезд с точностью до десяти микросекунд дуги [58], была запущена в декабре 2013 года [70]. Gaia основана на тех же принципах наблюдения, что и весьма успешная пионерская астрометрическая миссия Hipparcos [139]. В частности, оба спутника используют оптическую систему, обеспечивающую два направления обзора, разделенные широким углом, который именуется базовым углом [115]. Цель этой главы – показать, как определенные зависящие от времени изменения базового угла могут смещать нуль-пункт параллаксов в астрометрическом решении, полученном из наблюдений с борта сканирующего спутника, использующего такую конструкцию.

Обработка данных для астрометрического спутника должна, насколько это возможно, основываться на принципе самокалибровки [93]. Это означает, что одни и те же данные наблюдений используются для определения как интересных с научной точки зрения астрометрических параметров, так и вспомогательных величин, которые описывают калибровку инструмента, ориентацию спутника и другие компоненты модели наблюдения [58]. Однако самокалибровка имеет ограниченную применимость, когда изменения различных параметров не производят полностью независимых эффектов в наблюдаемых. Такого рода ситуации могут возникать, когда изменение определенных параметров приводит к изменениям в наблюдаемых, которые напоминают изменения, вызван-

ные изменением некоторых других параметров. Чем более схожи изменения в наблюдаемых, тем сильнее корреляция между параметрами. Если изменения идентичны, проблема оценки параметров вырождена, что означает, что один и тот же набор наблюдаемых одинаково хорошо описывается различными наборами значений параметров.

Пока вырождение затрагивает только инструментальные параметры, оно не влияет на астрометрическое решение и приводит только к произвольному, но несущественному сдвигу соответствующих инструментальных параметров. Однако, если есть вырождение между астрометрическими и инструментальными параметрами, процесс самокалибровки, в общем, приводит к смещенной астрометрии. Небесная система отсчёта является примером полного вырождения между астрометрическими и параметрами ориентации, которое может быть снято только с помощью внешних данных, в данном случае положений и собственных движений ряда внегалактических объектов [87; 99]. Что касается параметров калибровки инструмента, можно сформулировать модель калибровки таким образом, чтобы избежать (почти)вырождений среди ее параметров, а также между параметрами калибровки и ориентации.

В реальности, однако, возможна ситуация, когда существует высокая степень корреляции между некоторыми инструментальными эффектами и астрометрическими параметрами. По определению, такие эффекты нельзя обнаружить в ходе астрометрического решения, например, из анализа невязок; их наличие можно установить только путём сопоставления с внешними данными, такими как астрофизическая информация или независимая метрология. В проекте Gaia выбран последний вариант, как подробно описано в разделе 2.3.1.

Базовый угол является важным примером величины, которая может изменяться таким образом, что не может быть полностью откалибрована из наблюдений. Уже в первые годы проекта Hipparcos было осознано, что определенные периодические вариации базового угла, вызванные неравномерным нагревом спутника солнечным излучением, приводят к глобальному смещению параллак-

сов [92]. Последующие анализы [31; 143] пришли к выводу, что возможное влияние на параллаксы Hipparcos было незначительным, что предполагает очень хорошую краткосрочную стабильность базового угла в этом спутнике.

Для Gaia ситуация иная. Гораздо более высокая точность, на которую нацелена эта миссия, требует очень тщательного рассмотрения возможных смещений, вносимых некалиброванными инструментальными эффектами, включая вариации базового угла. Это ещё более очевидно ввиду очень значительной амплитуды ~ 1 мсд, вариаций базового угла, измеренных бортовой метрологической системой Gaia [70; 96]. В этом контексте почти вырожденность между нуль-пунктом параллаксов и возможным изменением базового угла, вызванным солнечным излучением, особенно актуальна. Теоретический анализ проблемы, представленный здесь, расширяет и проясняет более ранние аналитические результаты [88; 92] и [142; 143].

Ситуация усугубилась тем, что в литературе были опубликованы две различные формулы для сдвига параллаксов, вызываемого колебаниями базового угла с амплитудой a . В работе [88] была приведена формула

$$\delta\varpi = \frac{1}{\sin(\Gamma/2)} \frac{a}{2(b/A) \sin \xi}, \quad (2.1)$$

тогда как формула, полученная в статье [143], имела вид

$$\delta\varpi = \frac{\sin(\Gamma/2)}{(1 + \cos(\Gamma/2))^2} \frac{a}{2(b/A) \sin \xi}. \quad (2.2)$$

Здесь b – средний радиус орбиты Gaia, Γ – базовый угол, ξ – угол между осью вращения космического аппарата и направлением на Солнце. Первая формула даёт $\delta\varpi = 0.87a$, тогда как вторая приводит к результату $\delta\varpi = 0.40a$. Целью выполненного исследования было устранить возникшее противоречие и прояснить прочие вопросы, связанные с указанной проблемой.

2.1. Основные уравнения

В этом разделе рассматривается, как малые возмущения различных параметров изменяют наблюдаемые величины. Сначала демонстрируется, что в первом порядке по малым углам произвольные изменения наблюдаемых эквивалентны определенным изменениям базового угла и ориентации (разделы с 2.1.1 по 2.1.4). Затем находятся изменения наблюдаемых величин из-за общего сдвига всех параллаксов (раздел 2.1.6). Объединяя эти результаты, в разделах 2.1.7 и 2.1.8 выводятся такие изменения базового угла и ориентации, наблюдательные проявления которых неотличимы от эффекта глобального сдвига параллаксов.

2.1.1. Система отсчёта

Для изучения связи между параметрами инструмента и параллаксом удобно использовать вращающуюся систему отсчёта, совмещённую с полями зрения. Эта система, известная как сканирующая система отсчёта (ССО) [99], изображена на рисунке 2.1. Она определяется осями инструмента \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} ; при этом ось \mathbf{z} направлена вдоль оси вращения космического аппарата, ось \mathbf{x} лежит на биссектрисе угла между линиями визирования бортовых телескопов, разделёнными базовым углом Γ , а ось $\mathbf{y} = \mathbf{z} \times \mathbf{x}$ замыкает правую тройку векторов.

Для обеспечения покрытия всей небесной сферы ось вращения медленно прецессирует с периодом 63 дня вокруг направления на Солнце, определяемого углами Ω и ξ , первый из которых задаёт азимут Солнца в ССО (строго говоря, азимутом является не сам угол Ω , а разность $360^\circ - \Omega$). Угол Ω линейно растёт со временем. В проекте Gaia период вращения составляет шесть часов, поэто-

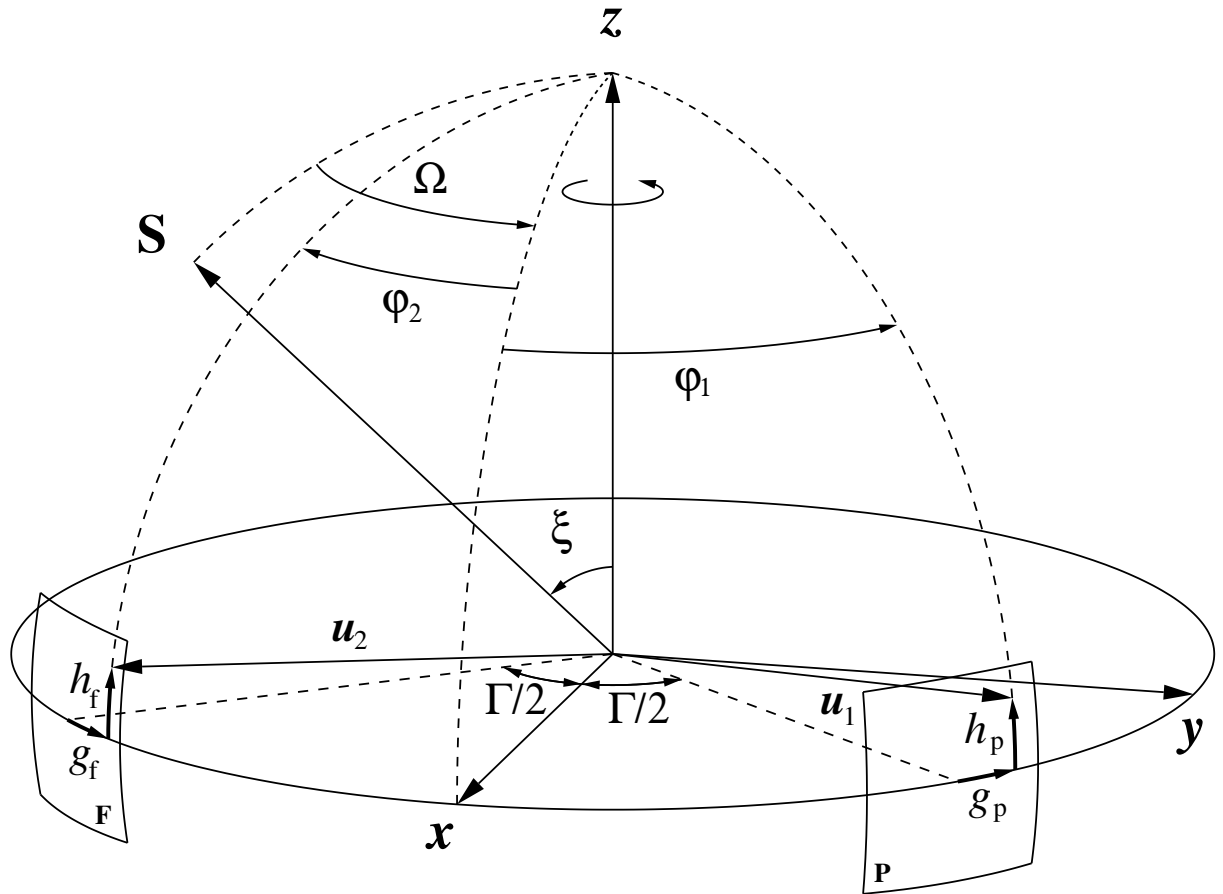


Рис. 2.1. – Сканирующая система координат (ССО), оси x , y и z которой жестко связаны с космическим аппаратом. Углы ξ и Ω определяют мгновенное направление на Солнце S . Базовый угол Γ равен угловому расстоянию между центрами полей зрения бортовых телескопов. Предыдущее и последующее поля зрения обозначены символами P и F соответственно. Размеры полей зрения значительно увеличены в иллюстративных целях. Углы g и h задают наблюдаемое направление на объект u в каждом из полей зрения. Инструментальный угол φ отсчитывается от оси x в направлении вращения аппарата.

му скорость изменения угла $\dot{\Omega} = (1/60)^\circ \text{c}^{-1}$. Угол ξ определяет наклонение оси вращения космического аппарата к направлению на центр солнечного диска. Этот угол поддерживается постоянным с целью обеспечения равномерного нагрева телескопа солнечным излучением.

Направление на объект задаётся единичным вектором

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cos \varphi \cos h + \mathbf{y} \sin \varphi \cos h + \mathbf{z} \sin h, \quad (2.3)$$

с инструментальными углами φ и h , описывающими положение объекта относи-

тельно ССО. Для наглядности на рисунке 2.1 изображены две звезды: звезда с номером 1 в предыдущем поле зрения и звезда с номером 2 в последующем поле зрения вместе с соответствующими единичными векторами \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 , задающими направления на эти звёзды. Также приведены так называемые полевые координаты g_p , h_p и g_f , h_f , которые определяют положения звёзд внутри полей зрения. Здесь и ниже значения величин для предыдущего (preceeding) и последующего (following) поля зрения обозначаются индексами p и f соответственно.

Рассмотрим подробнее, как угловые координаты звезды изменяются в процессе сканирования. Скорость прецессии оси вращения в $63 \times 24/6 = 252$ раза меньше угловой скорости вращения космического аппарата, поэтому можно отвлечься от незначительных эффектов, связанных с прецессией. В ходе сканирования каждая звезда сначала проходит через предыдущее, а затем – через последующее поля зрения. Обозначим продольный и поперечный размеры полей зрения через Φ_{AL} и Φ_{AC} . Во избежание загромождения рисунка 2.1 эти величины не приведены на иллюстрации системы координат. В космическом телескопе Gaia $\Phi_{AL} = 0.72^\circ$ и $\Phi_{AC} = 0.69^\circ$. Нетрудно видеть, что когда конкретная звезда проходит через поле зрения, её координата h остаётся постоянной и заключена в пределах от $-\Phi_{AC}/2$ до $+\Phi_{AC}/2$. Угол же φ непрерывно уменьшается в ходе сканирования. Когда звезда вступает в предыдущее поле зрения, её координата φ равна $\Gamma/2 + \Phi_{AL}/2$, когда звезда проходит через это поле зрения, угол уменьшается с постоянной скоростью, и, когда звезда покидает поле зрения, $\varphi = \Gamma/2 - \Phi_{AL}/2$. Аналогично, когда звезда проходит через последующее поле зрения, угол φ с постоянной скоростью изменяется от $-\Gamma/2 + \Phi_{AL}/2$ до $-\Gamma/2 - \Phi_{AL}/2$. Очевидно, что скорость изменения угла φ равна угловой скорости вращения, взятой с обратным знаком. Учитывая малые размеры полей зрения, можно заключить, что в предыдущем поле зрения $\varphi \approx \Gamma/2$, а в последующем поле зрения $\varphi \approx -\Gamma/2$, то есть, инструментальный угол φ всегда положителен в предыдущем поле зрения, тогда как в последующем поле зрения он всегда отрицателен.

2.1.2. Полевые координаты

Наблюдение объекта состоит в измерении координат его изображения в фокальной плоскости в определенное время. На практике измерение выражается в координатах детектора, таких как пиксели, но здесь мы рассматривали идеализированную систему, обеспечивающую прямое измерение двух координат g и h в соответствующем поле зрения, именуемых в дальнейшем полевыми координатами. В то время как поперечная координата h совпадает с соответствующим инструментальным углом, продольная координата g отсчитывается от центра соответствующего поля зрения в направлении вращения спутника. Проецируемый на небо центр поля зрения определяет два направления наблюдения, разделенные базовым углом Γ . Таким образом,

$$\left. \begin{array}{l} g_p = \varphi - \Gamma/2 \quad \text{в предыдущем поле зрения} \\ g_f = \varphi + \Gamma/2 \quad \text{в последующем поле зрения} \end{array} \right\}, \quad (2.4)$$

Мы предположили, что инструмент идеален, за исключением базового угла Γ , который может отклоняться от своего номинального (условного) значения Γ_c :

$$\Gamma(t) = \Gamma_c + \delta\Gamma(t). \quad (2.5)$$

Важно отметить, что определённая таким образом продольная координата g отличается от продольной координаты η , обычно используемой в контексте обработки данных Gaia [99]. В то время как η измеряется от фиксированного, условного начала координат в $\varphi = \pm\Gamma_c/2$, наша g измеряется от фактического, переменного центра поля в $\varphi = \pm\Gamma(t)/2$. Это различие мотивирует изменение обозначения с η на g . Для согласованности соответствующее изменение было сделано и для поперечного направления, хотя наша h такая же, как поперечная координата ζ , используемая при обработке данных Gaia.

2.1.3. Вариации полевых координат вследствие изменений базового угла

Любое увеличение или уменьшение базового угла заставляет поля зрения отдаляться друг от друга или приближаться друг к другу. Это, в свою очередь, изменяет наблюдаемую полевую координату g для данного звездного изображения. Однако, поскольку ориентация космического аппарата, определяемая положением осей ССО относительно небесной системы координат, неизменна, значение φ для данной звезды не зависит от базового угла. Например, в предыдущем поле зрения увеличение базового угла приводит к смещению наблюдаемого изображения относительно центра поля зрения, так что наблюдаемая продольная полевая координата g_p уменьшается. Противоположный эффект имеет место в следующем поле зрения. Поперечные полевые координаты h_p и h_f при этом, очевидно, не изменяются. Изменения полевых координат, вызванные изменением базового угла $\delta\Gamma$, таким образом, определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \delta g_p &= -\frac{1}{2} \delta\Gamma \\ \delta g_f &= +\frac{1}{2} \delta\Gamma \\ \delta h_p &= 0 \\ \delta h_f &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.6)$$

Это согласуется с уравнением (2.4), принимая во внимание, что $\delta\varphi = 0$.

2.1.4. Вариации полевых координат вследствие изменений ориентации космического аппарата

В процедуре редукции наблюдательных данных, используемой в проекте Gaia, ориентация космического аппарата параметризуется посредством кватернионов [99]. Для наших целей удобнее описывать небольшие изменения ориентации с помощью трех малых углов δ_x , δ_y и δ_z , представляющих вращения вокруг соответствующих осей ССО. Поскольку направление на звезду, определяемое единичным вектором \mathbf{u} , здесь рассматривается как фиксированное, соответствующие изменения в компонентах вектора \mathbf{u} можно вычислить путём умножения матрицы бесконечно малого вращения на вектор \mathbf{u} [17, раздел 14.10-7]

$$\begin{pmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_z & -\delta_y \\ -\delta_z & 0 & \delta_x \\ \delta_y & -\delta_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Используя компоненты вектора \mathbf{u} из формулы (2.3), получаем

$$\left. \begin{aligned} \delta u_x &= \delta_z \sin \varphi \cos h - \delta_y \sin h \\ \delta u_y &= \delta_x \sin h - \delta_z \cos \varphi \cos h \\ \delta u_z &= (\delta_y \cos \varphi - \delta_x \sin \varphi) \cos h \end{aligned} \right\}. \quad (2.8)$$

С другой стороны, изменение компонентов вектора \mathbf{u} может быть описано как изменение инструментальных углов φ и h . Непосредственное дифференцирование выражения (2.3) даёт

$$\left. \begin{aligned} \delta u_x &= -\sin \varphi \cos h \delta \varphi - \cos \varphi \sin h \delta h \\ \delta u_y &= \cos \varphi \cos h \delta \varphi - \sin \varphi \sin h \delta h \\ \delta u_z &= \cos h \delta h \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

Покомпонентное приравнивание соотношений (2.8) и (2.9) позволяет найти связь между углами малых вращений и вариациями инструментальных углов.

Формулы (2.8) и (2.9) носят общий характер и верны для произвольной точки внутри любого поля зрения. Однако, для дальнейшего изложения достаточно рассмотреть центры полей зрения. Полагая $h = 0$, находим

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= \delta_z \\ \delta h &= \delta_y \cos \varphi - \delta_x \sin \varphi \end{aligned} \right\}. \quad (2.10)$$

Нашей целью является определение изменений полевых координат. Как сказано в разделе 2.1.2, поперечная координата h совпадает с соответствующим инструментальным углом, в то время как уравнения (2.4) показывают, что $\delta\varphi = \delta g$ в обоих полях зрения. Принимая во внимание это обстоятельство, а также, учитывая, что в центрах полей зрения $\varphi = \pm\Gamma_c/2$, причём верхний знак относится к предыдущему полю зрения, а нижний – к последующему, окончательно находим, что искомые вариации наблюдаемых полевых координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta g_p &= -\delta_z \\ \delta g_f &= -\delta_z \\ \delta h_p &= \cos(\Gamma_c/2) \delta_y - \sin(\Gamma_c/2) \delta_x \\ \delta h_f &= \cos(\Gamma_c/2) \delta_y + \sin(\Gamma_c/2) \delta_x \end{aligned} \right\}. \quad (2.11)$$

Следует отметить, что эти соотношения по сути выведены для точечных полей зрения. Такое приближение вполне допустимо вследствие малого размера полей зрения. Эффекты, связанные с конечными размерами полей зрения, обсуждаются в разделе 2.3.4.

2.1.5. Совместные изменения базового угла и ориентации

Объединяя уравнения (2.6) и (2.11), мы видим, что одновременное изменение базового угла на $\delta\Gamma$ и ориентации на δ_x , δ_y , δ_z даёт следующее общее

изменение полевых координат:

$$\left. \begin{aligned} \delta g_p &= -\frac{1}{2} \delta \Gamma - \delta_z \\ \delta g_f &= +\frac{1}{2} \delta \Gamma - \delta_z \\ \delta h_p &= \cos(\Gamma_c/2) \delta_y - \sin(\Gamma_c/2) \delta_x \\ \delta h_f &= \cos(\Gamma_c/2) \delta_y + \sin(\Gamma_c/2) \delta_x \end{aligned} \right\} . \quad (2.12)$$

Точное обращение этой системы уравнений даёт

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \frac{1}{2 \sin(\Gamma_c/2)} (\delta h_f - \delta h_p) \\ \delta_y &= \frac{1}{2 \cos(\Gamma_c/2)} (\delta h_p + \delta h_f) \\ \delta_z &= -\frac{1}{2} (\delta g_p + \delta g_f) \\ \delta \Gamma &= \delta g_f - \delta g_p \end{aligned} \right\} . \quad (2.13)$$

Первые два уравнения в (2.13) показывают, что произвольные малые изменения в поперечных координатах δh_p и δh_f до первого порядка могут быть представлены как изменения в ориентации на δ_x и δ_y . Аналогично, последние два уравнения показывают, что произвольные изменения в продольных координатах δg_p и δg_f могут быть представлены как комбинация изменения базового угла $\delta \Gamma$ и изменения ориентации на δ_z .

В общем случае произвольное возмущение наблюдаемых положений звезд, будучи гладкой функцией времени и положения звезд, явно приводит к плавному, зависящему от времени изменению δg_p , δg_f , δh_p и δh_f . Из уравнения (2.13) следует, что этот вид возмущения наблюдаемо неотличим от определенного зависящего от времени изменения δ_x , δ_y , δ_z и $\delta \Gamma$.

2.1.6. Вариации полевых координат вследствие изменений параллакса

Положение барицентра солнечной системы относительно инструмента задётся расстоянием b и двумя угловыми координатами. Мы взяли угловые координаты ξ и Ω , определенные на рисунке 2.1. Согласно закону сканирования, угол ξ почти постоянен, а Ω увеличивается линейно со временем по мере вращения спутника. Барицентрическое положение спутника равно

$$\mathbf{b} = b(-\mathbf{x} \cos \Omega \sin \xi + \mathbf{y} \sin \Omega \sin \xi - \mathbf{z} \cos \xi) . \quad (2.14)$$

Изменение направления, вызванное небольшой вариацией параллакса $\delta\varpi$, описывается уравнением (1.27). Выпишем его ещё раз:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u} \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{b}/A)] \delta\varpi . \quad (2.15)$$

Теперь предположим, что направление на звезду меняется только из-за изменения ее параллакса, тогда как базовый угол и ориентация остаются постоянными. Фиксированный мерный угол подразумевает $\delta\varphi = \delta g$. Фиксированное положение означает, что \mathbf{x} , \mathbf{y} и \mathbf{z} постоянны, так что уравнение (2.3) даёт изменение направления

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{v} \cos h \delta g + \mathbf{w} \delta h , \quad (2.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= -\mathbf{x} \sin \varphi + \mathbf{y} \cos \varphi \\ \mathbf{w} &= -\mathbf{x} \cos \varphi \sin h - \mathbf{y} \sin \varphi \sin h + \mathbf{z} \cos h \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

являются единичными векторами в направлениях увеличения φ и h соответственно. Они, очевидно, ортогональны друг другу и \mathbf{u} . Приравнявая $\delta\mathbf{u}$ из (2.15) и (2.16), и взяв скалярное произведение с \mathbf{v} и \mathbf{w} , получаем

$$\left. \begin{aligned} \cos h \delta g &= -\mathbf{v}'(\mathbf{b}/A) \delta\varpi \\ \delta h &= -\mathbf{w}'(\mathbf{b}/A) \delta\varpi \end{aligned} \right\} . \quad (2.18)$$

Подставляя сюда уравнения (2.14) и (2.17), находим

$$\left. \begin{aligned} \cos h \delta g &= -\sin(\Omega + \varphi) \sin \xi (b/A) \delta \varpi \\ \delta h &= [\cos h \cos \xi - \cos(\Omega + \varphi) \sin h \sin \xi] (b/A) \delta \varpi \end{aligned} \right\}. \quad (2.19)$$

До этого момента выведенные формулы справедливы во всём поле зрения с точностью до величин первого порядка малости. Чтобы продолжить, мы теперь рассмотрим звезду, наблюдаемую в центре любого поля зрения, так что $g = h = 0$ и $\varphi = \pm \Gamma_c/2$. В этом случае вариации полевых координат, вызванные $\delta \varpi$, становятся

$$\left. \begin{aligned} \delta g_p &= -\sin(\Omega + \Gamma_c/2) \sin \xi (b/A) \delta \varpi \\ \delta g_f &= -\sin(\Omega - \Gamma_c/2) \sin \xi (b/A) \delta \varpi \\ \delta h_p &= \cos \xi (b/A) \delta \varpi \\ \delta h_f &= \cos \xi (b/A) \delta \varpi. \end{aligned} \right\}. \quad (2.20)$$

Рассмотрение только звезд в центре любого поля зрения фактически означает, что мы пренебрегли конечным размером поля зрения. Как в Hipparcos, так и в Gaia половинный размер поля зрения составляет $\Phi < 10^{-2}$ рад. Поскольку $|g|, |h| < \Phi$, пренебрегаемые члены в уравнении (2.20) имеют порядок $\Phi \times \delta$, где δ представляет любую из величин $\delta \Gamma$, δ_x и т. д. Поэтому ожидается, что уравнение (2.20) будет иметь точность $< 1\%$ в любой точке поля зрения. Последствия этого приближения более подробно обсуждаются в разделе 2.3.4.

2.1.7. Соотношения между изменениями параллакса, базового угла и ориентации

Подставляя уравнение (2.20) в уравнение (2.13), мы легко получаем соотношение между изменением параллакса и соответствующими изменениями

базового угла и ориентации:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= 0 \\ \delta_y &= \cos \xi \sec(\Gamma_c/2) (b/A) \delta\varpi \\ \delta_z &= \sin \Omega \sin \xi \cos(\Gamma_c/2) (b/A) \delta\varpi \\ \delta\Gamma &= 2 \cos \Omega \sin \xi \sin(\Gamma_c/2) (b/A) \delta\varpi \end{aligned} \right\}. \quad (2.21)$$

Эти уравнения следует интерпретировать следующим образом: изменение параллакса на $\delta\varpi$ неотличимо с точки зрения наблюдений (в порядке $\Phi \times \delta$) от одновременного изменения ориентации на δ_x , δ_y , δ_z и базового угла на $\delta\Gamma$. Формулы были выведены для одной звезды, но если $\delta\varpi$ одинакова для всех звезд, они справедливы для всех наблюдений всех звезд. Таким образом, уравнение (2.21) определяет конкретные вариации ориентации и базового угла, которые имитируют глобальное смещение параллакса. Примечательно, что вращение вокруг оси \boldsymbol{x} не зависит от глобального изменения параллакса, тогда как вращение вокруг оси \boldsymbol{y} не зависит от Ω и, следовательно, на практике почти постоянно.

В глобальном астрометрическом решении астрометрические параметры и параметры ориентации определяются совместно из измерений g и h . Вариации базового угла вида $\delta\Gamma(t) \propto b \cos \Omega \sin \xi$ приводят к глобальному сдвигу параллаксов и к некоторым зависящим от времени ошибкам в углах ориентации δ_y , δ_z . Нахождение амплитуды таких вариаций с помощью астрометрического решения оказывается невозможным, поскольку их эффекты полностью поглощаются параметрами ориентации и параллаксами. Включение амплитуды в решение привело бы к вырождению задачи в том смысле, что одни и те же наблюдения описывались бы различными комбинациями определяемых параметров.

Для спутника на орбите вокруг Земли, такого как Hipparcos, или вблизи точки L_2 , такого как Gaia, барицентрическое расстояние b практически постоянно. Для достижения стабильного теплового режима инструмента для сканирующего астрометрического спутника обычно выбирают закон сканирования с постоянным углом между направлением на Солнце и осью вращения, так

называемым солнечным углом обзора. Это означает, что угол ξ также почти постоянен (см. раздел 2.3.5). В разделе 2.1.8 рассматривается случай, когда b и ξ точно постоянны. Тем не менее, в действительности и b , и ξ несколько зависят от времени, и этот случай обсуждается в разделе 2.3.3.

Поскольку ξ и b почти постоянны, вызывающее сдвиг параллаксов изменение базового угла по существу имеет форму $\cos \Omega$, т.е. является периодической функцией времени с периодом, равным периоду вращения космического аппарата вокруг своей оси. Это приводит к фундаментальному требованию к конструкции сканирующего астрометрического спутника, а именно, что базовый угол не должен иметь значительных периодических изменений с периодом, близким к периоду вращения спутника, и, что особенно важно, в базовом угле должны отсутствовать колебания вида $\cos \Omega$.

Полученные в разделах 2.1.3–2.1.7 формулы были выведены для бесконечно малых вариаций. Возникает естественный вопрос о правомерности такого приближения. Поскольку связь между параметрами осуществляется через наблюдения, и наблюдения отдельных звёзд независимы, имеет смысл рассмотреть изменение параметров за время экспозиции. Это изменение должно быть пренебрежимо мало по сравнению с ошибками измерения полевых координат для того, чтобы вариации можно было считать бесконечно малыми. Звезда пересекает поле зрения за время $\Phi_{AL}/\dot{\Omega} = 43$ с. Поскольку все вариации являются величинами одного порядка малости, достаточно рассмотреть $\delta\Gamma$. Данные бортовой метрологии Gaia показывают, что базовый угол подвержен колебаниям с характерной амплитудой около 1 мсд и периодом 6 часов [70; 96]. Изменение базового угла за время экспозиции составляет около 2 мксд. Наилучшая точность определения полевых координат в одной экспозиции находится на уровне $\sigma = 100$ мксд [98], поэтому мы видим, что за время экспозиции параметры изменяются на величину порядка 0.02σ . Это обстоятельство позволяет заключить, что применяемое приближение вполне пригодно для рассматриваемого случая.

2.1.8. Гармоническое представление вариаций

Из уравнения (2.21) видно, что глобальный сдвиг параллакса соответствует вариациям $\delta\Gamma$ и δ_z , пропорциональным $\cos \Omega$ и $\sin \Omega$ соответственно, тогда как δ_y и δ_x постоянны. Эти величины соответствуют членам порядка $k = 0$ и 1 в общих гармонических рядах:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \sum_{k \geq 0} a_k^{(x)} \cos k\Omega + b_k^{(x)} \sin k\Omega \\ \delta_y &= \sum_{k \geq 0} a_k^{(y)} \cos k\Omega + b_k^{(y)} \sin k\Omega \\ \delta_z &= \sum_{k \geq 0} a_k^{(z)} \cos k\Omega + b_k^{(z)} \sin k\Omega \\ \delta\Gamma &= \sum_{k \geq 0} a_k^{(\Gamma)} \cos k\Omega + b_k^{(\Gamma)} \sin k\Omega \end{aligned} \right\}. \quad (2.22)$$

В частности, если $a_k^{(\Gamma)} = b_k^{(\Gamma)} = 0$, за исключением $a_1^{(\Gamma)} \neq 0$, мы находим следующие соотношения между амплитудой изменения базового угла, глобальным сдвигом параллаксов и ненулевыми гармониками ошибок ориентации:

$$\delta\varpi = \frac{1}{2(b/A) \sin \xi \sin(\Gamma_c/2)} a_1^{(\Gamma)} = 0.8738 a_1^{(\Gamma)}, \quad (2.23)$$

$$a_0^{(y)} = \frac{1}{\tan \xi \sin \Gamma_c} a_1^{(\Gamma)} = 1.0429 a_1^{(\Gamma)}, \quad (2.24)$$

$$b_1^{(z)} = \frac{1}{2 \tan(\Gamma_c/2)} a_1^{(\Gamma)} = 0.3734 a_1^{(\Gamma)}. \quad (2.25)$$

Числовые значения соответствуют средним параметрам, относящимся к Gaia, то есть $\Gamma_c = 106.5^\circ$, $\xi = 45^\circ$ и $b = 1.01A$.

Целью данной статьи не является исследование возможных эффектов других гармоник вариации базового угла. Однако можно отметить, что $a_1^{(\Gamma)}$ является единственным гармоническим параметром, который вырожден с ориентацией и звездными параметрами. Это означает, что $a_0^{(\Gamma)}$, $b_1^{(\Gamma)}$ и $a_k^{(\Gamma)}$, $b_k^{(\Gamma)}$ для $k > 1$ могут быть определены как параметры в калибровочной модели.

Выражение (2.23) даёт ответ на вопрос, какая из двух формул, упомянутых в начале этой главы, правильным образом описывает сдвиг параллаксов. Мы видим, что уравнение (2.1) является правильным, тогда как соотношение (2.2) занижает величину нуля-пункта параллаксов на 54%. Примечательно, что формулы (2.1) и (2.2) были выведены способом, отличным от использованного в настоящей работе. Так, в работах [88] и [143] применялась сферическая тригонометрия, в то время как приведённый выше вывод основан на рассмотрении соотношений между малыми вариациями соответствующих величин. Можно сказать, что в нашем случае выражение (2.23) получено методом флуктуаций.

Коэффициент пропорциональности между амплитудой колебаний базового угла и сдвигом параллаксов зависит от трёх величин: барицентрического расстояния b , наклона оси вращения космического аппарата к направлению на Солнце ξ и номинальной величины базового угла Γ_c . Первые два параметра незначительно меняются со временем. Эффект таких изменений обсуждается в разделе 2.3.3. Интересно отметить, что сдвиг параллаксов растёт с уменьшением Γ_c . Причина такого поведения рассматривается в разделе 2.3.2.

2.2. Результаты численных экспериментов

В этом разделе мы представляем результаты численных тестов, проведенных для проверки приведенных выше выводов. Для изучения различных аспектов проблемы использовались два взаимодополняющих подхода: прямое решение, где обращение нормальной матрицы даёт корреляционную матрицу, содержащую полную информацию о корреляциях между определяемыми величинами; и блочно-итеративное решение, в котором последовательно определяются поправки к различным группам неизвестных, аналогично методу, использу-

тому при обработке данных Gaia [99]. Хотя прямое решение может обрабатывать только относительно небольшое количество звёзд и, следовательно, имеет ограниченное практическое применение, оно позволяет нам исследовать важные математические свойства проблемы и изучать корреляции между всеми параметрами. Напротив, итеративное решение не может предоставить такого рода информацию, но является более реалистичным с точки зрения количества звезд и успешно применялось при обработке реальных данных Gaia.

2.2.1. Прямое решение

Для прямых решений было разработано специальное программное обеспечение для моделирования. Оно моделирует наблюдения небольшого числа звезд и реконструкцию их астрометрических параметров на основе обычного метода наименьших квадратов. Нормальные уравнения для неизвестных параметров накапливаются, а нормальная матрица инвертируется с использованием сингулярного разложения [71]. Это разложение позволило нам изучить математические свойства задачи, особенно детали ее вырожденности. Моделирование включало 10^4 звезд, равномерно распределенных по небесной сфере. Наблюдения были получены с гармоническим возмущением базового угла, как в уравнении (2.22d) с $a_1^{(\Gamma)} = 1$ мсд. Для изучения эффектов вариаций базового угла в чистом виде к наблюдениям не добавлялся шум. Решения всегда включают пять астрометрических параметров на звезду: два компонента положения, параллакс и два компонента собственного движения. Дополнительные параметры, отражающие изменения положения и базового угла, были введены в соответствии с требованиями различных типов решений.

Первый тест состоял в проверке уравнений (2.23)-(2.25). С этой целью бы-

ло сделано решение, включающее только астрометрические параметры (А) и параметры ориентации (О). Часть решения, касающаяся ориентации, состояла из девяти параметров: гармонических амплитуд δ_x , δ_y и δ_z , как указано в первых трех уравнениях (2.22) для $k \leq 1$. Результаты этого решения, суммированные в Таблице 2.1, находятся в очень хорошем согласии с теоретическими предсказаниями. Небольшие отклонения от теоретических значений связаны с такими факторами, как ограниченное число звезд, конечные размеры поля зрения и ошибки округления.

Таблица 2.1. Глобальный сдвиг параллаксов и амплитуды нулевой и первой гармоник трёх компонентов ориентации, полученные в ходе прямого решения при наличии гармонических колебаний базового угла с амплитудой $a_1^{(\Gamma)} = 1$ мсд.

Величина	Теория, мсд	Численный эксперимент, мсд
$\delta\varpi$	0.8738	0.8735
$a_0^{(x)}$	0	$4 \cdot 10^{-6}$
$a_1^{(x)}$	0	$9 \cdot 10^{-6}$
$b_1^{(x)}$	0	$2 \cdot 10^{-6}$
$a_0^{(y)}$	1.0429	1.0423
$a_1^{(y)}$	0	$2 \cdot 10^{-5}$
$b_1^{(y)}$	0	$-2 \cdot 10^{-6}$
$a_0^{(z)}$	0	$-8 \cdot 10^{-6}$
$a_1^{(z)}$	0	$-2 \cdot 10^{-5}$
$b_1^{(z)}$	0.3734	0.3733

В качестве дополнительного теста был выполнен анализ сингулярных чисел нормальной матрицы. Как известно, сингулярные числа весьма полезны при исследовании вопросов связанных с матричным вырождением. В частности, дефицит ранга равен количеству нулевых сингулярных чисел. В дополнение к описанному выше решению, были выполнены три решения с различными наборами неизвестных, но всегда с использованием одних и тех же наблюдений.

Решение А включало только астрометрические параметры в качестве неизвестных, решение АУ включало также амплитуды гармоник колебаний базового угла $\delta\Gamma$ в последнем уравнении (2.22) для $k \leq 1$, решение АО содержало астрометрические параметры и ориентацию, а решение АОУ включало все три набора неизвестных.

Результаты, суммированные в Таблице 2.2, снова подтверждают теоретические предсказания. Задача близка к вырождению только в случае АОУ, где все три типа параметров, звезда, базовый угол и ориентация, подгоняются одновременно. В этом случае есть одно сингулярное число, $\sim 10^{-5}$, намного меньшее, чем второе наименьшее значение, $\sim 10^{-2}$. Это указывает на то, что проблема имеет дефицит ранга в один, что явно вызвано (почти)вырождением между глобальным сдвигом параллакса и конкретными вариациями базового угла и ориентации, описанными уравнениями (2.23)-(2.25). Во всех других случаях, АУ, АО и А, не появляется никаких изолированных малых сингулярных чисел. Тогда задача формально хорошо обусловлена, хотя, как мы видели в случае АО, решения могут быть смещены вариациями базового угла.

Таблица 2.2. Сингулярные числа σ_i нормальной матрицы для различных типов прямого решения. Сингулярные числа отсортированы по возрастанию.

	АОУ	АУ	АО	А
σ_1	$5.6 \cdot 10^{-6}$	0.015	0.017	0.017
σ_2	0.017	0.017	0.017	0.017
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
σ_{\max}	1549	387	1549	0.886

То обстоятельство, что наименьшее сингулярное число в решении АОУ не равно нулю, отчасти объясняется ошибками округления. Однако даже в точной арифметике прямое решение не представляет собой полностью вырожденную задачу, поскольку, во-первых, строгое вырождение происходит только в том случае, если пренебречь конечным размером полей зрения, и, во-вторых,

некоторые параметры миссии немного зависят от времени, но предполагались постоянными по гармоническим представлениям в уравнении (2.22). Вопрос о зависимости от времени более подробно рассматривается в разделе 2.3.3.

Параметры ориентации, используемые в прямом решении, не являются репрезентативными для какой-либо практически полезной модели ориентации, а были выбраны исключительно для проверки ожидаемого вырождения с колебаниями базового угла и нуль-пунктом параллаксов. В частности, гармоническая модель δ_x , δ_y , δ_z в уравнении (2.22) не может описать твердотельное вращение системы отсчёта, что объясняет, почему таблица 2.2 не показывает шестикратного вырождения между астрометрическими параметрами и параметрами ориентации, которое возникает в том случае, когда на систему отсчёта не накладывается никаких ограничений. Это упрощение устраняется в описанном ниже полномасштабном решении, в котором используется полностью реалистичная модель ориентации.

2.2.2. Полномасштабное итеративное решение

Для проверки эффекта изменения базового угла в итеративном решении мы использовали пакет программ AGISLab для моделирования Gaia [76]. Этот инструмент позволяет нам моделировать независимые астрометрические решения за разумное время, основываясь на тех же принципах, что и астрометрическое глобальное итеративное решение [99], используемое для Gaia, но с использованием меньшего количества звёзд и нескольких других упрощений, экономящих время.

Для исследования нуль-пункта параллаксов мы провели ряд тестов для различных значений базового угла в диапазоне от 30° до 150° , включая значе-

ния Hipparcos и Gaia 58° и 106.5° соответственно. В этих симуляциях предполагались номинальный закон сканирования Gaia и реалистичная геометрия полей зрения Gaia, которые включают один миллион ярких звезд с $G = 13^m$ равномерно распределенных по небу и наблюдавшихся в течение пяти лет без мертвого времени. Предполагался номинальный шум наблюдения вдоль сканирования 95 мксд на ПЗС, основанный на расчетной производительности центроидизации Gaia для звезд с $G = 13^m$. Согласно [58], это соответствует ожидаемой точности в конце миссии около 10 мксд для параллаксов. Кроме того, были включены вариации базового угла с амплитудой $a_1^{(\Gamma)} = 1$ мсд. Неизвестные состояли из пяти астрометрических параметров на звезду и параметров ориентации, основанных на представлении В-сплайном компонентов кватерниона [99] с использованием интервала узла 30 с. Поэтому моделирование AGISLab включает в себя множество подробных особенностей из наблюдений и редукиций данных реальной сканирующей астрометрической миссии, включая ряд эффектов более высокого порядка, игнорируемых в нашем аналитическом подходе.

Параллаксы, полученные в итеративных решениях, смещены относительно их «истинных» значений, предполагаемых при моделировании, случайными и систематическими ошибками. Результаты для среднего смещения $\delta\varpi$ показаны точками на рисунке 2.2. Кривая представляет собой теоретическую зависимость, описываемую уравнением (2.23). Точки отклоняются от кривой не более чем на 1 мксд, или $\lesssim 0.1\%$. Случайные ошибки, измеренные с помощью выборочного стандартного отклонения смещений отдельных параллаксов, составили 7.3 мксд во всех экспериментах, практически не зависят от базового угла и примерно согласуются с ожидаемой точностью в конце миссии.

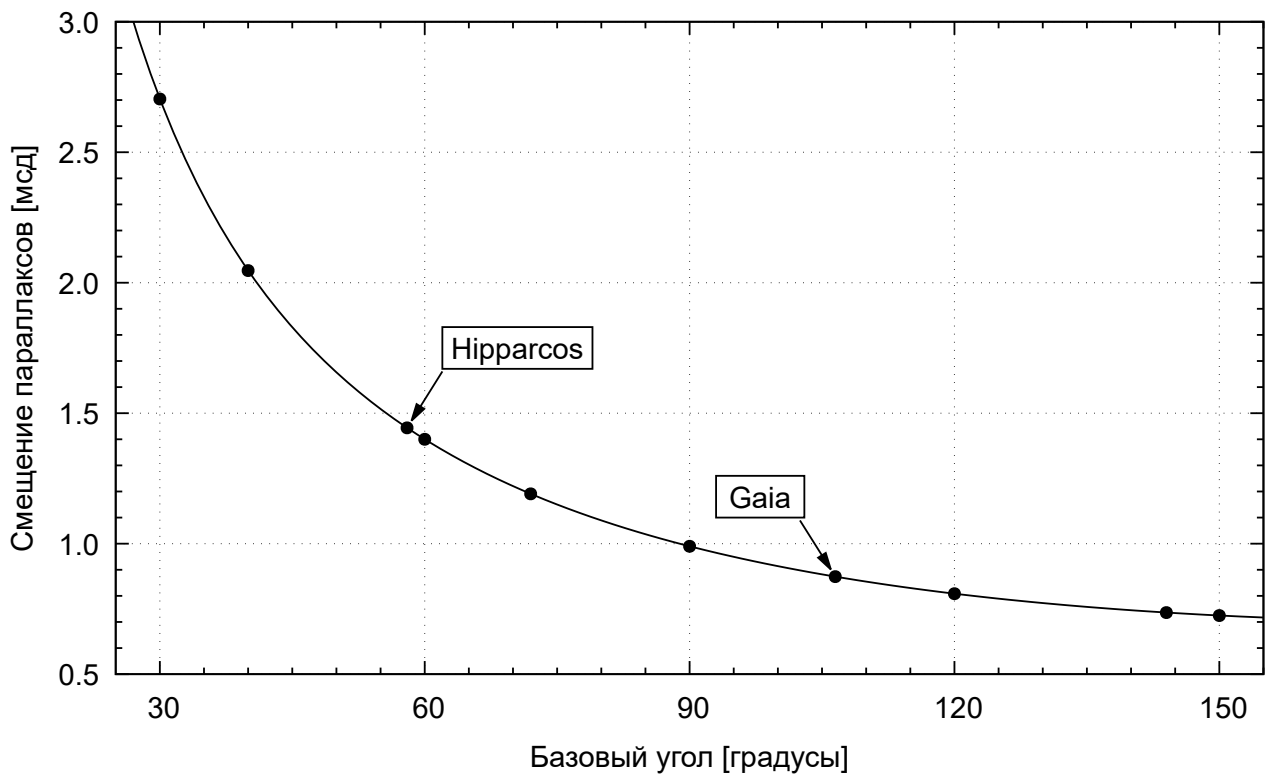


Рис. 2.2. – Глобальный сдвиг параллакса вследствие колебаний базового угла вида $\cos \Omega$ с амплитудой 1 мсд. Точками показаны результаты численных экспериментов для различных величин базового угла, включая значения, принятые в космических аппаратах Hipparcos и Gaia. Сплошная линия отвечает теоретическому значению, описываемому уравнением (2.23).

2.3. Обсуждение

В предыдущих разделах мы показали, что глобальный сдвиг параллаксов наблюдаемо неотличим от определенного изменения во времени базового угла. Соответствующее соотношение, строго справедливое в центре поля зрения, задаётся последним тождеством в уравнении (2.21). Здесь мы переходим к обсуждению некоторых практических следствий этого результата.

2.3.1. Физические причины возникновения колебаний вида $\cos \Omega$

Элементарные принципы проектирования привели к выбору почти постоянного угла ξ (Рисунок 2.1) как для Hipparcos (43°), так и для Gaia (45°). Более того, для спутника на орбите вокруг Земли или близко ко второй точке Лагранжа (L_2) системы Солнце-Земля-Луна барицентрическое расстояние b всегда близко к 1 а.е.. Форма изменения базового угла, которая вырождена с параллаксом, тогда по существу пропорциональна $\cos \Omega$. Этот результат весьма значим в отношении ожидаемых тепловых изменений инструмента. Косое солнечное освещение вращающегося спутника может вызывать изменения базового угла, которые являются периодическими с периодом вращения относительно Солнца, что означает, что они имеют общую гармоническую форму последней строки в уравнении (2.22). Почти постоянный, ненулевой коэффициент $a_1^{(\Gamma)}$ может быть, таким образом, очень реалистичным физическим следствием способа эксплуатации спутника.

Знание тесной связи между возможным тепловым воздействием на инструмент и нуль-пунктом параллаксов привело к очень строгим инженерным специ-

фикациям для приемлемой амплитуды краткосрочных изменений базового угла как в Hipparcos, так и в Gaia. В случае Gaia уже на ранней стадии проектирования было известно, что изменения базового угла не могут быть полностью исключены пассивно и должны быть измерены. Поэтому Gaia включает в себя специальную лазерно-интерферометрическую метрологическую систему, монитор базового угла (Basic Angle Monitor, BАM) [108], для измерения краткосрочных изменений. Согласно измерениям BАM, в течение первого года номинальных операций Gaia амплитуда члена $\cos \Omega$, отнесенная к 1.01 а.е. и эпохе 2015.0, составляла около 0.848 мсд [96]. Без исправления такое большое изменение привело бы к смещению параллакса в 0.741 мсд согласно уравнению (2.23). При обработке наблюдений в проекте Gaia [67] наблюдения корректируются за колебания базового угла с использованием разработанной модели гармонических колебаний.

2.3.2. Зависимость от величины базового угла

Из уравнения (2.23) видно, что сдвиг параллакса обратно пропорционален $\sin(\Gamma_c/2)$. Для постоянной амплитуды члена $\cos \Omega$ в вариации базового угла сдвиг параллакса, следовательно, уменьшается с увеличением базового угла, как показано на рисунке 2.2. С этой точки зрения оптимальный базовый угол, следовательно, равен 180° . Однако это значение было бы очень плохим для общей обусловленности и точности астрометрического решения [93; 102; 103], что вместо этого благоприятствует значению около 90° . Более того, чувствительность к вариации $\cos \Omega$ всего лишь в 1.4 раза меньше при 180° , чем при 90° . Поэтому значение Gaia $\Gamma_c = 106.5^\circ$ является разумным выбором.

То, что чувствительность к вариации базового угла увеличивается с умень-

шением Γ_c , можно понять из простых аргументов. Рассмотрим влияние сдвига параллакса $\delta\varpi$ на продольные координаты. Пока номинальный базовый угол Γ_c велик, эффекты в двух полях зрения существенно различаются. Однако чем меньше базовый угол, тем более схожи эффекты в двух полях зрения. Это можно увидеть из уравнения (2.20), но также очевидно и без какой-либо формулы. Следует подчеркнуть, что именно вариации базового угла вызывают возмущения полевых координат; астрометрическое решение затем пытается найти такие параллаксы и параметры ориентации, которые соответствуют возмущенным полевым координатам. Тогда очевидно, что меньший базовый угол потребует большего смещения параллакса для поглощения изменения базового угла заданной амплитуды.

2.3.3. Зависимость величин b и ξ от времени

Как отмечено выше, барицентрическое расстояние b и угол ξ не являются строго постоянными, а являются функциями времени. В этом случае уравнение (2.21) даёт конкретные временные зависимости $\delta\Gamma$, δ_x , δ_y и δ_z , которые вырождены с глобальным сдвигом параллакса. В частности,

$$\delta\Gamma(t) = C b(t) \sin \xi(t) \cos \Omega(t), \quad (2.26)$$

где C — константа, неотличима от сдвига параллакса $\delta\varpi = \frac{1}{2}C / \sin(\Gamma_c/2)$.

Любая другая форма вариации $\delta\Gamma(t)$ не является полностью вырожденной с $\delta\varpi$. Поэтому она может содержать компоненты, которые могут быть обнаружены путем анализа остатков и впоследствии устранены с помощью дополнительных калибровочных членов. Однако произвольная вариация $\delta\Gamma(t)$ в общем случае также содержит компонент вида (2.26), который приведет к некоторому сдвигу параллакса. Этот сдвиг можно оценить, спроецировав эту вариацию на

функцию в правой части уравнения (2.26) в смысле наименьших квадратов:

$$\delta\varpi = \frac{A}{2 \sin(\Gamma_c/2)} \frac{\langle \delta\Gamma(t) b(t) \sin \xi(t) \cos \Omega(t) \rangle}{\langle b(t)^2 \sin^2 \xi(t) \cos^2 \Omega(t) \rangle}, \quad (2.27)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Если b и ξ постоянны, то множитель $(b \sin \xi)^{-1}$ можно вынести из усреднений. Если, кроме того, $\delta\Gamma(t)$ строго периодична по Ω , то мы возвращаемся к уравнению (2.23).

Для космического аппарата Gaia, который работает в районе точки L_2 , барицентрическое расстояние b варьируется от 0.99 до 1.03 а.е. как комбинация эксцентricности гелиоцентрической орбиты Земли, орбиты Лиссажу вокруг L_2 и зависящего от времени смещения между Солнцем и барицентром солнечной системы. Как обсуждалось в разделе 2.3.5 ниже, ξ варьируется примерно на 1% от своего номинального значения 45° .

2.3.4. Эффекты размера полей зрения

Для вывода уравнений (2.20) и (2.21) мы пренебрегли конечным размером поля зрения, рассматривая только наблюдения в центре поля ($g = h = 0$). Это было необходимо для получения точного соотношения между смещением параллакса и вариациями базового угла и ориентации. В конечном поле зрения появляются дополнительные члены из-за вариации фактора параллакса по полю, которая не может быть представлена уникальным набором вариаций базового угла. Эти члены имеют порядок в $\Phi \simeq 10^{-2}$ раз меньше вариаций базового угла, в которых Φ составляет половину размера поля зрения. Как следствие, вариация базового угла в форме уравнения (2.26) не является строго вырожденной с $\delta\varpi$ и углами ориентации, когда рассматривается конечное поле зрения. Однако если прибор имеет также периодические оптические искажения отдельно в каждом поле зрения, которые необходимо калибровать, то соответствующая, более

сложная модель калибровки может способствовать вырождению и, в худшем случае, восстановить полное вырождение.

2.3.5. Зависимость от гелиотропических координат

Сферические координаты b , ξ , Ω , введенные в разделе 2.1.6, определяют положение барицентра Солнечной системы в сканирующей системе отсчёта (ССО). Это то, что имеет значение для расчета эффекта параллакса, который зависит от смещения наблюдателя от барицентра. С другой стороны, физическая значимость модуляции $\cos \Omega$ связана с изменяющейся освещенностью спутника Солнцем, которая зависит от гелиоцентрического расстояния b_h и гелиотропных углов ξ_h и Ω_h , которые представляют собой правильное направление к центру Солнца во время наблюдения. Разница между гелиотропными и баритропными координатами составляет не более 0.01 а.е. и 0.01 рад соответственно. Это мало, но должно учитываться для точного моделирования изменений базового угла. В этом контексте можно отметить, что ожидаемое тепловое воздействие на спутник масштабируется как b_h^{-2} , тогда как фактор параллакса масштабируется как b . С другой стороны, закон сканирования выбирается так, чтобы поддерживать ξ_h как можно более постоянным, тогда как ξ может изменяться на уровне 1%. Если базовый угол изменяется как $b_h^{-2} \sin \xi_h \cos \Omega_h$, он больше не имеет строгой формы уравнения (2.26). Результирующее смещение параллакса можно оценить с помощью уравнения (2.27).

2.3.6. Возможно ли снятие вырождения?

Если базовый угол изменяется вследствие изменения солнечного освещения вращающегося спутника, мы ожидаем увидеть смещение параллакса согласно ур. (2.27). Однако, как обсуждалось выше, вырождение с нуль-пунктом параллаксов не идеально, и в принципе это открывает возможность калибровки вариаций базового угла из наблюдений. Можно использовать по крайней мере три различных эффекта, которые способствуют нарушению вырождения: конечный размер поля зрения (раздел 2.3.4), временную зависимость b из-за эксцентриситета орбиты Земли (раздел 2.3.3) и разницу между баритропным и гелиотропным углами (раздел 2.3.5). К сожалению, все три эффекта проявляются только на уровне нескольких процентов вариации или меньше, что делает результат очень чувствительным к небольшим ошибкам в модели калибровки. Более того, конечное поле зрения малополезно, если нам приходится калибровать сложные периодические изменения оптических искажений независимо в каждом поле зрения. Наилучший шанс может быть предоставлен временным изменением b , для которого отношение эффекта параллакса к силе освещения идет как b^3 и, следовательно, меняется на $\pm 5\%$ в течение года. Таким образом, надежда на преодоление вырожденности исключительно из самих наблюдений, основанных на принципе самокалибровки, несколько ограничена.

2.4. Выводы ко второй главе

Представлен анализ влияния вариаций базового угла на глобальный сдвиг параллаксов, полученных из наблюдений сканирующего астрометрического спут-

ника с двумя полями зрения. Метод малых возмущений был использован для получения изменений в четырёх наблюдаемых величинах, поперечных и продольных полевых координатах в обоих полях зрения, возникающих в результате возмущений четырёх параметров инструмента, базового угла и трех компонентов ориентации. Наоборот, любое заданное возмущение четырёх наблюдаемых полевых координат может быть в равной степени представлено определенной комбинацией параметров инструмента. Применение этой техники к возмущениям, вызванным изменением параллакса, позволило получить зависящие от времени изменения параметров инструмента, которые точно имитируют глобальный сдвиг параллаксов.

Эти соотношения подтверждают предыдущие выводы о том, что колебания базового угла вида $a_1^{(\Gamma)} \cos \Omega$, где Ω – барицентрическая фаза спина, приводят к глобальному сдвигу нуль-пункта параллаксов. В ходе проведённого исследования был дан ответ на вопрос, какая из имеющихся в литературе формул для сдвига параллаксов является правильной. Было подтверждено, что выражение, приведённое в работе [88], даёт верное значение для сдвига параллаксов, которое составляет $\simeq 0.87a_1^{(\Gamma)}$ для параметров конструкции Gaia. Результаты численного моделирования полностью согласуются с аналитическими формулами.

В общем, периодические изменения базового угла можно ожидать от теплового воздействия солнечного излучения на вращающийся спутник [88; 92]. Эти периодические изменения обычно связаны с гелиотропной фазой спина Ω_h , которая близка к барицентрической фазе спина Ω . Если термически вызванные изменения содержат значительную составляющую, пропорциональную $\cos \Omega_h$, их влияние на наблюдения практически неотличимо от глобального сдвига параллаксов. Хотя вырождение не является идеальным, его трудно его трудно снять без привлечения других видов данных или внешней информации. В случае Gaia это означает, в частности, прямое измерение изменений базового угла с помощью лазерной метрологии (ВАМ). Использование астрофизической информации, такой как параллаксы пульсирующих звезд [72; 149] и квазаров,

имеет решающее значение для проверки успешного определения нулевой точки параллакса.

Тот факт, что задача является почти полностью вырожденной только при определении всех трёх групп параметров, позволяет по-новому взглянуть на применимость принципа самокалибровки. Если бы ориентация не определялась из наблюдений, то есть, если бы самокалибровка не использовалась для ориентации, то сдвига параллаксов вследствие колебаний базового угла не происходило бы. Это обстоятельство обязательно должно быть принято во внимание при планировании будущих проектов в области космической астрометрии.

Глава 3

Использование априорной информации для построения астрометрического каталога при малом объёме наблюдательных данных

Путь звезды на небесной сфере в простейшем случае моделируется пятью астрометрическими параметрами, представляющими ее положение (α, δ) , параллакс (ϖ) и собственное движение $(\mu_{\alpha^*}, \mu_{\delta})$ на некоторую выбранную опорную эпоху. Для определения всех пяти параметров необходимо как минимум пять наблюдений, соответствующим образом распределенных во времени, и для получения двумерных положений из одномерных сканов необходимы различные направления сканирования. Из-за годовой периодичности параллакса наблюдения должны охватывать как минимум целый год, чтобы надежно отделить параллакс от собственного движения. Закон сканирования Gaia гарантирует, что эти условия выполняются для звёзд в любой точке неба, если сканирование длится достаточно долго. Номинальная продолжительность миссии в пять лет обеспечивала достаточное количество возможностей для наблюдений, в среднем около 70 транзитов поля зрения на звезду; в расширенной миссии среднее количество транзитов возросло вдвое. Этот высокий коэффициент избыточности необходим для определения большого количества дополнительных параметров (ориентация космического аппарата и калибровка инструмента) в дополнение к астрометрическим параметрам, для оценки качества данных и для обнаружения случаев (например, двойных звёзд), когда стандартная астрометрическая модель неприменима.

Однако неизбежно возникает множество ситуаций, когда звезда недостаточно хорошо наблюдается для определения всех ее пяти астрометрических

параметров. К таким ситуациям относятся:

- Транзиентные объекты, такие как внегалактические сверхновые, галактические карликовые новые и долгопериодические переменные звёзды, например, мириды. Подобные объекты могут наблюдаться всего несколько месяцев, возможно, появляясь повторно через значительный промежуток времени.
- Слабые звёзды около предельной звёздной величины Gaia. Номинально все точечные источники ярче 20-й величины обнаруживаются и наблюдаются. Однако, поскольку бортовая оценка звёздной величины имеет некоторую неопределенность, звёзды на пределе обнаружения не всегда могут наблюдаться, когда они проходят через фокальную плоскость. Поскольку вероятность обнаружения падает с уменьшением яркости, большое количество слабых звёзд будут иметь сильно разреженную историю наблюдений.
- Первый выпуск данных, основанный в основном на наблюдениях, собранных в течение первого года миссии, когда большинство звёзд будут недостаточно изучены.

Если для данной звезды недостаточно наблюдений, простым решением является определение только ее положения (α, δ) на среднюю эпоху наблюдения. Это всегда возможно: даже в случае одного транзита приблизительное положение можно вычислить, объединив измерения вдоль и поперек сканирования.

Может возникнуть вопрос о решении, включающем три или четыре астрометрических параметра на звезду, например (α, δ, ϖ) или $(\alpha, \delta, \mu_{\alpha*}, \mu_{\delta})$. Это означало бы, что собственное движение пренебрегается по сравнению с параллаксом, или наоборот. Такой подход представляется нецелесообразным, поскольку для большинства звёзд наблюдаемый эффект от пренебрегаемого параметра будет иметь такую же величину, как и эффект от сохраняемого па-

раметра. В дальнейшем, поэтому, рассматриваются только решения с двумя или пятью астрометрическими параметрами.

Решение только для двух параметров положения α и δ эквивалентно предположению, что истинный параллакс и собственное движение объекта равны нулю. Если это предположение верно (что может быть фактически так, например, для квазаров), результирующая оценка положения будет несмещенной с формальной неопределенностью, отражающей фактические ошибки. Однако, если истинный параллакс и собственное движение не равны нулю, оценка положения будет, как правило, смещена. Его формальная неопределенность (которая не зависит от значения параллакса и собственного движения) останется небольшой, поскольку исчисление ошибок учитывает только небольшой наблюдательный шум Gaia. В результате смещение часто будет во много раз больше формальной неопределенности.

Предложенное решение заключается в оценке всех пяти параметров, при этом включая априорную информацию о том, что параллакс и собственное движение обычно являются малыми, но ненулевыми величинами. Формально это может быть достигнуто с помощью правила Байеса. Исследована задача оптимального выбора априорной информации, когда наблюдений недостаточно для обычного пятипараметрического астрометрического решения. Были выполнены различные численные эксперименты, основанные на смоделированных наблюдениях звёзд. Показано, что при подходящем выборе априорной информации решение даёт разумные результаты с точки зрения как оценки положения звезды, так и его формальной неопределенности.

Первый выпуск астрометрических результатов миссии Gaia был осуществлён в 2016 году [96]. Из-за короткого интервала наблюдений этот выпуск содержал для большинства звёзд только средние положения. Исключением являются звёзды Hipparcos и Tycho-2, для которых были определены все пять астрометрических параметров с использованием процедур Hundred Thousand Proper Motions (HTPM) [107] и Tycho-Gaia Astrometric Solution (TGAS) [105].

Хотя рассматриваемая методика разрабатывалась специально для первого выпуска данных Gaia, она имеет гораздо более широкую область применимости и может быть использована в любой ситуации, когда количество и распределение наблюдений недостаточно для полного пятипараметрического решения. Следует подчеркнуть, что использование априорной информации в астрометрическом решении всегда приводит к смещенным оценкам параметров. Поэтому предлагаемый рецепт следует использовать только тогда, когда это действительно необходимо, например, в ранее упомянутых случаях, и только для того, чтобы получить положения с реалистичными оценками их неопределенностей. Эти координаты являются ценными, например, для целей идентификации и в качестве справочной информации для наземных наблюдений. Однако полученные параллаксы и собственные движения не следует использовать.

3.1. Теоретическое обоснование

В этом разделе сначала описывается процедура оценки астрометрических параметров как классическая задача наименьших квадратов, которая согласуется с используемым в проекте Gaia общим астрометрическим решением [99]. Затем показано, как можно ввести гауссовское априорное распределение с помощью правила Байеса. Наконец, обсуждается приемлемость гауссовых априорных и апостериорных плотностей вероятности и их интерпретация в контексте астрометрического решения.

В этой главе под неопределенностью понимается любая количественная мера, характеризующая ожидаемую степень отклонения оцениваемой величины от ее истинного значения, тогда как под ошибкой понимается разница между оценкой и истинным значением. В гауссовском контексте естественной ме-

рой неопределенности является стандартное отклонение, но поскольку мы здесь имеем дело с сильно негауссовыми распределениями (например, истинных значений параллакса), мы вместо этого используем меры, основанные на размере доверительной области.

3.1.1. Оценивание астрометрических параметров с помощью метода наименьших квадратов

Астрометрическое решение, используемое в проекте Gaia, представляет собой блочно-итеративную процедуру, в которой различные группы параметров определяются последовательно [99]. При выполнении астрометрического решения предполагается, что ориентация космического аппарата и калибровка инструмента известны. В этом случае линеаризованная задача наименьших квадратов для отдельной звезды, наблюдаемой n раз, может быть записана в матричной форме как

$$\mathbf{Ax} \simeq \mathbf{h}, \quad (3.1)$$

где \mathbf{x} – вектор дифференциальных поправок к пяти астрометрическим параметрам, \mathbf{h} – вектор невязок измерений, состоящий из n элементов, а \mathbf{A} – матрица плана размером $n \times 5$, содержащая частные производные астрометрических параметров по наблюдаемым величинам. Для уравнивания статистических весов элементы вектора \mathbf{h} и матрицы \mathbf{A} нормируются на стандартные ошибки соответствующих наблюдений.

Астрометрические параметры α , δ , ϖ , μ_{α^*} и μ_{δ} относятся к некоторой выбранной опорной эпохе t_{ep} , которая в данной работе всегда принимается за среднюю эпоху наблюдения. В частности, (α, δ) – барицентрическое направление на звезду в момент времени t_{ep} . Дифференциальные поправки по \mathbf{x} следует интер-

претировать как $\Delta\alpha^* \equiv \Delta\alpha \cos \delta$, $\Delta\delta$, $\Delta\varpi$, $\Delta\mu_{\alpha^*}$ и $\Delta\mu_{\delta}$.

Оценка вектора \mathbf{x} по методу наименьших квадратов минимизирует квадрат нормы невязок $\mathbf{h} - \mathbf{Ax}$

$$Q_0(\mathbf{x}) = \|\mathbf{h} - \mathbf{Ax}\|^2 = (\mathbf{h} - \mathbf{Ax})'(\mathbf{h} - \mathbf{Ax}) = \mathbf{h}'\mathbf{h} - 2\mathbf{x}\mathbf{b}_0 + \mathbf{x}'\mathbf{N}_0\mathbf{x}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{b}_0 = \mathbf{A}'\mathbf{h}$ и $\mathbf{N}_0 = \mathbf{A}'\mathbf{A}$. Условие минимизации $\partial Q_0/\partial \mathbf{x} = \mathbf{0}$ приводит к системе линейных уравнений

$$\mathbf{N}_0\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}_0, \quad (3.3)$$

решение которой даёт оценку \mathbf{x}_0 методу наименьших квадратов. Для произвольного вектора \mathbf{x} сумму квадратов невязок можно записать следующим образом

$$Q_0(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)'\mathbf{N}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (3.4)$$

Для плохо наблюдаемых звёзд нормальная матрица \mathbf{N}_0 будет либо плохо обусловленной, либо сингулярной. Если она плохо обусловлена (например, из-за небольшого числа почти коллинеарных наблюдений), то формально решение может быть получено. Однако оно будет иметь большие формальные неопределенности и будет уязвимо для выбросов, которые не могут быть надежно обнаружены. Ситуация иная, если \mathbf{N}_0 строго сингулярна, например, если наблюдений меньше, чем неизвестных. С математической точки зрения сингулярная задача имеет бесконечное число решений, в то время как алгоритмически может быть невозможно определить ни одно из них, в зависимости от выбора реализации. Средством как для сингулярных, так и для плохо обусловленных ситуаций является включение априорной информации (раздел 3.1.3), что всегда приводит к уникальному и четко определенному, хотя и смещенному, решению.

3.1.2. Функция правдоподобия

Для чистого набора данных, с отфильтрованными или пониженными выбросами, разумно моделировать ошибки наблюдений как независимые нормальные случайные величины. Для правильно откалиброванного прибора ошибки имеют средние (ожидаемые) значения, равные нулю, и известные стандартные отклонения, равные формальным неопределенностям наблюдений. Тогда \mathbf{h} является n -мерным гауссовым распределением со средним значением $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ и единичной ковариацией; его функция плотности вероятности равна

$$f(\mathbf{h}|\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\|\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|^2\right] \propto \exp\left[-\frac{1}{2}Q_0(\mathbf{x})\right], \quad (3.5)$$

оценено для $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. Естественно, эта функция не может быть вычислена, поскольку $\hat{\mathbf{x}}$ неизвестна. Рассматриваемая как функция \mathbf{x} , для заданного \mathbf{h} , она известна как правдоподобие данных, обозначенное $L(\mathbf{x}|\mathbf{h})$. Максимизация этой функции относительно \mathbf{x} , очевидно, эквивалентна минимизации $Q_0(\mathbf{x})$, показывая, что \mathbf{x}_0 является оценкой максимального правдоподобия астрометрических параметров.

3.1.3. Внесение априорной информации

Согласно правилу Байеса [24; 132], апостериорная плотность вероятности вектора дифференциальных поправок \mathbf{x} имеет вид

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{h}) \propto L(\mathbf{x}|\mathbf{h}) \times p(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

где $p(\mathbf{x})$ – априорная плотность вероятности и $L(\mathbf{x}|\mathbf{h}) \equiv f(\mathbf{h}|\mathbf{x})$ представляет собой функцию правдоподобия данных. Константа пропорциональности опу-

щена, поскольку она не зависит от \mathbf{x} , но может быть определена из нормировочного ограничения $\int f(\mathbf{x}|\mathbf{h}) d\mathbf{x} = 1$. Например, плоская (неинформативная) априорная вероятность $p_0(\mathbf{x}) = \text{const}$ даёт с помощью уравнений (3.4) и (3.5) апостериорную плотность вероятности

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{h}) = (2\pi)^{-5/2} \det(\mathbf{N}_0)^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}Q_0(\mathbf{x})\right]. \quad (3.7)$$

Это пятимерная гауссова функция со средним значением \mathbf{x}_0 и ковариацией $\mathbf{C}_0 = \mathbf{N}_0^{-1}$, которая отражает наши знания об \mathbf{x} , основанные только на данных.

В принципе, априорная плотность вероятности $p(\mathbf{x})$ должна количественно определять наши априорные знания об астрометрических параметрах. Например, она может быть строго равна нулю для $\varpi < 0$, при этом уменьшаясь по степенному закону для больших значений ϖ , отражая априорные знания о том, что параллаксы, как правило, являются положительными, малыми величинами. Однако в этой работе мы рассматриваем только гауссовские априорные функции. Это имеет два важных преимущества: (а) если и априорная плотность распределения, и функция правдоподобия являются гауссовыми, апостериорная плотность распределения также является гауссовой, что значительно упрощает ее интерпретацию; (б) включение гауссовой априорной функции в астрометрическое решение является простым, как будет показано ниже. Недостатком, конечно, является то, что гауссовская априорная функция не очень реалистична, по крайней мере для параллаксов; но с интерпретацией, предложенной в разделе 3.1.4 это достаточно для настоящей цели.

Принимая, что априорная вероятность подчиняется нормальному распределению с математическим ожиданием \mathbf{x}_p и ковариационной матрицей \mathbf{C}_p , мы имеем

$$Q_p(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)' \mathbf{N}_p (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p). \quad (3.8)$$

где $\mathbf{N}_p = \mathbf{C}_p^{-1}$. Тогда априорная плотность вероятности

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} Q_p(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.9)$$

Подстановка выражений (3.5) и (3.9) в уравнение (3.6) даёт апостериорную плотность вероятности

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{h}) \propto \exp \left[-\frac{1}{2} Q_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} Q_p(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.10)$$

Будучи произведением двух нормальных распределений, $f(\mathbf{x}|\mathbf{h})$ очевидно также представляет собой нормальное распределение. Поэтому математическое ожидание вектора \mathbf{x} определяется минимумом функции $Q(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x}) + Q_p(\mathbf{x})$, который находится из уравнения

$$\frac{\partial Q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{N}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + 2\mathbf{N}_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = 0 \quad (3.11)$$

или

$$(\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_p) \mathbf{x} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_p, \quad (3.12)$$

где

$$\mathbf{b}_p = \mathbf{N}_p \mathbf{x}_p. \quad (3.13)$$

Несложно показать, что ковариационная матрица апостериорной оценки вектора \mathbf{x} даётся выражением

$$\mathbf{C} = (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_p)^{-1}. \quad (3.14)$$

Уравнения (3.12)–(3.14) являются теоретической основой для схемы включения априорных данных в астрометрическое решение.

3.1.4. Интерпретация гауссовой плотности вероятности

В дальнейшем предполагается, что априорное распределение параллаксов является гауссовым со средним значением $\varpi_p = 0$ и стандартным отклонением

$\sigma_{\varpi,p}$, равным квадратному корню из соответствующего (третьего) диагонального элемента C_p . (Аналогичные предположения сделаны относительно априорных распределений компонентов собственного движения.) Очевидно, что это не очень реалистично, поскольку это подразумевает, что априори существует 50% вероятность того, что параллакс отрицателен. С другой стороны, использование нормального распределения означает, что существует 90% вероятность того, что истинный параллакс меньше $1.28\sigma_{\varpi,p}$ и 99% вероятность того, что он меньше $2.33\sigma_{\varpi,p}$. Эти последние утверждения, очевидно, имеют смысл и дают полезную количественную оценку ожидаемой малости параллакса, даже несмотря на то, что распределение истинных параллаксов далеко от гауссовского.

Аналогичную интерпретацию можно сделать для гауссовой апостериорной плотности вероятности в уравнении (3.10). Хотя фактическое распределение ошибок байесовского решения может быть сильно негауссовым, эту функцию распределения вероятностей все равно можно использовать для построения разумных доверительных областей. В этой работе мы в первую очередь интересуемся позициями и игнорируем оцененные параллаксы и собственные движения. Поскольку неопределенность позиции может быть довольно анизотропной, ее следует задавать не как единое значение, а как доверительную область, например, доверительный эллипс, так что истинное значение содержится в этой области с определенной доверительной вероятностью P .

В этой работе мы решили работать с уровнем достоверности 90% ($P = 0.9$). Это означает, что (гауссовская) апостериорная ковариация должна быть такой, чтобы построенный из нее 90%-ный доверительный эллипс в 90% случаев содержал истинное положение. Выбор $P = 0.9$ является произвольным, и другое значение (например, 0.8, 0.95 или 0.99) в общем случае потребовало бы другой ковариационной матрицы для того, чтобы правильно охарактеризовать ошибки при этом значении P . Только в случае гауссовских апостериорных ошибок одна ковариационная матрица правильно описывала бы распределение ошибок для разных значений P .

Доверительный эллипс может быть построен из ковариационной матрицы координат, которая определяется верхней диагональной подматрицей 2×2 матрицы \mathbf{C} , как описано в [117]. В частности, для $P = 0.9$ полуоси эллипса равняются квадратным корням из сингулярных чисел этой ковариационной матрицы, умноженным на $\sqrt{-2 \ln(1 - P)} \simeq 2.146$. Внутри эллипса мы имеем $Q(\mathbf{x}) - Q_{\min} < -2 \ln(1 - P) \simeq 4.605$.

Хорошее астрометрическое решение должно быть не только максимально точным, но и иметь формальные неопределенности, которые правильно характеризуют фактические ошибки. Таким образом, наш общий подход заключается в оптимизации априорной плотности вероятности для обеих целей. Формальные неопределенности (позиционная ковариационная матрица) результирующей апостериорной оценки должны быть такими, чтобы 90%-ный доверительный эллипс, вычисленный, как описано выше, содержал истинное положение с 90%-ной вероятностью.

3.2. Астрометрическое решение с априорной информацией

3.2.1. Базовые предположения

Для систематической оценки влияния априорной информации на астрометрическую производительность мы разработали скрипты Matlab, которые вычисляют байесовские оценки положения для набора моделируемых звёзд. Истинные звездные параметры брались из модельного каталога, который использовался при подготовке проекта Gaia. Этот каталог (Gaia Universe Model Snapshot –

GUMS) был построен методом статистического моделирования [124]. Наблюдения моделировались с использованием номинального закона сканирования Gaia [59] на период с октября 2014 года до конца 2015 года. Астрометрические параметры оценивались с использованием процедуры, описанной в разделе 3.1.3. Ориентация космического аппарата и калибровка инструмента предполагались известными, поэтому решение включало только пять астрометрических параметров для каждой звезды. Апостериорная ковариация и астрометрические параметры вычисляются и сравниваются для различных комбинаций диапазона звездной величины, положения на небе, а также количества наблюдений и их временного распределения.

Затем мы экспериментируем с различными априорными значениями для параллакса и собственного движения в различных сценариях. Применение таких априорных знаний помогает астрометрическому решению, ограничивая параллакс и собственное движение малыми значениями, не заставляя их быть строго равными нулю. В настоящих экспериментах априорный параллакс и собственное движение центрированы на нуле с гауссовыми неопределенностями $\sigma_{\varpi, p}$ и $\sigma_{\mu, p}$ соответственно. Самый большой известный звездный параллакс составляет 768 мсд, но типичные параллаксы намного меньше этого. Поэтому $\sigma_{\varpi, p}$ находится в режиме нескольких мсд. Связь между собственными движениями и параллаксами определяется трансверсальной скоростью $v_T = A\mu/\varpi$, где $A \simeq 4.74$ км/с · год, скорость выражена в км/с, а собственное движение и параллакс – в мсд/год и мсд, соответственно. Типичные скорости поступательного движения звёзд в Галактике лежат в диапазоне $30 \div 300$ км/с, и поэтому закономерно ожидать, что $\mu/\varpi \simeq 6 \div 60$ год⁻¹. Для объектов с яркостью $14.5 \leq G \leq 15.5$ медианное значение величины μ/ϖ в каталоге GUMS составляет 10 год⁻¹. Был выполнен ряд численных экспериментов (один из таких экспериментов обсуждается в разделе 3.2.2), в которых отношение $\mathcal{R} = \sigma_{\mu, p}/\sigma_{\varpi, p}$ находилось в диапазоне $1 \div 60$ год⁻¹. Анализ полученных данных показал, что результаты слабо чувствительны к значению этого параметра. Использование

$\mathcal{R} = 10 \text{ год}^{-1}$ дало приемлемые результаты во всех случаях, и поэтому было принято решение использовать это значение впоследствии.

3.2.2. Влияние априорного распределения на астрометрическое решение

Для начального понимания того, как астрометрические результаты зависят от выбора априорной величины, мы показываем репрезентативный пример из наших экспериментов. На небесной сфере была выбрана площадка радиусом в один градус с центром в точке $\alpha = 157^{\circ}5$, $\delta = 0^{\circ}0$. В этой площадке были взяты объекты из каталога GUMS, яркость которых лежит в диапазоне $G = 15 \pm 0.5$. Применение таких критериев дало выборку, содержащую 458 звёзд.

Процедура, описанная в разделе 3.2.1, использовалась для моделирования наблюдений. Сгенерированный журнал наблюдений приведён в таблице 3.1. Всего было получено 15 наблюдений. В большинстве случаев площадка была отсканирована обеими полями зрения в ходе одного и того же оборота космического аппарата. Поскольку период вращения составляет 6 часов, а угловое расстояние между полями зрения равно $106^{\circ}5$, то промежуток времени между такими парными наблюдениями равен 1.775 час. Следует, однако, отметить, что такое парное сканирование происходит не всегда, что подтверждается журналом наблюдений: 23 мая 2015 рассматриваемая площадка была просканирована только первым полем зрения.

Используя от одного до восьми отдельных транзитов (таблица 3.1), мы получаем фактические ошибки и формальные неопределенности результирующих параметров положения для каждого интервала наблюдения как функцию

Таблица 3.1. Журнал смоделированных наблюдений. Р и F в списке наблюдений обозначают предшествующее и последующее поле зрения. Позиционный угол – это направление, в котором поле зрения сканирует звезду; 0° отвечает направлению на северный полюс мира и 90° – направлению к местному востоку. Последний столбец – это последовательная нумерация транзитных групп, которые различаются по времени и/или направлению.

Эпоха наблюдения (UTC)	Поле зрения	Позиционный угол	№ скана
2014-10-30 17:01	P	230°	1
2014-10-30 18:47	F	230°	1
2014-11-20 16:59	P	156°	2
2014-11-20 18:46	F	156°	2
2014-12-19 16:35	P	247°	3
2014-12-19 18:21	F	247°	3
2015-04-29 05:13	P	341°	4
2015-04-29 06:59	F	342°	4
2015-05-23 18:51	F	65°	5
2015-06-21 04:52	P	344°	6
2015-06-21 06:39	F	344°	6
2015-11-09 06:07	P	238°	7
2015-11-09 07:54	F	238°	7
2015-12-29 11:47	P	243°	8
2015-12-29 13:34	F	244°	8

априорного размера $\sigma_{\varpi, p}$.

На рисунках 3.1 и 3.2 показаны подробные результаты для интервала наблюдения, содержащего два транзита, которые различаются по времени и углу (сканы №№ 1 и 2 в таблице 3.1). На рисунке 3.1 показано, как фактические ошибки и формальные неопределенности изменяются в зависимости от $\sigma_{\varpi, p}$. Сигмоидальная форма красной кривой, описывающей формальные неопределенности, аналитически объяснена в разделе 3.3.

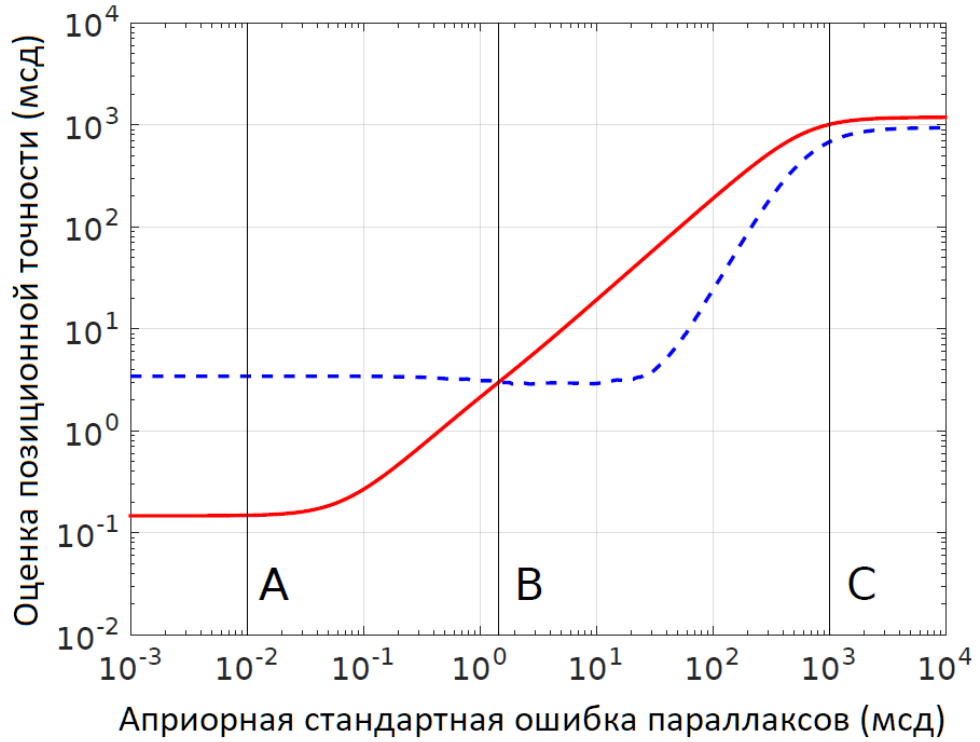


Рис. 3.1. – Поведение байесовской оценки положения как функции априорной неопределенности параллакса $\sigma_{\pi,p}$ для звёзд в пределах одного направления и диапазона величин (таблица 3.1). Синяя пунктирная кривая: 90-й процентиль фактических ошибок положения. Красная сплошная кривая: большая полуось эллипса с 90%-ной достоверностью. Априорные данные, обозначенные А, В и С, относятся к соответствующим распределениям, показанным на рисунке 3.2.

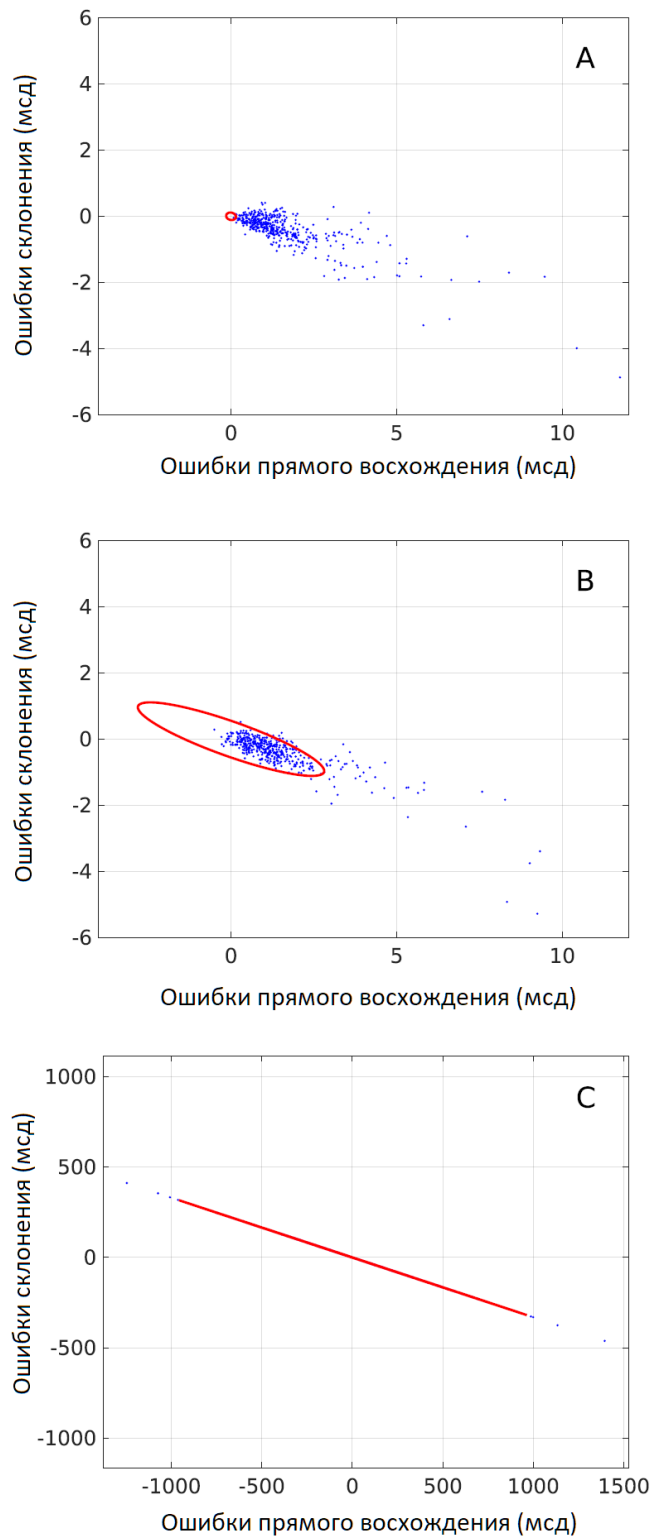


Рис. 3.2. – Распределение ошибок положения для трех случаев А, В и С на рисунке 3.1. Синие точки показывают ошибки отдельных звёзд. Красная кривая отвечает 90%-ному доверительному эллипсу. Случай А представляет собой слишком жёсткое ограничение и по сути даёт двухпараметрическое решение. Случай В, когда большая полуось 90%-ного доверительного эллипса равна 90-му перцентилю фактических ошибок, даёт разумные оценки ошибок. Случай С представляет собой слишком мягкое ограничение и даёт вырожденное решение: хотя на рисунке это и не видно, 90% точек содержатся в чрезвычайно вытянутом эллипсе.

Рассмотрим сначала поведение решения, когда применяются очень жёсткие ограничения, например, $\sigma_{\varpi, p} = 0.01$ мсд, что отвечает вертикальной линии А на рисунке 3.1. Полученное решение (как в отношении фактических ошибок положения, так и их формальных неопределенностей) практически эквивалентно решению только для двух параметров положения, где параллакс и собственное движение неявно предполагаются равными нулю. В этом режиме фактические ошибки (пунктирная кривая) намного больше формальных неопределенностей положения (сплошная кривая) из-за пренебрежения параллаксом и собственным движением. Это дополнительно иллюстрирует верхняя панель (априорная информация А) на рисунке 3.2, где 90%-ный доверительный эллипс (красный) содержит только малую часть фактических ошибок (синие точки).

Переходя от жёстких к более мягким ограничениям (увеличивая значения по оси x на рисунке 3.1), решение становится менее ограниченным, а формальные неопределенности увеличиваются. Для $\sigma_{\varpi, p} \geq 30$ мсд размер фактических ошибок также увеличивается, поскольку при двух отдельных транзитах одних данных Gaia недостаточно для определения всех пяти параметров в решении. При использовании очень мягких ограничений, например, априорных данных С, показанных на нижней панели рисунка 3.2, астрометрическое решение становится почти вырожденным, хотя формальные неопределенности по-прежнему правильно описывают фактические ошибки. Точка пересечения, отмеченная буквой В на рисунке 3.1, была бы разумным компромиссом, где решение настолько точно, насколько это допускается имеющимися данными, в то время как формальные неопределенности правильно характеризуют фактические ошибки положения. Это проиллюстрировано на средней панели (априорные данные В) рисунка 3.2, где большинство фактических точек ошибок лежат внутри доверительного эллипса.

3.2.3. Критерий выбора оптимальной априорной вариации

Две величины, представленные пунктирной и сплошной кривыми на рисунке 3.1, не совсем сопоставимы: одна из них – радиус окружности с центром в нуле, которая содержит 90% фактических ошибок; другая – большая полуось доверительного эллипса. Поэтому использование их точки пересечения для оптимизации априорной вероятности, как предлагалось в предыдущем разделе, не вполне последовательно. Вместо этого был принят иной, гораздо более простой, критерий, основанный на доверительном эллипсе: оптимальная априорная вероятность должна быть такой, чтобы 90% фактических ошибок положения содержались в 90%-ом доверительном эллипсе, рассчитанном из ковариационной матрицы. Наименьшее значение величины $\sigma_{\varpi,p}$, удовлетворяющее этому условию, в дальнейшем обозначается как $\sigma_{\varpi,F90}$.

До сих пор мы ограничивали наше обсуждение сценарием с двумя отдельными транзитами. Это тот случай, когда ожидается, что предварительная информация будет наиболее критичной: два отдельных наблюдения вдоль сканирования могут быть достаточными для определения разумного положения, но всегда недостаточны для полного пятипараметрического решения; с другой стороны, три отдельных транзита в принципе уже допускают пятипараметрическое решение, если используется информация как вдоль, так и поперек сканирования. Мы принимаем $\sigma_{\varpi,F90}$ на основе случая двух транзитов и используем его также в других сценариях с большим или меньшим количеством наблюдений. Предшествующее значение $\sigma_{\varpi,F90}$, определенное из сценария с двумя транзитами и обозначенное сплошной вертикальной линией на всех панелях, во всех случаях даёт решение, в котором размер фактических ошибок определения местоположения (измеренный с помощью 90-го перцентиля) близок к минимуму, вместе с реалистичным эллипсом достоверности 90%.

Также очевидно, что $\sigma_{\varpi, F90}$ является нижним пределом для подходящего априорного значения. Увеличение $\sigma_{\varpi, p}$ в десять раз сохраняет фактические ошибки положения на том же уровне, обеспечивая ту же или более консервативную формальную оценку неопределенности, тогда как использование меньшего априорного значения занижает ошибки. В разделе 3.3 рассмотрено влияние априорной неопределенности на оценку апостериорной ошибки с аналитической точки зрения.

3.2.4. Априорная вариация распределения как функция яркости и направления

В разделе 3.2.3 описано определение оптимального значения $\sigma_{\varpi, p}$, называемого $\sigma_{\varpi, F90}$, для одного конкретного направления и диапазона яркости. Этот эксперимент был повторён для разных направлений и интервалов звёздных величин ($G = 6 \div 20$, с шагом 1 звёздная величина). Было обнаружено, что 48 направлений, равномерно распределённых по небу, достаточно для описания крупномасштабных структур базовой модели Галактики. Как и ожидалось, $\sigma_{\varpi, F90}$ сильно зависит от яркости (более слабые звёзды в среднем более далеки) и в меньшей степени зависит от направления. Для заданного интервала величин было установлено, что экспериментальные данные с хорошей степенью точности описываются функцией

$$\lg \sigma_{\varpi, F90} = s_0 + s_1 |\sin b| + s_2 \cos b \cos l, \quad (3.15)$$

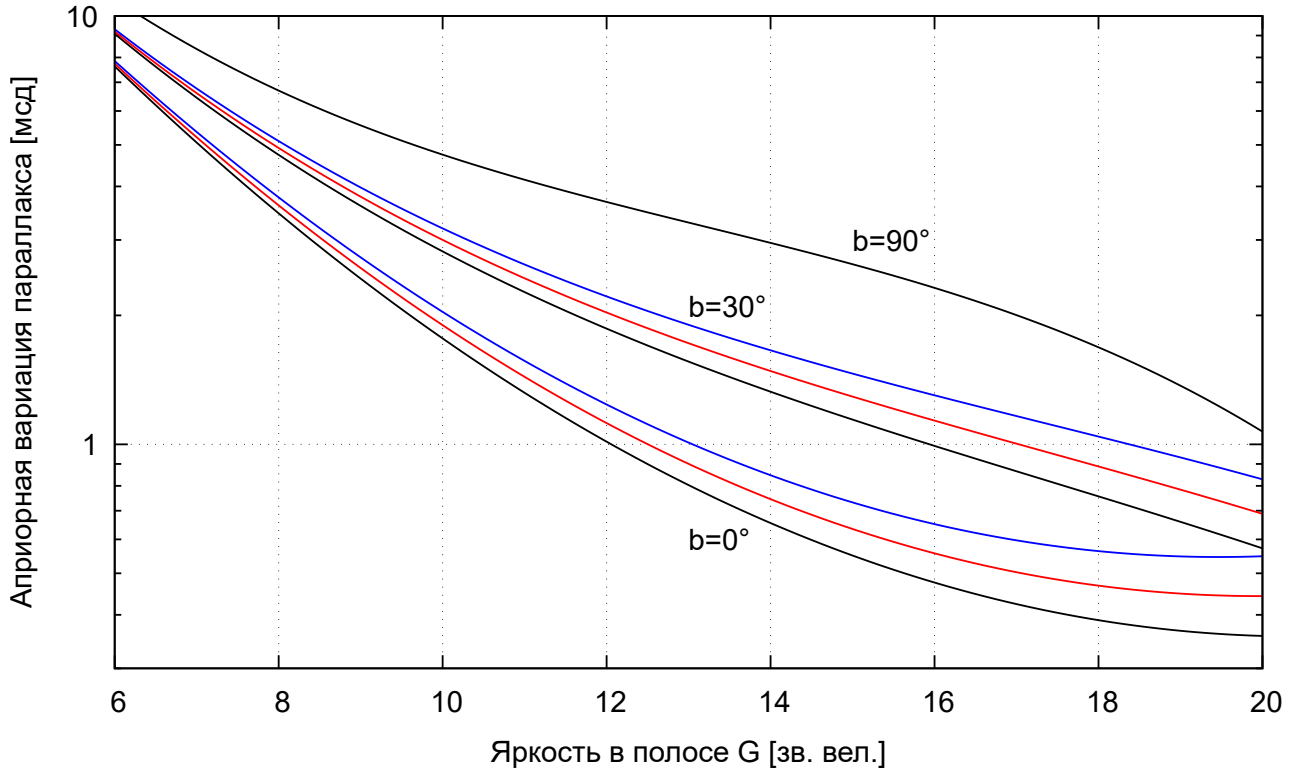


Рис. 3.3. – Зависимость полученной априорной вариации параллаксов от яркости для различных направлений. Для галактических широт $b = 0^\circ$ и $b = 30^\circ$ чёрная, красная и синяя линии отвечают галактическим долготам $l = 0^\circ$, $l = 90^\circ$ и $l = 180^\circ$ соответственно.

причём зависимость коэффициентов s_0 , s_1 и s_2 от звёздной величины G хорошо аппроксимируется простыми полиномиальными функциями:

$$s_0(G) = 2.187 - 0.2547G + 0.006382G^2, \quad (3.16)$$

$$s_1(G) = 0.114 - 0.0579G + 0.01369G^2 - 0.000506G^3, \quad (3.17)$$

$$s_2(G) = 0.031 - 0.0062G. \quad (3.18)$$

Зависимость полученной априорной вариации параллаксов от яркости для различных направлений показана на рисунке 3.3. Априорная неопределенность параллаксов систематически возрастает по мере удаления от галактического экватора. Такое поведение объясняется тем, что плотность звёзд в направлении галактических полюсов значительно ниже по сравнению с плоскостью Галактики.

В астрометрическом решении для произвольной звезды яркостью G в га-

лактических координатах (l, b) априорная нормальная матрица, используемая в уравнениях (3.12) и (3.13), имеет вид

$$\mathbf{N}_p = \text{diag} (0, 0, \sigma_{\varpi, F90}^{-2}, \sigma_{\mu, F90}^{-2}, \sigma_{\mu, F90}^{-2}) . \quad (3.19)$$

Здесь величина $\sigma_{\varpi, F90}(l, b, G)$ определяется формулами (3.15)–(3.18), тогда как априорная вариация компонентов собственного движения описывается выражением $\sigma_{\mu, F90} = \mathcal{R}\sigma_{\varpi, F90}$, где $\mathcal{R} = 10 \text{ год}^{-1}$.

Распространение неопределенности $\sigma_{\varpi, F90}(l, b, G)$ на более слабые звёзды нетривиально, поскольку модель GUMS полна только до $G = 20$. Для более слабых звёзд следует использовать значение при $G = 20$, поскольку оно обеспечивает консервативную (завышенную) оценку.

В принципе можно было бы рассмотреть более сложные априорные данные, которые учитывают фотометрическую, спектроскопическую или другую вспомогательную информацию. Например, вследствие межзвёздного поглощения голубые звёзды в среднем имеют меньшие параллаксы, чем красные звёзды, а для идентифицированных внегалактических объектов априорная неопределенность может быть намного меньше. Однако такая информация может быть недоступна именно в тех случаях, когда априорная информация необходима. С другой стороны, направление и приблизительная величина всегда доступны и позволяют нам определить общую априорную информацию.

3.3. Аналитическая иллюстрация

Для аналитического изучения того, как априорная неопределенность влияет на апостериорную неопределенность положения, рассмотрим упрощенный случай, когда решение включает только два астрометрических параметра: од-

ну из координат (например, δ) и параллакс ϖ . Нормальная матрица прямого астрометрического решения для неизвестных δ и ϖ имеет вид

$$\mathbf{N}_0 = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \sigma_\delta^{-2} & \frac{-\rho}{\sigma_\delta \sigma_\varpi} \\ \frac{-\rho}{\sigma_\delta \sigma_\varpi} & \sigma_\varpi^{-2} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где σ_δ и σ_ϖ – стандартные ошибки положения и параллакса соответственно, а ρ – коэффициент корреляции между ними; все эти величины основаны только на данных. Согласно уравнению (3.19), априорная нормальная матрица в рассматриваемом случае

$$\mathbf{N}_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varpi,p}^{-2} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Складывая эти выражения, находим полную нормальную матрицу решения с априорной информацией:

$$\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_p = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \sigma_\delta^{-2} & \frac{-\rho}{\sigma_\delta \sigma_\varpi} \\ \frac{-\rho}{\sigma_\delta \sigma_\varpi} & \sigma_\varpi^{-2} + (1 - \rho^2) \sigma_{\varpi,p}^{-2} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

Обращение этой матрицы даёт ковариационную матрицу решения

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sigma_\varpi^2 + \sigma_{\varpi,p}^2} \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 (\sigma_{\varpi,p}^2 + (1 - \rho^2) \sigma_\varpi^2) & \rho \sigma_\delta \sigma_\varpi \sigma_{\varpi,p}^2 \\ \rho \sigma_\delta \sigma_\varpi \sigma_{\varpi,p}^2 & \sigma_\varpi^2 \sigma_{\varpi,p}^2 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Выполнив несложные преобразования, эту матрицу удобно записать в виде

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_\delta^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{1 + (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)^2} \right) & \frac{\rho \sigma_\delta \sigma_{\varpi,p} (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)}{1 + (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)^2} \\ \frac{\rho \sigma_\delta \sigma_{\varpi,p} (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)}{1 + (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)^2} & \frac{\sigma_{\varpi,p}^2}{1 + (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Полученные выражения позволяют сделать ряд качественных выводов о поведении астрометрического решения с априорной информацией.

Рассмотрим сначала апостериорную неопределённость координаты, которая даётся квадратным корнем из первого диагонального элемента ковариационной матрицы,

$$\sigma_{\delta,\text{posterior}} = \sigma_\delta \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{1 + (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_\varpi)^2}}. \quad (3.25)$$

Эта формула согласуется с нашими численными экспериментами. В частности, она воспроизводит поведение неопределенности положения, показанное на рисунке 3.1, показывая монотонно возрастающую апостериорную стандартную ошибку $\sigma_{\delta,\text{posterior}}$ между двумя асимптотическими значениями, $\sigma_{\delta}\sqrt{1-\rho^2}$ и σ_{δ} , по мере того как ограничения меняются от очень жёстких до очень мягких, чему отвечают случаи $\sigma_{\varpi,p}/\sigma_{\varpi} \ll 1$ и $\sigma_{\varpi,p}/\sigma_{\varpi} \gg 1$ соответственно. Уравнение (3.25) показывает, что улучшение неопределенности координат, полученное с использованием априорной вероятности параллакса, зависит только от коэффициента корреляции ρ и отношения априорной вероятности параллакса к его формальной неопределенности $\sigma_{\varpi,p}/\sigma_{\varpi}$. Для некоррелированных данных улучшение невозможно, так как $\sigma_{\delta,\text{posterior}} = \sigma_{\delta}$ для $\rho = 0$.

В качестве следующего примера рассмотрим случай, когда прямое решение близко к вырожденному. Полностью вырожденная задача эквивалентна случаю $\rho = 1$. Как видно из уравнения (3.20), в этом случае нормальная матрица \mathbf{N}_0 является особенной, что делает прямое решение невозможным. Решение же с априорной информацией, напротив, вполне осуществимо и приводит к следующему выражению для апостериорной неопределённости координаты

$$\sigma_{\delta,\text{posterior}} = \sigma_{\delta} \frac{\sigma_{\varpi,p}/\sigma_{\varpi}}{\sqrt{1 + (\sigma_{\varpi,p}/\sigma_{\varpi})^2}}. \quad (3.26)$$

В этом случае величина $\sigma_{\delta,\text{posterior}}$ зависит только от отношения $\sigma_{\varpi,p}/\sigma_{\varpi}$. Нетрудно видеть, что она монотонно возрастает от нуля до σ_{δ} с ростом этого отношения, то есть когда мы переходим от жёстких к мягким ограничениям.

Таким образом, во всех случаях апостериорная ошибка не превышает σ_{δ} . Это означает, что предложенный метод использования априорной информации всегда ведёт к уменьшению стандартных ошибок координат по сравнению с ошибками, определёнными только по исходным данным. Аналогичные аргументы справедливы и для общего пятипараметрического решения, за исключением того, что их нельзя продемонстрировать так наглядно.

3.4. Численные эксперименты

В этом разделе продемонстрирована осуществимость предлагаемой методики посредством численных экспериментов. С помощью модели GUMS было создано три модельных каталога, каждый из которых содержал 5×10^5 звёзд. В первый каталог были включены самые яркие звёзды слабее $G = 11$, аналогично, во второй каталог вошли звёзды слабее $G = 15$, а в третий - звёзды слабее $G = 19$. Процедура численного моделирования выполнялась таким же образом, как описано в разделе 2.2.2. Для моделирования наблюдений и выполнения глобального астрометрического решения использовался программный пакет AGISLab [39; 76].

Для моделирования разреженного ряда наблюдений применялся следующий приём. Сначала определялись все возможные наблюдения данной звезды с использованием номинального закона сканирования. Затем каждому наблюдению присваивалась 95%-ная вероятность быть удаленным из решения. В результате, среднее число сохраненных транзитов на звезду составило 4.4.

Было получено астрометрическое решение с использованием оптимального априорного значения, которое было вычислено согласно процедуре, изложенной в разделе 3.2.4. Кроме того, были выполнены эксперименты с очень жёстким ограничением ($\sigma_{\varpi,p} = 0.01$ мсд, аналогично случаю А на рисунке 3.2) и очень мягким ограничением ($\sigma_{\varpi,p} = 1000$ мсд, аналогично случаю С на рисунке 3.2), чтобы проверить поведение решения в этих экстремальных случаях. Для сравнения также были получены два решения без каких-либо ограничений, в одном из которых были определены только координаты, а в другом - все пять астрометрических параметров. В последнем случае было невозможно найти единственное астрометрическое решение для всех звёзд, как объяснено в конце раздела 3.2.1.

Результаты суммированы в таблице 3.2. Показаны только результаты для оценок положения. При использовании очень жёстких ограничений с $\sigma_{\varpi,p} = 0.01$ мсд результаты весьма похожи на двухпараметрическое решение. Формальные неопределенности, вычисленные в этом решении, значительно занижают фактические ошибки. Использование вместо этого оптимального априорного значения $\sigma_{\varpi,F90}$ (или $10\sigma_{\varpi,F90}$) даёт разумные оценки неопределенностей. Использование этого априорного значения не только обеспечивает улучшенные неопределенности, но и уменьшает фактические ошибки по сравнению как с двухпараметрическим решением, так и с решением, на которое были наложены очень жёсткие ограничения. Это несколько удивительное поведение можно объяснить следующим образом. Использование ненулевой априорной неопределенности обеспечивает решению свободу, необходимую для учёта ненулевых параллаксов и собственных движений, что приводит к уменьшению фактических ошибок координат.

При очень большой априорной дисперсии параллаксов в одну угловую секунду байесовский подход все еще приводит к численно стабильному астрометрическому решению, включая реалистичные оценки ошибок координат. Однако фактические ошибки в два раза выше, чем ошибки, получаемые при оптимальном выборе априорной дисперсии.

Следует отметить, что без использования априорной информации никаких приемлемых решений для звёзд с разреженным рядом наблюдений вообще получить не удалось ни для случаев, когда число транзитов менее пяти, ни для случаев, когда звезда наблюдалась пять и более раз. Это обстоятельство по существу представляет собой экспериментальное подтверждение соображений, изложенных в конце раздела 3.1.1. Нормальная матрица не обязательно является сингулярной, особенно для объектов с пятью и более транзитами. Формально, наличие не менее пяти наблюдений позволяет определить пять астрометрических параметров (отвлекаясь от задачи определения вспомогательных величин, таких как ориентация космического аппарата и калибровка инструмен-

та). Однако, хотя формальное решение задачи наименьших квадратов и может быть получено, оно не будет надёжным, потому что решение системы линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей крайне чувствительно к малым изменениям входных параметров [27]. Подобные ситуации могут иметь место в ряде случаев. Например, если какая-либо звезда всегда наблюдается с близких мест земной орбиты, то определить параллакс такой звезды невозможно. Либо же, если все наблюдения какой-либо звезды являются коллинеарными, то есть, расположение сканов примерно параллельно, то для такой звезды нельзя определить компоненты собственного движения.

Таблица 3.2. Результаты численных экспериментов для звёзд с разреженным рядом наблюдений.

Априорная вариация $\sigma_{\varpi, p}$	Доля звёзд внутри эллипса			Ошибки положений (мсд)		
	$G = 11$	$G = 15$	$G = 19$	$G = 11$	$G = 15$	$G = 19$
Звёзды с 4 и менее транзитами						
—	0.5%	1.8%	13.5%	33.0	16.3	15.2
0.01 мсд	1.5%	3.5%	14.3%	21.8	12.1	14.8
$\sigma_{\varpi, F90}$	90.1%	91.4%	91.2%	7.6	4.3	7.6
$10\sigma_{\varpi, F90}$	92.7%	93.3%	94.4%	8.4	5.2	10.5
1000 мсд	92.5%	93.0%	93.3%	8.6	7.4	15.5
Звёзды с 5 и более транзитами						
—	0.3%	0.8%	8.6%	21.0	11.3	9.7
0.01 мсд	3.1%	5.4%	10.4%	6.7	5.0	8.9
$\sigma_{\varpi, F90}$	89.4%	89.9%	90.3%	0.2	0.3	1.6
$10\sigma_{\varpi, F90}$	89.5%	89.8%	90.5%	0.2	0.3	2.0
1000 мсд	89.5%	89.8%	90.0%	0.2	0.3	2.2

3.5. Априорная информация в каталогах Gaia

Разработанная методика была применена при создании всех трёх астрометрических каталогов Gaia, имеющихся в настоящий момент. Согласно терминологии, принятой в проекте Gaia, такие решения именуются двухпараметрическими. Приведённые в таблице 3.3 данные показывают, как доля таких объектов изменяется в различных выпусках данных.

Следует отметить существенное отличие между первым и последующими выпусками. Если во втором и третьем выпусках доли звёзд с двухпараметрическим решением примерно равны (21% и 19% соответственно), то в первом выпуске она составляет 99.8%. Иными словами, полноценные решения с пятью астрометрическими параметрами были получены только для 0.2% звёзд. Как объяснено в главе 2, обработка данных в проекте Gaia основывается на принципе самокалибровки, когда одни и те же данные наблюдений используются как для получения астрометрических параметров, так и для калибровки инструмента и определения ориентации космического аппарата. Первый выпуск данных включал наблюдения, произведённые в течение 14 месяцев. Столь короткий временной интервал не позволил собрать достаточно данных для надёжного определения параметров ориентации. В силу этого обстоятельства удалось определить все пять астрометрических параметров только для тех звёзд, для которых они уже были известны заранее. По сути, речь шла не об определении, а об уточнении имеющейся информации. Для этой цели были использованы объекты из каталогов Hipparcos и Tycho-2, общее число которых составляет два миллиона. При общем количестве звёзд в первом выпуске данных, равном 1143 миллиона, это как раз и даёт 0.2% звёзд с пятипараметрическим решением.

Что касается будущих каталогов Gaia, ожидается, что доля звёзд с двухпараметрическим решением существенно не изменится. Это обусловлено двумя

факторами. С одной стороны, накопление дополнительного наблюдательного материала приведёт к тому, что некоторая часть объектов переместится из двух- в пятипараметрический класс. С другой стороны, новые двухпараметрические решения будут найдены для тех слабых (или переменных) звёзд, для которых ранее вообще никакого удовлетворительного решения получить не удавалось. Таким образом, можно заключить, что разработанная методика будет интенсивно применяться для построения всех будущих астрометрических каталогов в проекте Gaia.

Таблица 3.3. Иллюстрация использования априорной информации при построении астрометрических каталогов Gaia.

Выпуск данных	Продолжительность наблюдений (в месяцах)	Общее количество объектов (в миллионах)	Доля звёзд с двухпараметрическим решением
DR1	14	1143	99.8%
DR2	22	1693	21%
DR3	34	1811	19%

Как уже было отмечено выше, суть разработанной методики заключается в том, что полученные стандартные ошибки позволяют оценить смещения самих параметров. Достоверности полученных результатов можно проверить путём сопоставления данных каталогов DR2 и DR3. С этой целью был выполнен следующий эксперимент. Существует 250 миллионов объектов, для которых в каталоге DR2 приведены только положения, а в каталоге DR3 – все пять астрометрических параметров. Из этого набора данных была осуществлена выборка, содержащая 34 миллиона звёзд, т.е., 14% от общего количества таких объектов. Каталоги DR2 и DR3 отнесены к эпохам 2015.5 и 2016.0, поэтому положения из каталога DR3 были преобразованы к эпохе каталога DR2 с помощью процедуры, изложенной в разделе 1.2. Наличие собственных движений и параллаксов в каталоге DR3 является необходимым условием для этого преобразования.

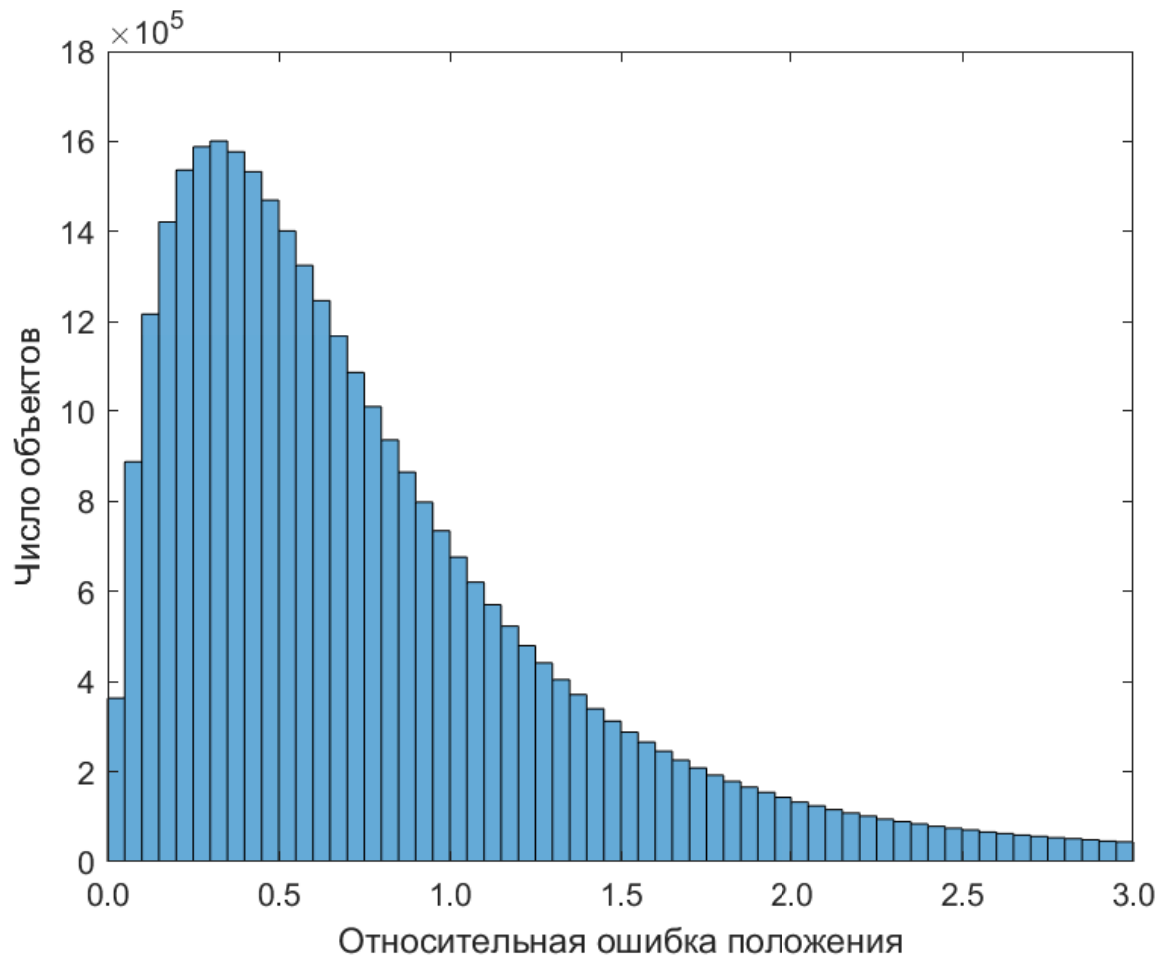


Рис. 3.4. – Относительная точность положений для звёзд с двухпараметрическим решением из каталога Gaia DR2, определённая путём сравнения с каталогом Gaia DR3. Гистограмма построена с использованием выборки, содержащей 34 миллиона объектов.

Будем обозначать положения из каталога DR2 индексом 2, а положения из каталога DR3, пересчитанные на эпоху 2015.5 – индексом 3, тогда ошибка в положении между каталогами определяется выражением

$$\epsilon_{\text{pos}} = \sqrt{(\alpha_3 - \alpha_2)^2 \cos^2 \delta + (\delta_3 - \delta_2)^2}. \quad (3.27)$$

Эта величина выражена в мсд и не очень пригодна для сравнения. Гораздо удобнее использовать не само смещение звезды, а её отношение к формальной ошибке. Для звёзд с двухпараметрическим решением в каталоге DR2 приведены стандартная ошибка прямого восхождения σ_{α^*} , стандартная ошибка склонения σ_δ и соответствующий коэффициент корреляции $\rho_{\alpha\delta}$. В качестве меры формальной точности уместно использовать большую полуось эллипса ошибок, которая вычисляется согласно формуле (9) из [96]

$$\sigma_{\text{pos}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{\alpha^*}^2 + \sigma_\delta^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{\alpha^*}^2 - \sigma_\delta^2)^2 + (2\rho_{\alpha\delta}\sigma_{\alpha^*}^2\sigma_\delta^2)^2}}. \quad (3.28)$$

Отношение $\mathcal{R} = \epsilon_{\text{pos}}/\sigma_{\text{pos}}$ является удобной статистической характеристикой достоверности информации о точности положений. Например, если в среднем $\mathcal{R} > 1$, это означает, что формальные ошибки недооценивают смещения положений, и наоборот, если в среднем $\mathcal{R} < 1$, то формальные ошибки завышены.

Результаты проведённого эксперимента показаны на рисунке 3.4, где приведено распределение величины \mathcal{R} для отобранных звёзд. Среднее значение этого отношения составляет 1.005. При этом доля объектов с $\mathcal{R} < 1$ составляет 71%, тогда как для 91% звёзд $\mathcal{R} < 2$. Полученные результаты свидетельствуют, что разработанная методика построения каталога с использованием априорной информации позволяет как надёжно определять координаты звёзд, так и получать достоверную информацию об их точности.

3.6. Выводы к третьей главе

В этой главе обсуждаются астрометрические решения для звёзд с недостаточным числом наблюдений. Подобная ситуация имела место для большинства звёзд в первом выпуске данных Gaia; с ней также приходится иметь дело и на более поздних этапах миссии, например, для объектов переменной светимости, которые наблюдаются только в своих ярких фазах, и звёзд, близких к пределу обнаружения. Во всех этих случаях всё ещё можно получить оценки положения, либо включая в решение только координаты, либо используя априорные данные для остальных параметров. Фактически, решение только для координат эквивалентно предположению, что параллакс и собственное движение равны нулю, другими словами, использованию априорного значения, равного нулю с бесконечным весом. Использование более тщательно выбранного априорного значения улучшает качество астрометрического решения для этих звёзд. В частности, это обеспечивает элегантный способ гарантировать, что оценки положения получают формальные неопределенности, которые правильно характеризуют фактические ошибки.

Априорная информация включается в астрометрическое решение с использованием правила Байеса. По практическим соображениям априорные распределения вероятностей принимаются гауссовыми. Более того, они всегда центрированы на нуле, поскольку любой другой выбор обязательно включал бы дополнительные предположения и, таким образом, был бы еще более произвольным. Для объектов с пренебрежимо малым параллаксом, таких как квазары, это консервативный выбор.

Было проанализировано влияние различных априорных данных на астрометрические решения, основанные на численных экспериментах с реалистичными распределениями звездных параметров из модели Gaia Universe Model

Snapshot (GUMS). Для оптимизации априорной информации было наложено требование, чтобы 90% фактических ошибок положения были включены в 90% доверительный эллипс, вычисленный на основании гауссовой апостериорной плотности вероятности, т. е. с использованием формальной ковариационной матрицы. Используя полученную априорную информацию ($\varpi_p = 0 \pm \sigma_{\varpi, F90}$), было продемонстрировано, что несингулярные пятипараметрические астрометрические решения могут быть получены с разумными оценками неопределенностей координат для любой звезды, которая наблюдается хотя бы в одном транзите поля зрения. Использование этой априорной информации немного уменьшает фактические ошибки положения по сравнению с двухпараметрическим решением.

Выбор 90%-го уровня достоверности для ошибок положения произволен, и можно было бы оптимизировать априорную вероятность для любого другого уровня. 10% звёзд, лежащих вне доверительного эллипса, нелегко идентифицировать в данных, и их можно считать статистическими выбросами. При статистическом использовании данных 90% обеспечивает хороший компромисс между сохранением достаточно малой доли выбросов и поддержанием хорошей характеристики позиционных неопределенностей для большинства звёзд. Более высокий уровень достоверности уменьшил бы долю выбросов, но за счет быстро растущей области достоверности из-за негауссовой природы фактических ошибок положения.

Как и любое решение, использующее априорную информацию, полученные астрометрические параметры в целом смещены. При использовании опорной эпохи, совпадающей со средней эпохой наблюдений, смещение положения имеет порядок пренебрегаемого параллакса или, самое большее, несколько мсд в типичных случаях, что вполне приемлемо. Чтобы получить реалистичные неопределенности положений, необходимо ввести параллакс и собственное движение в качестве формальных параметров в решение. Это означает, что для них также предоставляются апостериорные оценки. Однако полученные парал-

лаксы и собственные движения в целом настолько сильно смещены априорной информацией, что они становятся физически бессмысленными, и поэтому их не следует использовать.

Разработанная методика успешно применялась при создании всех трёх выпущенных к настоящему времени астрометрических каталогов Gaia и, без сомнения, будет использована в последующих выпусках. Кроме того, она весьма универсальна и может быть применена для надежного определения координат звёзд в тех случаях, когда имеющейся информации недостаточно для получения полноценного решения с пятью астрометрическими параметрами.

Глава 4

Модификация стандартной астрометрической модели с учётом конечности скорости света

Сформулированная в первой главе стандартная астрометрическая модель является чисто классической и тем самым неявно содержит предположение о бесконечности скорости света. Конечно, на практике все эффекты, связанные с конечностью скорости, должным образом учитываются при обработке наблюдений [15; 16; 82; 84], выполняемых либо с поверхности Земли, либо с борта космического аппарата. Как отмечено выше, результатом редукции наблюдений к системе ICRS, по сути, является набор параметров, описывающих положение и скорость звезды в определённый момент времени, как они выглядели бы для фиктивного наблюдателя, находящегося в состоянии покоя в БСС в отсутствие гравитационных полей всех тел Солнечной системы. При этом предполагается, что означенный момент времени отсчитывается по часам наблюдателя, привязанным к шкале времени TCB.

Вследствие конечности скорости света информация об изменении состояния звезды достигнет наблюдателя лишь по истечении срока, за который свет пройдет расстояние от рассматриваемой звезды до наблюдателя. Связанные с этим эффекты запаздывания приводят к необходимости проводить различие между истинными и наблюдаемыми величинами. Последние иногда называют видимыми [82; 94] или кажущимися [9], но термин «наблюдаемая величина» представляется вполне адекватным в данном контексте. Подчеркнем еще раз, что в дальнейшем предполагается, что все эффекты общей теории относительности были учтены при редукции наблюдений. С этого момента под наблюдением мы подразумеваем информацию о мгновенном кинематическом состоянии

звезды, которую видит наблюдатель, находящийся в БСС, относительно определенного момента, считываемого часами наблюдателя. Столь высокий уровень абстракции позволяет изучить эффекты запаздывания в чистом виде.

Возможно, впервые астрометрические проявления конечности скорости света были рассмотрены Шварцшильдом. При обсуждении вековой аберрации (звездной аберрации из-за движения Солнечной системы) в работе [129] он вывел соотношение между видимыми и истинными собственными движениями с точностью до членов первого порядка по v/c . В статье [63] преобразование астрометрических параметров с учетом эффектов запаздывания было получено как разложение в ряд по t и v/c , хотя и в форме, не очень полезной для практического применения. Автор пришел к выводу, что эффектами запаздывания «можно пренебречь в астрометрии современной точности, хотя и не обязательно, если измерения за пределами атмосферы станут практичными». Наиболее полный анализ проблемы до настоящего времени был выполнен Штумпфом [136], который вывел строгие соотношения между видимыми и истинными величинами на основе однородной прямолинейной модели, включая эффекты запаздывания. В настоящей работе представлено полное решение задачи, которое содержит вывод необходимых уравнений, их точное математическое решение и построение на этой основе строгой процедуры для преобразования эпохи с учетом конечности скорости света. Сопоставление с работой [136] приведено разделе 4.3.5.

Может возникнуть вопрос о необходимости учёта движения барицентра при рассмотрении эффектов запаздывания. Поскольку речь идёт о равномерном прямолинейном движении звёзд относительно барицентра, то равномерное поступательное движение барицентра не играет никакой роли ввиду эквивалентности различных инерциальных систем. Если же речь идёт об ускоренном движении, обусловленном галактическим вращением, то всё сказанное в разделе 1.5 о пределах применимости стандартной модели остаётся в силе и здесь.

4.1. Эффекты запаздывания для равномерного движения

4.1.1. Световое уравнение

В рамках астрометрической модели движение звезды описывается уравнением (1.2). Выпишем его ещё раз

$$\mathbf{R}(T_2) = \mathbf{R}(T_1) + (T_2 - T_1) \mathbf{v}. \quad (4.1)$$

Конечная скорость света делает необходимым различать время T^{em} , когда световой сигнал был испущен звездой, и время T^{obs} , когда тот же сигнал был обнаружен наблюдателем. Два момента времени связаны световым уравнением

$$T^{\text{obs}} = T^{\text{em}} + R(T^{\text{em}})/c, \quad (4.2)$$

где R – барицентрическое расстояние звезды.

Используя равномерную прямолинейную модель, описываемую уравнением (4.1), и учитывая разницу между барицентрическими векторами в два момента времени, получаем

$$\mathbf{R}(T^{\text{em}}) = \mathbf{R}(T^{\text{obs}}) - \tau \mathbf{v}, \quad (4.3)$$

где введено время распространения света

$$\tau = T^{\text{obs}} - T^{\text{em}}. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3), проиллюстрированное на рисунке 4.1, соответствует известному эффекту планетарной абберации в классической астрономии [150].

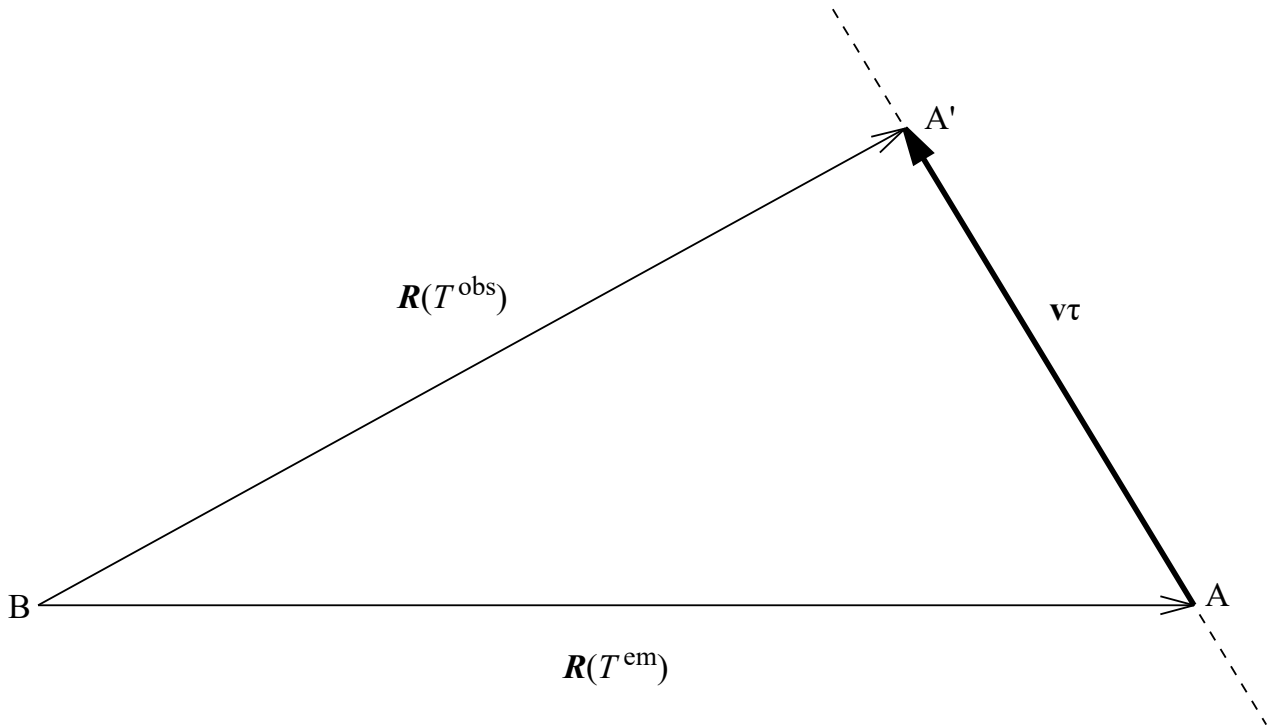


Рис. 4.1. – Эффект запаздывания для наблюдений равномерно движущейся звезды с точки зрения наблюдателя в барицентре Солнечной системы В. Этот рисунок явно демонстрирует различие между наблюдаемым и истинным положением, описываемое уравнением (4.3). В момент T^{obs} наблюдаемое положение звезды А даётся вектором $\mathbf{R}(T^{\text{em}})$. В течение времени τ , за которое свет пройдёт путь от точки А до точки В, звезда переместится в точку А'.

4.1.2. Истинные и наблюдаемые величины

Важным моментом уравнения (4.3) является то, что направление на звезду во время наблюдения, T^{obs} , задается барицентрическим вектором $\mathbf{R}(T^{\text{em}})$ в более раннее время T^{em} . Положение во время наблюдения, $\mathbf{R}(T^{\text{obs}})$, не наблюдается напрямую (по крайней мере, во время T^{obs} , хотя его можно вывести с помощью (4.3)).

Этот факт предполагает, что нам необходимо осознать разницу между наблюдаемыми величинами, такими как $\mathbf{R}(T^{\text{em}})$ в момент времени T^{obs} , и теми, которые не могут быть непосредственно обнаружены, такими как $\mathbf{R}(T^{\text{obs}})$. На-

блюдаемые величины будут снабжаться верхним индексом “app”, а ненаблюдаемые, то есть истинные, – верхним индексом “true”. Таким образом, мы можем записать

$$\mathbf{R}^{\text{app}}(T^{\text{obs}}) \equiv \mathbf{R}^{\text{true}}(T^{\text{em}}) \quad [= \mathbf{R}(T^{\text{em}})] . \quad (4.5)$$

Равенство в скобках подчеркивает, что величины, рассмотренные до сих пор, были истинными в указанном выше смысле.

Однородная прямолинейная модель в уравнении (4.1), конечно, выражается полностью в терминах истинных величин. Теперь мы перепишем ее в терминах видимых величин в моменты наблюдений. Поскольку $\tau = R^{\text{app}}(T^{\text{obs}})/c$, мы считаем, что световое время τ является наблюдаемой (видимой) величиной.

Если T_1 и T_2 в уравнении (4.1) принимаются за времена испускания, мы можем записать

$$\mathbf{R}^{\text{true}}(T_2^{\text{em}}) = \mathbf{R}^{\text{true}}(T_1^{\text{em}}) + (T_2^{\text{em}} - T_1^{\text{em}}) \mathbf{v}^{\text{true}} . \quad (4.6)$$

Используя уравнение (4.4) для того, чтобы выразить $T_2^{\text{em}} - T_1^{\text{em}}$ через наблюдаемые величины, и подставляя $\mathbf{R}^{\text{true}}(T^{\text{em}})$ из равенства (4.5), находим

$$\mathbf{R}^{\text{app}}(T_2^{\text{obs}}) = \mathbf{R}^{\text{app}}(T_1^{\text{obs}}) + [(T_2^{\text{obs}} - T_1^{\text{obs}}) - (\tau_2 - \tau_1)] \mathbf{v}^{\text{true}} . \quad (4.7)$$

Это почти достигает нашей цели, за исключением того, что формула все еще содержит одну величину, \mathbf{v}^{true} , которую нельзя наблюдать напрямую.

(Истинная) скорость по определению является производной по времени от вектора положения, что также очевидно из уравнения (4.1). Не имеет значения, используем ли мы время испускания или наблюдения при вычислении производной, пока то же самое время используется в качестве аргумента дифференцируемого вектора положения; то есть

$$\mathbf{v}^{\text{true}} = \frac{d\mathbf{R}^{\text{true}}(T^{\text{em}})}{dT^{\text{em}}} = \frac{d\mathbf{R}^{\text{true}}(T^{\text{obs}})}{dT^{\text{obs}}} . \quad (4.8)$$

На самом деле ни одна из этих производных не может быть измерена напрямую. Единственная скорость, которая может быть, в принципе, получена напрямую

из наблюдений, это производная видимого положения по времени наблюдения, или

$$\mathbf{v}^{\text{app}} = \frac{d\mathbf{R}^{\text{app}}(T^{\text{obs}})}{dT^{\text{obs}}} = \frac{d\mathbf{R}^{\text{true}}(T^{\text{em}})}{dT^{\text{obs}}}. \quad (4.9)$$

Сопоставление с формулой (4.8) показывает, что истинная и наблюдаемая скорость связи следующим образом:

$$\mathbf{v}^{\text{app}} = \mathbf{v}^{\text{true}} \frac{dT^{\text{em}}}{dT^{\text{obs}}} \quad (4.10)$$

и

$$\mathbf{v}^{\text{true}} = \mathbf{v}^{\text{app}} \frac{dT^{\text{obs}}}{dT^{\text{em}}}. \quad (4.11)$$

Для продолжения нам нужны выражения для этих производных, такие, чтобы $dT^{\text{em}}/dT^{\text{obs}}$ была записана как функция истинной скорости, а $dT^{\text{obs}}/dT^{\text{em}}$ — как функция кажущейся скорости.

Эти выражения получаются из светового уравнения (4.2). Дифференцирование по T^{em} даёт

$$\frac{dT^{\text{obs}}}{dT^{\text{em}}} = 1 + v_r^{\text{true}}/c. \quad (4.12)$$

Используемая здесь истинная лучевая скорость v_r^{true} определяется как производная барицентрического, то есть, истинного, расстояния по времени испускания света:

$$v_r^{\text{true}} = \left. \frac{dR^{\text{true}}(T)}{dT} \right|_{T=T^{\text{em}}}. \quad (4.13)$$

Здесь уместно отметить, что в концептуальной работе [94] эта величина именуется кинематической лучевой скоростью. Записывая барицентрическое положение как $\mathbf{R} = \mathbf{u}R$, где \mathbf{u} — единичный вектор, имеем $dR/dT = \mathbf{u}'(d\mathbf{R}/dT)$, откуда следует, что v_r^{true} представляет собой проекцию \mathbf{v}^{true} вдоль луча зрения: $\mathbf{u}^{\text{true}}(T^{\text{em}}) = \mathbf{u}^{\text{app}}(T^{\text{obs}})$.

Выражение в правой части уравнения (4.12) иногда называют доплеровским множителем (см. например [136]). Название происходит от того обстоятельства, что в классическом приближении оно равно отношению наблюдаемых длин волн к длинам волн в системе отсчета покоя, $\lambda_{\text{obs}}/\lambda_{\text{lab}}$, для неподвижного

наблюдателя. В специальной теории относительности отношение длин волн получает дополнительный лоренц-фактор обусловленным различием между T^{em} и собственным временем источника света; этот множитель зависит от полной скорости \mathbf{v}^{true} и, следовательно, включает в себя как ее тангенциальную составляющую, так и радиальную.

Выражение для производной $dT^{\text{obs}}/dT^{\text{em}}$ получается подобным образом. Дифференцирование (4.2) по T^{obs} с использованием (4.5) даёт

$$\frac{dT^{\text{em}}}{dT^{\text{obs}}} = 1 - v_r^{\text{app}}/c. \quad (4.14)$$

Здесь введена наблюдаемая лучевая скорость, определяемая как производная наблюдаемого барицентрического расстояния по времени наблюдения:

$$v_r^{\text{app}} = \left. \frac{dR^{\text{app}}(T)}{dT} \right|_{T=T^{\text{obs}}}. \quad (4.15)$$

В работе [94] эта величина именуется астрометрической лучевой скоростью. Несложно проверить, что v_r^{app} представляет собой проекцию \mathbf{v}^{app} вдоль луча зрения \mathbf{u}^{app} в момент наблюдения.

Подставляя (4.12) и (4.14) в (4.10) и (4.11), соответственно, получаем формулы, которые выражают связь между наблюдаемой и истинной скоростью.

$$\mathbf{v}^{\text{app}} = \mathbf{v}^{\text{true}} (1 + v_r^{\text{true}}/c)^{-1}, \quad (4.16)$$

$$\mathbf{v}^{\text{true}} = \mathbf{v}^{\text{app}} (1 - v_r^{\text{app}}/c)^{-1}. \quad (4.17)$$

Таким образом, эти скорости связаны посредством соответствующих доплеровских множителей; направление наблюдаемой и истинной скорости совпадают, тогда как их абсолютные величины различаются.

В то время как истинная скорость постоянна, согласно однородной прямолинейной модели, ее радиальная составляющая $v_r^{\text{true}} = \mathbf{u}(T)' \mathbf{v}^{\text{true}}$ в общем случае постепенно изменяется по мере движения звезды по прямой линии из-за изменения направления луча зрения $\mathbf{u}(T)$. Как показывает уравнение (4.16), это означает, что кажущаяся скорость, в общем случае, также является функцией времени. Исключением является звезда без собственного движения, т. е.

движущаяся по прямой линии, проходящей через наблюдателя, в этом случае истинная радиальная скорость постоянна.

Примечательно, что наблюдаемая скорость может при определённых обстоятельствах превышать скорость света. Например, рассмотрим объект, который движется строго по направлению к наблюдателю со скоростью $2/3c$. Поскольку лучевая скорость для приближающегося объекта отрицательна, уравнение (4.16) показывает, что наблюдаемая лучевая скорость в таком случае будет равна $-2c$. В этом, на первый взгляд парадоксальном, результате нет ничего необычного. Объекты со сверхсветовыми скоростями наблюдались неоднократно, и эта тема широко обсуждалась в литературе в 60-70-х годах [3; 38; 51; 55; 120; 121]. Связанные с этим вопросы подробно изложены в книге [9].

Мы теперь можем представить кинематическую модель исключительно в терминах наблюдаемых величин. Подставляя (4.17) в (4.7), получаем

$$\mathbf{R}^{\text{app}}(T_2^{\text{obs}}) = \mathbf{R}^{\text{app}}(T_1^{\text{obs}}) + [(T_2^{\text{obs}} - T_1^{\text{obs}}) - (\tau_2 - \tau_1)] \frac{\mathbf{v}^{\text{app}}}{1 - v_r^{\text{app}}/c}. \quad (4.18)$$

Как уже упоминалось, кажущиеся скорости \mathbf{v}^{app} и v_r^{app} , которые появляются в последнем множителе уравнения (4.18), в общем случае являются функциями времени. Однако, поскольку этот множитель равен истинной скорости, которая не зависит от времени, его можно оценить для любого времени, включая T_1^{obs} и T_2^{obs} .

Уравнение (4.18), определяющее наблюдаемое движение звезды, является фундаментальным для вычисления наблюдаемых величин в произвольный момент времени. Его решение обсуждается в разделе 4.2. Классическое уравнение движения (4.1) восстанавливается в пределе как $c \rightarrow \infty$.

4.2. Преобразование эпохи с эффектами запаздывания

В этом разделе разработана процедура преобразования астрометрических параметров и их ковариаций от одной эпохи к другой с учётом эффектов, связанных с конечностью скорости распространения света.

4.2.1. Решение уравнения движения

Уравнения (4.7) и (4.18) неявно определяют наблюдаемое положение звезды в терминах истинной и наблюдаемой скорости соответственно. В нижеследующих формулах (4.19)–(4.25) символ $\bar{\mathbf{v}}$ означает истинную скорость. Используя обозначения, введённые в разделе 4.1, мы можем записать выражение (4.7) как

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}} \left(t - \frac{R}{c} + \tau_0 \right), \quad (4.19)$$

где $\tau_0 = R_0/c$ – время распространения света в начальный момент t_0 . Возводя в квадрат, получаем квадратное уравнение для наблюдаемого расстояния:

$$\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} \right) R^2 + \frac{2}{c} \bar{\mathbf{v}}' [\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}} (t + \tau_0)] R - [\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}} (t + \tau_0)]^2 = 0. \quad (4.20)$$

Из формул Виета видно, что это уравнение имеет корни противоположных знаков. Выбирая положительный корень, находим

$$\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2} \right) R = -\frac{1}{c} \bar{\mathbf{v}}' [\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}} (t + \tau_0)] + \sqrt{[\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}} (t + \tau_0)]^2 - \frac{1}{c^2} (\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{R}_0)^2}. \quad (4.21)$$

Нетрудно видеть, что правая часть этого уравнения всегда положительна. Действительно, подкоренное выражение можно записать как сумму двух существен-

но положительных величин

$$\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}\right) [\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}}(t + \tau_0)]^2 + \frac{1}{c^2} \{\bar{\mathbf{v}}' [\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}}(t + \tau_0)]\}^2, \quad (4.22)$$

одна из которых в точности равна квадрату первого слагаемого в правой части формулы (4.21).

Определив барицентрическое расстояние в момент времени t , мы можем вычислить выражение в скобках в правой части уравнения (4.19), которое представляет собой разницу в моментах испускания сигнала, соответствующую моменту t , согласно формуле (4.7):

$$\Delta T^{\text{em}} = t - \frac{R}{c} + \tau_0. \quad (4.23)$$

Используя R из (4.21), получаем

$$\left(1 - \frac{\bar{v}^2}{c^2}\right) \Delta T^{\text{em}} = t + \tau_0 + \frac{\bar{\mathbf{v}}' \mathbf{R}_0}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{[\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}}(t + \tau_0)]^2 - \frac{1}{c^2} (\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{R}_0)^2}. \quad (4.24)$$

Для дальнейшего изложения удобно представить ΔT^{em} в виде дроби, применив равенство вида $x - y = (x^2 - y^2)/(x + y)$:

$$\Delta T^{\text{em}} = \frac{t(t + 2\tau_0)}{t + \tau_0 + \frac{\bar{\mathbf{v}}' \mathbf{R}_0}{c^2} + \frac{1}{c} \sqrt{[\mathbf{R}_0 + \bar{\mathbf{v}}(t + \tau_0)]^2 - \frac{1}{c^2} (\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{R}_0)^2}}. \quad (4.25)$$

Подставляя $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0/(1 - v_{r0}/c)$, согласно (4.17), используя полученное выражение для ΔT^{em} в (4.18) и опуская промежуточные громоздкие выкладки, получаем окончательно

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t f_{\text{T}}, \quad (4.26)$$

где введен временной фактор

$$f_{\text{T}} = \frac{t + 2\tau_0}{\tau_0 + \left(1 - \frac{v_{r0}}{c}\right) t + \frac{1}{c} \sqrt{(\mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t)^2 + \frac{2t}{c^2 \tau_0} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{R}_0)^2}}. \quad (4.27)$$

Эти формулы полностью решают рассматриваемую задачу: они определяют наблюдаемое положение в произвольный момент времени в терминах начального положения и скорости в рамках стандартной астрометрической модели.

Полезно рассмотреть частный случай чисто радиального движения, когда $v_{r0} = v_0$ и $v_t = 0$. Тогда $\mathbf{v}_0' \mathbf{R}_0 = v_0 b_0$ и $\mathbf{v}_0 \times \mathbf{R}_0 = 0$, так что $f_T = 1$, и выражение (4.26) сводится к

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (4.28)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что конечное время распространения света не оказывает никакого влияния на наблюдаемое движение звезды в случае чисто радиального движения. Конечно, этот результат можно получить гораздо проще, не используя общее решение уравнения наблюдаемой траектории: замечая, что обе скорости \mathbf{v}^{true} и v_r^{true} являются в этом случае постоянными, из уравнения (4.16) следует, что и видимая скорость постоянна. Таким образом, мы можем заменить дифференциалы в уравнениях (4.10) и (4.11) конечными разностями, что даёт

$$\Delta T^{\text{em}} \mathbf{v}^{\text{true}} = \Delta T^{\text{obs}} \mathbf{v}^{\text{app}}. \quad (4.29)$$

Подставляя это в (4.6) и используя соотношение (4.5) между истинным и наблюдаемым положениями, мы снова приходим к формуле (4.28). Поскольку эффекты, связанные с временем распространения света, исчезают при отсутствии поперечного движения, можно ожидать, что они будут малы для звезд с малыми собственными движениями. Этот вопрос подробно рассматривается в Приложении 4.5.

4.2.2. Преобразование астрометрических параметров

Преобразование астрометрических параметров от одной эпохи к другой с учётом эффектов запаздывания выполняется по той же самой схеме, которая была использована в разделе 1.2 для преобразования эпохи в рамках стандарт-

ной модели. Используя решение (4.26), находим квадрат преобразованного наблюдаемого положения

$$R^2 = R_0^2 \left(1 + 2\mu_{r0} t f_T + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) (t f_T)^2 \right). \quad (4.30)$$

Далее, по аналогии с выражением (1.29) вводим относительное изменение расстояния

$$f_D \equiv R_0/R = \left[1 + 2\mu_{r0} t f_T + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) (t f_T)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.31)$$

и получаем преобразованное барицентрическое направление

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0 (1 + \mu_{r0} t f_T) + \boldsymbol{\mu}_0 t f_T] f_D, \quad (4.32)$$

а также – преобразованный параллакс

$$\varpi = \varpi_0 f_D. \quad (4.33)$$

Сопоставление формул (4.30)-(4.33) и (1.28)-(1.31) показывает, что включением эффектов запаздывания просто сводимся к замене $t \rightarrow t f_T$.

Теперь рассмотрим преобразование собственных движений $\boldsymbol{\mu}$ и μ_r . Как пояснено в разделе 1.1, собственные движения можно найти двумя эквивалентными методами. Они могут быть либо выражены как производные по времени, либо получены из соответствующих компонентов скорости. Однако прямое дифференцирование по времени представляет большие трудности, поскольку \mathbf{u} и R включают фактор f_T , который является сложной функцией времени. Напротив, вычисление собственного движения с использованием наблюдаемой скорости в данном случае относительно просто.

Для преобразования наблюдаемой скорости, удобно применить следующий прием, основанный на постулируемом постоянстве истинной скорости. Сначала мы получаем истинную скорость из начальной наблюдаемой скорости с помощью уравнения (4.17), а затем подставляем ее в уравнение (4.16), чтобы получить наблюдаемую скорость в момент времени t . Однако следует подчеркнуть, что радиальная составляющая истинной скорости v_r^{true} в (4.16) должна быть вычислена вдоль преобразованного барицентрического направления:

$v_r^{\text{true}} = \mathbf{u}'\mathbf{v}^{\text{true}}$. Произведя вычисления, мы находим преобразованную наблюдаемую скорость

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 f_V, \quad (4.34)$$

где мы ввели фактор скорости

$$f_V = \left[1 + \frac{\mathbf{u}'\mathbf{v}_0}{c} - \frac{v_{r0}}{c} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)'\mathbf{v}_0}{c} \right]^{-1}. \quad (4.35)$$

Разложение вектора \mathbf{v} на тангенциальную и радиальную компоненты относительно направления, задаваемого преобразованным барицентрическим направлением (4.32), даёт преобразованные тангенциальную и радиальную компоненты наблюдаемой скорости:

$$\mathbf{v}_t = [\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}(\mathbf{u}'\mathbf{v}_0)] f_V, \quad (4.36)$$

$$v_r = (\mathbf{u}'\mathbf{v}_0) f_V. \quad (4.37)$$

Окончательно преобразование собственных движением получается подстановкой этих соотношений в уравнения (1.3) и (1.15):

$$\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_0 (1 + \mu_{r0} t f_T) - \mathbf{u}_0 \mu_0^2 t f_T] f_D^3 f_V, \quad (4.38)$$

$$\mu_r = [\mu_{r0} + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t f_T] f_D^2 f_V. \quad (4.39)$$

Преобразованные экваториальные координаты (α, δ) и компоненты собственного движения $(\mu_{\alpha*}, \mu_\delta)$ на эпоху t получаются из векторов \mathbf{u}_B и $\boldsymbol{\mu}$ обычным образом с использованием уравнений (1.7) и (1.10) соответственно.

Как и в случае стандартной модели, выведенные соотношения описывают преобразование шести астрометрических параметров $(\alpha_0, \delta_0, \varpi_0, \mu_{\alpha*0}, \mu_{\delta 0}, \mu_{r0})$, отнесённых к эпохе t_0 , в соответствующий набор параметров $(\alpha, \delta, \varpi, \mu_{\alpha*}, \mu_\delta, \mu_r)$, отнесённый к произвольной эпохе t . Учёт эффектов запаздывания приводит к замене $t \rightarrow t f_T$ и к появлению множителя f_V в формулах для собственного движения. Уместно отметить, что полученное преобразование также является полностью обратимым: последующее преобразование от t к t_0 приводит к исходным параметрам.

4.2.3. Масштабные множители f_D , f_T и f_V

Формулы, полученные в предыдущих разделах, включают три величины f_D , f_T и f_V , которые появляются как масштабирующие коэффициенты для изменений наблюдаемого расстояния, времени и скорости на распространяемом интервале. В этом разделе мы далее исследуем их физический смысл и дадим для них выражения в терминах астрометрических параметров.

Все три коэффициента на практике очень близки к единице, линейно стремясь к 1 при $t \rightarrow 0$. (Приближенные формулы для малых t даны в разделе 4.5.) Однако, в то время как $f_T = f_V = 1$ в пределе $c \rightarrow \infty$, фактор расстояния f_D в общем случае отличается от 1 также при игнорировании эффектов запаздывания, поскольку он дает относительное изменение расстояния согласно уравнениям (1.29) и (4.31).

Значение фактора времени f_T не сразу очевидно из его вывода в разделе 4.2.1. Однако, отметив, что его также можно записать

$$f_T = \frac{1}{1 - v_{r0}/c} \frac{\Delta T^{\text{em}}}{\Delta T^{\text{obs}}}, \quad (4.40)$$

мы видим, что он представляет собой комбинацию двух физических эффектов, возникающих из конечности скорости света: разницы между временем наблюдения и временем испускания, и разницы в абсолютном значении между истинной и кажущейся скоростями (фактор Доплера). Записывая время распространения света, отвечающее начальному моменту, как

$$\tau_0 = \frac{\tau_A}{\varpi_0}, \quad (4.41)$$

где $\tau_A = A/c = 499.004\,784$ s – время, за которое свет проходит одну астрономическую единицу, мы можем выразить временной фактор через астрономические параметры:

$$f_T = \frac{\varpi_0 t + 2\tau_A}{\varpi_0 t + \tau_A (1 + Z - \mu_{r0} t)}, \quad (4.42)$$

где

$$Z = \sqrt{1 + (t + 2\tau_A/\varpi_0) \mu_0^2 t + (2 + \mu_{r0} t) \mu_{r0} t}. \quad (4.43)$$

Как видно из уравнения (4.34), фактор скорости f_V дает относительное изменение наблюдаемой скорости за временной интервал распространения. Из второго равенства в уравнении (4.35) этот эффект можно интерпретировать как вековое изменение фактора Доплера. В терминах астрометрических параметров фактор скорости выглядит следующим образом

$$f_V = \left\{ 1 + (\tau_A/\varpi_0) [\mu_{r0} (f_D - 1) + f_D (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t f_T] \right\}^{-1}. \quad (4.44)$$

Кроме того, полезно отметить, что между величинами f_V и f_T существует весьма простое соотношение:

$$f_V = \frac{d}{dt} (t f_T). \quad (4.45)$$

Хотя прямая проверка этого соотношения требует громоздких вычислений, в его истинности можно убедиться проще, сравнив выражение для вектора собственного движения в уравнении (4.38) с эквивалентным вектором, полученным путем дифференцирования \mathbf{u} в уравнении (4.32) по t . Смысл уравнения (4.45) становится яснее, если его переписать следующим образом. Подставляя уравнение (4.40) для временного фактора, используя, что $\Delta T^{\text{obs}} = t$, и используя уравнения (4.34), (4.23) и (4.15), мы получаем следующую эквивалентную форму уравнения (4.45):

$$\frac{v}{v_0} = \frac{1 - v_r/c}{1 - v_{r0}/c}. \quad (4.46)$$

Это уравнение имеет простую интерпретацию: оно дает явное соотношение между абсолютным значением преобразованной наблюдаемой скорости и преобразованной наблюдаемой радиальной скоростью. В частности, оно показывает, что эти величины изменяются в противоположных направлениях: увеличение v_r приводит к уменьшению v и наоборот. Качественно подобное поведение обнаруживается также в случаях, когда движение не подчиняется однородной

прямолинейной модели; однако, простое линейное соотношение выше не выполняется в общем случае.

4.2.4. Преобразование ошибок и корреляций

Преобразование астрометрических параметров включает в себя масштабные множители f_D , f_T и f_V , которые в свою очередь являются функциями исходных параметров. Таким образом, зависимость преобразованных параметров от исходных становится весьма сложной. Чтобы сохранить компактность выражений, мы не будем раскрывать дифференциалы масштабных множителей в нижеследующих формулах. Полные выражения для дифференциалов приведены в конце этого раздела. Более того, удобно использовать не обычные, а логарифмические дифференциалы: $d \ln f_D = df_D/f_D$ и т. д.

Мы начинаем с рассмотрения дифференциалов преобразованных астрометрических параметров. Дифференциалы экваториальных координат даются формулой (1.44). Дифференциал параллакса даётся формулой (1.45). Дифференциалы компонентов собственного движения даются формулой (1.46). Далее, находим из уравнения (4.33)

$$d\varpi = f_D d\varpi_0 + \varpi d \ln f_D, \quad (4.47)$$

Непосредственное дифференцирование соотношения (4.39) даёт

$$\begin{aligned} d\mu_r &= 2t f_T f_D^2 f_V (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) \\ &+ (1 + 2\mu_{r0} t f_T) f_D^2 f_V d\mu_{r0} \\ &+ \mu_r (2d \ln f_D + d \ln f_V + d \ln f_T) - \mu_{r0} f_D^2 f_V d \ln f_T. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Для того чтобы найти дифференциалы координат и компонентов собственного движения из уравнений (1.44) и (1.46), необходимо выразить $d\mathbf{u}$ и $d\boldsymbol{\mu}$ через

начальные астрометрические параметры. Из формулы (4.32) находим дифференциал преобразованного направления

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} = & [(1 + \mu_{r0}t f_T) d\mathbf{u}_0 + t f_T (d\boldsymbol{\mu}_0 + \mathbf{r}_0 d\mu_{r0})] f_D \\ & - \mathbf{r}_0 f_D d \ln f_T + \mathbf{u} (d \ln f_D + d \ln f_T) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Полезно заметить, что последний член здесь обращается в нуль при выполнении скалярного умножения на вектора \mathbf{p} и \mathbf{q} , так как $\mathbf{p}'\mathbf{u} = \mathbf{q}'\mathbf{u} = 0$; следовательно, этот член не входит в окончательные выражения для дифференциалов $d\alpha^*$ и $d\delta$. Дифференцирование уравнения (4.39) даёт

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\mu} = & -\mu_0^2 t f_T f_D^3 f_V d\mathbf{u}_0 + (1 + \mu_{r0}t f_T) f_D^3 f_V d\boldsymbol{\mu}_0 \\ & - 2\mathbf{r}_0 t f_T f_D^3 f_V (\mu_{\alpha^*0} d\mu_{\alpha^*0} + \mu_{\delta0} d\mu_{\delta0}) \\ & + \boldsymbol{\mu}_0 t f_T f_D^3 f_V d\mu_{r0} + \boldsymbol{\mu} (3d \ln f_D + d \ln f_V + d \ln f_T) \\ & - \boldsymbol{\mu}_0 f_D^3 f_V d \ln f_T . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Здесь мы не стали раскрывать дифференциалы $d\mathbf{u}_0$ (вычисляемый аналогично 1.43) и $d\boldsymbol{\mu}_0$ (даваемый формулой 1.42), чтобы избежать слишком громоздких формул. Соответствующие явные выражения использованы при вычислении частных производных в Appendix 4.4.

Теперь мы переходим к рассмотрению масштабных факторов и начинаем с фактора расстояния. Из определения (4.31) находим

$$\begin{aligned} df_D = & - (t f_T)^2 f_D^3 (\mu_{\alpha^*0} d\mu_{\alpha^*0} + \mu_{\delta0} d\mu_{\delta0}) \\ & - t f_T f_D^3 (1 + \mu_{r0}t f_T) d\mu_{r0} \\ & - f_D^3 [\mu_{r0}t + (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t^2 f_T] df_T . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Используя преобразование радиального собственного движения (4.39), мы можем записать последнее слагаемое как $-f_D (\mu_r t f_T / f_V) d \ln f_T$. Поделив на f_D , находим логарифмический дифференциал

$$\begin{aligned} d \ln f_D = & - (t f_T)^2 f_D^2 (\mu_{\alpha^*0} d\mu_{\alpha^*0} + \mu_{\delta0} d\mu_{\delta0}) \\ & - t f_T f_D^2 (1 + \mu_{r0}t f_T) d\mu_{r0} \\ & - (\mu_r t f_T / f_V) d \ln f_T . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Логарифмический дифференциал фактора скорости получается непосредственно из его выражения через астрометрические параметры (4.44):

$$\begin{aligned}
d \ln f_V &= \frac{\tau_A}{\varpi_0^2} f_V [\mu_{r0} (f_D - 1) + f_D (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t f_T] d\varpi_0 \\
&\quad - 2 \frac{\tau_A}{\varpi_0} t f_T f_D f_V (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) \\
&\quad + \frac{\tau_A}{\varpi_0} f_V (1 - f_D (1 + 2\mu_{r0} t f_T)) d\mu_{r0} \\
&\quad - \frac{\tau_A}{\varpi_0} (\mu_r / f_D) d \ln f_D \\
&\quad - \frac{\tau_A}{\varpi_0} f_D f_V (\mu_0^2 + \mu_{r0}^2) t f_T d \ln f_T.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Подставляя $d \ln f_D$ из соотношения (4.52), находим

$$\begin{aligned}
d \ln f_V &= \frac{1}{\varpi_0} (1 - f_V) d\varpi_0 \\
&\quad + \frac{\tau_A}{\varpi_0} t f_T f_D (\mu_r t f_T - 2f_V) (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) \\
&\quad + \frac{\tau_A}{\varpi_0} [f_V + f_D (f_V + (1 + \mu_{r0} t f_T) (\mu_r t f_T - 2f_V))] d\mu_{r0} \\
&\quad - \frac{\tau_A}{\varpi_0} \mu_0^2 t f_T f_D^3 f_V d \ln f_T.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Фактор времени удобно записать в виде дроби

$$f_T = X/Y, \tag{4.55}$$

в которой величины X и Y задаются уравнением (4.42). Тогда

$$d \ln f_T = \frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y}, \tag{4.56}$$

где

$$dX = t d\varpi_0 \tag{4.57}$$

и

$$\begin{aligned}
dY &= t \left(1 - \frac{\mu_0^2 \tau_A^2}{Z \varpi_0^2} \right) d\varpi_0 \\
&\quad + \frac{t \tau_A}{Z} \left(t + 2 \frac{\tau_A}{\varpi_0} \right) (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) \\
&\quad + t \tau_A \left(\frac{1 + \mu_{r0} t}{Z} - 1 \right) d\mu_{r0}.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Все частные производные, составляющие якобиан преобразования астрометрических параметров от одной эпохи к другой, могут быть выведены из полученных выше дифференциалов. В качестве примера рассмотрим частную производную преобразованного прямого восхождения по начальному параллаксу. Из формулы (1.44) имеем

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial \varpi_0} = \mathbf{p}' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varpi_0}. \quad (4.59)$$

Как видно из выражения (4.49), в преобразование направления \mathbf{u} параллакс ϖ_0 входит только через временной фактор, поэтому мы можем записать

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial \varpi_0} = -\mathbf{p}' \mathbf{r}_0 f_D \frac{\partial \ln f_T}{\partial \varpi_0}. \quad (4.60)$$

Принимая во внимание соотношения (4.57) и (4.58), находим

$$\frac{\partial \ln f_T}{\partial \varpi_0} = \frac{t}{X} - \left(1 - \frac{\mu_0^2 \tau_A^2}{Z \varpi_0^2}\right) \frac{t}{Y}. \quad (4.61)$$

Окончательно, выражая X и Y через астрометрические параметры, получаем искомую производную

$$\frac{\partial \alpha^*}{\partial \varpi_0} = -\mathbf{p}' \mathbf{r}_0 f_D t \left[\frac{1}{\varpi_0 t + 2\tau_A} - \frac{1 - \mu_0^2 \tau_A^2 / (Z \varpi_0^2)}{\varpi_0 t + \tau_A (1 + Z - \mu_{r_0} t)} \right]. \quad (4.62)$$

4.3. Обсуждение

Далее мы обсудим условия, при которых эффекты, связанные с конечностью скорости света, могут быть значимыми при преобразовании астрометрических параметров то одной эпохи к другую. Сначала мы рассмотрим абсолютную величину самого эффекта, а затем его величину по отношению к отклонениям от предполагаемого равномерного прямолинейного движения. Обсуждается

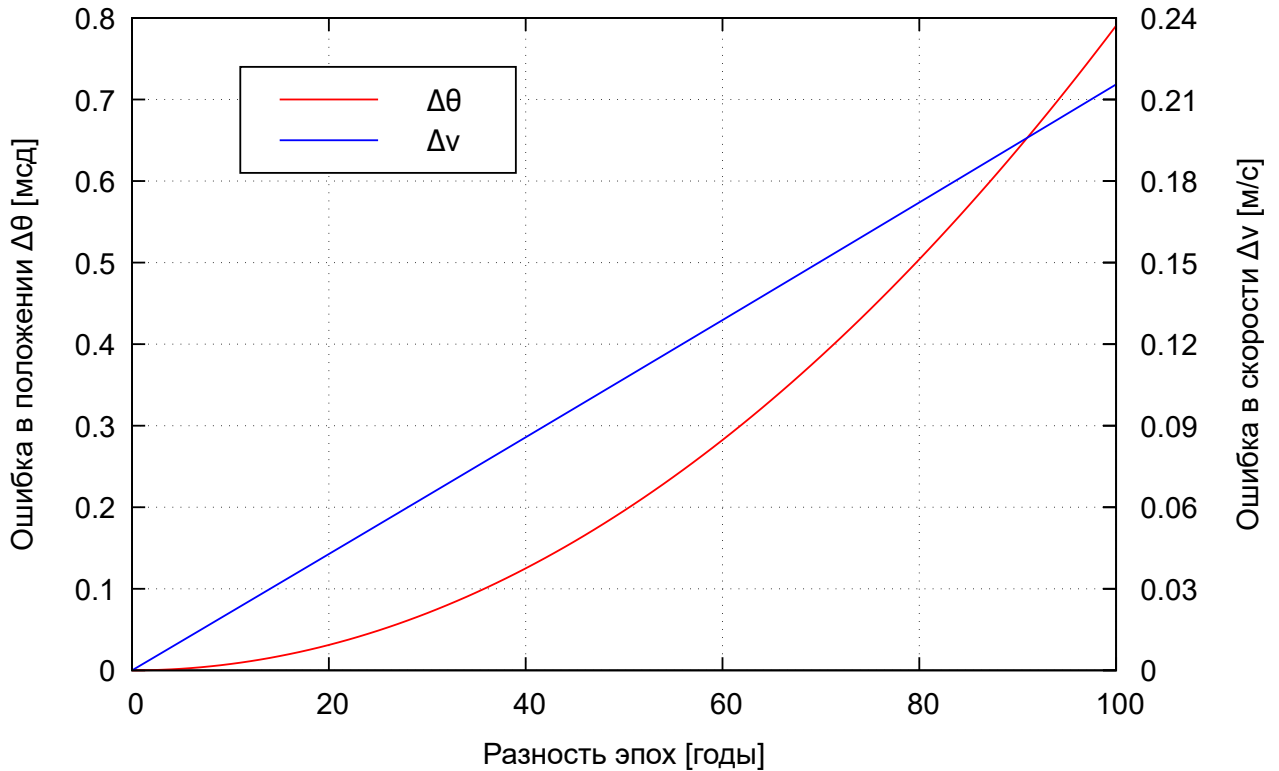


Рис. 4.2. – Эффекты запаздывания для звезды Барнарда (HIP 87937). Красная линия и левая ось показывают разницу между положениями, вычисленными с учётом эффектов запаздывания и без оных. Синяя линия и правая ось показывают то же самое для наблюдаемой скорости.

применимость разработанной методики к реальным данным и устанавливается простой критерий того, когда эти эффекты следует игнорировать. Наконец, мы кратко рассмотрим полученные результаты в связи с более ранней работой [136].

4.3.1. Когда можно пренебречь эффектами запаздывания?

На практике ненулевое время распространения света можно игнорировать, если его наблюдаемые проявления малы по сравнению с требуемой астрометрической точностью. В Приложении 4.5 выведены приближенные формулы, ко-

торые описывают влияние времени распространения света на преобразованные астрометрические параметры. Здесь мы ограничимся угловым положением $\Delta\theta$ и собственным движением $\Delta\mu$. Пусть σ_θ и σ_μ – требуемые точности положений и собственных движений, тогда конечностью скорости света можно пренебречь при выполнении условий $\Delta\theta \ll \sigma_\theta$ и $\Delta\mu \ll \sigma_\mu$, которые с помощью уравнения (4.89) можно записать как

$$t^2 \ll \frac{2\varpi\sigma_\theta}{\mu^3\tau_A}, \quad t \ll \frac{\varpi\sigma_\mu}{\mu^3\tau_A}. \quad (4.63)$$

Для большой разности эпох $\sigma_\theta = t\sigma_\mu$ согласно (1.61), и полученные условия совпадают с точностью до множителя 2.

Сильная (кубическая) зависимость от μ в уравнении (4.63) предполагает, что эффекты, связанные со временем распространения света, важны в основном для звезд с высоким собственным движением. В качестве примера рассмотрим звезду Барнарда (HIP 87937), которая при $\mu = 10357.70 \text{ mas yr}^{-1}$ и $\varpi = 549.01 \text{ mas}$ имеет самое большое собственное движение в каталоге Hipparcos [64]. Для позиционной точности $\sigma_\theta = 1 \text{ mas}$ этими эффектами можно пренебречь, если $t \ll 114$ лет, тогда как для $\sigma_\theta = 1 \mu\text{as}$ они становятся существенными уже при $t \geq 3.6$ лет. На рисунке 4.2 показано влияние времени распространения света на преобразованные положение и скорость для этой звезды.

4.3.2. Когда эффектами запаздывания пренебречь необходимо?

До сих пор молчаливо предполагалось, что астрометрические параметры точно описывают состояние движения звезды. Если это условие не выполняется — например, из-за неопределенностей в параметрах — прямое применение простой кинематической модели может привести к ошибочным и даже физически абсурдным результатам.

Рассмотри простой пример, который иллюстрирует влияние ошибок наблюдений. Пусть измеренный параллакс будет меньше истинного параллакса, в то время как ошибки остальных астрометрических параметров незначительны. Соответственно, расстояние, полученное из измеренного параллакса, будет завышено. То же можно сказать и о тангенциальной скорости, вычисленной из этого расстояния и собственного движения. Если истинный параллакс мал, его измеренное значение, оставаясь положительным, может быть во много раз меньше истинной величины, что приведёт к значительному завышению как расстояния, так и тангенциальной скорости. Когда наблюдаемый параллакс стремится к нулю, вычисленная скорость стремится к бесконечности. С другой стороны, истинная скорость не должна превышать скорость света, $v^{\text{true}} < c$. Используя уравнение (4.17), находим условие

$$\frac{v}{1 - v_r/c} < c, \quad \text{или} \quad v + v_r < c, \quad (4.64)$$

где v and v_r – наблюдаемые скорости. В терминах астрометрических параметров это приводит к следующему условию

$$\varpi > \tau_A \left(\mu_r + \sqrt{\mu^2 + \mu_r^2} \right). \quad (4.65)$$

Для данного собственного значения любой параллакс ниже этого предела является физически бессмысленным, потому что он отвечает сверхсветовому движению. Следует подчеркнуть, что здесь речь идёт об истинной скорости. Наблюдаемая скорость может превышать скорость света, что физически возможно и вполне допускается уравнением (4.17). Однако, уравнение (4.65) представляет собой очень слабое условие. Например, оно даёт $\varpi \gtrsim 30 \mu\text{as}$ для собственного движения порядка 1 arcsec yr^{-1} . Учёт наблюдательных ошибок позволяет наложить гораздо более строгие условия на наблюдаемые параллаксы.

В работе [41] рассматривается влияние точности тригонометрических параллаксов на определение таких физических величин, как расстояние и абсолютная звёздная величина. Для отдельных звёзд такие оценки являются незначительно несмещёнными только тогда, когда истинная относительная точность

параллакса – отношение ошибки параллакса к его величине – не превышает 10%. Хотя на практике это отношение в точности неизвестно, его можно аппроксимировать относительной погрешностью измеренного параллакса, σ_{ϖ}/ϖ . Поскольку применение незначительных эффектов, связанных со временем распространения света, очевидно бессмысленно, если результат уже значительно искажен ошибками наблюдений, мы приходим к выводу, что эти эффекты следует игнорировать, если $\varpi < 10\sigma_{\varpi}$.

Заслуживает упоминания тот факт, что формулы преобразования, полученные в рамках классической модели, работают для любого значения параллакса. Параллакс появляется только в уравнении (1.31) и в частных производных J_{34} , J_{35} и J_{36} . Все эти выражения включают параллакс как простой множитель, что не приводит ни к каким математическим или численным проблемам, даже если значение параллакса оказывается нулевым или отрицательным. Физически такой параллакс, конечно, бессмыслен, но, тем не менее, его можно рассматривать как формальный параметр модели. В книге [140] (Глава 16) приводятся более общие соображения об использовании малых, нулевых или отрицательных параллаксов в астрофизических приложениях астрометрических данных.

4.3.3. Эффекты запаздывания для избранных звёзд

Для звезды с известным параллаксом, собственным движением и лучевой скоростью влияние ненулевого времени распространения света на преобразование астрометрических параметров можно наглядно продемонстрировать сравнивая величины, полученные как с учётом конечности скорости света (раздел 4.2.2), так и без него (раздел 1.2). Такие вычисления были проделаны

для звезд Hipparcos с лучевыми скоростями, взятыми из каталога ХИР [2]. Предпоследний столбец в таблице 4.1 даёт вычисленный эффект за столетие в положении ($\Delta\theta$). В таблице приведены 23 звезды, для которых смещение положения превышает 0.5 мсд. Поскольку, как показано в разделе 4.5, и как видно из рисунка 4.2, $\Delta\theta$ растёт квадратично со временем, значения, приведенные в таблице для $t = 100$ лет, легко масштабируются на другую разность эпох.

Интересно сравнить эффекты запаздывания с хорошо известным вековым ускорением [20; 128; 141], которое является чисто геометрическим эффектом, возникающим вследствие изменения расстояния и угла между вектором скорости и лучём зрения. Изменение собственного движения, обусловленное этим эффектом, равно $\dot{\mu} = -2\mu\mu_r$, что приводит к изменению положения звезды

$$\Delta\theta_{\text{век}} = \mu\mu_r t^2 \quad (4.66)$$

за время t . Как видно из таблицы, эффект векового ускорения обычно примерно на три порядка больше эффектов запаздывания (что примерно соответствует отношению скорости света к скорости звезды). Однако фактическое отношение зависит от угла между движением звезды и лучём зрения, так что, например, звезда с наибольшими эффектами запаздывания (HIP 57939) имеет только шестой по величине эффект перспективы. Вековое ускорение полностью учитывается во всех полученных формулах преобразования, как с эффектами запаздывания, так и без них.

4.3.4. Эффекты запаздывания и галактическое ускорение

Рассматриваемое преобразование астрометрических параметров основано на модели равномерного прямолинейного движения звезд, которая в какой-то момент нарушается из-за (дифференциального) галактического ускорения.

Таблица 4.1. Избранные звёзды со значительными эффектами запаздывания. В столбцах приведены: номер звезды в каталоге Hipparcos, тригонометрический параллакс, компоненты собственного движения, радиальное собственное движение, тангенциальная скорость, радиальная скорость, $\Delta\theta$ – смещение положения вследствие эффектов запаздывания за 100 лет, $\Delta\theta_{\text{век}}$ – смещение положения вследствие векового ускорения за 100 лет.

HIP	ϖ (мсд)	μ_{α^*} (мсд/год)	μ_{δ} (мсд/год)	μ_r (мсд/год)	v_t (км/с)	v_r (км/с)	$\Delta\theta$ (мсд)	$\Delta\theta_{\text{век}}$ (мсд)
439	229.33	5634.07	-2337.94	1227.81	126.09	25.38	0.38	363
5336	132.40	3421.44	-1599.27	-2739.91	135.22	-98.10	0.16	502
16404	17.58	1190.86	-1066.16	-600.40	431.01	-161.90	0.09	47
18915	54.14	1732.49	-1365.50	-294.09	193.15	-25.75	0.08	31
19849	198.24	-2239.33	-3419.86	-1769.76	97.75	-42.32	0.13	351
21609	17.00	732.93	1249.38	211.58	403.91	59.00	0.07	15
24186	255.26	6506.05	-5731.39	13202.74	161.02	245.19	0.96	5550
38541	35.29	705.00	-1834.55	-1745.34	264.00	-234.45	0.08	166
46120	16.46	202.13	1237.24	-329.51	361.05	-94.90	0.05	20
54035	392.40	-580.20	-4767.09	-7010.35	58.01	-84.69	0.11	1632
54211	206.94	-4410.79	943.32	3007.32	103.32	68.89	0.17	658
55042	79.71	-2465.03	1179.06	-588.52	162.51	-35.00	0.10	78
56936	44.28	262.62	-3157.21	-1102.22	339.17	-118.00	0.28	169
57939	109.21	4003.69	-5813.00	-2265.77	306.38	-98.35	1.24	775
74234	33.68	-1001.47	-3542.66	2207.95	518.17	310.77	0.57	394
74235	34.14	-998.86	-3542.91	2233.43	511.12	310.12	0.56	399
80837	24.34	-432.73	-1392.34	-244.56	283.97	-47.63	0.05	17
87937	549.01	-797.84	10326.93	-12798.54	89.43	-110.51	0.79	6427
104059	52.26	-914.54	-2035.65	-15.43	202.43	-1.40	0.08	2
104214	287.13	4155.10	3258.90	-3981.87	87.18	-65.74	0.20	1019
104217	285.42	4107.40	3143.72	-3857.60	85.91	-64.07	0.19	967
108870	275.76	3959.97	-2538.84	-2326.86	80.86	-40.00	0.15	531
114046	303.90	6767.26	1326.66	564.79	107.57	8.81	0.41	189

Этот эффект оценивается в разделе 1.5, где выведено уравнение (1.66) для изменения положения звезд, обусловленного ускорением в галактической плоскости. Это изменение пропорционально $\sin 2l$, где l – галактическая долгота, и является квадратичной функцией времени. Поскольку наблюдаемые изменения положения, связанные с конечностью скорости света, также квадратичны по времени согласно уравнению (4.91), относительный размер этих двух эффектов не меняется со временем и зависит только от положения и скорости рассматриваемой звезды. Сравнивая две формулы, видно, что эффект времени распространения света доминирует над галактическим ускорением, если

$$0.36 \times \left(\frac{v_t}{10^3 \text{ km s}^{-1}} \right)^3 > \left(\frac{R}{1 \text{ kpc}} \right)^2 \times |\sin 2l|. \quad (4.67)$$

В прямоугольной гелиоцентрической галактической системе координат с осями x и y , направленными к $l = 0^\circ$ и 90° соответственно, имеем $\sin 2l = 2xy/(x^2 + y^2) = 2xy/R^2$. Таким образом, для заданной тангенциальной скорости v_t эффект времени распространения света доминирует внутри области вокруг Солнца, ограниченной четырьмя гиперболами, по одной в каждом квадранте, как показано на рисунке 4.3. Поскольку очень немногие галактические звезды имеют скорости, превышающие 300 км/с, мы приходим к выводу, что эффект галактического ускорения обычно доминирует за пределами расстояния около 100 пк от Солнца.

4.3.5. Сопоставление с работой Штумпффа

Наиболее полный анализ астрометрических эффектов запаздывания до настоящего времени был выполнен Штумпффом в 1985 году [136]. Как и в настоящей работе, Штумпфф выполнил свой анализ в рамках однородной прямолинейной модели, сделал явное различие между истинными и наблюдаемыми

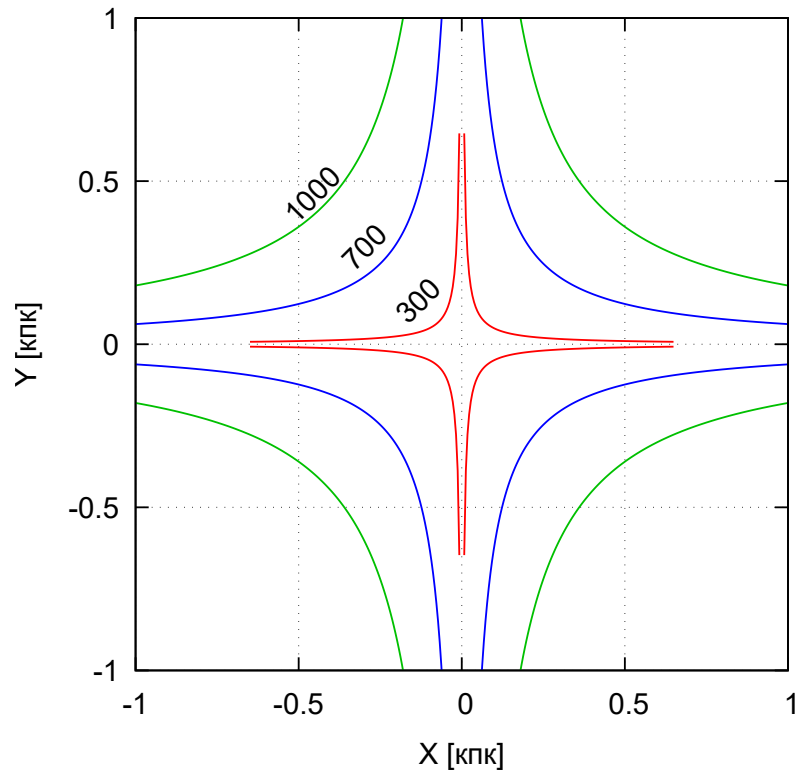


Рис. 4.3. – Сравнения эффектов запаздывания и галактического ускоения в плоскости Галактики. Солнце расположено в начале координат, галактический центр лежит на оси x . Кривые показывают места, где воздействие этих эффектов на тангенциальную скорость одинаково. Показаны кривые, отвечающие трём различным значениям тангенциальной скорости (в км/с). Эффекты запаздывания преобладают над галактическим ускорением для звёзд, находящихся ближе к Солнцу, чем соответствующая кривая. Вычисления выполнены согласно уравнению (4.67).

величинами и выразил преобразованные величины как функции времени наблюдения. Однако между двумя исследованиями есть ряд важных различий, которые суммируются ниже.

Штумпф [136] выразил преобразованные величины в терминах истинной, а не наблюдаемой скорости. Хотя он вывел преобразование из истинной в видимую скорость, эквивалентное нашему уравнению (4.16), он не дал обратного соотношения в уравнении (4.17). Вместо этого было получено приближенное уравнение для обратного преобразования с помощью релятивистской формулы для эффекта Доплера. По нашему мнению, это запутывает рассмотрение, пришедшая совершенно другую проблему, а именно связь между кинематической лучевой скоростью v_r и спектроскопически наблюдаемым эффектом Доплера [94].

Что касается преобразования астрометрических параметров от одной эпохи к другой, в работе [136] был предложен итерационный метод для нахождения истинных параметров, их последующего преобразования и, наконец, окончательного перехода к наблюдаемым параметрам в новой эпохе. Напротив, мы даем явные формулы, выражающие преобразованные наблюдаемые параметры как функции начальных наблюдаемых параметров.

Кроме того, Штумпф разработал формулы преобразования в терминах длины дуги вдоль наблюдаемой траектории звезды, т. е. по сути в скалярной форме, в то время как мы используем векторы формализм, который даёт ясные и краткие формулы, легко переводимые в компьютерный код. Это, очевидно, важно для любого практического применения модели, где также необходимо учитывать распространение ошибок. Следует отметить, что Штумпф не предоставил якобиан преобразования и не рассмотрел границы применимости модели равномерного прямолинейного движения, обусловленные в галактическом гравитационном поле.

4.4. Якобиан преобразования с эффектами запаздывания

В этом разделе приведены формулы для 36 частных производных, составляющих якобиан, который необходим для вычисления ковариационной матрицы астрометрических параметров на эпоху t согласно уравнению (1.38).

Введём несколько обозначений для сокращения записи получаемых выражений. Символы χ будут использоваться для обозначения частных производных логарифма фактора скорости:

$$d \ln f_V = \chi_{\varpi} d\varpi_0 + \chi_{\mu} (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) + \chi_r d\mu_{r0} + \chi_T d \ln f_T. \quad (4.68)$$

Соотношение (4.54) показывает, что

$$\left. \begin{aligned} \chi_{\varpi} &= \frac{1}{\varpi_0} (1 - f_V), \\ \chi_{\mu} &= \frac{\tau_A}{\varpi_0} t f_T f_D (\mu_r t f_T - 2f_V), \\ \chi_r &= \frac{\tau_A}{\varpi_0} [f_V + f_D (f_V + (1 + \mu_{r0} t f_T) (\mu_r t f_T - 2f_V))], \\ \chi_T &= -\frac{\tau_A}{\varpi_0} f_D^3 \mu_0^2 t f_T. \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Логарифмический дифференциал временного фактора аналогичным образом можно представить как

$$d \ln f_T = \psi_{\varpi} d\varpi_0 + \psi_{\mu} (\mu_{\alpha*0} d\mu_{\alpha*0} + \mu_{\delta 0} d\mu_{\delta 0}) + \psi_r d\mu_{r0}, \quad (4.70)$$

где, согласно (4.56), (4.57) и (4.58),

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\varpi} &= \frac{t}{X} - \frac{t}{Y} \left(1 - \frac{\mu_0^2 \tau_A^2}{Z \varpi_0^2} \right), \\ \psi_{\mu} &= -\frac{t \tau_A}{YZ} \left(t + 2 \frac{\tau_A}{\varpi_0} \right), \\ \psi_r &= -\frac{t \tau_A}{Y} \left(\frac{1 + \mu_{r0} t}{Z} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

Величины X , Y и Z определяются уравнениями (4.55), (4.42) и (4.43). Приведём для справок явные выражения этих величин через астрометрические параметры:

$$\left. \begin{aligned} X &= \varpi_0 t + 2\tau_A, \\ Y &= \varpi_0 t + \tau_A (1 + Z - \mu_{r0} t), \\ Z &= \sqrt{1 + (t + 2\tau_A/\varpi_0) \mu_0^2 t + (2 + \mu_{r0} t) \mu_{r0} t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$

Удобно также исключить $d \ln f_D$ и $d \ln f_V$ из уравнений для дифференциалов собственных движений (4.48) и (4.50), заменив их $d \ln f_T$ и дифференциалами астрометрических параметров. Для упрощения последующих формул введем специальные обозначения для множителей, с которыми $d \ln f_T$ входит в выражения для $d\boldsymbol{\mu}$ and $d\mu_r$. Произведя необходимые вычисления, находим:

$$\left. \begin{aligned} \nu &= \boldsymbol{\mu} \left[1 - t f_T \left(3 \frac{\mu_r}{f_V} + \frac{\tau_A}{\varpi_0} \mu_0^2 f_D^3 f_V \right) \right] - \boldsymbol{\mu}_0 f_D^3 f_V, \\ \xi &= \mu_r \left[1 - t f_T \left(2 \frac{\mu_r}{f_V} + \frac{\tau_A}{\varpi_0} \mu_0^2 f_D^3 f_V \right) \right] - \mu_{r0} f_D^2 f_V. \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

Кроме того, целесообразно показать, как частные производные преобразованных координат по начальному радиальному собственному движению могут быть выражены в терминах преобразованных собственных движений. Как было отмечено в разделе 4.2.4, член, пропорциональный преобразованному барицентрическому положению \mathbf{u} в уравнении (4.49), не имеет значения, поскольку он нормален как к \mathbf{p} , так и к \mathbf{q} . Однако, сохраняя первое слагаемое в этом члене, $\mathbf{u} d \ln f_D$, и используя уравнение (4.52) для $d \ln f_D$, мы можем записать производную \mathbf{u} по начальному радиальному собственному движению как

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu_{r0}} = [\mathbf{r}_0 f_D - \mathbf{u} (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^2] t f_T - \mathbf{r}_0 f_D \psi_r. \quad (4.74)$$

Подставляя (4.32) для \mathbf{u} и используя преобразование собственного движения из (4.38), находим что

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mu_{r0}} = -\boldsymbol{\mu} (t f_T)^2 / f_V - \mathbf{r}_0 f_D \psi_r$$

Умножая это соотношение скалярно на \mathbf{p} and \mathbf{q} , мы окончательно получаем частные производные $\partial\alpha^*/\partial\mu_{r0}$ и $\partial\delta/\partial\mu_{r0}$, которые приведены ниже в качестве элементов J_{16} и J_{26} матрицы Якоби.

Приведённые ниже элементы матрицы Якоби для преобразования астрометрических параметров. Для удобства, они сгруппированны по конечным астрометрам: сначала идут частнв соответствThe elements of the Jacobian matrix are given hereafter.

Частные производные прямого восхождения

$$\left. \begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial\alpha^*}{\partial\alpha_{*0}} = \mathbf{p}'\mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0}t f_T) f_D - \mathbf{p}'\mathbf{r}_0\mu_{\alpha*0}t f_T f_D, \\ J_{12} &= \frac{\partial\alpha^*}{\partial\delta_0} = \mathbf{p}'\mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0}t f_T) f_D - \mathbf{p}'\mathbf{r}_0\mu_{\delta0}t f_T f_D, \\ J_{13} &= \frac{\partial\alpha^*}{\partial\varpi_0} = -\mathbf{p}'\mathbf{r}_0 f_D \psi_\varpi, \\ J_{14} &= \frac{\partial\alpha^*}{\partial\mu_{\alpha*0}} = \mathbf{p}'\mathbf{p}_0 t f_T f_D - \mathbf{p}'\mathbf{r}_0\mu_{\alpha*0} f_D \psi_\mu, \\ J_{15} &= \frac{\partial\alpha^*}{\partial\mu_{\delta0}} = \mathbf{p}'\mathbf{q}_0 t f_T f_D - \mathbf{p}'\mathbf{r}_0\mu_{\delta0} f_D \psi_\mu, \\ J_{16} &= \frac{\partial\alpha^*}{\partial\mu_{r0}} = -\mu_{\alpha*} (t f_T)^2 / f_V - \mathbf{p}'\mathbf{r}_0 f_D \psi_r. \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

Склонение

$$\left. \begin{aligned} J_{21} &= \frac{\partial\delta}{\partial\alpha_{*0}} = \mathbf{q}'\mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0}t f_T) f_D - \mathbf{q}'\mathbf{r}_0\mu_{\alpha*0}t f_T f_D, \\ J_{22} &= \frac{\partial\delta}{\partial\delta_0} = \mathbf{q}'\mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0}t f_T) f_D - \mathbf{q}'\mathbf{r}_0\mu_{\delta0}t f_T f_D, \\ J_{23} &= \frac{\partial\delta}{\partial\varpi_0} = -\mathbf{q}'\mathbf{r}_0 f_D \psi_\varpi, \\ J_{24} &= \frac{\partial\delta}{\partial\mu_{\alpha*0}} = \mathbf{q}'\mathbf{p}_0 t f_T f_D - \mathbf{q}'\mathbf{r}_0\mu_{\alpha*0} f_D \psi_\mu, \\ J_{25} &= \frac{\partial\delta}{\partial\mu_{\delta0}} = \mathbf{q}'\mathbf{q}_0 t f_T f_D - \mathbf{q}'\mathbf{r}_0\mu_{\delta0} f_D \psi_\mu, \\ J_{26} &= \frac{\partial\delta}{\partial\mu_{r0}} = -\mu_\delta (t f_T)^2 / f_V - \mathbf{q}'\mathbf{r}_0 f_D \psi_r. \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

Тригонометрический параллакс

$$\left. \begin{aligned}
 J_{31} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \alpha_{*0}} = 0, \\
 J_{32} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \delta_0} = 0, \\
 J_{33} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \varpi_0} = f_D - \varpi (\mu_r t f_T / f_V) \psi_\varpi, \\
 J_{34} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \mu_{\alpha*0}} = -\varpi \mu_{\alpha*0} (t f_T)^2 f_D^2 - \varpi \mu_{\alpha*0} (\mu_r t f_T / f_V) \psi_\mu, \\
 J_{35} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \mu_{\delta 0}} = -\varpi \mu_{\delta 0} (t f_T)^2 f_D^2 - \varpi \mu_{\delta 0} (\mu_r t f_T / f_V) \psi_\mu, \\
 J_{36} &= \frac{\partial \varpi}{\partial \mu_{r0}} = -\varpi (1 + \mu_{r0} t f_T) t f_T f_D^2 - \varpi (\mu_r t f_T / f_V) \psi_r.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Собственное движение по прямому восхождению

$$\left. \begin{aligned}
 J_{41} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \alpha_{*0}} = -\mathbf{p}' \mathbf{p}_0 \mu_0^2 t f_T f_D^3 f_V - \mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V, \\
 J_{42} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \delta_0} = -\mathbf{p}' \mathbf{q}_0 \mu_0^2 t f_T f_D^3 f_V - \mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V, \\
 J_{43} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \varpi_0} = \mathbf{p}' \boldsymbol{\nu} \psi_\varpi, \\
 J_{44} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \mu_{\alpha*0}} = \mathbf{p}' \mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V - 2\mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} t f_T f_D^3 f_V \\
 &\quad - 3\mu_{\alpha*} \mu_{\alpha*0} (t f_T)^2 f_D^2 f_V + \mu_{\alpha*} \mu_{\alpha*0} \chi_\mu + \mathbf{p}' \boldsymbol{\nu} \mu_{\alpha*0} \psi_\mu, \\
 J_{45} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \mu_{\delta 0}} = \mathbf{p}' \mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V - 2\mathbf{p}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} t f_T f_D^3 f_V \\
 &\quad - 3\mu_{\alpha*} \mu_{\delta 0} (t f_T)^2 f_D^2 f_V + \mu_{\alpha*} \mu_{\delta 0} \chi_\mu + \mathbf{p}' \boldsymbol{\nu} \mu_{\delta 0} \psi_\mu, \\
 J_{46} &= \frac{\partial \mu_{\alpha*}}{\partial \mu_{r0}} = \mathbf{p}' [\mu_0 f_D - 3\boldsymbol{\mu} (1 + \mu_{r0} t f_T)] t f_T f_D^2 f_V \\
 &\quad + \mu_{\alpha*} \chi_r + \mathbf{p}' \boldsymbol{\nu} \psi_r.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

Собственное движение по склонению

$$\left. \begin{aligned}
 J_{51} &= \frac{\partial \mu_\delta}{\partial \alpha_{*0}} = -\mathbf{q}' \mathbf{p}_0 \mu_0^2 t f_T f_D^3 f_V - \mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V, \\
 J_{52} &= \frac{\partial \mu_\delta}{\partial \delta_0} = -\mathbf{q}' \mathbf{q}_0 \mu_0^2 t f_T f_D^3 f_V - \mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V, \\
 J_{53} &= \frac{\partial \mu_\delta}{\partial \varpi_0} = \mathbf{q}' \boldsymbol{\nu} \psi_\varpi, \\
 J_{54} &= \frac{\partial \mu_\delta}{\partial \mu_{\alpha*0}} = \mathbf{q}' \mathbf{p}_0 (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V - 2\mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\alpha*0} t f_T f_D^3 f_V \\
 &\quad - 3\mu_\delta \mu_{\alpha*0} (t f_T)^2 f_D^2 f_V + \mu_\delta \mu_{\alpha*0} \chi_\mu + \mathbf{q}' \boldsymbol{\nu} \mu_{\alpha*0} \psi_\mu, \\
 J_{55} &= \frac{\partial \mu_\delta}{\partial \mu_{\delta 0}} = \mathbf{q}' \mathbf{q}_0 (1 + \mu_{r0} t f_T) f_D^3 f_V - 2\mathbf{q}' \mathbf{r}_0 \mu_{\delta 0} t f_T f_D^3 f_V \\
 &\quad - 3\mu_\delta \mu_{\delta 0} (t f_T)^2 f_D^2 f_V + \mu_\delta \mu_{\delta 0} \chi_\mu + \mathbf{q}' \boldsymbol{\nu} \mu_{\delta 0} \psi_\mu, \\
 J_{56} &= \frac{\partial \mu_\delta}{\partial \mu_{r0}} = \mathbf{q}' [\mu_0 f_D - 3\mu (1 + \mu_{r0} t f_T)] t f_T f_D^2 f_V \\
 &\quad + \mu_\delta \chi_r + \mathbf{q}' \boldsymbol{\nu} \psi_r.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

Радиальное собственное движение

$$\left. \begin{aligned}
 J_{61} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \alpha_{*0}} = 0, \\
 J_{62} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \delta_0} = 0, \\
 J_{63} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \varpi_0} = \xi \psi_\varpi, \\
 J_{64} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \mu_{\alpha*0}} = 2\mu_{\alpha*0} (1 + \mu_{r0} t f_T) t f_T f_D^4 f_V + \mu_{\alpha*0} \mu_r \chi_\mu + \mu_{\alpha*0} \xi \psi_\mu, \\
 J_{65} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \mu_{\delta 0}} = 2\mu_{\delta 0} (1 + \mu_{r0} t f_T) t f_T f_D^4 f_V + \mu_{\delta 0} \mu_r \chi_\mu + \mu_{\delta 0} \xi \psi_\mu, \\
 J_{66} &= \frac{\partial \mu_r}{\partial \mu_{r0}} = \left[(1 + \mu_{r0} t f_T)^2 - \mu_0^2 (t f_T)^2 \right] f_D^4 f_V + \mu_r \chi_r + \xi \psi_r.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.80)$$

4.5. Приближённые формулы для эффектов запаздывания

В этом разделе выводятся приближенные формулы для эффектов запаздывания на астрометрические параметры. Эти формулы удобны для оценки значимости этих эффектов.

Из раздела 4.2.3 ясно, что эффекты запаздывания определяются масштабными коэффициентами по времени и скорости, f_T и f_V . Поскольку эти коэффициенты очень близки к единице, полезно ввести две малые величины, ε_T и ε_V , которые можно рассматривать как малые параметры используемого формализма:

$$f_T = 1 + \varepsilon_T \quad \text{and} \quad f_V = 1 + \varepsilon_V. \quad (4.81)$$

Поскольку ε_T и ε_V обращаются в нуль при $t = 0$, удобно представить их как явные функции времени. Раскладывая выражения (4.42) и (4.44) в ряд Тейлора по времени и ограничиваясь членами первого порядка, находим, что

$$\varepsilon_T = -\frac{\mu_0^2 \tau_A}{2\varpi_0} t \quad \text{and} \quad \varepsilon_V = -\frac{\mu_0^2 \tau_A}{\varpi_0} t, \quad (4.82)$$

т.е. $\varepsilon_V = 2\varepsilon_T$.

В качестве следующего шага мы линеаризуем преобразованные астрометрические параметры по ε_T и ε_V . Символы, снабженные тильдой, обозначают приближенные величины, вычисленные без учета эффектов запаздывания, то есть для $\varepsilon_T = \varepsilon_V = 0$. Подставляя f_T из уравнения (4.81) в определение фактора расстояния (4.31), получаем

$$f_D = \tilde{f}_D - \tilde{f}_D \tilde{\mu}_r \varepsilon_T t. \quad (4.83)$$

Далее, из формулы (4.32) следует, что барицентрическое направление можно аппроксимировать как

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mu} \tilde{f}_D^{-2} \varepsilon_T t, \quad (4.84)$$

а из выражения (4.33) находим приближенный параллакс

$$\varpi = \tilde{\varpi} - \tilde{\varpi} \tilde{\mu}_r \varepsilon_{\text{T}} t. \quad (4.85)$$

Следует заметить, что множители f_{T} и f_{V} входят в выражения (4.38) и (4.39) для собственных движений в комбинациях $f_{\text{D}}^3 f_{\text{V}}$ и $f_{\text{D}}^2 f_{\text{V}}$. Разложение до линейных по времени членов даёт

$$f_{\text{D}}^3 f_{\text{V}} = \tilde{f}_{\text{D}}^3 + \tilde{f}_{\text{D}}^3 \varepsilon_{\text{V}} \quad \text{and} \quad f_{\text{D}}^2 f_{\text{V}} = \tilde{f}_{\text{D}}^2 + \tilde{f}_{\text{D}}^2 \varepsilon_{\text{V}}. \quad (4.86)$$

Соответственно, имеем приближенную формула для собственного движения

$$\boldsymbol{\mu} = \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \boldsymbol{\mu}_0 \tilde{f}_{\text{D}}^3 \varepsilon_{\text{V}}, \quad (4.87)$$

$$\mu_r = \tilde{\mu}_r + \mu_{r0} \tilde{f}_{\text{D}}^2 \varepsilon_{\text{V}}. \quad (4.88)$$

Полагая $\tilde{f}_{\text{D}} = 1$ в уравнениях (4.84), (4.85), (4.87) и (4.88), получаем формулы, описывающие изменения астрометрических параметров, обусловленные эффектами запаздывания

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\mu^3 \tau_{\text{A}}}{2\varpi} t^2, & \Delta\varpi &= \frac{\mu_r \mu^2 \tau_{\text{A}}}{2} t^2, \\ \Delta\mu &= \frac{\mu^3 \tau_{\text{A}}}{\varpi} t, & \Delta\mu_r &= \frac{\mu_r \mu^2 \tau_{\text{A}}}{\varpi} t. \end{aligned} \right\} \quad (4.89)$$

Отметим, что полученные изменения связаны следующим образом

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} t \Delta\mu \quad \text{and} \quad \Delta\varpi = \frac{1}{2} t \Delta\mu_r. \quad (4.90)$$

Уместно выразить найденные эффекты в терминах физических величин. Кроме того, для полноты картины, мы также рассматриваем соответствующие изменения как в абсолютной величине пространственной скорости, так и в её тангенциальной и радиальной составляющих:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{1}{2} \frac{v_t}{c} \left(\frac{v_t}{R} \right)^2 t^2, & \Delta\varpi &= \frac{1}{2} \frac{A v_r}{R c} \left(\frac{v_t}{R} \right)^2 t^2, \\ \Delta\mu &= \frac{v_t}{c} \left(\frac{v_t}{R} \right)^2 t, & \Delta\mu_r &= \frac{v_r}{c} \left(\frac{v_t}{R} \right)^2 t, \\ \Delta v &= \frac{v v_t^2}{c b} t, & \Delta v_t &= \frac{v_t^3}{c b} t, & \Delta v_r &= \frac{v_r v_t^2}{c b} t. \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

Эти соотношения позволяют сделать важные заключения о влиянии запаздывания на астрометрические параметры. Изменения в положении и параллаксе являются квадратичными функциями времени, тогда как вариации собственных движений и скорость растут линейно со временем. Это подтверждает вывод, сделанный из численных расчетов, проиллюстрированных на рисунке 4.2. Все эффекты пропорциональны кубу пространственной скорости, тогда как зависимость от расстояния различна для скоростей (R^{-1}), положения и собственных движений (R^{-2}) и параллакса (R^{-3}).

Для практических целей удобно использовать следующие формулы для положения

$$\Delta\theta = (0.36 \text{ мксд}) \times \left(\frac{v_t}{10^3 \text{ км/с}} \right)^3 \times \left(\frac{R}{1 \text{ кпк}} \right)^{-2} \times \left(\frac{t}{100 \text{ лет}} \right)^2, \quad (4.92)$$

и скорости

$$\Delta v = (0.34 \text{ м/с}) \times \left(\frac{v}{10^3 \text{ км/с}} \right) \times \left(\frac{v_t}{10^3 \text{ км}} \right)^2 \times \left(\frac{R}{1 \text{ кпк}} \right)^{-1} \times \left(\frac{t}{100 \text{ лет}} \right). \quad (4.93)$$

4.6. Выводы к четвёртой главе

Представлена методика преобразования астрометрических данных из одной эпохи в другую на основе равномерной прямолинейной модели барицентрического движения звезд, включая строгий учет эффектов запаздывания.

Последовательное рассмотрение эффектов запаздывания требует различения истинного и видимого (наблюдаемого) положения и скорости. Хотя первые в принципе неизвестны, их, тем не менее, можно вывести из предполагаемой модели движения звезд. Шесть астрометрических параметров (два компонента положения, тригонометрический параллакс и три компонента собственного движения) определяются относительно видимых величин. Применяя световое

уравнение к модели равномерного движения, мы вывели уравнение пути в терминах видимого положения и скорости.

Аналитическое решение уравнения видимого пути для равномерного прямолинейного движения дает распространенное барицентрическое положение в любой момент времени. Постулируемое постоянство истинной скорости позволяет нам найти распространенную видимую скорость. Примечательно, что все эффекты запаздывания удобно параметризуются двумя множителями, которые равны 1, когда игнорируется конечность скорости света. Получены явные формулы для преобразования астрометрических параметров и вычислены соответствующие элементы матрицы Якоби, которые используются для преобразования ковариаций. Таким образом, выведен полный набор формул для строгого и полностью обратимого преобразования астрометрических данных и их ковариаций на произвольную разность эпох.

Влияние эффектов запаздывания на астрометрические параметры примерно пропорционально μ^3 . Хотя влияние конечности скорости света, как правило, очень мало, оно существенно для высокоскоростных звезд в пределах нескольких десятков парсек от Солнца, где оно превышает влияние эффект кривизны звёздных орбит в галактическом гравитационном поле.

Расстояние должно быть хорошо известно, чтобы обеспечить надёжное вычисление эффектов запаздывания. Поэтому преобразование эпохи, включающее эффекты запаздывания, следует использовать только для звезд с хорошими оценками параллакса: рекомендуется использовать критерий $\varpi > 10\sigma_\varpi$. Астрометрические параметры звезд с меньшими параллаксами следует распространять без учета эффектов запаздывания. Таким образом, представленная методика применима как к высокоточным, так и к низкоточным астрометрическим данным при условии выбора правильного режима преобразования эпохи.

Глава 5

Влияние орбитального движения Земли на астрометрическое обнаружение экзопланет

К настоящему времени обнаружено около 6000 экзопланет. В частности, по состоянию на 1 марта 2025 года архив экзопланет NASA [154] содержит 5849 подтвержденных планет, в то время как менее строгая Энциклопедия внесолнечных планет [155] содержит 7417 подтвержденных планет в 5089 системах. Большинство таких планет были обнаружены с помощью фотометрических измерений транзита и лучевой скорости (77% и 19%, соответственно), в то время как другие были обнаружены с помощью астрометрии, определения времени транзитов, микролинзирования и других методов. [113] предлагает всестороннее обсуждение различных методов, используемых для обнаружения экзопланет.

Системы с подтвержденными планетами демонстрируют богатое разнообразие объектов. Например, планетарные массы варьируются более чем на шесть порядков величины, от $70 M_J$ коричневого карлика [50] до $0.02 M_{\oplus}$ супер Меркурия [119]. Необходимо сделать замечание относительно терминологии: хотя коричневые карлики классифицируются как субзвездные объекты, мы не делаем различий между ними и планетами для краткости. Это не должно вызывать двусмысленности в тексте.

Текущая перепись экзопланет содержит 43 подтвержденных планеты земного типа, т. е. с массами от 0,6 до $2,3 M_{\oplus}$. Большинство из них (36) были обнаружены в ходе первичных транзитных поисков, в то время как наблюдения микролинзирования и обзоры лучевых скоростей выявили пять и одну планету соответственно. Открытие последней планеты в списке, KOI-55c, примечательно: ее существование было выведено из пульсации яркости ее родительской

звезды [53].

Большое количество обнаруженных экзопланет укрепляет веру в то, что многие, если не все, звезды имеют планетные системы. Однако основные методы обнаружения, т. е. фотометрический транзит и лучевая скорость, страдают от сильного эффекта отбора. Транзиты наблюдаются только в случае систем, видимых с ребра, когда наша линия зрения почти параллельна плоскости орбиты. Вероятность того, что ориентация орбиты планеты благоприятна для обнаружения транзита, определяется отношением радиуса звезды R_* к размеру орбиты планеты a_p [40; 113]:

$$p \simeq 0.005 \left(\frac{R_*}{R_\oplus} \right) \left(\frac{a_p}{1 \text{ а.е.}} \right)^{-1}. \quad (5.1)$$

Геометрическая вероятность не зависит ни от расстояния до звезды, ни от размера планеты. Например, для двойника Солнца ($R_* = R_\odot$) вероятность составляет 0,5% для Земли и 0,1% для Юпитера. Для звезды солнечного типа вероятность превышает 1%, если $a_p \lesssim 0,5$ а.е., тогда как для звезд A0V с $2,5R_\odot$ зона 1%-ной вероятности простирается до 0,8 а.е.

Хотя условия для измерения радиальной скорости более мягкие, эффективность обнаружения все еще максимальна для ориентации орбиты с ребра. Изменение скорости звезды из-за орбитального движения становится менее заметным по мере уменьшения наклона орбиты и/или массы компаньона (эффект $m \sin i$).

Таким образом, только небольшая часть экзопланет может быть обнаружена двумя наиболее широко используемыми методами обнаружения. Планеты, плоскость орбиты которых почти перпендикулярна лучу зрения, не обнаруживаются ни методами транзита, ни методами радиальной скорости. Напротив, астрометрические измерения не подвержены вышеупомянутым геометрическим ограничениям и могут обнаруживать вызванное присутствием планеты движение звезды в любой конфигурации орбиты.

Как и лучевые скорости, астрометрические измерения более чувствитель-

ны к массивным компонентам. Существует заметная разница в том, как наблюдаемые эффекты зависят от расстояния до звезды. Как глубина затмения, так и амплитуда лучевой скорости не зависят от расстояния, хотя соответствующая фотометрическая точность, конечно, затронута. Однако как геометрический эффект астрометрическая сигнатура масштабируется обратно пропорционально расстоянию (см. уравнение (5.25) ниже). Это, естественно, благоприятствует использованию астрометрии для поиска планет, вращающихся вокруг звезд в окрестностях Солнца.

Стоит отметить, что каждый метод обнаружения имеет свои преимущества и недостатки; одновременное использование различных методов дает наилучшие шансы для определения различных параметров компонентов и родительских звезд. Многопланетная система π Mensæ, для которой сочетание спектроскопических наблюдений, проведенных на Очень Большом Телескопе ESO, фотометрических транзитов, наблюдавшихся TESS, и астрометрических данных Gaia предоставило трехмерную архитектуру ее планетарных орбит [57], дает хороший пример такой синергии.

Более того, сочетание новых и предыдущих астрометрических измерений может обеспечить новое понимание и лучшее определение параметров в ряде случаев, например, при разрешении двойных систем со звездными или субзвездными компаньонами по аномалии собственного движения [81].

Астрометрическое обнаружение невидимых спутников основано на обнаружении эффектов, которые они оказывают на свои родительские звезды. Краткое и информативное введение в эту тему с акцентом на потенциал микросекундной астрометрии можно найти в обзоре [134], тогда как книга [113] даёт более подробное описание астрометрической техники в контексте экзопланетных исследований.

Перспективы астрометрического обнаружения экзопланет значительно улучшились с запуском космической астрометрической миссии Европейского космического агентства Gaia, нацеленной на точность на уровне 10 микросекунд

дуги [70]. Был проведен ряд исследований для оценки потенциала Gaia для открытия экзопланетных систем. В работе [49] продемонстрировано, что Gaia может надежно обнаруживать планеты с орбитальными периодами до 5 лет и астрометрическим отношением сигнал/шум $(S/N) \geq 3$. Согласно результатам численного моделирования, прогнозируется обнаружение ~ 20000 долгопериодических гигантских планет ($M_p > 1 - 15M_J$) на расстояниях до ~ 500 пк [111]. Рассматривая популяцию близлежащих карликов M, было показано, что около 100 гигантских планет можно обнаружить вокруг этих звезд в пределах 30 пк [135]. В работе [127] утверждается, что следует ожидать открытия нескольких сотен гигантских планет в пределах 200 пк. Исследуя различные критерии обнаружения, было показано, что уровень обнаружения $S/N \gtrsim 1 - 1.5$ достижим для номинальной продолжительности миссии 5 лет [118].

Целью настоящей работы является рассмотрение эффектов орбитального движения Земли на астрометрическую обнаруживаемость невидимого компаньона, которые существенны для систем с орбитальным периодом, близким к одному году. Из простых геометрических соображений ясно, что в таких системах орбитальное движение родительской звезды при определенных условиях может быть наблюдаемо близким к параллактическому эффекту или даже неотличимым от него. Это означает, что орбитальное движение может частично или полностью поглощаться параметрами параллакса. Это имеет два последствия. Во-первых, астрометрическое решение дает смещенную оценку параллакса. Во-вторых, видимое движение родительской звезды в первом порядке описывается моделью одиночной звезды, тогда как астрометрическое обнаружение невидимого компаньона основано на отклонении от этой модели, поэтому обнаруживаемость этих компаньонов для таких систем уменьшается. Эти эффекты, смещение параллакса и потеря обнаруживаемости, впервые продемонстрированные в работе [75] и упомянутые в [111], до сих пор не были систематически изучены.

Мы обсудили связь между орбитальным движением и эффектом параллакса на основе статистики невязок, полученных в ходе оценивания параллак-

са. Этот подход приводит к значительному упрощению проблемы. Позволяя нам легко вычислить смещение параллакса, он в то же время дает оценку отклонения от модели с одной звездой. Более того, он позволяет нам компактно описать все эффекты в терминах одного параметра – корреляции между орбитальными положениями Земли и родительской звезды. Стоит отметить, что этот подход проливает интересный свет на концепцию астрометрической сигнатуры, напрямую связывая ее с минимальным значением суммы квадратов невязок. Если связь между орбитальным движением и параллаксом отсутствует, такое статистическое определение приводит к общепринятому выражению для астрометрической сигнатуры.

В настоящей работе в основном рассматривается астрометрическая обнаруживаемость субзвездных объектов, т. е. планет и коричневых карликов. Для краткости мы далее будем называть все такие объекты планетами. Аналогично, под планетной системой мы подразумеваем любую систему, в которой субзвездный компаньон вращается вокруг родительской звезды. Чтобы избежать двусмысленности, мы будем явно указывать, когда обсуждается компаньон звездной массы.

5.1. Эффекты орбитального движения Земли

Для наблюдателя, находящегося в точке, которая задаётся барицентрическим вектором \mathbf{b} , направление на звезду в момент времени t определяется уравнением (1.20). Выпишем его ещё раз:

$$\mathbf{u} = \langle \langle \mathbf{r} + (\mathbf{r}\mu_r + \boldsymbol{\mu})t - \varpi\mathbf{b}/A \rangle \rangle . \quad (5.2)$$

Различие между наземными и космическими наблюдениями несущественно в контексте астрометрического обнаружения экзопланет, поэтому под \mathbf{b} везде под-

разумеается барицентрическое положение Земли.

В рамках стандартной модели предполагается, что центр масс планетной системы движется равномерно и прямолинейно, поэтому направление на родительскую звезду даётся выражением

$$\mathbf{u} = \langle \langle \mathbf{r} + (\mathbf{r}\mu_r + \boldsymbol{\mu})(t - t_0) - \varpi(\mathbf{b} - \mathbf{s})/A \rangle \rangle, \quad (5.3)$$

где \mathbf{s} – положение звезды относительно центра масс системы.

Влияние орбитального движения Земли особенно очевидно в частном случае однопланетной системы с почти круговой орбитой, когда плоскость орбиты параллельна эклиптике. Параллактический эллипс и видимое орбитальное движение родительской звезды тогда геометрически подобны, но различаются по размеру. Если, кроме того, орбитальный период равен одному году, а вектор, описывающий положение планеты относительно центра масс, параллелен вектору барицентрического положения Земли, т. е.

$$\mathbf{s} = k\mathbf{b}, \quad (5.4)$$

где k – некоторая константа, то уравнение (5.3) переходит в формулу (5.2) для одиночной звезды, где перед параллаксом стоит множитель $1 - k$. Поэтому наблюдения такой системы полностью описываются стандартной астрометрической моделью с параллаксом

$$\tilde{\varpi} = (1 - k)\varpi. \quad (5.5)$$

Это соотношение показывает, что, в зависимости от знака k , полученный параллакс может отличаться от истинного значения как в большую, так и в меньшую сторону. Этот результат можно наглядно истолковать с помощью простых геометрических соображений. Истинный параллактический эллипс, который звезда описывала бы, если бы она находилась точно в центре масс, целиком заключён внутри видимого эллипса, когда $k < 0$, тогда как в случае $k > 0$ имеет место обратная ситуация. Соответственно, для описания такого движения моделью

одиночной звезды требуется меньшее значение при параллельных, а большее – при антипараллельных \mathbf{s} и \mathbf{b} .

5.1.1. Сдвиг параллакса

Уравнение (5.4) представляет собой частный случай, когда родительская звезда и Земля движутся синхронно. Теперь рассмотрим, как корреляция между положениями звезды и Земли влияет на оценку параллакса в целом. Сделаем два упрощения, чтобы изучить поглощение параллаксом орбитального движения в чистом виде. Во-первых, предположим, что положения и собственные движения известны, а параллакс является единственным определяемым параметром. Это значительно упрощает аналитическое рассмотрение проблемы. Во-вторых, будем считать, что направление на родительскую звезду является непрерывно наблюдаемой величиной. Это позволяет отвлечься от практических аспектов выполнения наблюдений и обработки астрометрических данных.

Процедура подгонки астрометрических и кеплеровых моделей к астрометрическим данным описана в различных публикациях (см. [49; 111; 118; 152]). Нашей целью является оценивание тригонометрического параллакса и рассмотрения того, как на него влияет орбитальное движение родительской звезды.

Обозначим через $\bar{\mathbf{u}}$ направление на звезду, которое включает в себя все эффекты кроме параллактического смещения. Линеаризация выражений (5.2) и (5.3) по параллаксу даёт вычисляемое направление

$$\mathbf{u}_{\text{calc}} = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \times [\bar{\mathbf{u}} \times \varpi_{\text{est}} \mathbf{b} / A] \quad (5.6)$$

и наблюдаемое направление

$$\mathbf{u}_{\text{obs}} = \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \times [\bar{\mathbf{u}} \times \varpi (\mathbf{b} - \mathbf{s}) / A] . \quad (5.7)$$

Здесь ϖ_{est} и ϖ означают оценку параллакса и его истинное значение.

Как известно, оценивание методом наименьших квадратов эквивалентно нахождению таких значений параметров, которые отвечают минимуму взвешенной суммы квадратов невязок (см. [5; 24; 35])

$$H = \sum_i w_i (\Delta \mathbf{u}_i)^2, \quad (5.8)$$

где индекс i используется для нумерации наблюдений, w – статистический вес соответствующего наблюдения, а вектор $\Delta \mathbf{u}$ представляет собой разность между наблюдаемым и вычисленным направлениями:

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{obs}} - \mathbf{u}_{\text{calc}}. \quad (5.9)$$

Вычислим $(\Delta \mathbf{u})^2$. Вычитая (5.6) из (5.7), находим

$$\Delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \times [\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{v}]. \quad (5.10)$$

Здесь введено обозначение

$$\mathbf{v} = \varpi (\mathbf{b} - \mathbf{s}) / A - \varpi_{\text{est}} \mathbf{b} / A. \quad (5.11)$$

Возведение выражения (5.10) в квадрат даёт

$$(\Delta \mathbf{u})^2 = v^2 - (\bar{\mathbf{u}}' \mathbf{v})^2 = v^2 \sin^2 \nu, \quad (5.12)$$

где ν – угол между векторами $\bar{\mathbf{u}}$ и \mathbf{v} .

Множитель $\sin^2 \nu$ в формуле (5.12) учитывает эффект проекцию на картинную плоскость. Можно показать, что этот множитель несущественен для задачи оценивания параллакса. Действительно, производная $(\Delta \mathbf{u})^2$ по ϖ_{est} имеет вид

$$\frac{d(\Delta \mathbf{u})^2}{d\varpi_{\text{est}}} = 2\mathbf{v}' \frac{d\mathbf{v}}{d\varpi_{\text{est}}} \sin^2 \nu + 2v^2 \cos \nu \frac{d \sin \nu}{d\varpi_{\text{est}}}. \quad (5.13)$$

Первый член здесь пропорционален первой степени параллакса, в то время как второй пропорционален квадрату параллакса. Поскольку параллакс является

малой величиной, то, очевидно, вторым слагаемым можно пренебречь. Соответственно, можно опустить множитель $\sin^2 \nu$ при вычислении $(\Delta \mathbf{u})^2$. Таким образом, мы приходим к выводу, что выражение (5.8) для взвешенной суммы квадратов невязок можно записать как

$$H = \sum_i w_i v_i^2. \quad (5.14)$$

Схема присваивания весов не является универсальной и зависит от условий конкретного эксперимента, поэтому уместно в дальнейшем считать, что все наблюдения входят с одинаковым весом, и положить $w = 1/N$, где N – число наблюдений рассматриваемой системы:

$$H = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2. \quad (5.15)$$

Наблюдения, как правило, распределены в целом равномерно по времени. В этом случае, при достаточно большом количестве наблюдений, мы можем перейти к усреднению по времени:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (5.16)$$

где T – продолжительность наблюдений. Окончательно мы получаем следующее выражение

$$H = \left\langle (\varpi (\mathbf{b} - \mathbf{s}) / A - \varpi_{\text{est}} \mathbf{b} / A)^2 \right\rangle. \quad (5.17)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени в смысле (5.16). Уместно отметить, что ввиду отсутствия множителя $\sin^2 \nu$, эта формула даёт верхний предел для суммы квадратов невязок.

Определим теперь оценку параллакса. Приравнивание нулю производной $dH/d\varpi_{\text{est}}$ даёт

$$\langle \mathbf{b}' [\varpi (\mathbf{b} - \mathbf{s}) - \varpi_{\text{est}} \mathbf{b}] \rangle = 0, \quad (5.18)$$

откуда находим

$$\varpi_{\text{est}} = \varpi \left(1 - \frac{\langle \mathbf{s}' \mathbf{b} \rangle}{\langle b^2 \rangle} \right). \quad (5.19)$$

Ввиду малости эксцентриситета, $e = 0.017$, земную орбиту можно с большой степенью точности считать круговой и положить в дальнейшем $\langle b^2 \rangle = A^2$:

$$\varpi_{\text{est}} = \varpi \left(1 - \frac{\langle \mathbf{s}'\mathbf{b} \rangle}{A^2} \right). \quad (5.20)$$

Вводя корреляционную функцию положений

$$\rho \equiv \frac{\langle \mathbf{s}'\mathbf{b} \rangle}{\langle b^2 \rangle^{1/2} \langle s^2 \rangle^{1/2}} = \frac{\langle \mathbf{s}'\mathbf{b} \rangle}{A \langle s^2 \rangle^{1/2}}, \quad (5.21)$$

Мы можем записать выражение (5.20) как

$$\varpi_{\text{est}} = \varpi \left(1 - \rho \frac{\langle s^2 \rangle^{1/2}}{A} \right). \quad (5.22)$$

Величина ρ принимает значения от -1 до $+1$. Соотношение между ρ и $\langle \mathbf{s}'\mathbf{b} \rangle$ значительно упрощается в практически важном случае круговой орбиты радиуса a_* , когда $\langle s^2 \rangle = a_*^2$. Тогда

$$\langle \mathbf{s}'\mathbf{b} \rangle = a_* A \rho \quad (5.23)$$

и уравнение (5.22) принимает вид

$$\varpi_{\text{est}} = \varpi \left(1 - \frac{a_*}{A} \rho \right). \quad (5.24)$$

Эта формула полностью решает поставленную задачу, определяя оценку параллакса родительской звезды в зависимости от радиуса орбиты экзопланеты и корреляции между положениями звезды и наблюдателя.

5.1.2. Астрометрическая сигнатура

В контексте исследования планетных систем под астрометрической сигнатурой понимается наблюдаемый размер большой полуоси орбиты родительской

звезды. Эта величина является удобным индикатором возможного обнаружения экзопланеты посредством астрометрических наблюдений [49; 90; 111; 113; 118; 135]. В настоящее время в литературе нет общепринятого обозначения для астрометрической сигнатуры. Более того, некоторые из используемых обозначений могут привести к путанице. Так, например, в книге [113] применяется греческая буква α , что совпадает с общепринятым обозначением прямого восхождения. В настоящей работе используется символ v , введённый в [118]. Такое обозначение, очевидно, не может привести к недоразумениям.

Если в качестве единицы измерения тригонометрического параллакса и астрометрической сигнатуры v выбрана угловая секунда, то можно записать

$$v \equiv \varpi \frac{a_\star}{A} = \left(\frac{M_p}{M_\star} \right) \left(\frac{a_p}{A} \right) \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right)^{-1}, \quad (5.25)$$

где R – расстояние, $a_p = (M_\star/M_p) a_\star$ – большая полуось планетной орбиты, а M_\star и M_p означают массу родительской звезды и планеты; в этой формуле предполагается, что $M_p \ll M_\star$.

Определенная таким чисто геометрическим образом, астрометрическая сигнатура не учитывает ни движение наблюдателя, ни тот факт, что обнаружение экзопланеты опирается на анализ невязок. Однако эти эффекты могут быть легко включены в концепцию астрометрической сигнатуры, как показано ниже.

Астрометрическое обнаружение экзопланетных систем основано на анализе отклонений от стандартной астрометрической модели. Однако, если орбитальное движение родительской звезды частично поглощается эффектом параллакса, то орбитальное движение становится менее выраженным в невязках. Если же происходит полное поглощение ($\rho = 1$), то свойственный орбитальному движению сигнал полностью исчезает из невязок, и обнаружение такой системы астрометрическими методами становится невозможным. Эти соображения позволяют связать возможность астрометрического обнаружения экзопланетной системы с интегральными характеристиками невязок. Для этой цели уместно

использовать минимальное значение суммы квадратов невязок H_{\min} , которое отвечает оценке параллакса. Ниже показано, что, когда поглощение параллакса не происходит, квадратный корень из H_{\min} совпадает с обычной астрометрической сигнатурой, заданной уравнением (5.25). В то же время, он описывает соответствующий эффект в невязках, если полностью поглощения не происходит. Поэтому мы в дальнейшем называем эту величину эффективной астрометрической сигнатурой, v_{eff} .

Подставляя (5.20) в уравнение (5.17) и выполняя необходимые преобразования, находим минимум суммы квадратов невязок

$$H_{\min} \equiv H(\varpi_{\text{est}}) = (1 - \rho^2) \frac{\varpi^2}{A^2} \langle s^2 \rangle, \quad (5.26)$$

что даёт эффективную астрометрическую сигнатуру

$$v_{\text{eff}} \equiv (H_{\min})^{1/2} = (1 - \rho^2)^{1/2} \frac{\varpi}{A} \langle s^2 \rangle^{1/2}. \quad (5.27)$$

В случае круговой орбиты получаем следующее выражение, которое отличается от общепринятого определения астрометрической сигнатуры только множителем, зависящим от корреляционной функции:

$$v_{\text{eff}} = (1 - \rho^2)^{1/2} \varpi \frac{a_{\star}}{A} \equiv \kappa v. \quad (5.28)$$

Эта формула обобщает уравнение (5.25) на случай движущегося наблюдателя, включая эффекты, связанные с поглощением орбитального движения параллаксом.

Теперь рассмотрим новую величину

$$\kappa = (1 - \rho^2)^{1/2}. \quad (5.29)$$

Так как $|\rho| \leq 1$, κ изменяется от 0 до 1. $\kappa = 0$ соответствует полному поглощению орбитального движения родительской звезды параллаксом, а $\kappa = 1$ отвечает отсутствию корреляции, когда орбитальное движение родительской звезды

не влияет на оценку параллакса. Соответственно, в невязках не остается никаких следов орбитального движения, когда $\kappa = 0$, тогда как при $\kappa = 1$ оно присутствует в невязках в полной мере. Таким образом, параметр κ является мерой доли астрометрической информации о данной системе, которая содержится в невязках в контексте распознавания орбитального движения. По этой причине в дальнейшем величина κ называется *астрометрической эффективностью*. В дополнение к ρ , κ также является удобной характеристикой астрометрического детектирования экзопланет.

5.1.3. Соотношение между смещением параллакса и астрометрической сигнатурой

Формулы, полученные в предыдущих разделах, показывают замечательную связь между смещением параллакса и астрометрической сигнатурой. А именно, сравнение уравнений (5.24) и (5.25) даёт

$$\Delta\varpi = -\rho v, \quad (5.30)$$

где $\Delta\varpi = \varpi_{\text{est}} - \varpi$ представляет собой смещение параллакса. Следует подчеркнуть, что это уравнение справедливо для смещения параллакса, вызванного орбитальным движением звезды; однако оно не выполняется в общем случае для смещения, обусловленного иными причинами.

Используя это соотношение, можно вычислить любую из величин $\Delta\varpi$, ρ и v при условии, что известны две другие. Например, если информация о ρ и v получена из наблюдений лучевой скорости или транзита, она в принципе может служить для ограничения смещения параллакса. Более того, это соотношение позволяет нам сделать несколько качественных выводов. Во-первых, если известна корреляционная функция или даже только ее знак, можно пред-

сказать знак смещения параллакса. Во-вторых, поскольку ρ лежит между -1 и $+1$, абсолютное значение смещения параллакса не может превышать астрометрическую сигнатуру, $|\Delta\varpi| \leq v$. Эти теоретические предсказания заслуживают дальнейшей экспериментальной проверки в численном моделировании.

Полезно отметить еще одно соотношение, которое явно не содержит корреляционную функцию и включает в себя сдвиг параллакса, астрометрическую сигнатуру и минимальное значение суммы квадратов невязок. Возводя уравнение (5.30) в квадрат и используя уравнение (5.26) для круговой орбиты, получаем

$$(\Delta\varpi)^2 + \chi_{\min}^2 = v^2. \quad (5.31)$$

Это отношение отражает информационный баланс между оценкой параллакса и астрометрическим обнаружением планет. Чтобы избежать недоразумений, стоит упомянуть, что здесь мы имеем дело только со смещением параллакса вследствие орбитального движения родительской звезды.

5.2. Корреляционная функция

В этом разделе мы рассмотрим основные свойства корреляционной функции. Сначала мы введем параметры для описания как ориентации орбиты родительской звезды относительно эклиптики, так и орбитальных положений звезды и Земли. Используя полученную параметризацию, мы затем вычисляем корреляционную функцию для круговой орбиты. Мы также выводим, при некоторых упрощающих предположениях, зависимость корреляционной функции от эксцентриситета для эллиптической орбиты.

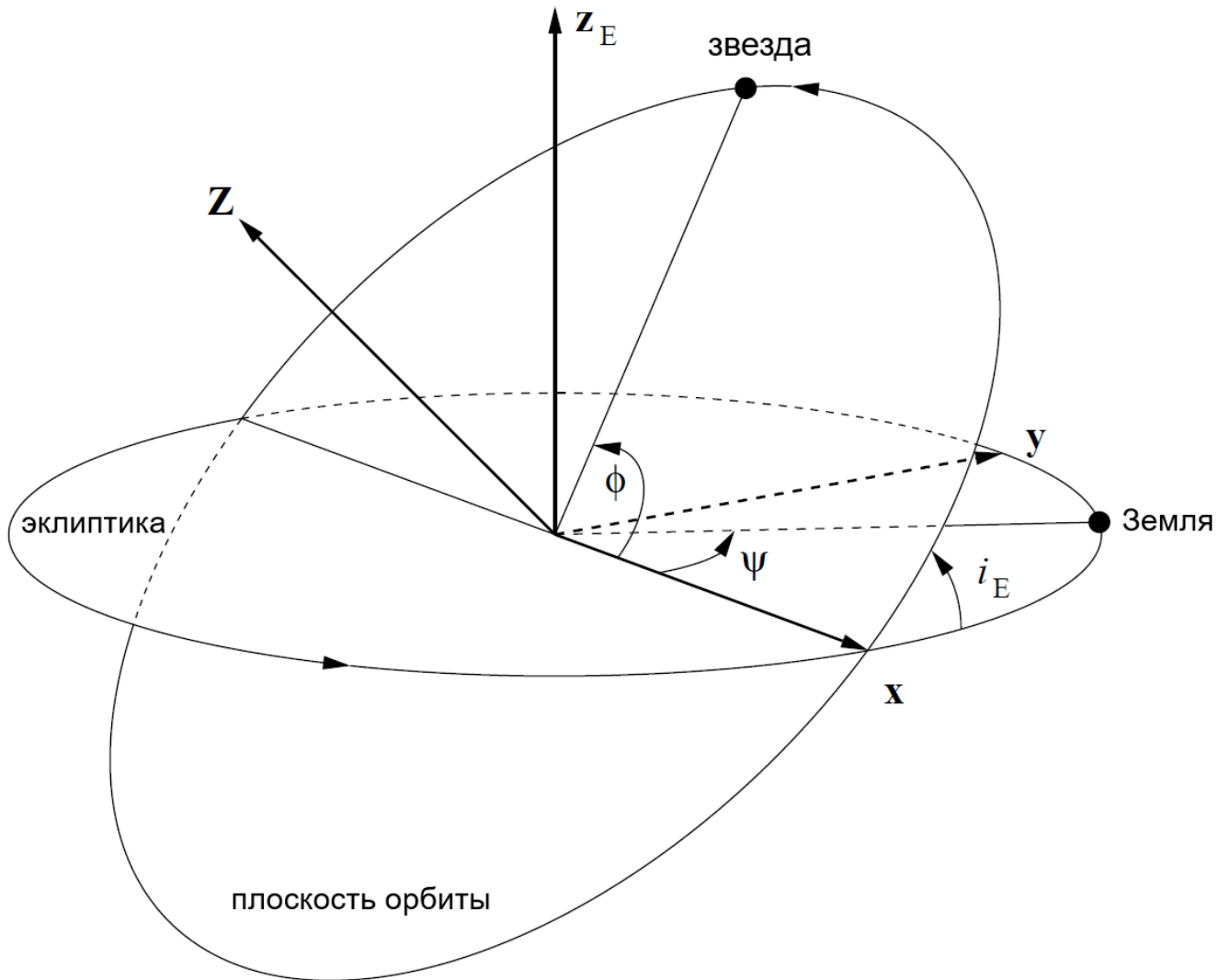


Рис. 5.1. – Ориентация круговой орбиты относительно опорной плоскости, параллельной плоскости эклиптики. Стрелками показаны направления орбитального движения родительской звезды и обращения Земли вокруг барицентра Солнечной системы. Наклон плоскости орбиты к эклиптике i_E задается уравнением (5.42). Система отсчета определяется полярной осью эклиптики z_E и линией узлов, вдоль которой пересекаются орбитальная и опорная плоскости. Положительное направление оси x определяется восходящим узлом, в котором звезда пересекает опорную плоскость в положительном направлении z . Начальные орбитальные фазы ϕ и ψ описывают положения звезды и Земли соответственно в момент $t = 0$, отсчитываемые от оси x . Единичный вектор \mathbf{Z} отвечает угловому моменту движения родительской звезды вокруг барицентра планетной системы.

5.2.1. Ориентация орбиты относительно плоскости эклиптики

В экваториальной и эклиптической системах координат полярные оси представлены единичными векторами \mathbf{z} и \mathbf{z}_E в направлении $\delta = +90^\circ$ и $\beta = +90^\circ$. Пусть в точке на небесной сфере, определяемой направлением \mathbf{r} , ортогональные единичные векторы \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{p}_E , \mathbf{q}_E задают направления увеличения (α, δ) и (λ, β) соответственно. Векторные пары \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{p}_E , \mathbf{q}_E являются тангенциальными составляющими так называемых нормальных триад относительно экваториальной и эклиптической систем.

Локальная координатная триада, определяемая векторами \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{r} , описывается уравнениями (1.6) и (1.9). Для дальнейшего изложения удобно представить триаду в виде матрицы:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{q} & \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \sin \delta & \cos \alpha \cos \delta \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (5.32)$$

Аналогично, единичные векторы \mathbf{p}_E и \mathbf{q}_E задают направления увеличения λ и β в эклиптических координатах. Координатное представление соответствующей триады имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_E^{ec} & \mathbf{q}_E^{ec} & \mathbf{r}^{ec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \beta & \cos \lambda \cos \beta \\ \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \beta & \sin \lambda \cos \beta \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Здесь верхний индекс «ес» указывает, что компоненты векторов относятся к осям эклиптической системы. Преобразование в экваториальную систему осуществляется с помощью матрицы вращения:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_E & \mathbf{q}_E & \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_E^{ec} & \mathbf{q}_E^{ec} & \mathbf{r}^{ec} \end{bmatrix}, \quad (5.34)$$

где ϵ означает наклонение эклиптики.

В картинной плоскости пары векторов \mathbf{p} , \mathbf{q} и \mathbf{p}_E , \mathbf{q}_E повернуты друг относительно друга на некоторый угол. Поскольку векторы направлены вдоль соответствующих координатных линий, этот угол является мерой взаимной ориентации экваториальной и эклиптической координатных сеток в данной точке небесной сферы. Для наших целей целесообразно описывать этот поворот углом θ , отсчитываемым против часовой стрелки от \mathbf{q} до \mathbf{p}_E . Тогда соотношение между парами векторов можно записать как

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} & \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_E & \mathbf{q}_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Поскольку значение θ лежит между $-\pi$ и π , оно однозначно определяется его синусом и косинусом, которые вычисляются из соответствующих скалярных произведений:

$$\cos \theta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}_E = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}_E, \quad (5.36)$$

$$\sin \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_E = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}_E. \quad (5.37)$$

Эти формулы определяют угол θ в любой точке. Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательные результаты в экваториальных координатах:

$$\sin \theta = \frac{\cos \epsilon \cos \delta + \sin \epsilon \sin \delta \sin \alpha}{\sqrt{1 - (\cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha)^2}}, \quad (5.38)$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \epsilon \cos \alpha}{\sqrt{1 - (\cos \epsilon \sin \delta - \sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha)^2}}. \quad (5.39)$$

На большей части небесной сферы угол θ положителен. Например, она меняется вокруг небесного экватора ($\delta = 0$) в пределах $\pi/2 - \epsilon$ и $\pi/2 + \epsilon$. Вблизи полюсов, где δ или β близки к $\pm\pi/2$, она может принимать любое значение в диапазоне от $-\pi$ до π . Рисунок 5.2 иллюстрирует, как θ ведет себя в области, близкой к южным полюсам.

Поскольку, как мы видели, корреляция между положениями родительской звезды и Земли зависит от взаимной ориентации орбит, полезно описать ее в

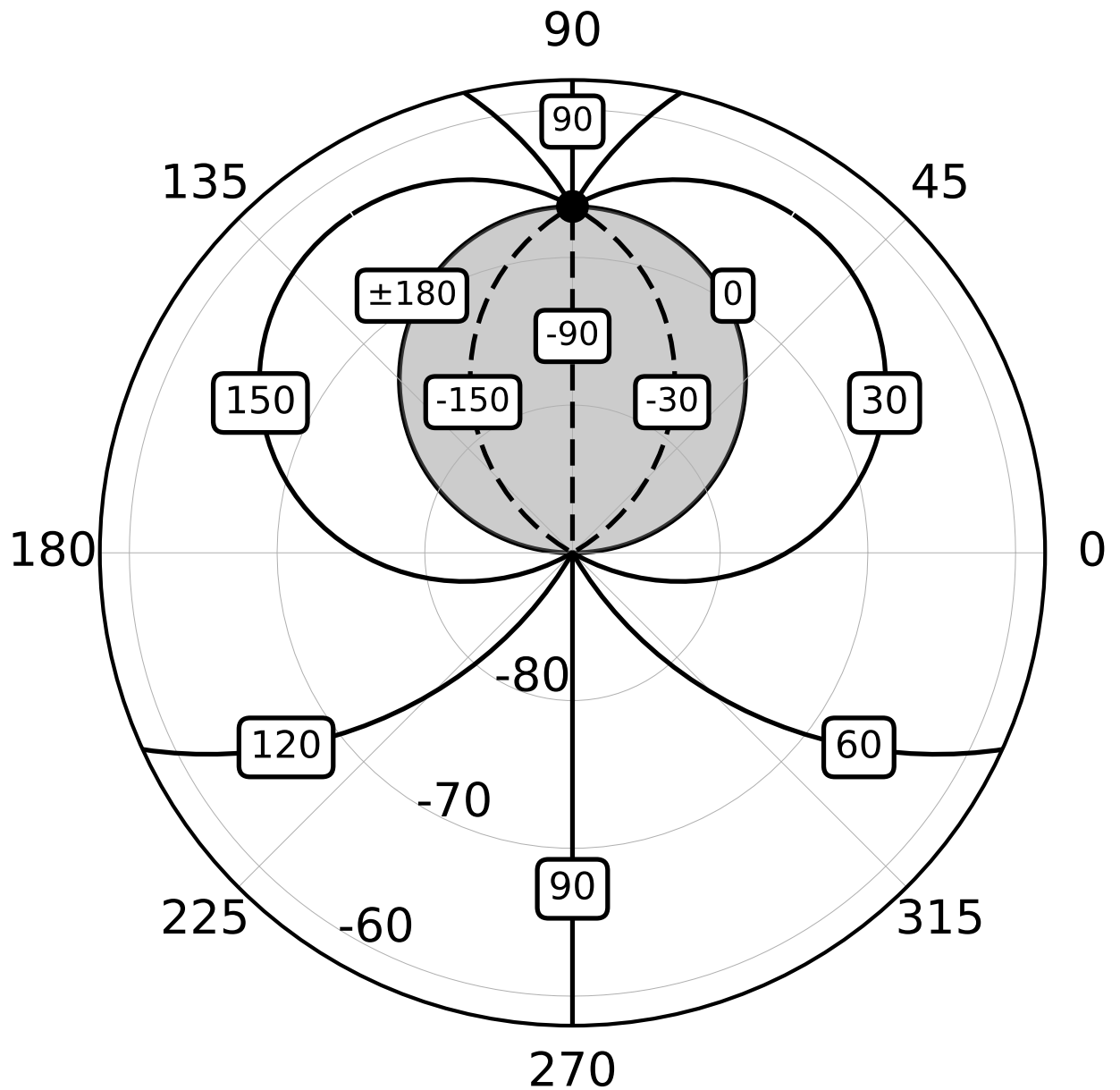


Рис. 5.2. – Распределение угла θ , вычисленного по уравнениям (5.36) и (5.37) для $\delta < -60^\circ$. Жирные линии очерчивают постоянное значение θ , обозначенное соответствующими метками. Центр графика расположен на южном полюсе мира ($\delta = -90^\circ$), а черный круг соответствует южному полюсу эклиптики ($\beta = -90^\circ$). Числа рядом с линиями координатной сетки дают прямое восхождение и склонение. Отрицательные значения θ содержатся в затенённой области.

терминах наклона орбиты к эклиптике i_E , определяемого как угол между \mathbf{z}_E и вектором углового момента звезды, как показано на рисунке 5.1. Орбитальное движение является прямым, т. е. родительская звезда и Земля вращаются в одном направлении, если $i_E < \pi/2$, в то время как звезда движется в обратном направлении, если $i_E > \pi/2$. Величину i_E можно найти следующим образом. Используя уравнение (5.35), единичный вектор в направлении северного эклиптического полюса можно записать как

$$\mathbf{z}_E = \mathbf{q}_E \cos \beta + \mathbf{r} \sin \beta = (-\mathbf{p} \cos \theta + \mathbf{q} \sin \theta) \cos \beta + \mathbf{r} \sin \beta. \quad (5.40)$$

Пусть \mathbf{Z} будет единичным вектором, параллельным угловому моменту родительской звезды. Он перпендикулярен плоскости орбиты и выражается через стандартные кеплеровы элементы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= \mathbf{p} \sin i \cos \Omega - \mathbf{q} \sin i \sin \Omega - \mathbf{r} \cos i \\ &= -\mathbf{p}_E \sin i \cos (\Omega - \theta) - \mathbf{q}_E \sin i \sin (\Omega - \theta) - \mathbf{r} \cos i, \end{aligned} \quad (5.41)$$

где i – наклонение орбиты и Ω – долгота восходящего узла.

Перемножая скалярно векторы \mathbf{z}_E и \mathbf{Z} , получаем

$$\cos i_E = \mathbf{Z}' \mathbf{z}_E = -\sin \beta \cos i - \cos \beta \sin i \cos (\Omega - \theta). \quad (5.42)$$

Эта формула дает решение задачи, определяя наклон плоскости орбиты к эклиптике i_E через эклиптическую широту барицентра планетной системы и кеплеровы элементы орбиты родительской звезды. В дальнейшем мы будем для краткости называть i_E просто наклонением.

Теперь перейдем к выяснению того, в каких случаях i_E равняется нулю, то есть когда плоскость орбиты параллельна эклиптике, а орбитальное движение является прямым. Уравнение (5.42) в этом случае дает

$$\sin \beta \cos i + \cos \beta \sin i \cos (\Omega - \theta) = -1. \quad (5.43)$$

Это выражение можно переписать как

$$\cos \beta \sin i (\cos (\Omega - \theta) + 1) = \sin (i - \beta) - 1. \quad (5.44)$$

Очевидно, что правая сторона никогда не превосходит нуля, тогда как левая сторона неотрицательна для $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$ и $0 \leq i \leq \pi$. Следовательно, равенство выполняется только в том случае, если обе стороны равны нулю; то есть если $\cos(\Omega - \theta) = -1$ и $\sin(i - \beta) = 1$. Таким образом, $i_E = 0$, когда

$$i = \beta + \pi/2, \quad (5.45)$$

$$\Omega = \theta + \pi. \quad (5.46)$$

Эти условия имеют простой геометрической смысл.

5.2.2. Круговая орбита

Система отсчета определяется векторами \mathbf{z}_E и \mathbf{Z} , с положительным направлением x вдоль $\mathbf{z}_E \times \mathbf{Z}$ и $\mathbf{y} = \mathbf{z}_E \times \mathbf{x}$, как показано на рисунке 5.1. Пусть ϕ и ψ будут отсчитываемыми от оси x угловыми координатами звезды и Земли на момент начала наблюдений $t = 0$. Тогда положения Земли и родительской звезды задаются следующим образом:

$$\mathbf{b} = \left(A \cos \Psi, \quad A \sin \Psi, \quad 0 \right), \quad (5.47)$$

$$\mathbf{s} = \left(a_* \cos \Phi, \quad a_* \sin \Phi \cos i_E, \quad a_* \sin \Phi \sin i_E \right). \quad (5.48)$$

Здесь $\Psi = \psi + 2\pi t$ и $\Phi = \phi + 2\pi t/P$, причём время t и орбитальный период P выражены в юлианских годах.

Подставляя выражения (5.47) и (5.48) в уравнение (5.21) и усредняя по времени согласно правилу (5.16), находим корреляционную функцию

$$\rho = \frac{\sin[\pi T(1 - 1/P)]}{\pi T(1 - 1/P)} \cos \left[\pi T \left(1 - \frac{1}{P} \right) + \psi - \phi \right] \cos^2 \frac{i_E}{2} + \frac{\sin[\pi T(1 + 1/P)]}{\pi T(1 + 1/P)} \cos \left[\pi T \left(1 + \frac{1}{P} \right) + \psi + \phi \right] \sin^2 \frac{i_E}{2}, \quad (5.49)$$

где T – продолжительность наблюдений в годах. При выводе уравнения (5.49) не было сделано никаких предположений относительно величины периода или продолжительности наблюдения, поэтому оно формально справедливо для любых P и T . Однако с практической точки зрения это уравнение имеет смысл только в том случае, если наблюдения охватывают по крайней мере один орбитальный период экзопланеты. В особом случае $P = 1$ уравнение (5.49) сводится к

$$\rho = \cos(\psi - \phi) \cos^2 \frac{i_E}{2} + \frac{\sin(2\pi T)}{2\pi T} \cos(2\pi T + \psi + \phi) \sin^2 \frac{i_E}{2}. \quad (5.50)$$

Несложно видеть, что для больших значений T это выражение стремится к постоянной величине

$$\rho = \cos \Delta \cos^2 \frac{i_E}{2}, \quad (5.51)$$

где $\Delta = \psi - \phi$ обозначает разность фаз в начальный момент. Таким образом, предельное значение корреляционной функции зависит от двух параметров: наклонения орбиты и разности фаз при $t = 0$. Кроме того, отметим, что простая формула (5.51) очень полезна для аналитических оценок, поскольку она обеспечивает хорошее приближение к точному выражению (5.50) для $T \gtrsim 1$.

Если $P = 1$, плоскость орбиты параллельна эклиптике и родительская звезда движется в прямом направлении, т. е. $i_E = 0$,

$$\rho = \cos \Delta \quad (5.52)$$

и астрометрическая эффективность, определяемая формулой (5.29), принимает вид

$$\kappa = |\sin \Delta|. \quad (5.53)$$

Таким образом, ρ и κ зависят только от абсолютного значения разности орбитальных фаз в этом случае. Корреляционная функция ρ изменяется от +1 для параллельного ($\Delta = 0$) до -1 для антипараллельного ($\Delta = \pm\pi$) расположения, проходя через ноль для ортогональной конфигурации ($\Delta = \pm\pi/2$). Со-

ответственно, астрометрическая эффективность κ достигает своего максимального значения 1 для ортогональной геометрии и обращается в нуль как для параллельной, так и для антипараллельной конфигурации.

5.2.3. Эллиптическая орбита

Вычисление корреляционной функции в общем случае эллиптической орбиты представляет большие математические трудности. Однако в контексте настоящей работы достаточно исследовать корреляционную функцию только в очень узком диапазоне в пространстве параметров, где она близка к единице. Вычисления относительно просты при следующих предположениях.

Во-первых, предположим, что плоскость орбиты параллельна эклиптике, $i_E = 0$, и выберем ось x вдоль большой полуоси в направлении перицентра. Во-вторых, пусть положения родительской звезды и Земли будут параллельными в момент $t = 0$, т.е. начальные орбитальные фазы ϕ и ψ равны нулю. Стоит отметить, что условие $\phi = 0$ эквивалентно утверждению, что родительская звезда проходит перицентр своей орбиты в момент начала наблюдений. В-третьих, рассмотрим систему с $P = 1$ и предположим, что наблюдения охватывают весь орбитальный период. Это позволяет нам компактно описать результаты в терминах функций Бесселя целого порядка J_n .

Вычислим средние значения $\langle s^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{s}'\mathbf{b} \rangle$ на основе этих предположений. Расстояние родительской звезды от барицентра системы описывается формулой

$$s = a_\star (1 - e \cos E(t)) , \quad (5.54)$$

где e - эксцентриситет орбиты. Связь между эксцентрической аномалией E и временем задается уравнением Кеплера. Для $P = 1$ и при условии, что звезда

проходить перицентр в момент $t = 0$, эта связь принимает вид

$$2\pi t = E(t) - e \sin E(t). \quad (5.55)$$

Среднее значение s^2 за орбитальный период равно

$$\langle s^2 \rangle = a_*^2 \int_0^1 [1 - e \cos E(t)]^2 dt. \quad (5.56)$$

Но $dt = (1 - e \cos E) dE / (2\pi)$; переходя от интегрирования по dt к интегрированию по dE , имеем, таким образом:

$$\langle s^2 \rangle = \frac{a_*^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos E)^3 dE = a_*^2 \left(1 + \frac{3}{2}e^2 \right). \quad (5.57)$$

Для нулевой начальной фазы положение Земли даётся выражением (5.47) с $\psi = 0$:

$$\mathbf{b} = \left(A \cos 2\pi t, A \sin 2\pi t, 0 \right). \quad (5.58)$$

Положение родительской звезды выражается через эксцентрическую аномалию как

$$\mathbf{s} = \left(a_* (\cos E - e), a_* \sqrt{1 - e^2} \sin E, 0 \right). \quad (5.59)$$

Это уравнение учитывает предположение, что плоскость орбиты параллельна эклиптике, $i_E = 0$.

Среднее значение скалярного произведения $\langle \mathbf{s}' \cdot \mathbf{b} \rangle$ за орбитальный период равно

$$\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \rangle = a_* A \times \int_0^1 \left[(\cos E - e) \cos 2\pi t + \sqrt{1 - e^2} \sin E \sin 2\pi t \right] dt. \quad (5.60)$$

Если мы снова перейдём к интегрированию по dE , выражение, стоящее под знаком интеграла, станет

$$\left[(\cos E - e) \cos (E - e \sin E) + \sqrt{1 - e^2} \sin E \sin (E - e \sin E) \right] \times (1 - e \cos E). \quad (5.61)$$

Несложные, хотя и громоздкие, вычисления показывают, что подынтегральное выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2}e \cos(E - e \sin E) \\
& + \frac{1+e^2}{2} [\cos(e \sin E) + \cos(2E - e \sin E)] \\
& - \frac{e}{4} [\cos(E + e \sin E) + \cos(3E - e \sin E)] \\
& + \left\{ \frac{1}{2} [\cos(e \sin E) - \cos(2E - e \sin E)] \right. \\
& \left. - \frac{e}{4} [\cos(E + e \sin E) - \cos(3E - e \sin E)] \right\} \sqrt{1-e^2}.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Интегралы от таких выражений по промежутку от 0 до 2π вычисляются с помощью известной формулы из теории бesselевых функций:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nE - e \sin E) dE = J_n(e), \tag{5.63}$$

где $J_n(e)$ – функция Бесселя порядка n . Применяя эту формулу, находим, что интеграл в уравнении (5.60) равен

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2}e J_1(e) \\
& + \frac{1+e^2}{2} [J_0(e) + J_2(e)] - \frac{e}{4} [J_1(-e) + J_3(e)] \\
& + \left\{ \frac{1}{2} [J_0(e) - J_2(e)] - \frac{e}{4} [J_1(-e) - J_3(e)] \right\} \sqrt{1-e^2}.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Используя хорошо известные свойства функций Бесселя

$$J_1(-e) = -J_1(e), \tag{5.65}$$

$$J_2(e) = \frac{2}{e} J_1(e) - J_0(e), \tag{5.66}$$

$$J_3(e) = \left(\frac{8}{e^2} - 1 \right) J_1(e) - \frac{4}{e} J_0(e), \tag{5.67}$$

в итоге получаем следующее выражение для искомого среднего значения

$$\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \rangle = a_* A \left(J_0(e) - \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e} J_1(e) \right). \tag{5.68}$$

При малом эксцентриситете эта формула принимает вид

$$\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \rangle = a_* A \left(1 - \frac{e^2}{2} \right). \quad (5.69)$$

Таким образом, оба средних значения, $\langle s^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \rangle$, квадратично зависят от эксцентриситета, когда орбита близка к круговой. В экстремальном случае очень вытянутой орбиты ($e \rightarrow 1$) они стремятся к следующим предельным значениям:

$$\langle s^2 \rangle \rightarrow \frac{5}{2} a_*^2, \quad (5.70)$$

$$\langle \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \rangle \rightarrow a_* A (J_0(1) - J_1(1)) \approx 0.33 a_* A. \quad (5.71)$$

Объединяя уравнения (5.57) и (5.68), находим, что зависимость корреляционной функции от эксцентриситета имеет вид

$$\rho = \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right)^{-1/2} \left(J_0(e) - \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e} J_1(e) \right). \quad (5.72)$$

На рисунке 5.5 изображен график вычисленной таким способом функции ρ .

Для малых значений эксцентриситета корреляционная функция определяется выражением

$$\rho = 1 - \frac{5}{4} e^2 \quad (5.73)$$

и вычисление астрометрической эффективности приводит к формуле

$$\kappa = e \sqrt{5/2}. \quad (5.74)$$

Таким образом, если орбита экзопланеты незначительно отличается от круговой, астрометрическая эффективность увеличивается линейно с эксцентриситетом, в то время как корреляционная функция и смещение параллакса являются квадратичными функциями эксцентриситета. В противоположном экстремальном случае очень вытянутой орбиты, который формально соответствует пределу $e \rightarrow 1$, корреляционная функция приближается к своему минимальному значению $\sqrt{2/5} (J_0(1) - J_1(1)) = 0.21$; соответственно эффективность достигает максимального значения 0.98. Мы рассмотрим влияние эксцентриситета на астрометрическую обнаруживаемость далее в разделе 5.3.3.

5.3. Обсуждение

В предыдущих разделах мы показали, что поглощение орбитального движения параллаксом влияет на астрометрическое детектирование экзопланетных систем. Здесь мы переходим к обсуждению некоторых аспектов этой проблемы. Сначала мы рассмотрим влияние орбитальных фаз и периода на возможность выявления таких систем. Поскольку детектирование очень чувствительно к параметрам системы, когда период близок к одному году, мы рассмотрим такие системы подробнее. Начиная с эффектов эксцентриситета и наклона, мы рассматриваем предел длительных наблюдений и, наконец, оцениваем сопутствующее снижение вероятности обнаружения. Кроме того, мы кратко рассмотрим преимущества использования других наблюдательных методик.

5.3.1. Эффекты разности фаз и орбитального периода

Для простоты мы обсуждаем здесь круговую компланарную орбиту; случай отличного от нуля наклона рассматривается в разделе 5.3.2. Уравнение (5.49) предполагает, что для $i_E = 0$ корреляционная функция ρ зависит исключительно от начального сдвига орбитальной фазы Δ . Для наглядности удобно рассмотреть вместо ρ астрометрическую эффективность κ , заданную уравнением (5.29). Как объяснено в разделе 5.1.2, эта величина очень полезна при изучении тонких деталей вероятности обнаружения. Рисунок 5.3 иллюстрирует поведение κ для $T = 5$ лет. Рассмотрение этого графика показывает, что κ очень чувствительна к разности фаз, если период близок к одному году, и практически не зависит от неё в противном случае.

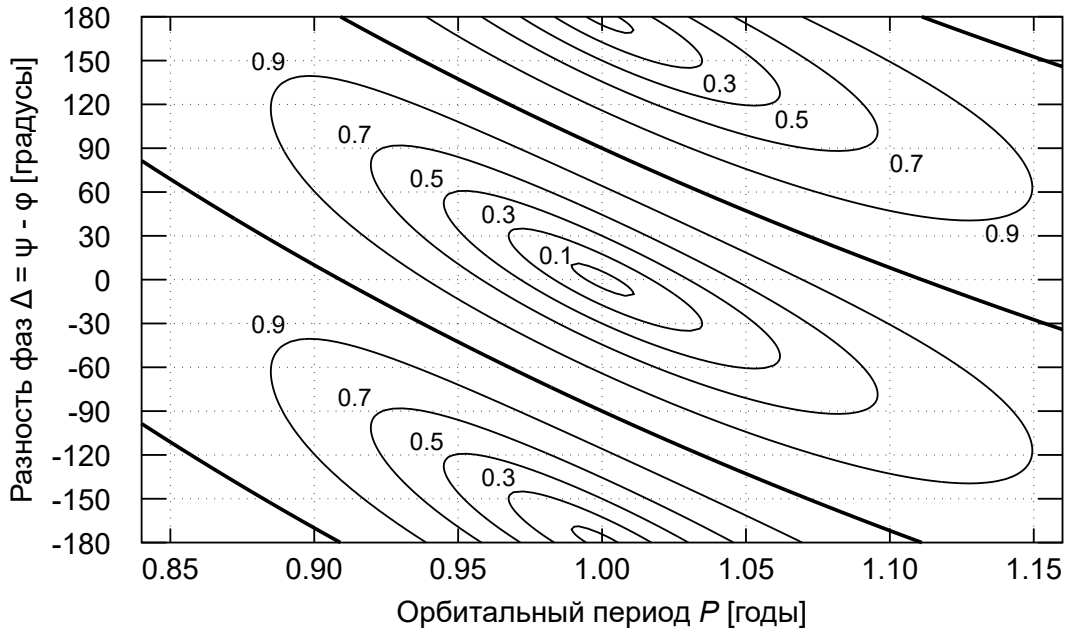


Рис. 5.3. – Зависимость астрометрической эффективности κ от орбитального периода P и начальной разности фаз $\Delta = \psi - \phi$. Метки указывают значения κ для изолиний, вычисленных по уравнениям (5.29) и (5.49) с длительностью наблюдений $T = 5$ лет и наклоном $i_E = 0^\circ$ (т. е. для прямого компланарного движения родительской звезды). Жирные линии показывают, где $\kappa = 1$ и орбитальное движение родительской звезды не поглощается оценкой параллакса. Нулевые значения, достигаемые при $P = 1$ год, и разности фаз 0 и $\pm 180^\circ$ соответствуют антипараллельной и параллельной конфигурации Земли и экзопланеты, при которых орбитальное движение родительской звезды полностью поглощается параллаксом.

Эта зависимость от периода является результатом того, что векторы положения перестают вращаться синхронно, и корреляция между ними быстро падает по мере отклонения периода от одного года. Численные расчеты показали, что для заданных κ и T вероятность обнаружения критически зависит от фаз орбиты при $1 - \Delta P < P < 1 + \Delta P$, где $\Delta P = (0.76\kappa - 0.08) / T$ для компланарной орбиты. Наклонение немного сужает интервал ΔP . За пределами этого диапазона периодов влияние разности фаз практически пренебрежимо мало.

5.3.2. Влияние длительности наблюдений. Время декорреляции

Поведение корреляционной функции, когда наблюдения охватывают большой промежуток времени, существенно зависит от орбитального периода. Графики ρ от T для нескольких наборов параметров показаны на рисунке 5.4. Если период не равен одному году, ρ уменьшается с ростом T и исчезает в долгосрочной перспективе. Это означает, что орбитальное движение не влияет на обнаружение планетной системы при условии, что наблюдения достаточно длительны. Причиной этого является отсутствие синхронности между орбитальным движением Земли и родительской звезды, обсуждаемое в разделе 5.3.1.

Время, в течение которого корреляционная функция обращается в нуль, называется временем декорреляции T_d . Анализ уравнения (5.49) показывает, что по порядку величины

$$T_d \sim \frac{P}{|P - 1|}. \quad (5.75)$$

Говоря о достаточно длинной продолжительности наблюдений, имеет смысл подразумевать интервалы, большие по сравнению со временем декорреляции. Например, для случаев $P = 1.1$ и 0.97 , показанных на рисунке 5.4, $T_d = 11$ и 32 , соответственно. Таким образом, может потребоваться довольно много времени,

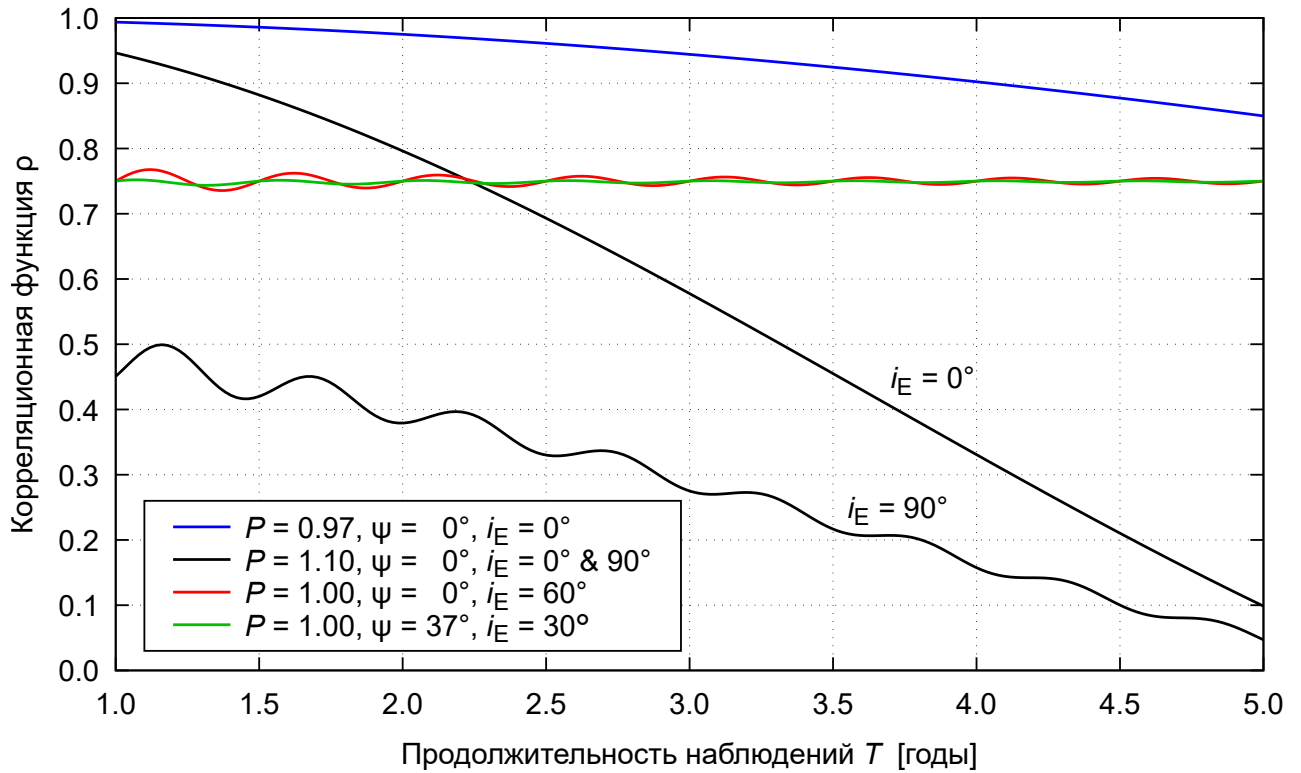


Рис. 5.4. – Зависимость корреляционной функции ρ от продолжительности наблюдений для $\phi = 0^\circ$. Чёрные линии показывают ρ , вычисленную по формуле (5.49) при $P = 1.1$ и $\psi = 0^\circ$ для двух различных наклонений, 0° и 90° , приведённых рядом с соответствующими графиками. Синяя кривая получена для копланарной орбиты с $P = 0.97$ и тем же значением фазы ψ . Другие графики иллюстрируют случай $P = 1$ и показывают ρ , вычисленные по формуле (5.50). Результаты для $i_E = 60^\circ$, $\psi = 0^\circ$ и $i_E = 30^\circ$, $\psi = 37^\circ$ изображены красной и зелёной линиями соответственно.

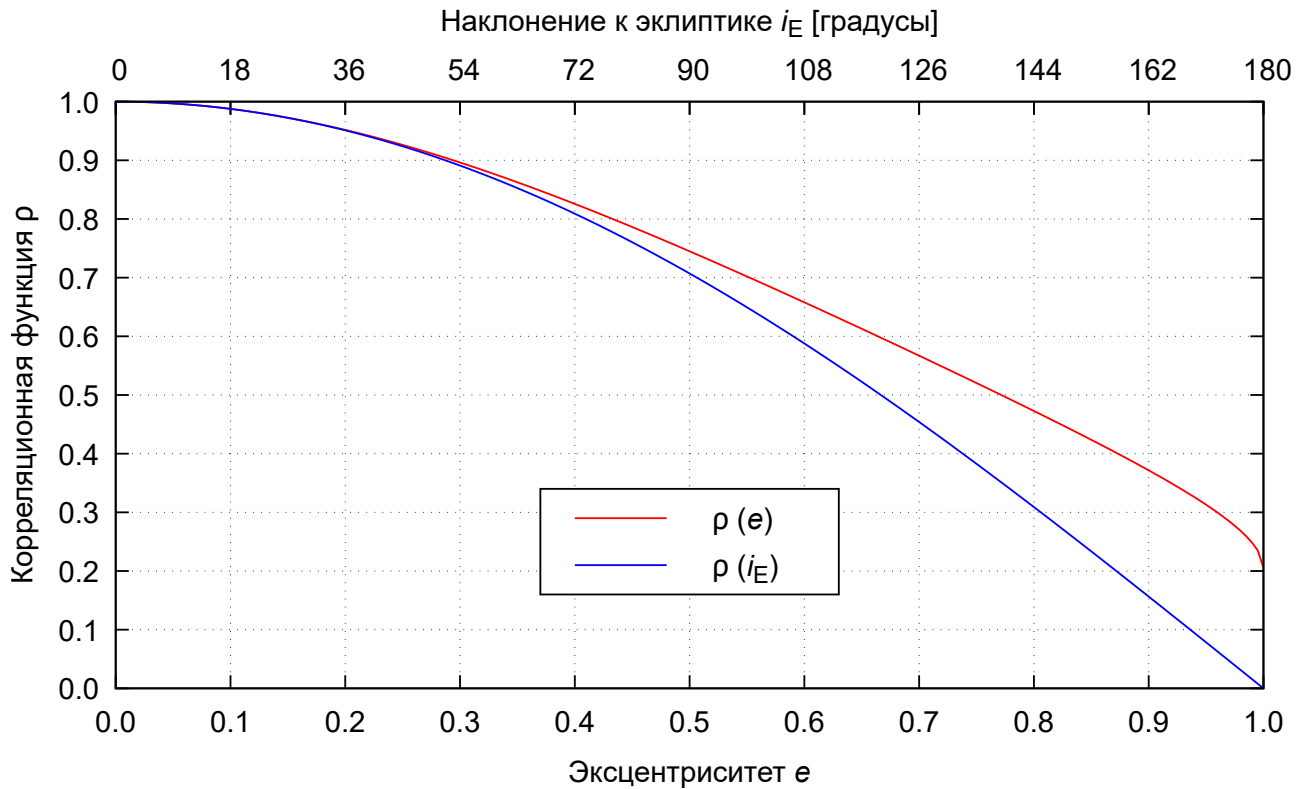


Рис. 5.5. – Зависимость корреляционной функции от эксцентриситета орбиты e и её наклона к плоскости эклиптики i_E для орбитального периода $P = 1$ год. Красная линия и нижняя ось отвечают функции $\rho(e)$, вычисленной по формуле (5.72), а синяя линия и верхняя ось соответствуют функции $\rho(i_E)$, полученной по формуле (5.51) для нулевой разности фаз.

чтобы корреляция исчезла.

Для периода, строго равного одному году, ситуация иная. Как показано в разделе 5.2.2, в этом случае корреляционная функция стремится к постоянному значению, заданному уравнением (5.51).

5.3.3. Влияние эксцентриситета и наклона

Для иллюстрации влияния эллиптичности и наклона на астрометрическое детектирование на рисунке 5.5 показаны графики ρ в зависимости от e и i_E . Графики специально выполнены для простейшего случая $P = 1$ и

$\Delta (\equiv \psi - \phi) = 0$, чтобы наглядно продемонстрировать сходства и различия между круговыми и эллиптическими орбитами.

При ненулевом наклонении круговая орбита проецируется в эллипс¹ и становится геометрически подобной реальной эллиптической орбите. Это сходство объясняет, почему функции $\rho(e)$ и $\rho(i_E)$ совпадают при малых и умеренных значениях параметров, $e \leq 0.4$ и $i_E \leq 70^\circ$. Отличия при больших значениях параметров обусловлены тем, что эти диапазоны параметров описывают разные типы орбит. В то время как $e \simeq 1$ соответствует сильно вытянутой орбите, i_E , близкое к 180° , соответствует ретроградному движению по круговой орбите, почти параллельной эклиптике (см. раздел 5.2.1).

Корреляция падает по мере того, как орбита становится более вытянутой. Это уменьшение ρ является результатом того, что и длина, и угловая скорость вектора положения звезды являются переменными для такой орбиты, тогда как эти величины постоянны в движении Земли. Чем больше эксцентриситет, тем больше разница и меньше корреляция. Это объяснение применимо также к поведению корреляционной функции для круговой орбиты с $i_E < 90^\circ$, поскольку более высокие значения наклона соответствуют более вытянутым проекциям. Однако при $i_E > 90^\circ$ корреляция уменьшается, поскольку звезда и Земля вращаются в противоположных направлениях.

5.3.4. Снижение вероятности детектирования

Уменьшение астрометрической сигнатуры из-за поглощения орбитального движения параметром параллакса уменьшает отношение сигнал/шум $S/N \equiv v/\sigma$, где σ – астрометрическая точность. По аналогии с эффективной астромет-

¹ Стоит напомнить, что здесь подразумевается проекция на плоскость эклиптики.

рической сигнатурой можно ввести эффективное отношение сигнал/шум:

$$(S/N)_{\text{eff}} = \kappa (S/N) . \quad (5.76)$$

Если мы рассмотрим набор систем, имеющих одинаковое отношение сигнал/шум (т. е. системы с $v/\sigma = a_*/(\sigma R) = \text{const}$), то среднее значение астрометрической эффективности может служить удобной мерой снижения вероятности обнаружения.

Как объяснено в разделе 5.3.1, κ близка к нулю в узком интервале периодов около одного года. Поэтому мы можем просто положить $P = 1$ при вычислении среднего значения. Более того, мы считаем продолжительность наблюдений достаточно большой для того, чтобы приближенное уравнение (5.51) было действительным; это дает приблизительное выражение для κ :

$$\kappa = \left(1 - \cos^2 \Delta \cos^4 \frac{i_E}{2} \right)^{1/2} . \quad (5.77)$$

Мы также предполагаем, что сдвиг фазы $\Delta (\equiv \psi - \phi)$ и ориентация орбиты i_E распределены случайным образом (последнее эквивалентно равномерному распределению $\cos i_E$). Усреднение затем выполняется с использованием формулы из теории эллиптических интегралов [10, Раздел 6.148] следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \Delta \cos^4 \frac{i_E}{2} \right)^{1/2} d\Delta d \cos i_E \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 E \left(\cos^2 \frac{i_E}{2} \right) d \cos i_E = \frac{2}{\pi} \int_0^1 E(k) dk = \frac{2G + 1}{\pi} , \end{aligned} \quad (5.78)$$

где E – полный эллиптический интеграл второго рода,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi , \quad (5.79)$$

и $G = 0.91597\dots$ – постоянная Каталана.

Числовое значение $\bar{\kappa} \simeq 0.90$ предполагает, что для выборки систем с периодом, близким к одному году, можно ожидать, что S/N упадет в среднем на

10%. Число обнаружений определяется статистически как количество систем, для которых S/N превышает указанный порог обнаружения. Например, порог $S/N > 3$ часто используется как эмпирическое правило в исследованиях по обнаружению астрометрических планет [111; 118; 135]. Уменьшение S/N на 10% означает, что ожидаемое количество обнаруженных систем с $P \simeq 1$ соответствует количеству систем с той же астрометрической сигнатурой и периодом, отличным от одного года, которые были бы обнаружены, если бы порог был на 10% ниже.

5.3.5. Сопоставление с другими наблюдательными методиками

Стоит кратко рассмотреть потенциал других основных методов, таких как фотометрические транзиты и лучевые скорости [113], для обнаружения тех планетных систем, которые не могут быть астрометрически детектированы вследствие поглощения орбитального движения параллаксом. Мы также обсуждаем возможность использования фотометрических данных для распознавания сопутствующего смещения параллакса.

Транзиты

Транзит может произойти, если $\cos i \leq R_\star/a_p$, где R_\star — радиус родительской звезды. Для $M_p \ll M_\star$ и $P \simeq 1$ третий закон Кеплера говорит, что $(a_p/1 \text{ AU}) \simeq (M_\star/M_\odot)^{1/3}$. Мы рассматриваем прямое движение родительской звезды в плоскости орбиты, почти компланарной эклиптике, т. е. $i_E \simeq 0$. Используя уравнение (5.45), мы можем записать условие наличия транзита как

$$|\beta| \leq 0.27^\circ \left(\frac{R_\star}{R_\odot} \right) \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right)^{-1/3}. \quad (5.80)$$

Эта формула показывает, что в интересующих нас системах транзиты могут быть наблюдаемы только в пределах узкой полосы вокруг эклиптики. Для звезд главной последовательности R_* примерно пропорционален $M_*^{0.8}$ [56], следовательно, $|\beta| \leq 0.27^\circ (M_\odot/M_*)^{0.47}$. Соответственно, ширина полосы варьируется от 0.4° для родительских звезд-карликов M0 до примерно 0.7° для звезд F0V.

Близость к эклиптике накладывает ограничения на возможность наблюдения планетарных транзитов для копланарных систем. Из простых геометрических соображений видно, что, если планета проецируется на диск звезды, то звезда отстоит от Солнца на угол $180^\circ - |\Delta|$. Если разность фаз Δ близка к $\pm 180^\circ$, т. е. векторы положения \mathbf{b} и \mathbf{s} почти антипараллельны, транзиты всегда происходят, когда родительская звезда находится либо близко к солнечному лимбу, либо даже позади Солнца, если смотреть с Земли. Таким образом, транзиты ненаблюдаемы, и вторичные затмения остаются единственными фотометрическими свидетельствами наличия планетарного компаньона. Из-за наблюдательных ограничений событие транзита может остаться необнаруженным, даже если конфигурация значительно отклоняется от точного антипараллельного расположения. Например, если программа поиска транзитов способна отслеживать звезды за пределами минимального углового расстояния ξ_{\min} от Солнца, обнаружение транзитов возможно только для систем с $|\Delta| < \Delta_{\max} (\equiv 180^\circ - \xi_{\min})$ (напомним, что мы рассматриваем почти копланарные системы в окрестности эклиптики). Таким образом, для систем такого типа существует эффект наблюдательной селекции, так как в системах с $|\Delta| > \Delta_{\max}$ транзиты ненаблюдаемы.

Лучевые скорости

Наблюдения лучевых скоростей, по-видимому, имеют лучшие перспективы обнаружения экзопланет, которые нельзя детектировать астрометрически. Как астрометрические, так и доплеровские наблюдения корректируются с учетом орбитального движения Земли. Однако существует заметная разница в способе применения поправок. Стандартная астрометрическая модель (см. уравне-

ние (5.2), в которой параллакс учитывает движение Земли, опирается на параллакс – величину, которая либо подлежит определению, либо известна с некоторой ошибкой. Если бы расстояние до целевой системы было точно известно, орбитальное движение родительской звезды, в принципе, можно было бы восстановить из астрометрических данных.

Напротив, орбитальная скорость Земли, которая входит в поправку доплеровских наблюдений [151], очень хорошо известна. В результате скорость звезды относительно барицентра Солнечной системы определяется точно, и ее орбитальное движение может быть обнаружено. Стоит отметить, что, помимо очевидных ограничений, налагаемых точностью наблюдений, компланарные системы, лежащие в окрестностях полюсов эклиптики, не могут быть обнаружены из-за уменьшения амплитуды лучевой скорости на высоких эклиптических широтах для орбит.

Смещение абсолютной звёздной величины

Ошибка параллакса приводит к смещенной оценке светимости родительской звезды. Оценим смещение абсолютной звёздной величины, которую будем обозначать символом \mathcal{M} во избежание путаницы со стандартным обозначением массы. Согласно определению абсолютной величины, её оценка связана с видимой величиной m и оценкой параллакса следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\text{est}} = m + 5 - 5 \lg \varpi_{\text{est}}. \quad (5.81)$$

Соответственно, смещение в оценке абсолютной величины имеет вид

$$\Delta \mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{\text{est}} - \mathcal{M} = 5 \lg \frac{\varpi_{\text{est}}}{\varpi}. \quad (5.82)$$

Используя оценку параллакса из уравнения (5.24), выражаем смещение через корреляционную функцию

$$\Delta \mathcal{M} = 5 \lg \left(1 - \rho \frac{a_{\star}}{A} \right). \quad (5.83)$$

Радиус орбиты родительской звезды значительно меньше астрономической единицы, поэтому с большой степенью точности

$$\Delta\mathcal{M} = -\frac{5}{\ln 10} \rho \frac{a_\star}{A} = -2.17 \rho \frac{a_\star}{A}. \quad (5.84)$$

Для того, чтобы связать a_\star с параметрами системы, воспользуемся третьим законом Кеплера. Для системы с орбитальным периодом около одного года находим

$$\frac{a_\star}{A} = \left(\frac{M_p}{M_\odot} \right) \left(\frac{M_\star}{M_\odot} + \frac{M_p}{M_\odot} \right)^{-2/3}. \quad (5.85)$$

где M_\star и M_p означают массу родительской звезды и планеты соответственно. Поскольку $M_p \ll M_\star$, можно пренебречь вторым слагаемым в скобках. Кроме того, массу планеты удобно выразить в единицах массы Юпитера M_J , что даёт:

$$\frac{a_\star}{A} = 9.55 \cdot 10^{-4} \left(\frac{M_p}{M_J} \right) \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right)^{-2/3}, \quad (5.86)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.84), получаем окончательно

$$\Delta\mathcal{M} = - (2 \cdot 10^{-3}) \rho \left(\frac{M_p}{M_J} \right) \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right)^{-2/3} \text{ зв. вел.} \quad (5.87)$$

Отметим, что $\Delta\mathcal{M}$ не зависит от расстояния. Это соотношение показывает, что смещение $\Delta\mathcal{M}$ находится на уровне нескольких единиц 10^{-3} зв. вел. или ниже для спутников планетарной массы. Такая небольшая разница в светимости имеет ограниченное значение, поскольку она значительно ниже неопределенностей в моделях звездной калибровки. Массивные коричневые карлики с $M_p \simeq 50\text{--}100 M_J$, для которых смещение звездной величины может составлять 0.1–0.2 зв. вел., дают больше шансов распознать расхождение в светимости. Таким образом, возможность преодоления вырождения между орбитальным и параллактическим движением с использованием фотометрических данных ограничена коричневыми карликами, тогда как обнаружение эффектов от планетарных спутников вряд ли достижимо на практике.

5.4. Предельная масса астрометрически детектируемой экзопланеты

В завершение этой главы приведем формулу для оценки предельной массы экзопланеты, которая может быть детектирована астрометрически.

Результаты численных экспериментов показали, что астрометрия наиболее эффективна в обнаружении экзопланет, если их орбитальный период не превышает продолжительность наблюдений [111; 135], поэтому ограничимся периодами, не превышающими длительность наблюдений T , $P \leq T$.

Согласно третьему закону Кеплера, большая полуось орбиты планеты определяется выражением

$$a_p = A \times \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right)^{1/3} \times \left(\frac{P}{1 \text{ год}} \right)^{2/3}. \quad (5.88)$$

Применяя вышеуказанное условие для величины периода, находим ограничение на размер орбиты

$$a_p \leq a_{\max} \equiv A \times \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right)^{1/3} \times \left(\frac{T}{1 \text{ год}} \right)^{2/3}. \quad (5.89)$$

Далее, стандартное определение астрометрической сигнатуры (5.25) удобно записать в виде

$$v = 3 \text{ мксд} \times \left(\frac{M_p}{M_\oplus} \right) \times \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right)^{-1} \times \left(\frac{a_p}{A} \right) \times \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right)^{-1}. \quad (5.90)$$

Выражая отсюда массу планеты, находим

$$M_p = M_\oplus \times \left(\frac{v}{3 \text{ мксд}} \right) \times \left(\frac{M_\star}{M_\odot} \right) \times \left(\frac{a_p}{A} \right)^{-1} \times \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right). \quad (5.91)$$

Астрометрическое обнаружение экзопланет в решающей степени зависит от отношения сигнал-шум v/σ , где σ – астрометрическая точность. Принимая обычное правило трех сигм, положим $v = 3\sigma$. Этот критерий вместе с вышеуказанным условием для максимального размера орбиты (5.89) позволяет установить

нижний предел массы планеты.

$$M_p \geq M_{\min} \equiv M_{\oplus} \times \left(\frac{\sigma}{1 \text{ мксд}} \right) \times \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^{2/3} \times \left(\frac{T}{1 \text{ год}} \right)^{-2/3} \times \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right). \quad (5.92)$$

Эта удобная формула была получена автором в работе [66] и насколько известно, ранее не встречалась в литературе.

Для расширенной миссии Gaia с $T = 10$ лет, это соотношение даёт

$$M_{\min} = M_{\oplus} \times \left(\frac{\sigma}{5 \text{ мксд}} \right) \times \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^{2/3} \times \left(\frac{R}{1 \text{ пк}} \right). \quad (5.93)$$

Поскольку присутствие экзопланет обнаруживается из анализа невязок, под следует понимать не итоговую точность астрометрического каталога, а точность индивидуальных измерений. Как указано в разделе 6.4, наилучшая на сегодняшний день репрезентативная оценка для Gaia составляет $\sigma_{\varphi} = 100$ мксд. Используя эту величину и рассматривая звёзды солнечного типа, находим, что на расстоянии в 10 пк планеты с массой менее $200M_{\oplus}$ не могут быть детектированы с использованием наблюдений Gaia. На меньших расстояниях возможно обнаружение планет с меньшей массой. Принадлежность родительской звезды к более позднему спектральному классу, что сопровождается понижением её массы, также позволяет обнаруживать более легкие планеты.

5.5. Выводы к пятой главе

Представлен анализ влияния орбитального движения Земли на астрометрическую обнаруживаемость систем с невидимыми компаньонам с упором на обнаружение экзопланет. Продемонстрировано, что если период компаньона близок к одному году, а его орбитальная плоскость почти параллельна эклиптике, орбитальное движение родительской звезды может быть полностью или частич-

но поглощено параметром параллакса. Если происходит полное поглощение, компаньон астрометрически необнаружим.

Анализ статистики соответствия χ^2 для оценки параллакса позволил нам найти сопутствующее смещение параллакса и ввести удобную меру для обнаруживаемости, эффективную астрометрическую сигнатуру, которая учитывает орбитальное движение Земли и влияние поглощения параллакса на астрометрические остатки. Примечательно, что эффекты орбитального движения Земли удобно параметризуются одним параметром: функцией корреляции положения ρ . Для круговой орбиты получено общее выражение для функции корреляции в терминах параметров орбиты и продолжительности наблюдений. Таким образом, получен полный набор формул для расчета астрометрических эффектов, обусловленных взаимодействием между орбитальным движением Земли и орбитальным движением родительской звезды для произвольных круговых орбит. Эти эффекты значительны для орбит с малым эксцентриситетом ($e \leq 0.5$) и периодом $0.8 \leq P \leq 1.2$ год. В этом диапазоне периодов эффекты в решающей степени зависят от наклона плоскости орбиты по отношению к эклиптике и от относительного положения Земли и звезды.

Некоторые астрометрически необнаружимые системы могут быть обнаружены с помощью других методов обнаружения. В то время как фотометрические транзитные поиски полезны для этих целей только в пределах узкой полосы вокруг эклиптики, обзоры лучевых скоростей потенциально способны обнаруживать такие системы на большей части небесной сферы, за исключением областей вокруг полюсов эклиптики. Более того, расхождение между светимостью родительской звезды, полученной из тригонометрического параллакса, и астрофизическими данными может предоставить доказательства наличия невидимого компаньона. Хотя небольшое смещение параллакса из-за планетарных компаньонов немного влияет на оценки абсолютной величины, этот эффект может быть существенным для компаньонов массивных коричневых карликов.

Стоит отметить, что все результаты, полученные для одной планеты, спра-

ведливы для систем с несколькими экзопланетами, поскольку движение родительской звезды представляет собой простую композицию эффектов, производимых каждой из планет по отдельности. Эффекты поглощения параллакса на характеристику планетарных орбит в этой работе не рассматривались; эта сложная и важная проблема заслуживает специального изучения.

Получена удобная формула для оценки предельной массы экзопланеты, которая может быть детектирована астрометрически. Это соотношение позволяет делать качественно выводы об обнаружении экзопланет с использованием наблюдений Gaia. Так, например, исходя из имеющихся данных о точности измерений Gaia, можно заключить, что планеты с массой менее $200M_{\oplus}$, обращающиеся вокруг звёзд солнечного типа, могут быть детектированы расстояниях не превышающих 10 пк.

Глава 6

Ограничения на тестирование постньютоновской гравитации с использованием сканирующего астрометрического спутника

Среди целей миссии ESA Gaia [70], вероятно, наиболее фундаментальной является создание абсолютного астрометрического каталога, который является реализацией квазиинерциальной системы отсчета на небе, вплоть до звездной величины $G = 20.7$, и с точностью от 10 до 1000 микросекунд дуги (мсд) для более чем миллиарда звезд. Настоящим прорывом для астрометрии, оказывающим глубокое влияние на многие области астрономии и астрофизики, является доступность абсолютных параллаксов с точностью $\sim 10\%$ в масштабах всей Галактики. Оценка этих величин является главной целью абсолютной астрометрии, в отличие от относительной астрометрии, которая обычно способна определять параллаксы только относительно фоновых объектов, и, таким образом, на нее влияют систематические ошибки, свойственные этим опорным объектам.

Однако достижение этой цели с помощью Gaia потенциально затруднено из-за связи между параллаксом и другими параметрами, что может привести к смещению между вычисленным и истинным параллаксом. Эта систематическая ошибка обычно называется нуль-пунктом параллакса.

Некоторые из этих корреляций неразрывно связаны с тем, как сканирующий космический телескоп производит измерения, другие имеют более фундаментальный характер. К корреляциям первого типа относятся рассмотренная во второй главе связь глобального смещения параллаксов с колебаниями базового угла, а также корреляция между параллаксом и скоростью поперечного

движения источников в поле зрения [98].

Второй тип связи хорошо иллюстрируется корреляцией между параллаксами и так называемым параметром γ [145], который является одним из параметров, используемых в параметризованном постньютоновском (ППН) формализме [116; 148]. Этот формализм позволяет классифицировать и количественно оценить отклонения от общей теории относительности (ОТО) в слабых гравитационных полях. В рамках этого подхода отличия от ОТО характеризуются десятью параметрами, описывающими различные физические эффекты. Общая теория относительности является одним из краеугольных камней современной физики, и её предсказания были подтверждены в многочисленных экспериментах, тем не менее, существует несколько альтернативных теорий гравитации [26], проверка которых представляет собой важную научную задачу.

Параметр γ определяет кривизну пространства, создаваемую единичной массой, и по этой причине он напрямую входит в формулы, описывающие гравитационное искривление света. В силу этого обстоятельства астрометрические измерения хорошо подходят для проверки ОТО посредством оценки этого параметра [133]. Наилучшее на настоящий момент астрометрическое определение параметра γ , основанное на анализе гравитационного отклонения света при РСДБ наблюдениях квазаров и радиогалактик [89] составляет $\gamma - 1 = (-0.8 \pm 1.2) \times 10^{-4}$. При этом наивысшая точность 2×10^{-5} была достигнута с помощью эффекта Шапиро при радарных наблюдениях космического аппарата Кассини [34].

На стадии подготовки проекта Gaia ожидалось, что точность астрометрического оценивания параметра γ может быть существенно улучшена с использованием наблюдений Gaia благодаря огромному увеличению точности измерений, количества наблюдаемых объектов и времени наблюдения. Оценку параметра γ можно осуществить, включив его в число неизвестных, подлежащих определению в так называемом глобальном астрометрическом решении, наряду со обычными астрометрическими параметрами, такими как прямое восхож-

дение, склонение, тригонометрический параллакс и компоненты собственного движения [99; 146]. Благодаря этому астрометрическое решение предоставляет потенциальную возможность для определения параметра γ . Такую методику планировалось использовать в проекте Gaia. В проекте Hipparcos применялась иная стратегия, основанная на апостериорной оценке параметра γ из невязок астрометрического решения [65].

Однако из того, что было упомянуто выше, ясно, что существующая корреляция между параллаксами и параметром γ может поставить под угрозу научные результаты астрометрической миссии, основанной на принципах, воплощённых в проекте Gaia. Например, систематическое смещение параллаксов может ухудшить точность определения параметра γ , полученного в результате реконструкции сферы. И наоборот, ошибка в параметре γ может привести к смещённой оценке параллаксов.

Ни один из этих вопросов до сих пор не изучался систематически. В настоящей диссертационной работе исследованы обе эти проблемы. Сначала рассмотрено влияние гипотетического отклонения от ОТО на результат астрометрического эксперимента, подобного Gaia. С этой целью был изучен эффект отклонения параметра γ от единицы на определение параллаксов. Затем показано, что глобальный сдвиг параллаксов приводит к смещённой оценке параметра γ , при этом в качестве нуль-пункта параллаксов используется величина -17 мксд, определённая по наблюдениям квазаров в последнем опубликованном выпуске данных Gaia (DR3) [97].

Уместно сделать важное замечание. В настоящее время известно два механизма возникновения глобального сдвига параллаксов. Он может быть вызван, во-первых, рассмотренными во второй главе колебаниями базового угла и, во-вторых, поперечным движением изображения звезды в поле зрения. Примечательно, что второй механизм был обнаружен уже в ходе выполнения космического эксперимента Gaia [98]. Нельзя исключить, что существуют ещё какие-либо неизвестные механизмы, смещающие нуль-пункт параллаксов.

6.1. Теория

Корреляция между параллаксами и параметром γ возникает из-за сходства в том, как отклонение света и параллакс влияют на наблюдаемые направления. Увеличивающееся отклонение света (т. е. небольшое увеличение PPN γ) приводит к смещению направления наружу от центра отклоняющего тела, тогда как растущие параллаксы приводят к смещению направления к барицентру Солнечной системы. Солнце отвечает за самую значительную часть отклонения света. Для сканирующей миссии, использующей конструкцию, подобную Gaia, сохраняются большие угловые разделения между Солнцем и объектами наблюдений; например, наблюдения Gaia проводятся на расстоянии от 45° до 135° от Солнца. В таком случае большие круги от наблюдаемого источника до центра Солнца и до БСС почти совпадают, и поэтому эффекты отклонения света и параллакса почти параллельны и противоположны по направлению, что проиллюстрировано рисунком 6.1.

Это интуитивное объяснение более подробно изложено в следующих подразделах, где мы приводим теоретические основы и выводим некоторые полезные формулы. Анализ влияния тригонометрического параллакса и параметра γ на наблюдаемые величины показывает сильную корреляцию между этими двумя величинами, что согласуется с более ранними результатами. Для дальнейшей проверки влияния такой корреляции мы смоделировали наблюдения, подобные наблюдениям Gaia, используя возмущенное значение γ , а затем выполнили решение методом наименьших квадратов для единственных астрометрических параметров, предположив значение ОТО γ . Наконец, мы использовали этот подход, чтобы определить, как систематическая ошибка параллакса смещает оценку параметра γ и наоборот.

В целях сокращения записи все расстояния в этой главе выражены в а.е..

6.1.1. Основные уравнения

Рассмотрим как малые вариации тригонометрического параллакса и параметра γ меняют наблюдаемое направление на какой-либо объект на небесной сфере. Изменение направления, вызванное вариацией параллакса $\delta\varpi$, описывается уравнением (1.27). Выпишем его ещё раз:

$$\delta\mathbf{u}_\varpi = \mathbf{u} \times [\mathbf{u} \times \mathbf{b}] \delta\varpi, \quad (6.1)$$

где \mathbf{b} – барицентрическое положение наблюдателя.

В рамках формализма ППН [82; 100; 116] отклонение света в гравитационном поле Солнца равно

$$\Delta\mathbf{u} = -\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}_h) \frac{1 + \gamma}{2} \frac{r_s}{b_h (b_h + \mathbf{u}'\mathbf{b}_h)}. \quad (6.2)$$

Здесь \mathbf{b}_h – гелиоцентрическое положение наблюдателя, а r_s означает гравитационный радиус Солнца, выраженный в астрономических единицах:

$$r_s = 2GM_\odot / Ac^2 = 1.974 \times 10^{-8} \text{ а.е.} . \quad (6.3)$$

Барицентрическое расстояние центра Солнца не превышает 0.01 а.е. [114], поэтому \mathbf{b} и \mathbf{b}_h отличаются максимум на 0.6° по направлению и на 1% по абсолютной величине для космического аппарата, работающего вблизи Земли или вблизи точки L_2 . Такая небольшая разница говорит о том, что можно не делать различия между барицентрическим и гелиоцентрическим положением. По этой причине в дальнейшем используется \mathbf{b} вместо \mathbf{b}_h .

Таким образом, находим, что изменение наблюдаемого направления, обусловленное малой вариацией параметра γ можно записать как

$$\delta\mathbf{u}_\gamma = -\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) \frac{r_s}{2b^2} \frac{\delta\gamma}{1 - \cos \chi}, \quad (6.4)$$

где χ – угловое расстояние между Солнцем и рассматриваемой звездой с точки зрения наблюдателя: $\mathbf{u}'\mathbf{b} = -b \cos \chi$. Знак минус здесь учитывает тот факт, что

вектор \mathbf{b} направлен от барицентра к наблюдателю, в то время как единичный вектор \mathbf{u} отвечает направлению от наблюдателя в сторону звезды.

Как отмечено в разделе 2.3.3, барицентрическое расстояние b не является строго постоянным, а слегка зависит от времени. Например, барицентрическое расстояние космического аппарата Gaia варьируется от 0.99 до 1.03 а.е.. Мы рассматриваем b как постоянную величину, предполагая, что $b = 1.01A$.

6.1.2. Наблюдения с борта сканирующего космического аппарата

Для описания наблюдений, выполняемых с борта сканирующего космического аппарата, удобно использовать сканирующую систему отсчёта (ССО), изображённую на рисунке 2.1. В этой системе направление на объект задаётся так называемыми инструментальными углами φ и ζ и описывается уравнением (2.3). Выпишем его ещё раз:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} \cos \varphi \cos \zeta + \mathbf{y} \sin \varphi \cos \zeta + \mathbf{z} \sin \zeta. \quad (6.5)$$

Аналогично, два угла Ω и ξ определяют направление на Солнце. Угол наклона ξ оси вращения к направлению на Солнце практически постоянен. Для Gaia величина этого угла равняется 45° , для Hipparcos было выбрано немного меньшее значение 43° . Фаза вращения Ω , являющаяся углом между направлением на Солнце и плоскостью xz , увеличивается со временем с постоянной скоростью. Таким образом, барицентрическое положение космического аппарата в ССО определяется выражением

$$\mathbf{b} = b(-\mathbf{x} \cos \Omega \sin \xi + \mathbf{y} \sin \Omega \sin \xi - \mathbf{z} \cos \xi). \quad (6.6)$$

В этом уравнении учтён тот факт, что вектор \mathbf{b} направлен от барицентра к аппарату.

Скалярное произведение \mathbf{u} и \mathbf{b} дает угловое расстояние между Солнцем и направлением на звезду в терминах ССО:

$$\cos \chi = -\mathbf{u}'\mathbf{b}/b = \sin \zeta \cos \xi + \cos \zeta \sin \xi \cos \theta. \quad (6.7)$$

Здесь введена продольная угловая координата $\theta = \Omega + \varphi$, которая задаёт угол между Солнцем и вектором \mathbf{u} , измеренный относительно оси \mathbf{z} в направлении вращения спутника. Отвлекаясь от малого поперечного размера полей зрения, эта формула показывает, что сканирующий спутник наблюдает объекты, отстоящие от Солнца на угол от $90^\circ - \xi$ до $90^\circ + \xi$. Для Gaia, с $\xi = 45^\circ$, это угловое расстояние лежит в пределах от 45° до 135° .

Линеаризуя уравнение (6.5) относительно φ , находим, что изменение направления вследствие малой вариации $\delta\varphi$ равно

$$\delta\mathbf{u} = (-\mathbf{x} \sin \varphi + \mathbf{y} \cos \varphi) \cos \zeta \delta\varphi. \quad (6.8)$$

Взяв скалярное произведение уравнения (6.8) и вектора $-\mathbf{x} \sin \varphi + \mathbf{y} \cos \varphi$, получаем

$$\cos \zeta \delta\varphi = \sin \varphi (\mathbf{x}'\delta\mathbf{u}) + \cos \varphi (\mathbf{y}'\delta\mathbf{u}). \quad (6.9)$$

Эта общая формула позволяет вычислить изменение угловой координаты $\delta\varphi$ для произвольного изменения направления.

Подставляя изменения наблюдаемого направления из уравнений (6.1) и (6.4) в формулу (6.9), находим смещения координаты φ , обусловленные изменением параллакса и параметра γ

$$\delta\varphi_{\varpi} = -b \sin \xi \sin \theta \sec \zeta \delta\varpi, \quad (6.10)$$

$$\delta\varphi_{\gamma} = \frac{r_s}{2b} \frac{\sin \xi \sin \theta}{1 - \sin \xi \cos \theta} \sec \zeta \delta\gamma. \quad (6.11)$$

Уравнения (6.10) и (6.11) являются основными для астрометрического определения тригонометрических параллаксов и PPN γ с использованием наблюдений, полученных с борта сканирующего космического аппарата. С геометрической точки зрения они являются проекциями наблюдаемого смещения звезды,

вызванного $\delta\varpi$ и $\delta\gamma$, на мгновенный круг сканирования. Математически они представляют собой частные производные, используемые для построения нормальной матрицы в решении по методу наименьших квадратов. Аналогичные формулы были выведены для бесконечно малого поля зрения в [65].

6.1.3. Относительная величина эффектов

Самая точная оценка параметра γ на настоящее время, полученная с помощью доплеровских наблюдений за космическим аппаратом Кассини [34; 148], составляет $\gamma - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$. Это накладывает ограничение на ожидаемые изменения наблюдаемых величин, поскольку абсолютное значение $\delta\gamma$ вряд ли будет намного больше, чем 2×10^{-5} . Сдвиг $\delta\varphi_\gamma$, соответствующий этому значению $\delta\gamma$, показан на рисунке 6.1 наряду со сдвигом $\delta\varphi_\varpi$, вызванным изменением параллакса.

Близкое сходство между эффектами, хорошо заметное на рисунке 6.1, говорит о наличии сильной корреляции между ними. Количественное исследование этой корреляции выполнено в разделе 6.2, а сейчас мы рассмотрим вопрос с качественной стороны и оценим величины эффектов.

Нетрудно видеть, что максимальное абсолютное значение параллактического эффекта равно $b \sin \xi \delta\varpi$, тогда как максимальное абсолютное значение отклонения света вдоль круга сканирования, достигаемое при $\theta = 90^\circ - \xi$ или $\theta = 270^\circ + \xi$, равняется $(r_s/2R) \tan \xi \delta\gamma$. Предполагая $b = 1$ и имея в виду, что эффекты имеют противоположный знак, мы видим, что указанные максимальные эффекты равны, когда

$$-2 \cos \xi \delta\varpi \simeq r_s \delta\gamma. \quad (6.12)$$

Выражая параллакс в мксд и γ в единицах 10^{-5} , мы находим, что для принятого

в проекте Gaia угла ξ между осью вращения и направлением Солнца в 45° , справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\delta\varpi \text{ [мксд]}}{\delta\gamma \text{ [}10^{-5}\text{]}} \simeq -\frac{1}{35}. \quad (6.13)$$

Эта пропорция иллюстрирует относительные значения эффектов. Если, например, происходит увеличение параллакса на 10 мксд, это соответствует такому изменению наблюдаемых величин, которое можно описать уменьшением параметра γ на $\sim 350 \times 10^{-5}$. И наоборот, изменение наблюдаемых величин в результате повышения параметра γ на 10^{-5} можно описать уменьшением параллакса на $\sim 1/35$ мксд, то есть ~ 30 нсд.

Такая трактовка применима к параллаксу любой звезды, и поэтому $\delta\varpi$ можно интерпретировать как глобальное смещение параллаксов. Систематическое отклонение параллаксов от их истинных значений называется нуль-пунктом параллаксов. Уравнение (6.13) таким образом связывает ошибку в параметре γ с нуль-пунктом параллаксов. Хотя это соотношение является приближительным, оно весьма удобно для порядковых оценок. Более точные формулы, описывающие взаимное влияние параметра γ и нуль-пункта параллаксов, выведена в разделе 6.3.1.

6.2. Корреляция между параметром γ и параллаксами

Для упрощения вычислений мы пренебрегаем конечным размером полей зрения и полагаем в дальнейшем, что наблюдения выполняются только на круге сканирования, то есть ($\zeta = 0$). Для Gaia, с поперечным размером полей зрения менее 1° , это предположение справедливо с точностью до 1%. Это приближение не сказывается на окончательных выводах, что подтверждено результатами численных тестов, представленными в разделе 6.4.2.

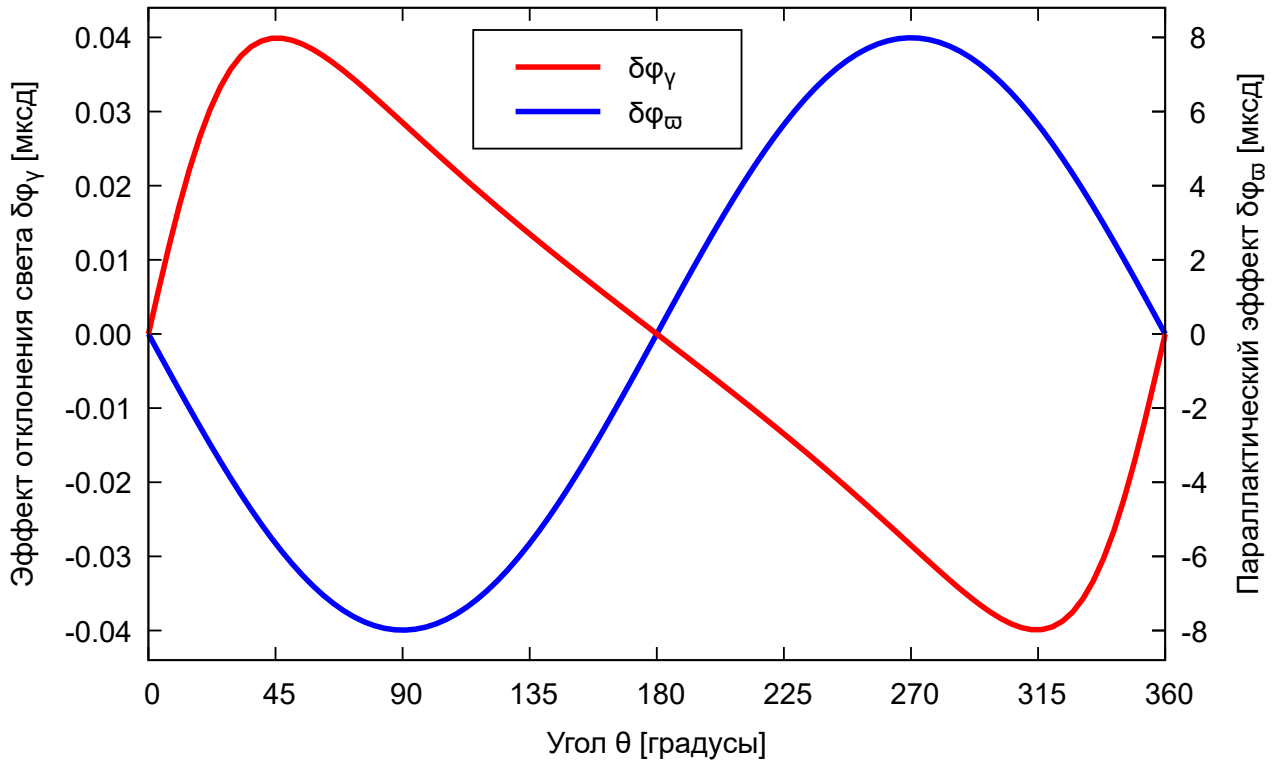


Рис. 6.1. – Влияние изменений отклонения света и параллакса на инструментальный угол φ . Красная линия, вычисленная согласно (6.11) с $\delta\gamma = 2 \times 10^{-5}$, показывает максимальный сдвиг, отвечающий настоящей оценке параметра γ . Синяя линия, вычисленная согласно (6.10), демонстрирует, как $\delta\varphi_\pi$ изменяется с θ , если параллакс увеличивается на 11.3 мксд.

6.2.1. Метод корреляционных функций

Влияние гравитационного отклонения света и эффекта параллакса на наблюдаемые величины определяется множителями, стоящими перед $\delta\varpi$ и $\delta\gamma$ в правых частях формул (6.10) и (6.11). Обозначим их через f_ϖ и f_γ :

$$f_\varpi = -b \sin \xi \sin \theta, \quad (6.14)$$

$$f_\gamma = \frac{r_s}{2b} \frac{\sin \xi \sin \theta}{1 - \sin \xi \cos \theta}. \quad (6.15)$$

Как известно, при совместном определении $\delta\varpi$ и $\delta\gamma$ статистическая зависимость между полученными результатами определяется корреляционной функцией, которая в общем случае вычисляется через соответствующие средние значения:

$$\rho = -\frac{\langle f_\varpi f_\gamma \rangle - \langle f_\varpi \rangle \langle f_\gamma \rangle}{(\langle f_\varpi^2 \rangle - \langle f_\varpi \rangle^2)^{1/2} (\langle f_\gamma^2 \rangle - \langle f_\gamma \rangle^2)^{1/2}}. \quad (6.16)$$

Поскольку f_ϖ и f_γ являются функциями угла θ , в качестве усреднения уместно воспользоваться усреднением по углу:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta. \quad (6.17)$$

Нетрудно видеть, что вычисленные таким образом средние $\langle f_\varpi \rangle$ и $\langle f_\gamma \rangle$ равны нулю, поэтому выражение для корреляции упрощается:

$$\rho = -\frac{\langle f_\varpi f_\gamma \rangle}{(\langle f_\varpi^2 \rangle)^{1/2} (\langle f_\gamma^2 \rangle)^{1/2}}. \quad (6.18)$$

Выполняя интегрирование, получаем средние величины

$$\langle f_\varpi^2 \rangle = b^2 \frac{\sin^2 \xi}{2}, \quad (6.19)$$

$$\langle f_\gamma^2 \rangle = \left(\frac{r_s}{b}\right)^2 \frac{\sin^2(\xi/2)}{2 \cos \xi}, \quad (6.20)$$

$$\langle f_\varpi f_\gamma \rangle = -r_s \sin^2(\xi/2). \quad (6.21)$$

Постановка в определение корреляционной функции (6.18) даёт

$$\rho = \sqrt{1 - \tan^2(\xi/2)}. \quad (6.22)$$

Эта формула представляет корреляцию между параметром γ и нуль-пунктом параллакса как функцию угла наклона ξ оси вращения космического аппарата к направлению на Солнце. Для принятой в проекте Gaia величина угла $\xi = 45^\circ$ корреляция составляет $\rho = 0.91$.

Как можно видеть, ρ изменяется от 1 до 0, когда ξ изменяется от 0 до 90° . Такое поведение корреляционной функции отражает тот факт, что сходство между отклонением света и параллактическим смещением возрастает по мере уменьшения угла наклона. В этом легко убедиться, рассмотрев для простоты предельный случай $\xi = 0$, когда сканирование происходит вдоль больших кругов, перпендикулярных к плоскости эклиптики. Соответственно, угловое расстояние между Солнцем и объектами наблюдения всегда будет близко к 90° . Как видно из (6.1) и (6.4), эффекты отклонения света и параллакса совпадают по направлению и отличаются тем, как их величина зависит от углового расстояния. В рассматриваемой же ситуации угловое расстояние одинаково для всех объектов, эффекты проявляют себя подобным образом. Математически это как раз и означает, что корреляция между ними близка к единице. По мере роста угла ξ наклон кругов сканирования к эклиптике уменьшается, объекты наблюдаются на различных угловых расстояниях от Солнца, сходство между эффектами становится менее выраженным, что и приводит к падению корреляции. Разумеется, случай $\xi \approx 90^\circ$ рассматривается чисто гипотетически: это привело бы к засветке телескопов прямым солнечным светом, что недопустимо.

6.2.2. Метод наименьших квадратов

Преимущество изложенного в предыдущем разделе метода корреляционных функций состоит в его простоте и физической прозрачности. С другой стороны, его основной недостаток заключается в невозможности обобщения для вычисления корреляции при наличии дополнительных наблюдений. Кроме того, он не позволяет найти влияние корреляции на точность астрометрического решения. Представляется целесообразным поэтому рассмотреть и другой метод, хотя и более сложный, но позволяющий не только оценить точность определения параметра γ , но и обобщить анализ корреляции на случай двумерных наблюдений, когда измерения выполняются как вдоль, так и поперёк направления сканирования. Этот подход основан на применении метода наименьших квадратов к задаче одновременного определения параллаксов и параметра γ с использованием одних и тех же наблюдательных данных.

Глобальное астрометрическое решение в процедуре редукции данных в проекте Gaia, по сути, представляет собой задачу наименьших квадратов [99]. В рамках этой методики, мы рассматриваем решение, включающее только параллаксы и параметр γ в качестве неизвестных и использующее инструментальный угол φ в качестве «наблюдений». Такой подход значительно упрощает задачу, позволяя напрямую изучить взаимодействие между параллаксами и параметром γ . Фактически, мы неявно предполагаем, что другие параметры не коррелируют с параметром γ ; это предположение обосновано результатами численного моделирования, представленными в разделе 6.4.2.

Используя уравнения (6.10) и (6.11) и разделив каждое наблюдение на его стандартную ошибку σ для выравнивания статистических весов, получаем условные уравнения. Объединяя все наблюдения данной звезды, уравнения

традиционно записываются в матричной форме:

$$\mathbf{p}\delta\varpi + \mathbf{g}\delta\gamma = \delta\boldsymbol{\varphi}. \quad (6.23)$$

Здесь \mathbf{p} , \mathbf{g} и $\delta\boldsymbol{\varphi}$ представляют собой векторы, длина которых равняется числу наблюдений рассматриваемой звезды n . Отдельные наблюдения помечены индексом l , $l = 1, \dots, n$. Через $\delta\boldsymbol{\varphi}$ обозначен вектор нормированных невязок, элементы которого определяются равенством

$$\delta\varphi_l = (\varphi_l^{\text{obs}} - \varphi_l^{\text{calc}}) / \sigma. \quad (6.24)$$

где φ_l^{obs} и φ_l^{calc} – наблюдаемое и вычисленное значения инструментального угла.

Элементы векторов \mathbf{p} и \mathbf{g} содержат взвешенные частные производные

$$p_l = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \varpi} = -\frac{b}{\sigma} \sin \xi \sin \theta_l, \quad (6.25)$$

$$g_l = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \gamma} = \frac{1}{\sigma} \frac{r_s}{2R} \frac{\sin \xi \sin \theta_l}{1 - \sin \xi \cos \theta_l}. \quad (6.26)$$

Следует подчеркнуть, что целью этого раздела является изучение корреляции между параметром γ и параллаксами, а также и её последствий. Формальные свойства решения наименьших квадратов, такие как корреляция между неизвестными и их неопределенностями, содержатся в нормальной матрице, которая зависит только от частных производных \mathbf{p} и \mathbf{g} . Таким образом, вектор невязок $\delta\boldsymbol{\varphi}$ не существенен для остальной части этого раздела. Однако, он будет позже использован в следующем разделе, где мы изучим влияние нуля-пункта параллаксов на определение параметра γ .

Уравнение (6.23) представляет собой систему из n линейных уравнений с двумя неизвестными $\delta\varpi$ и $\delta\gamma$. Чтобы найти оценку неизвестных по методу наименьших квадратов, следует составить нормальные уравнения [5; 35]. Полученная нормальная матрица состоит из соответствующих скалярных произведений. Обозначая их как $N_{pp} = \mathbf{p}'\mathbf{p}$ и т. д., записываем нормальные уравнения

$$\begin{pmatrix} N_{pp} & N_{pg} \\ N_{pg} & N_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\varpi \\ \delta\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}'\delta\boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{g}'\delta\boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

Элементы нормальной матрицы по сути являются суммами произведений соответствующих элементов \mathbf{p} и \mathbf{g} , причем суммирование проводится по всем наблюдениям. Каждая такая сумма, очевидно, равна среднему значению соответствующей величины, умноженному на число наблюдений. Уравнения (6.25) и (6.26) показывают, что \mathbf{p} и \mathbf{g} линейно пропорциональны векторам частных производных инструментального угла, поэтому элементы нормальной матрицы можно выразить через соответствующие средние величины:

$$N_{pp} = \sum_{l=1}^n p_l^2 = \frac{n}{\sigma^2} \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varpi} \right)^2 \right\rangle, \quad (6.28)$$

$$N_{gg} = \sum_{l=1}^n g_l^2 = \frac{n}{\sigma^2} \left\langle \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right)^2 \right\rangle, \quad (6.29)$$

$$N_{pg} = \sum_{l=1}^n p_l g_l = \frac{n}{\sigma^2} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \varpi} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \right\rangle. \quad (6.30)$$

Средние значения в уравнениях (6.28)–(6.30) являются усредненными по наблюдениям величинами. Для большого числа звезд распределение наблюдений вдоль кругов сканирования практически равномерно. Поэтому мы можем заменить усреднение по наблюдениям усреднением по углу, понимаемом в смысле (6.17). Фигурирующие здесь средние совпадают с полученными при вычислении корреляционной функции. Используя формулы (6.19)–(6.21), получаем

$$N_{pp} = (n/\sigma^2) b^2 \frac{\sin^2 \xi}{2}, \quad (6.31)$$

$$N_{gg} = (n/\sigma^2) \left(\frac{r_s}{b} \right)^2 \frac{\sin^2 (\xi/2)}{2 \cos \xi}, \quad (6.32)$$

$$N_{pg} = - (n/\sigma^2) r_s \sin^2 (\xi/2). \quad (6.33)$$

Уравнения (6.31)–(6.33), которые связывают нормальную матрицу с параметрами закона сканирования, радиусом орбиты, точностью наблюдений, числом звезд и продолжительностью наблюдений, весьма полезны для оценки точности и других характеристик астрометрического определения параметра γ .

Сначала рассмотрим корреляцию между параметром γ и параллаксом. Из теории метода наименьших квадратов хорошо известно, что для статистически

независимых измерений ковариационная матрица решения наименьших квадратов задается обратной нормальной матрицей. Обращение матрицы из уравнения (6.27) дает ковариационную матрицу

$$\mathbf{C} = \frac{1}{N_{pp}N_{gg} - N_{pg}^2} \begin{pmatrix} N_{gg} & -N_{pg} \\ -N_{pg} & N_{pp} \end{pmatrix}. \quad (6.34)$$

Диагональные элементы \mathbf{C} – это дисперсии, т. е. квадраты стандартных ошибок, тогда как внедиагональные элементы представляют собой ковариации, т. е. коэффициенты корреляции соответствующих величин, умноженные на их стандартные ошибки. Таким образом, коэффициент корреляции, или просто корреляция, между $\delta\gamma$ и $\delta\varpi$ равен

$$\rho = \frac{-N_{pg}}{\sqrt{N_{pp}N_{gg}}} = \sqrt{1 - \tan^2(\xi/2)}. \quad (6.35)$$

Таким образом, мы опять приходим к выражению (6.22).

В качестве другого примера использования полученных формул рассмотрим формальную ошибку оценки параметра γ по методу наименьших квадратов. Из уравнений (6.34) и (6.35) следует, что её можно записать как

$$\sigma_\gamma = \left(\frac{N_{pp}}{N_{pp}N_{gg} - N_{pg}^2} \right)^{1/2} = \frac{N_{gg}^{-1/2}}{\sqrt{1 - \rho^2}} = N_{gg}^{-1/2} \cot(\xi/2). \quad (6.36)$$

Правая часть уравнения (6.36) наглядно демонстрирует эффект корреляции. Если бы параметр γ был единственным неизвестным, то его формальная ошибка, очевидно, равнялась бы $N_{gg}^{-1/2}$, поскольку она полностью определяется точностью и числом наблюдений, а также геометрией сканирования.

Таким образом, корреляция с нуль-пунктами параллаксов увеличивает ошибку PPN γ на коэффициент $(1 - \rho^2)^{-1/2}$. Эта особенность, впервые отмеченная в работе [145], была использована в последующих исследованиях и включена в обработку данных Gaia [99]. Для режима сканирования, принятого в проекте Gaia, значение этого коэффициента составляет 2.41. Наличие такого фактора наглядно демонстрирует разницу между блочным и прямым решением. В

то время как прямое решение неявно включает эффекты корреляции, блочное решение недооценивает истинную стандартную неопределенность, и для учета влияния корреляции необходимо учитывать соответствующий поправочный множитель.

6.3. Взаимодействие систематических ошибок

В этом разделе мы применяем формализм, развитый в разделе 6.2.2 для исследования взаимного влияния систематических ошибок в параметре γ и параллаксах. Сначала мы оценим влияние гипотетического отличия параметра γ от единицы – величины, отвечающей ОТО – на глобальный сдвиг параллаксов. Затем обратимся к вопросу о том, как наличие нуль-пункт параллаксов приводит к смещенной оценке параметра γ в астрометрическом решении.

6.3.1. Влияние параметра γ на нуль-пункт параллаксов

Изменение инструментального угла φ , вызванное вариацией параллакса звезды определяется уравнением (6.10). Учитывая все наблюдения данной звезды, это соотношение можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{p} \delta \varpi = \delta \tilde{\varphi}. \quad (6.37)$$

Как и прежде, длина векторов \mathbf{p} и $\tilde{\varphi}$ равняется числу наблюдений рассматриваемой звезды, которое обозначается через n .

Стоит отметить, что, хотя это уравнение похоже на систему условных уравнений (6.23) (без члена с параметром γ), оно имеет более общее значение. Поскольку мы не делали никаких предположений относительно вектора в правой части, его содержимое может быть произвольным. Мы используем тильду, чтобы подчеркнуть это различие. Например, в астрометрическом решении Gaia, которое носит блочно-итерационный характер, неизвестные обновляются последовательно, и этот вектор зависит от порядка выполнения операций. Параметр γ является одним из так называемых глобальных параметров, и, если определение этих параметров осуществляется на последней стадии, вектор $\delta\tilde{\varphi}$ включает, вместе с наблюдательными невязками, поправки от всех предыдущих шагов, таких как определение астрометрических параметров, уточнение ориентации космического аппарата и калибровка инструмента.

Выражение (6.37) представляет собой систему n линейных уравнений с одним неизвестным $\delta\varpi$. Чтобы найти его решение в смысле наименьших квадратов, образуем нормальные уравнения, умножив скалярно на вектор \mathbf{p} :

$$N_{pp} \delta\varpi = \mathbf{p}' \delta\tilde{\varphi}, \quad (6.38)$$

где величина N_{pp} определяется равенством (6.28). Решение этого нормального уравнения даёт оценку сдвига параллаксов

$$\delta\varpi = \frac{\mathbf{p}' \delta\tilde{\varphi}}{N_{pp}}. \quad (6.39)$$

Как было сказано выше, эта формула применима в общем случае, поскольку она выведена без каких-либо предположений относительно вариаций $\delta\tilde{\varphi}$. Теперь применим ее к случаю, когда вариации вызваны изменением параметра γ .

Согласно уравнению (6.11), вариации инструментального угла вследствие изменения параметра γ равны

$$\delta\tilde{\varphi} = \mathbf{g} \delta\gamma, \quad (6.40)$$

где вектор \mathbf{g} имеет тот же смысл, что и в выражении (6.23). Подставляя соот-

ношение (6.40) в уравнение (6.39), находим оценку сдвига параллакса

$$\delta\varpi_\gamma = \frac{N_{pg}}{N_{pp}} \delta\gamma. \quad (6.41)$$

Здесь величина N_{pg} определяется равенством (6.30). Используя выражения для N_{pp} и N_{pg} из формул (6.31) и (6.33), окончательно получаем

$$\delta\varpi = -\frac{r_s}{2b^2} \frac{\delta\gamma}{\cos^2(\xi/2)}. \quad (6.42)$$

Эта формула решает поставленную задачу, определяя зависимость глобального сдвига параллаксов от систематической ошибки в параметре γ .

Воспользовавшись определением гравитационного радиуса (6.3), находим формулу, которая выражает сдвиг параллаксов через физические и астрономические постоянные:

$$\delta\varpi = -\frac{GM_\odot}{Ac^2} \left(\frac{A}{b}\right)^2 \frac{\delta\gamma}{\cos^2(\xi/2)}. \quad (6.43)$$

Подставляя численные значения, получаем, что для применяемого в проекте Gaia закона сканирования с $b = 1.01A$ и $\xi = 45^\circ$

$$\delta\varpi = -0.023 \text{ мксд} \times \left(\frac{\delta\gamma}{10^{-5}}\right). \quad (6.44)$$

Остановимся теперь на возможной величине изменения $\delta\gamma$. В общей теории относительно значение параметра γ в точности равно единице. На практике обычно используется не сам параметра $\delta\gamma$, а разность $\gamma - 1$, которая является малой величиной, служит удобным индикатором отклонения от ОТО. Наиболее точное экспериментальное значение $\gamma - 1$ на настоящий момент [34] составляет $(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$, и соответствующий $3\text{-}\sigma$ интервал: $(-4.8 \div 9.0) \times 10^{-5}$. Таким образом, можно заключить, что, в свете современных представлений, отклонение параметра γ от единицы едва ли превышает 10^{-4} . Подставляя эту величину в формулу (6.44), получаем, что сдвиг параллакса в астрономическом решении Gaia, возникающий вследствие гипотетического отклонения от ОТО, не превышает 0.2 мксд, что существенно ниже достигнутого на сегодняшний день уровня точности.

Уравнение (6.42) представляет усредненное по небу смещение параллакса. Смещение, кроме того, подвержено зональным изменениям из-за особенностей схемы сканирования небесной сферы. Это хорошо видно на примере областей, близких к полюсам эклиптики. Непосредственное геометрическое рассмотрение показывает, такие звезды в этих зонах наблюдаются только при $\theta \simeq 90^\circ$ или 270° . Соответственно, в этом случае $N_{pp} = (n/\sigma^2) b^2 \sin^2 \xi$ и $N_{pg} = -(n/\sigma^2) (r_s/2) \sin^2 \xi$, и сдвиг параллакса становится

$$\delta\varpi = -\frac{r_s}{2R^2} \delta\gamma = -0.020 \text{ мксд} \times \left(\frac{\delta\gamma}{10^{-5}} \right) \quad \text{для } b = 1.01A. \quad (6.45)$$

Таким образом, сдвиг параллаксов не зависит от угла ξ для звёзд вблизи полюсов эклиптики. Зависимость сдвига параллаксов от положения звезды подробно рассмотрен в разделе 6.5.

6.3.2. Влияние нуля-пункта параллаксов на параметр γ

Рассмотрим, смещение в оценке параметра γ , возникающее из-за наличия глобального сдвига параллаксов. Этот вид систематических ошибок в параллаксах обусловлен различными инструментальными эффектами, одними из которых являются колебания базового угла, рассмотренные в главе 2. В третьем выпуске данных Gaia информация о нуль-пункте параллаксов определялась из анализа параллаксов квазаров [97].

Существует заметная разница в способе получения информации о параметре γ и нуль-пункте параллаксов. В то время как параметр γ определяется как часть астрометрического решения, нуль-пункт параллаксов оценивается а posteriori. Может показаться непоследовательным связывать величины, одна из которых исходит из решения, а другая – нет. Поэтому полезно прояснить, что подразумевается под нуль-пунктом параллаксов. В блочно-итеративном решении

параметр γ находится на заключительном этапе, когда итерации по астрометрическим и иным параметрам заканчиваются [99]. Если между вычисленными параллаксами и их истинными значениями имеются систематические отличия, эта разница проникает в невязки, составляющие входные данные для определения параметра γ , что, в свою очередь, приводит к его смещенной оценке. Таким образом, говоря о нуль-пункте параллаксов, мы подразумеваем невязки, возникающие в результате глобального смещения параллакса.

Теоретическое определение влияния нуль-пункта параллаксов на определение параметра γ проводится по схеме уже применённой в разделе (6.3.1). Уравнение (6.11) даёт изменение инструментального угла φ , вызванное небольшим изменением параметра γ . Рассматривая все наблюдения выбранного объекта, записываем это соотношение в матричной форме:

$$\mathbf{g}\delta\gamma = \delta\tilde{\varphi}. \quad (6.46)$$

Скалярное умножение на \mathbf{g} даёт нормальное уравнение

$$N_{gg}\delta\gamma = \mathbf{g}'\delta\tilde{\varphi}, \quad (6.47)$$

решение которого есть

$$\delta\gamma = \frac{\mathbf{g}'\delta\tilde{\varphi}}{N_{gg}}. \quad (6.48)$$

Если все параллаксы смещены на одну и ту же величину $\delta\varpi$, то, согласно формуле (6.10), инструментальный угол изменится на

$$\delta\tilde{\varphi} = \mathbf{p}\delta\varpi. \quad (6.49)$$

Подставляя это соотношение в уравнение (6.48), получаем

$$\delta\gamma = \frac{N_{pg}}{N_{gg}}\delta\varpi. \quad (6.50)$$

Используя N_{gg} и N_{pg} из (6.32) и (6.33) и возвращаясь к естественным единицам,

окончательно находим параметров Gaia

$$\begin{aligned}\delta\gamma &= -\frac{Ac^2}{GM_\odot} \left(\frac{b}{A}\right)^2 \cos\xi \delta\varpi \\ &= -3.543 \cdot 10^{-4} \times \left(\frac{\delta\varpi}{1 \text{ мксд}}\right).\end{aligned}\tag{6.51}$$

Это выражение определяет смещение в оценке параметра γ , вызванное глобальным смещением параллакса. Текущая оценка нуля-пункта параллаксов в данных Gaia -17 мксд [97] даёт основание предположить, что непосредственное определение параметра γ с использованием этих данных может привести к смещению $\delta\gamma = 6 \times 10^{-3}$.

Столь значительное потенциальное смещение несовместимо с лучшей на сегодняшний день оценкой параметра γ [34], чей интервал $\pm 3\sigma$ равен $(-4.8 \div 9.0) \times 10^{-5}$. Считается, что глобальное смещение параллакса в данных Gaia возникает из-за проблем калибровки, которые, возможно, будут устранены в будущем, что снизит риск появления систематической ошибки в оценках параметра γ . Из уравнения (6.51) следует, что нуль-пункт параллаксов должен находиться между -0.25 и 0.14 мксд для того, чтобы астрометрия Gaia могла оценить параметр γ с точностью, сопоставимой с результатом эксперимента [34].

Стоит отметить, что как приведенная выше оценка смещения в параметре γ , так и ограничения на нуль-пункт параллаксов являются прямым следствием связи между величинами параллактического эффекта и отклонением света, которая описывается соотношением (6.13): $(\delta\gamma/10^{-5}) \simeq -35 \times (\delta\varpi/1 \mu\text{ас})$. Это простое соотношение согласуется с уравнением (6.51) и также подтверждается результатами численных экспериментов, представленными ниже.

В заключение сделаем ещё одно замечание, относящееся к зональным эффектам. Значения N_{pg} и N_{gg} , использованные для вывода уравнения (6.51), были получены в предположении, что наблюдения равномерно распределены вдоль окружности сканирования. Таким образом, можно сказать, что это уравнение представляет собой усредненное по небу смещение. Однако, как уже отмечено в разделе (6.3.1), соотношение между систематическими ошибками в

параллаксах и параметре γ имеет сильную зависимость от положения объектов на небесной сфере. Рассмотрим опять области, близкие к полюсам эклиптики, где звёзды в этих зонах наблюдаются только при $\theta \simeq 90^\circ$ или 270° . В этом случае $N_{pg} \simeq - (n/\sigma^2) (r_s/2) \sin^2 \xi$ и $N_{gg} \simeq (n/\sigma^2) (r_s/2R)^2 \sin^2 \xi$ и подстановка в уравнение (6.50) даёт

$$\begin{aligned} \delta\gamma &\simeq -\frac{\text{AU } c^2}{GM} \left(\frac{R}{\text{AU}}\right)^2 \delta\varpi \\ &= -5.010 \cdot 10^{-4} \times \left(\frac{\delta\varpi}{1 \text{ мксд}}\right). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Сравнение с уравнением (6.51) показывает, что коэффициент между $\delta\gamma$ и $\delta\varpi$, который выражает чувствительность смещения параметра $\delta\gamma$ к нуль-пункту параллаксов увеличивается на 41% для звёзд в окрестности полюсов эклиптики. Кроме того, эта формула хорошо согласуется с соотношением (6.45), полученным для обратного эффекта в предыдущем разделе.

6.4. Проверка теоретических предсказаний методом Монте-Карло

Для проверки теоретических результатов были выполнены численные эксперименты с использованием метода Монте-Карло. Методами Монте-Карло называют численные методы решения математических и физических задач при помощи моделирования случайных величин. Иногда эти методы также называются методами статистических испытаний. Детальное изложение общих приёмов, связанных с методами Монте-Карло приведено в книгах [25; 28].

6.4.1. Моделирование исходных данных и астрометрического решения

Ключевыми компонентами процесса моделирования являются истинный астрометрический каталог и процедура генерирования наблюдений и их ошибок. В качестве истинного каталога был сгенерирован набор звезд, равномерно распределенных по небесной сфере. В соответствии с теоретическим рассмотрением в разделе 6.1.2, рассматривались только измерения вдоль круга сканирования. Для каждой звезды был вычислен угол φ в тот момент, когда изображение звезды пересекает середину соответствующего поля зрения. Конечно, в процедуру моделирования не были включены разнообразные эффекты, которые присутствуют в реальном эксперименте, такие как ошибки ориентации и неточности калибровки. Эти эффекты моделируются как случайный шум с формальной ошибкой σ_φ , о которой речь идет ниже.

Наблюдения моделировались с номинальным законом сканирования Gaia [70], который представляет собой комбинацию трех вращений (Рисунок 2.1). Во-первых, спутник вращается вокруг оси вращения \mathbf{z} с периодом 6 часов, то есть фаза вращения Ω линейно увеличивается со скоростью $\dot{\Omega} = 60'' \text{c}^{-1}$. В то же время ось вращения находится в медленном прецессионном движении вокруг направления на Солнце, совершая 5.8 оборотов в год, при этом угол ξ остается фиксированным. Наконец, движение Солнца вдоль эклиптики обеспечивает покрытие всей небесной сферы. Солнце продвигается на 62° за один период прецессии. Такая схема сканирования создает квазиравномерную временную выборку и характеризуется значительной зависимостью от эклиптической широты.

Анализ остаточных невязок в угле φ в астрометрическом решении EDR3 показал, что они минимальны для ярких звезд с $9 \leq G \leq 13$ [98] и находятся в диапазоне от 100 до 200 мксд, Это наилучшая текущая оценка точности

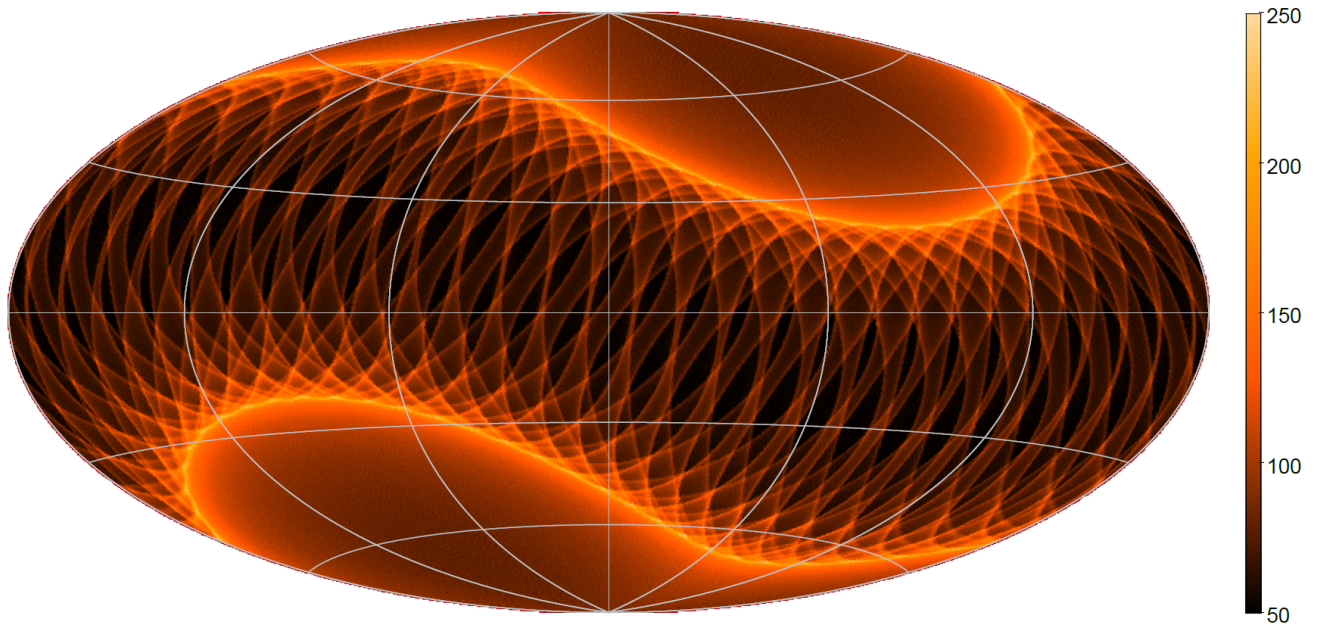


Рис. 6.2. – Среднее количество транзитов в экваториальных координатах в численном эксперименте с пятилетней продолжительностью наблюдений. Полученное распределение иллюстрирует отличительные черты используемой в проекте Gaia схемы сканирования, такие как симметрия относительно плоскости эклиптики и значительная концентрация наблюдений вблизи эклиптических широт $\pm (90^\circ - \xi) = \pm 45^\circ$.

измерений угла, и мы приняли $\sigma_\varphi = 100$ мксд в качестве репрезентативного значения стандартной ошибки. Кроме того, как невязки, так и формальные ошибки в EDR3 слабо зависят от звездной величины для $9 \leq G \leq 13$. Поэтому мы проигнорировали разницу в яркости звезд и использовали одинаковую стандартную ошибку во всех моделируемых наблюдениях.

Процесс моделирования выполнялся следующим образом. Была применена та же геометрия полей зрения, которая использована в космическом аппарате: прямоугольные поля зрения с размером 0.7° и 1° в поперечном и продольном направлении соответственно. Для каждого момента времени t_l положение полей зрения на небесной сфере вычислялось согласно номинальному закону сканирования. Для каждой звезды, помещающейся в одно из двух полей зрения, ее истинное мгновенное положение вычислялось с использованием астрометрической модели Gaia [99]. Для учета отклонения от ОТО отклонение света рассчитывалось с помощью $\gamma - 1 = 10^{-5}$. Наконец, преобразование в сканирующую

систему координат давало истинное значение угла ξ , которое затем вносилась гауссова ошибка с дисперсией σ_φ для моделирования наблюдаемого значения φ_l . Эта процедура генерировала для каждой звезды набор пар (t_l, φ_l) , которые обрабатывались как измерения и служили входными данными для последующего астрометрического решения.

Полноценное астрометрическое решение представляет собой крайне сложную вычислительно задачу, решение которой возможно только с использованием высокопроизводительных компьютерных кластеров [52; 99; 146]. Такая вычислительная сложность в основном обусловлена необходимостью совместного определения астрометрических и калибровочных параметров, а также ориентации космического аппарата. Однако в наших численных экспериментах ориентация, и калибровка инструмента предполагались известными точно, поэтому задача свелась к вычислению пяти обычных астрометрических параметров (экуаториальных координат, параллаксов и компонентов собственного движения) для каждой звезды. Такая задача соответствует решению только астрометрического блока в полном астрометрическом решении [99], который сводится к системе нормальных уравнений, матрица которой является блочно-диагональной, причем каждый блок соответствует нормальной матрице размером 5×5 для астрометрических параметров отдельной звезды. Таким образом, система оказывается относительно несложной в вычислительном смысле, что привело к значительному упрощению решения.

6.4.2. Корреляция между параметром γ и параллаксами

Первая группа тестов была организована для проверки теоретических предсказаний относительно корреляции между параметром γ и нуль-пунктом па-

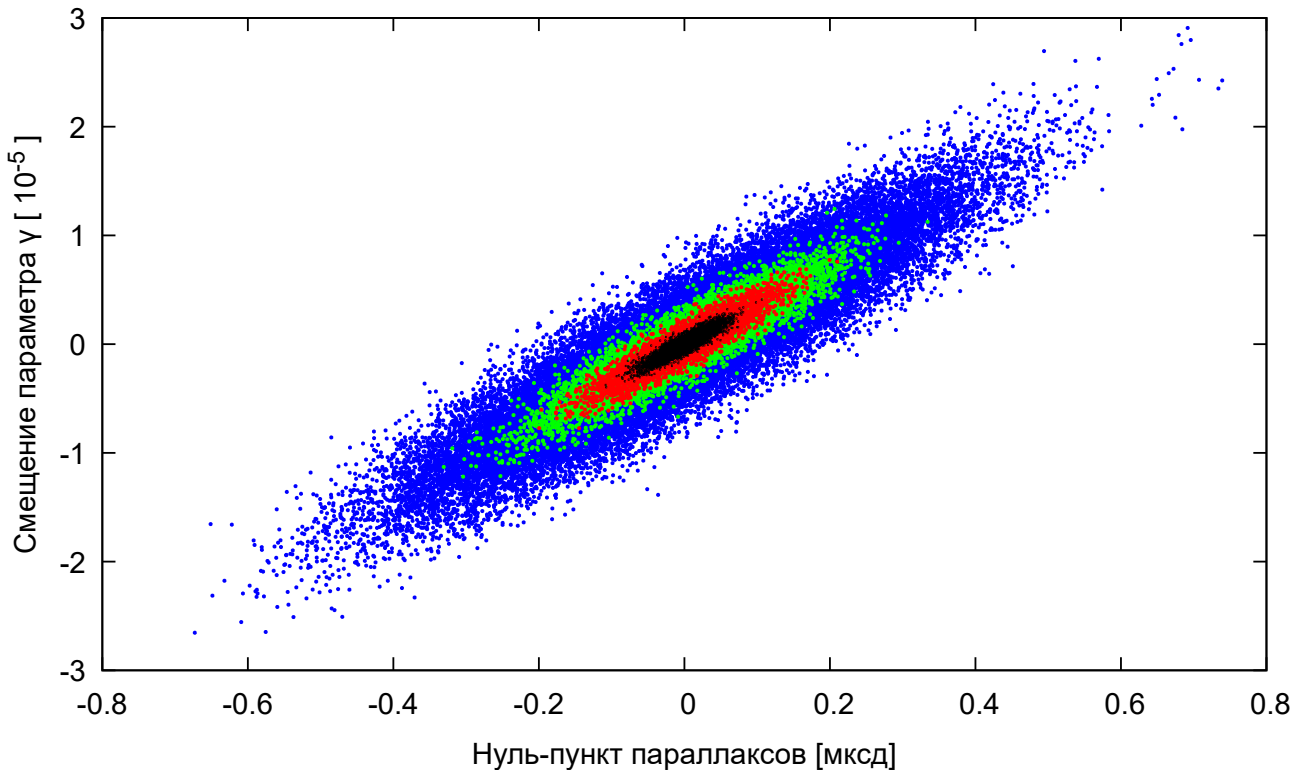


Рис. 6.3. – Совместное распределение величины $\gamma - 1$ и нуля-пункта параллакса. Чёрные точки показывают результаты, полученные для 4×10^6 звёзд. Результаты для 10^6 и 4×10^5 звёзд изображены красными и зелёными точками. Синие точки показывают результаты, полученные для 10^5 звёзд.

раллакса. С этой целью были использованы прямые решения, потому что они содержат информацию о корреляциях. Решения включали пять астрометрических параметров для каждой звезды и $\delta\gamma (\equiv \gamma - 1)$ в качестве неизвестных. Таким образом, решение с N звездами имело $5N + 1$ неизвестных. Для проверки правильности вычислительной схемы были проведены специальные тестовые запуски без наблюдательного шума. В этих тестах значения всех астрометрических параметров, полученных в ходе астрометрического решения, оказались равными их истинным значениям и $\delta\gamma = 0$, за исключением ошибок числового округления. Цель этого раздела – продемонстрировать, что в «идеальном» случае сканирующий астрометрический проект имеет потенциал для точного определения параметра γ , несмотря на ее корреляцию с параллаксами. Эта возможность была ранее продемонстрирована для блочно-итеративного решения

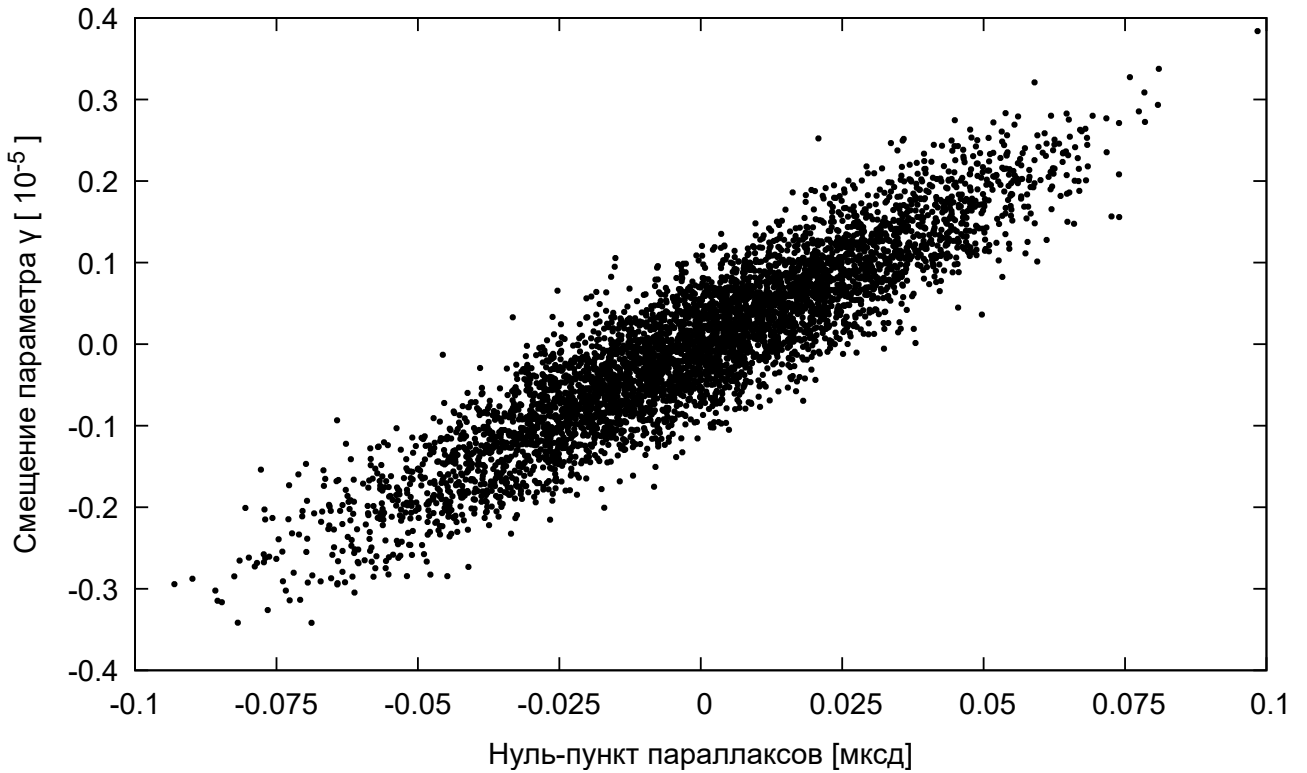


Рис. 6.4. – Совместное распределение величины $\gamma - 1$ и нуля-пункта параллакса для 5000 решений с 4×10^6 звёзд. Увеличенное изображение данных, изображённых в центральной части рисунка 6.3.

[99], наше исследование расширяет это доказательство на случай прямого решения.

Для каждого решения глобальное смещение параллакса $\delta\varpi$ вычислялось как средняя разность между вычисленными и истинными параллаксами. Ввиду вероятностной природы экспериментов каждая такая пара $(\delta\varpi, \delta\gamma)$ является реализацией случайных величин, взятой из неизвестного совместного распределения $\delta\varpi$ и $\delta\gamma$. Свойства этого распределения, такие как дисперсии величин и корреляция между ними, были затем получены из наборов данных, полученных в ходе численных экспериментов.

Были выполнены четыре эксперимента по методу Монте Карло:

- 40 000 решений с 10^5 звёзд,
- 10 000 решений с 4×10^5 звёзд,

- 5 000 решений с 10^6 звезд,
- 5 000 решений с 4×10^6 звезд.

Пары $(\delta\varpi, \delta\gamma)$, полученные в этих экспериментах, визуализированы на рисунке 6.3, где каждая точка отвечает отдельному решению. Во всех экспериментах корреляция оказалась равной 0.91, что хорошо согласуется с теоретическим результатом.

Число звезд, которые могут быть включены в прямое решение, очевидно, ограничено объемом доступной памяти компьютера. Вычислительная установка, используемая для наших экспериментов, имела возможность обработки прямых решений с максимальным количеством звезд 4×10^6 . Результаты этих экспериментов дополнительно показаны на отдельном рисунке 6.4 из-за того, что они плохо различимы, если их приводить вместе с результатами других тестов с меньшим числом звезд.

Рисунок 6.3 хорошо иллюстрирует, как точность определения параметра γ зависит от объема данных. Стандартная ошибка составляет 6.9, 3.4, 2.2, 1.1 (в единицах 10^{-5}) в тестах с 10^5 , 4×10^5 , одним и четырьмя миллионами звезд соответственно. Легко видеть, что она масштабируется как квадратный корень из числа звезд.

Более того, результаты этих экспериментов подтвердили справедливость сделанных упрощений. Во-первых, не было обнаружено значимых корреляций между параметром γ и положениями и собственными движениями. Это подтверждает сделанное в разделе 6.2.2 предположение о том, что эти астрометрические параметры не коррелируют с параметром γ на уровне точности нашего эксперимента. Во-вторых, уравнения (6.10) и (6.11) для изменения угла φ справедливы только для бесконечно малых полей зрения. Моделирование выполнялось с конечным размером полей зрения, что не оказало заметного влияния на корреляцию.

6.4.3. Решения с малым числом звёзд

В качестве первого теста мы рассмотрели 20 000 астрометрических решений, каждое из которых содержало 100 000 звезд, равномерно распределенных по небу. Наблюдения охватывали 5 лет непрерывной работы. Рисунок 6.2 показывает распределение плотности наблюдений по небесной сфере. Для каждого решения мы вычислили глобальный сдвиг параллаксов, определяемый как средняя разница между вычисленным и истинным параллаксами. Таким образом, этот эксперимент Монте-Карло предоставил 20 000 оценок нуля-пункта параллаксов, распределение которых показано на рисунке 6.5. Средняя значение нуля-пункта составляет -0.023 мксд, а стандартное отклонение равно 0.072 мксд. Среднее значение хорошо согласуется с теоретическим предсказанием, согласно уравнению (6.42), и теперь мы демонстрируем, что разброс результатов также находится в согласии с ожидаемым результатом для такого рода эксперимента.

Уравнение (6.39) справедливо для произвольных изменений угла φ , как систематических, так и случайных. В разделе 6.3.1 мы рассмотрели систематические изменения, вызванные изменением параметра γ . С учетом случайных ошибок изменение угла φ моделируется как сумма двух величин:

$$\delta\varphi_l = g_l \delta\gamma + \varepsilon_l. \quad (6.53)$$

Предполагается, что шум ε_l является центрированной некоррелированной случайной величиной со стандартным отклонением σ_φ . Подставляя эту формулу в общее уравнение (6.39), мы находим изменение параллакса данной звезды, обозначенной индексом i ,

$$\delta\varpi_i = \delta\varpi_\gamma - \frac{2}{b \sin \xi} \frac{1}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \varepsilon_l \sin \theta_l, \quad (6.54)$$

где $\delta\varpi_\gamma$ — это сдвиг параллакса, вызванный изменением параметра γ , задава-

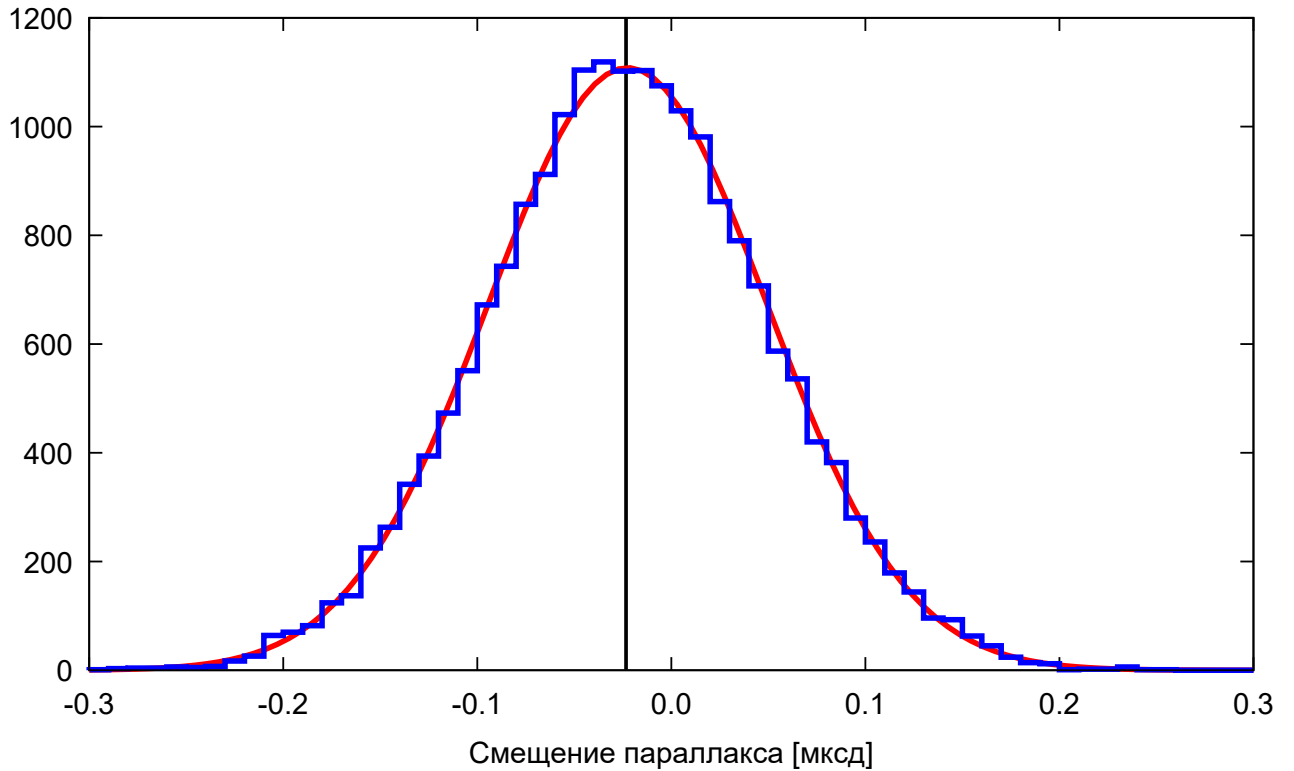


Рис. 6.5. – Распределение нуль-пунктов параллаксов, полученных в 20 000 астрометрических решениях с 10^5 звёзд, используя наблюдения, сгенерированные с $\gamma - 1 = 10^{-5}$. Гистограмма построена с интервалами длиной 0.01 мксд. Распределение характеризуется средним значением -0.023 мксд (показано вертикальной линией) и стандартным отклонением 0.072 мксд. Красная кривая представляет нормальное распределение, отвечающее этим параметрам.

емый уравнением (6.42), а n_i представляет собой количество наблюдений рассматриваемой звезды.

Усреднение ошибок параллаксов отдельных звёзд даёт глобальное смещение параллаксов для конкретного решения

$$\Delta\varpi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\varpi_i = \delta\varpi_\gamma - \frac{2}{b \sin \xi} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} \varepsilon_l \sin \theta_l. \quad (6.55)$$

Здесь N означает общее количество звёзд в решении. В наших экспериментах наблюдения статистически независимы. Заметив, что $\langle \varepsilon^2 \rangle = \sigma_\varphi^2$ и $\langle \sin^2 \theta \rangle = 1/2$, получаем оценку стандартного отклонения в нуль-пункта параллаксов

$$\sigma_{\Delta\varpi} = \frac{\sigma_\varphi}{b \sin \xi} \sqrt{\frac{2 \langle 1/n \rangle}{N}}, \quad (6.56)$$

где $\langle 1/n \rangle = (1/N) \sum_{i=1}^N (1/n_i)$ – гармоническое среднее числа наблюдений отдельных звёзд; $\langle 1/n \rangle = 0.012$ для пятилетней продолжительности наблюдений.

Для параметров Gaia уравнение (6.56) даёт $\sigma_{\Delta\varpi} = 0.069$ мксд, что согласуется с экспериментальным значением 0.072 мксд. Рисунок 6.5 показывает, что полученное распределение нуль-пунктов незначительно отличается от нормального. Небольшое превышение слева от пика объясняется различными малыми эффектами, такими как конечный размер поля зрения и слабая зависимость b и ξ от времени, а также асимметрией закона сканирования, обсуждаемой в разделе 6.5. Таким образом, результаты этого эксперимента подтверждают теоретические ожидания относительно основных статистических свойств нуль-пункта параллаксов.

6.4.4. Полномасштабное решение

Мелкомасштабное моделирование, рассмотренное в разделе 6.4.3, позволило исследовать нуль-пункт параллаксов только в статистическом смысле,

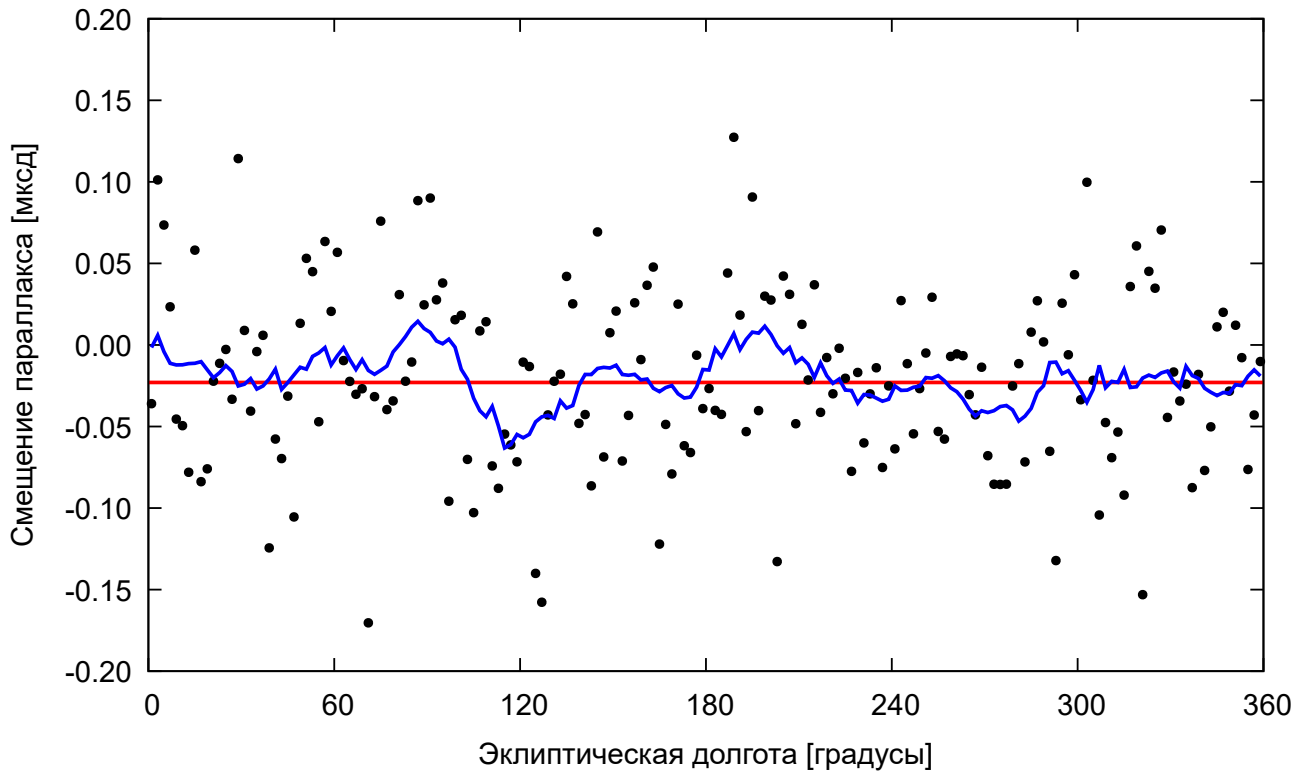


Рис. 6.6. – Сдвиг параллакса, усреднённый по интервалам эклиптической долготы шириной два градуса. Результаты получены для 14 миллионов звёзд при продолжительности наблюдений в 10 лет. Синяя кривая показывает скользящее среднее с линейным ядром размером 13. Теоретическая величина -0.023 мксд изображена красной горизонтальной линией.

используя большое количество независимых решений. Целью следующего эксперимента является изучение влияния вариации параметра γ на нуль-пункт, проведя одно крупномасштабное астрометрическое решение для значительно большего количества звезд. Для фиксированной точности измерений общая точность решения может быть улучшена за счет увеличения продолжительности наблюдений. С этой целью был промоделирован эксперимент продолжительностью 10 лет. Формальные ошибки параллаксов зависят от продолжительности наблюдений T как $T^{-1/2}$ [98]. Таким образом, двукратное увеличение продолжительности приводит к улучшению ошибок параллаксов в 0.71 раза. Моделирование было выполнено для 14 миллионов звёзд, что примерно равно числу опорных звёзд в третьем выпуске данных Gaia.

Значительно возросшее число наблюдений принесло существенное улучшение стабильности оценки смещения параллакса по отношению к шуму. Нуль-пункт параллаксов величиной -0.020 мксд был обнаружен в крупномасштабном астрометрическом решении. Медианная ошибка параллаксов оказалась равной 17 мксд, и поэтому ожидаемая точность определения нуль-пункта параллаксов составляет $(17 \text{ мксд}) \times (14 \times 10^6)^{-1/2} = 4.5 \times 10^{-3}$ мксд. Таким образом, найденное значение нуль-пункта согласуется с теоретическим предсказанием -0.023 мксд в пределах одного стандартного отклонения. Однако существует значительный разброс данных, как показано на рисунке 6.6. Точки показывают средний сдвиг параллакса, вычисленный в интервалах по два градуса, как функцию эклиптической долготы. В интервалах в среднем содержится 78 000 звезд. Значения в интервалах варьируются от -0.17 до 0.12 мксд.

Мы провели дополнительный тест для проверки согласованности оценки нуль-пункта параллаксов: все данные были разделены на звёзды с чётными и нечётными номерами, что привело к двум подмножествам по 7 миллионов звезд. Для этих наборов данных были получены независимые астрометрические решения, и средние значения сдвига параллаксов оказались равными -0.025 и -0.016 мксд. Формальные ошибки составляют $6,4 \times 10^{-3}$ мксд для 7×10^6 звезд,

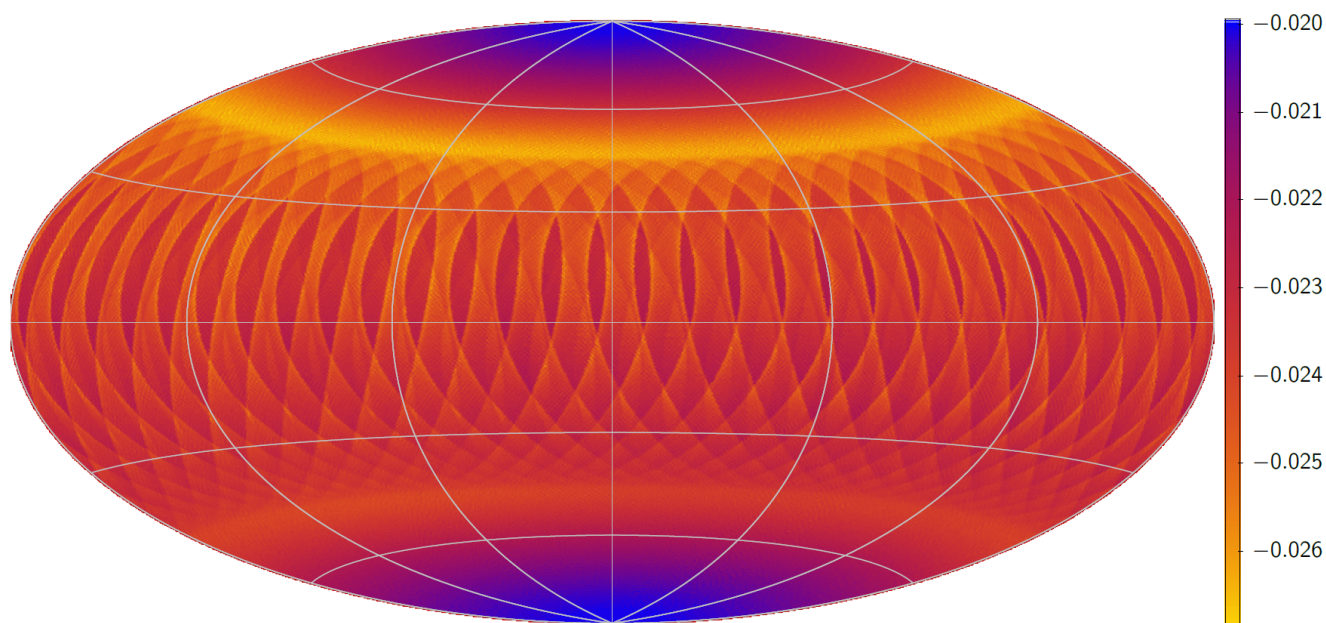


Рис. 6.7. – Распределение ошибок параллаксов (в мксд) в эклиптических координатах, полученное из астрометрического решения для пяти миллионов звёзд и продолжительности эксперимента 10 лет. Наблюдения были сгенерированы без ошибок измерений.

и поэтому эти результаты также подтверждают теоретическое предсказание на уровне $1\text{-}\sigma$. Хорошее согласие между теоретическим ожиданием и экспериментальными результатами демонстрирует правильность математического аппарата и правильное функционирование процедуры моделирования.

6.4.5. Влияние нуля-пункта параллаксов на определение параметра γ

Чтобы проверить влияние нуля-пункта параллаксов на оценку параметра γ , обсуждаемую в разделе 6.3.2, мы использовали блочное решение. В этом подходе, весьма похожем на так называемый глобальный блок в процедуре редукции данных, принятой в проекте Gaia [99], решение содержит только одно неизвестное, параметр γ , тогда как все остальные параметры предполагаются

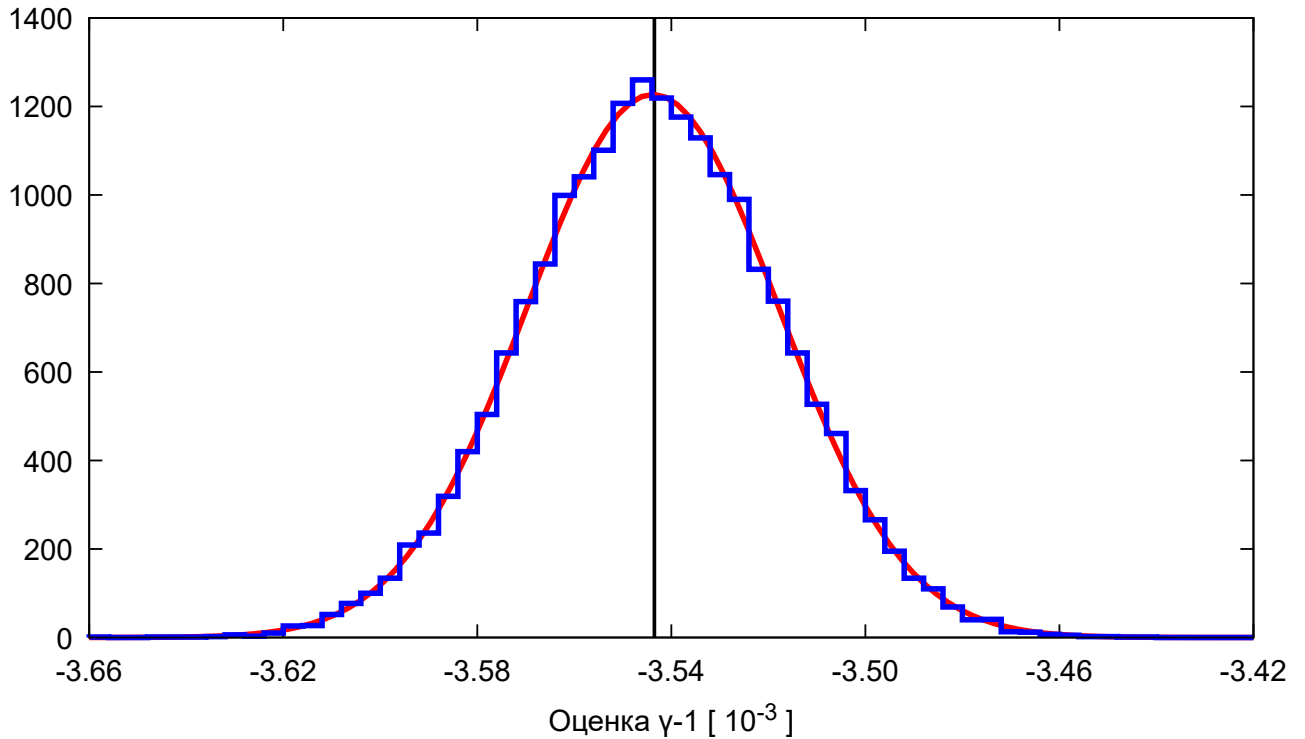


Рис. 6.8. – Распределение величин $\gamma - 1$, полученных в 20 000 астрометрических решениях с 10^5 звёзд, используя наблюдения, сгенерированные с параллаксами, смещёнными на 10 мксд. Гистограмма построена с интервалами длиной 4×10^{-6} . Распределение характеризуется средним значением -3.544×10^{-3} (показано вертикальной линией) и стандартным отклонением 2.6×10^{-5} . Красная кривая представляет нормальное распределение, отвечающее этим параметрам.

известными точно. Нуль-пункт был промоделирован путём добавления 10 мксд к истинным значениям параллакса. Это значение было выбрано для упрощения сравнения численных и теоретических результатов.

Мы провели эксперимент Монте-Карло, состоящий из 20 000 астрометрических решений со 100 000 звёзд. На рисунке 6.8 показано распределение оценок $\text{PPN } \gamma$, полученных в этом эксперименте. Среднее смещение -3.544×10^{-3} хорошо согласуется с теоретическим предсказанием, данным уравнением (6.51). Разброс 2.6×10^{-5} является результатом шума измерений. Тестовый запуск без шума дал разброс на уровне ошибок округления.

6.5. Асимметрия в смещении параллакса

Теперь перейдем к изучению того, как смещение параллакса меняется с расстоянием звезды от эклиптики. Этот тип систематики, по-видимому, существует в силу сильной зависимости закона сканирования от эклиптической широты, проиллюстрированной на рисунке 6.2. Следует отметить, глобальный сдвиг смещение параллакса вследствие параметра γ на несколько порядков меньше ошибок индивидуальных параллакса, как хорошо видно из результатов приведённых на рисунке 6.6. Обнаружение столь малой величины в зашумлённых данных является сложной задачей. Поэтому генерирование наблюдательных ошибок было отключено в этом численном эксперименте, чтобы исследовать эффект в чистом виде. Наблюдения были сгенерированы для пяти миллионов звезд, случайно распределенных по небу. При средней плотности звезд 121 градус^{-2} эти источники образуют квазиравномерную сетку, достаточно плотную для точного отображения двумерной структуры смещения параллакса.

Найденное распределение сдвига параллакса по небесной сфере представлена на рисунке 6.7. Среднее значение сдвига составляет -0.024 мксд, с дисперсией 0.001 мксд, что находится в хорошем согласии с теоретической оценкой. Полученное распределение имеет две характерные черты. Во-первых, чередование уплотнений и разрежений в полосе параллельной экватору. Во-вторых, ярко выраженная асимметрия между северным и южным полушариями: абсолютное значение смещения в северном полушарии систематически больше по сравнению с южным. Это явление дополнительно проиллюстрировано на рисунке 6.9, где показана зависимость сдвига параллакса от эклиптической широты. Асимметрия отчетливо видна на этом графике.

Закон сканирования обеспечивает покрытие небесной сферы, которое геометрически симметрично относительно плоскости эклиптики. Как показано на

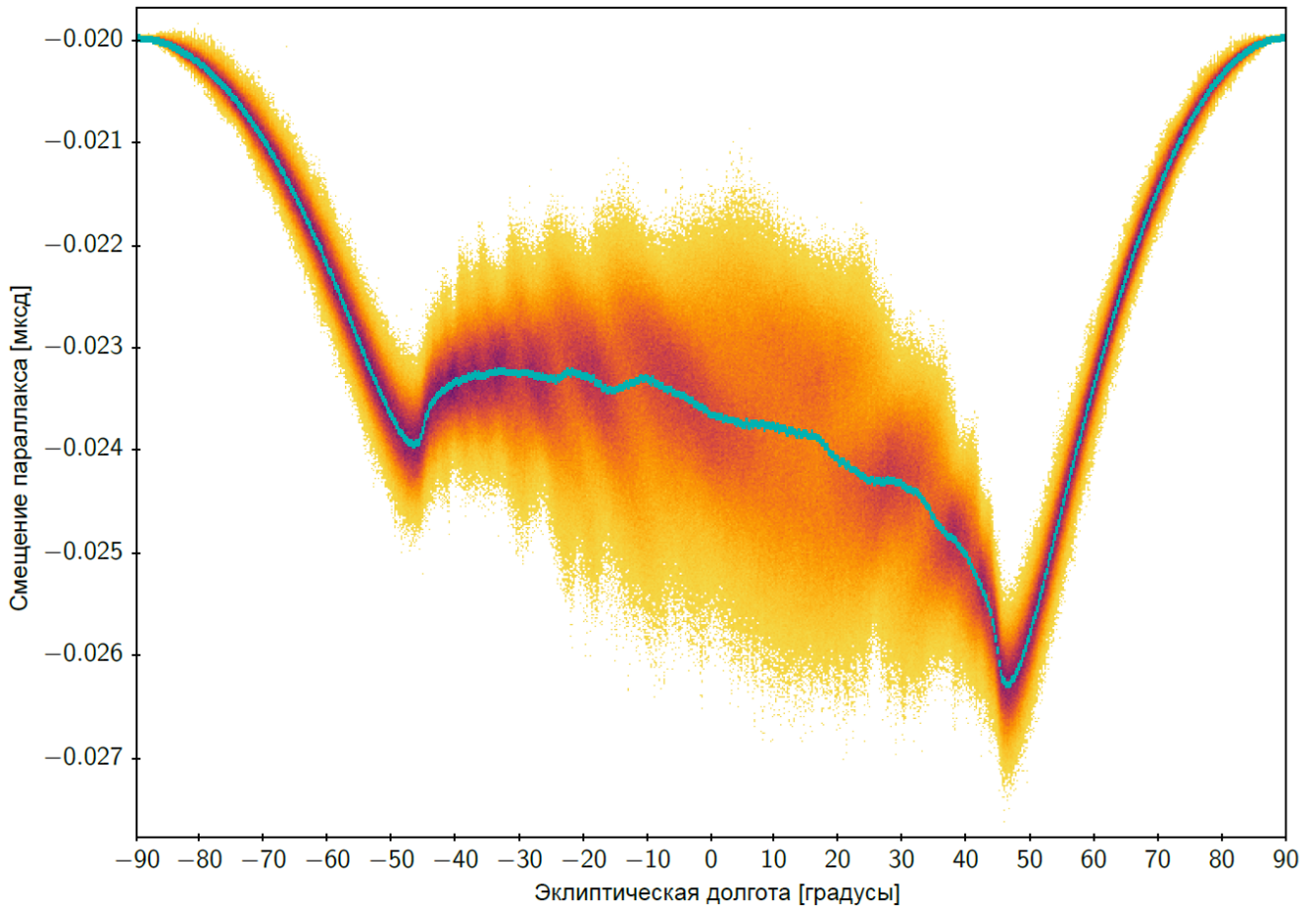


Рис. 6.9. — Зависимость ошибок параллаксов от эклиптической широты в астрометрическом решении с пятью миллионами звёзд. Наблюдения были сгенерированы с использованием номинальной схемы сканирования. Бирюзовая кривая показывает скользящую медиану.

рисунке 6.2, плотность сканирования не показывает систематической зависимости от эклиптической широты, за исключением небольшой неоднородности в эклиптическом поясе, то есть для $|\beta| \leq 45^\circ$, из-за взаимодействия солнечного орбитального движения и прецессии оси вращения. Поэтому естественно предположить, что смещение параллакса обладает той же симметрией. Однако численные эксперименты заставляют нас подвергнуть это ожидание сомнению. Ниже мы утверждаем, что такое сложное поведение смещения является результатом асимметрии, присущей используемому закону сканирования.

Как параллактический эффект, так и гравитационное отклонение света существенно зависят от угла между направлением на звезду и направлением на Солнце. Детальное исследование этого угла показало, что для звезд в северном

полушарии эклиптики ($\beta \geq 46^\circ$) его среднее значение составляет $87:3$; тогда как для звезд в южном полушарии ($\beta \leq -46^\circ$) среднее значение составляет $92:7$. Таким образом, мы приходим к выводу, что звёзды в северном полушарии в среднем наблюдаются ближе к Солнцу, чем в южном.

Причина этого заключается в следующем. В номинальном законе сканирования ось вращения описывает петли в полосе $-46^\circ \leq \beta \leq 46^\circ$, причём ось вращения вращается против часовой стрелки, если смотреть со стороны космического аппарата [70]. В результате направление прецессионного движения совпадает с направлением на Солнце для $\beta < 0$, тогда как для положительных значений β эти направления противоположны. Это означает, что ось проходит более длинный путь в южном эклиптическом полушарии. Соответствующие сканирующие круги охватывают большую площадь и, следовательно, содержат больше звезд.

По этой причине звезды в северном полушарии наблюдаются в среднем ближе чем 90° к Солнцу, в то время как звезды в южном полушарии наблюдаются в среднем дальше чем 90° от Солнца. Параллактический эффект симметричен относительно 90° . Напротив, отклонение света увеличивается по мере уменьшения углового расстояния между звездой и Солнцем. В северном полушарии этот угол систематически меньше 90° , в то время как в южном он систематически больше 90° . Следовательно, отклонение света сильнее для звезд в северном полушарии, что как раз и приводит к большему сдвигу параллаксов.

Для проверки этой гипотезы были проведены дополнительные численные эксперименты, в которых было задано обратное направление прецессии оси вращения. В этом случае ось вращения проводит больше времени в северном эклиптическом полушарии. Зависимость смещение параллаксов от эклиптической широты, полученная в ходе этих экспериментов, приведена на рисунке 6.10. Сравнение рисунков 6.9 и 6.10 показывает, что изменения направления прецессии приводит к инверсии этой зависимости. Этот факт свидетельствует об адекватности предложенного объяснения асимметрии сдвига параллаксов.

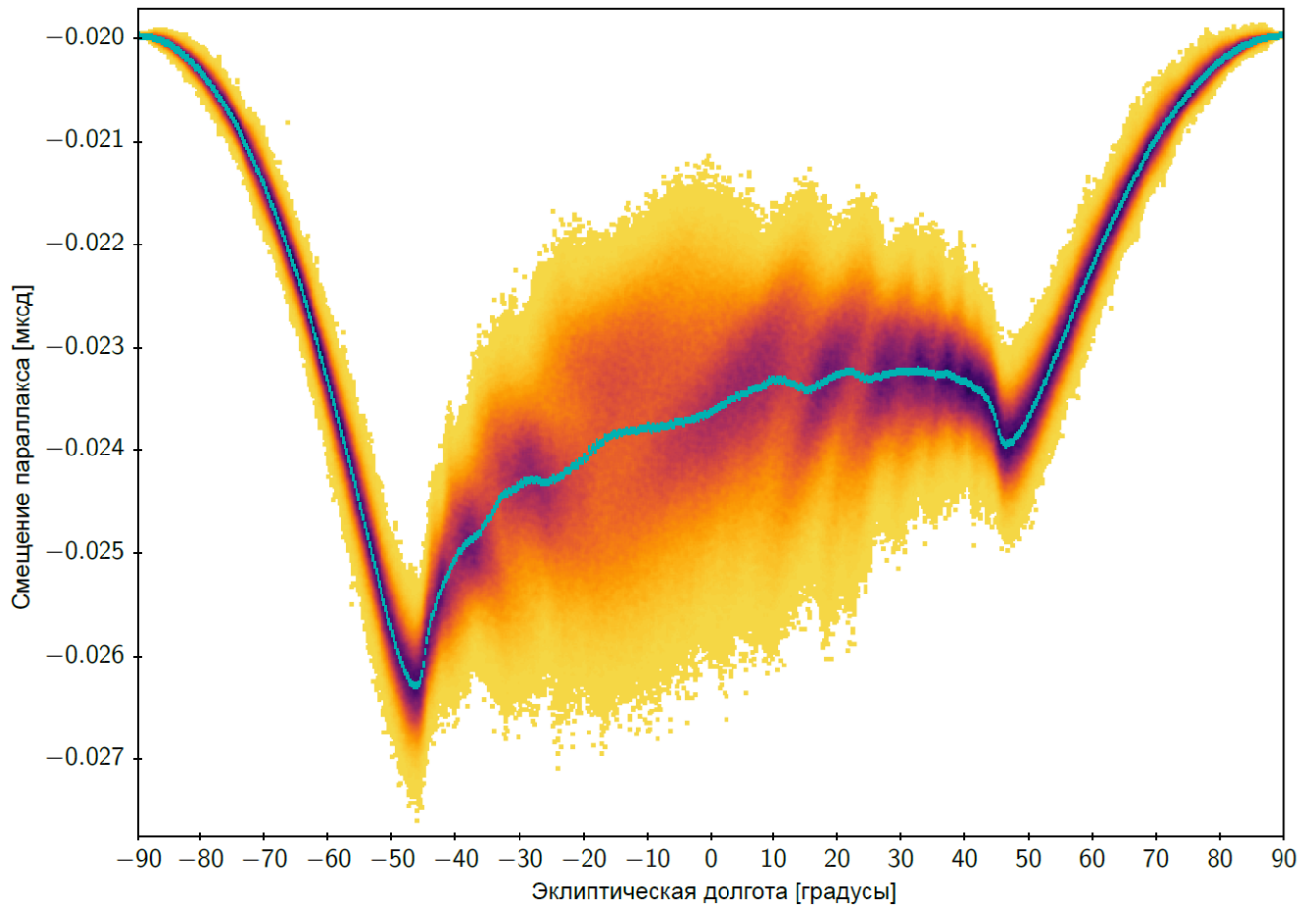


Рис. 6.10. – То же самое, что и на рисунке 6.9, но с изменённой схемой сканирования: было задано обратное направление прецессии, при котором ось вращения огибает Солнце по часовой стрелке, если смотреть со стороны космического аппарата.

6.6. Выводы к шестой главе

Методика производства наблюдений, основанная на принципах, воплощенных в проекте Gaia, характеризуется значительной корреляцией между глобальным сдвигом параллаксов и параметром γ . Были исследованы различные аспекты этой проблемы.

Величина коэффициента корреляции определена двумя различными способами: с помощью метода корреляционных функций и с использованием метода наименьших квадратов. Второй подход является более общим и позволяет обобщить рассмотрение на случай двумерных наблюдений, тогда как метод корреляционных функций применим только к одномерным наблюдениям.

Наличие статистической зависимости между параллаксами и параметром γ имеет двойные последствия. Во-первых, гипотетическое отклонение от общей теории относительности, которое в данном контексте эквивалентно отличию значения параметра γ от единицы, может вызвать изменение нуля-пункта параллаксов. И наоборот, наличие глобального сдвига параллаксов может дать смещённую оценку параметра γ , что, в свою очередь, может привести к ошибочным физическим интерпретациям. Выведены аналитические формулы, описывающие оба эти эффекта. Продемонстрировано, что, в рамках сегодняшних знаний, возможный сдвиг параллаксов вследствие гипотетического отклонения параметра γ от единицы не превышает 0.2 мксд, что лежит за пределами достигнутого в настоящее время уровня точности. Напротив, анализ влияния нуля-пункта параллаксов на оценку параметра γ показал, что абсолютная величина нуля-пункта не должна превышать 0.25 мксд для того, чтобы возможно было оценить параметр γ с точностью, сопоставимой с результатами эксперимента, выполненного с помощью космического аппарата Кассини.

Все теоретические выводы полностью подтверждены результатами репре-

зентативного компьютерного моделирования. Более того, в ходе выполнения численных экспериментов был обнаружен неизвестный ранее эффект. Было найдено, что чувствительность астрометрии Gaia к параметру γ существенно образом зависит от эклиптической широта. Было установлено, указанный эффект является следствием ранее неизвестной асимметрии, присущей применяемой в проект Gaia схеме сканирования небесной сферы. Дополнительные численные эксперименты полностью подтвердили это заключение. Этот результат вошел в список «Важнейших достижений в области астрономии» Научного совета по астрономии ОФН РАН.

Можно заключить, что полученные результаты накладывают существенные дополнительные ограничения на величину нуля-пункта параллаксов для надёжного оценивания параметра γ . С другой стороны, обнаруженная неравномерная чувствительность открывает путь к оптимизации определения параметра γ посредством присваивания наблюдениям статистических весов в соответствии с распределением чувствительности.

Представляется целесообразным сделать ещё одно замечание. Ввиду обнаруженных ограничений небезынтересно рассмотреть возможность использовать для определения параметра γ объекты, для которых сдвиг параллаксов отсутствует. В качестве таких объектов уместно взять квазары, параллаксы которых можно считать равными нулю на микросекундном уровне точности. Учитывая этот факт, можно, в принципе, найти величину параметра γ из основанного на квазарах астрометрического решения с наложенным на него жёстким условием равенства нулю всех параллаксов. Однако, осуществимость подобного сценария в рамках проекта Gaia представляется маловероятной ввиду низкой астрометрической точности квазаров, обусловленной их слабой яркостью.

Заключение

Подводя итог выполненной работы, перечислим основные результаты, полученные в диссертации.

1. Представлена стандартная астрометрическая модель, базирующаяся на положении о равномерном прямолинейном движении одиночных звёзд относительно барицентра Солнечной системы. Хотя этот термин и не является общеупотребительным, его использование представляется правомерным ввиду формальной простоты этой модели и того обстоятельства, что в настоящее время она лежит в основе как обработки, так и использования высокоточных астрометрических данных. Существенной чертой этой модели является включение информации о радиальном движении звезды. С этой целью вводится радиальное собственное движение μ_r , представляющее собой лучевую скорость, делённую на расстояние. Эта величина имеет тот же порядок, что и обычные компоненты собственного движения и её удобно измерять в соответствующих единицах, например, в мсд/год.

Помимо собственно формулировки модели, установлены пределы её применимости: на микросекундном уровне точности влиянием галактического ускорения на барицентрическое движение звёзд можно пренебречь в течение по крайней мере пятидесяти лет.

В рамках стандартной астрометрической модели кинематическое состояние звезды описывается вектором из шести астрометрических параметров $(\alpha, \delta, \varpi, \mu_{\alpha*}, \mu_{\delta}, \mu_r)$. Разработана математически строгая и полностью обратимая процедура перехода от одной эпохи к другой для полного вектора шести астрометрических параметров и соответствующих ковариаций. Эта процедура включена в официальную документацию по проекту Gaia и опубликована на сайте Европейского космического агентства.

2. Выполнен анализ влияния колебаний базового угла на глобальный сдвиг тригонометрических параллаксов, полученных из наблюдений сканирующего астрометрического спутника с двумя полями зрения. Применение метода малых возмущений позволило установить связь между колебаниями базового угла, ориентацией космического аппарата и глобальным смещением параллаксов. Эти соотношения показывают, что вариации базового угла вида $a \cos \Omega$, где a – некоторый постоянный коэффициент, а Ω представляет собой фазу вращения космического аппарата, отсчитываемую от направления на барицентр Солнечной системы, приводит к глобальному сдвигу параллаксов на величину $0.87a$ в случае параметров выполнения эксперимента Gaia. Результаты численного моделирования полностью согласуются с аналитическими формулами.

Полученные результаты позволили устранить существовавшее с 2005 года противоречие в оценках величина нуль-пункта параллаксов, возникающее в результате колебаний базового угла. Вопреки первоначальным ожиданиям, космический аппарат Gaia характеризуется весьма значительными колебаниями базового угла с амплитудой 0.848 мсд. Считается, что обнаруженные периодические изменения базового угла вызваны тепловым воздействием солнечного излучения на вращающийся спутник. Согласно результатам нашего анализа, это может привести к глобальному сдвигу параллаксов на 0.741 мсд. Это обстоятельство полностью учтено в используемой процедуре редукции данных в проекте Gaia. Кроме того, было наглядно продемонстрировано, что данный механизм приводит к появлению сдвига параллаксов только в случае, когда обработка данных основана на принципе самокалибровки, потому что сдвиг параллаксов сопровождается смещением в параметрах ориентации. Это заключение может быть полезно при планировании будущих космических проектов, использующих принцип сканирования.

3. Разработана методика использования априорной информации для построения астрометрического каталога при недостаточном объёме наблюдательных данных, когда из наблюдений какого-либо объекта не удаётся надёжно определить все пять астрометрических параметров. Такая ситуация имеет место, например, для объектов переменной яркости, которые наблюдаются только в моменты максимума светимости, а также для слабых звезд близких к порогу чувствительности инструмента. В этих случаях внесение априорной информации позволяет получить не только надёжные оценки положения, но и их формальные ошибки, которые правильно характеризуют фактические ошибки.

Априорная информация включается в астрометрическое решение с использованием правила Байеса. По практическим соображениям априорные распределения вероятностей принимаются гауссовыми. Реалистичные распределения звездных параметров берутся из Gaia Universe Model Snapshot (GUMS).

Как и в любом решении, использующем априорную информацию, полученные оценки астрометрические параметров получаются смещёнными. Для эпохи, совпадающей со средней эпохой наблюдений, смещение положения по порядку величины равно значению параллакса для данной звезды, что вполне приемлемо.

Разработанная методика с успехом применялась при создании всех трёх имеющихся на настоящее время каталогов Gaia. В первом выпуске данных доля звёзд с двухпараметрическим решением составила 99.8%, во втором выпуске – 21% и в третьем – 19%. Уместно отметить, что область применения разработанной методики отнюдь не ограничивается данными, собранными в ходе проекта Gaia, и она может быть использована во всех случаях, когда требуется получить разумные оценки положения с хорошо охарактеризованными формальными неопределенностями.

4. Выполнено обобщение стандартной астрометрической модели с учётом эффектов запаздывания, обусловленных конечностью скорости света. Для последовательного рассмотрения этих эффектов требуется провести различие истинными и наблюдаемыми значениями положения и скорости. Связь между истинным и наблюдаемым положением определяется световым уравнением, тогда как истинная и наблюдаемая скорости связаны посредством соответствующих доплеровских множителей.

Применение светового уравнения к модели равномерного прямолинейного движения позволило вывести уравнение траектории в терминах наблюдаемых величин. Учёт эффектов запаздывания делает уравнение траектории существенно нелинейным. Найдено строгое математическое решение полученного уравнения, дающее зависимость наблюдаемого положения от времени. Следует отметить, что, как само уравнение траектории, так и его решение, впервые получены в наблюдаемых величинах.

Переход от пространственных векторов к астрометрическим параметрам даёт явные выражения для зависимости последних от времени. Примечательно, что все эффекты запаздывания удобно описываются двумя множителями, которые равны единице, если конечность скорости света игнорируется. Получены явные формулы для преобразования астрометрических параметров от одной эпохи к другой с учётом эффектов запаздывания. Также найдены соответствующие элементы якобиана, используемые для преобразования стандартных ошибок и корреляций. Таким образом, выведен полный набор формул для строгого и полностью обратимого преобразования астрометрических данных между различными эпохами.

Влияние эффектов запаздывания на астрометрические параметры пропорционально третьей степени собственного движения. Показано, эти эффекты существенны для высокоскоростных звезд в пределах нескольких десятков парсек от Солнца.

5. Изучено влияние орбитального движения Земли на астрометрическое детектирование экзопланетных систем. Было продемонстрировано, что, если период обращения экзопланеты близок к одному году, а её орбитальная плоскость слабо наклонена к эклиптике, то движение родительской звезды, обусловленное присутствием планеты, может быть полностью или частично поглощено эффектом параллакса. Как следствие, такую систему нельзя обнаружить астрометрическими методами. В общем случае полного поглощения, конечно, не происходит. Однако в зависимости от геометрии планетной системы может иметь место частичное поглощение, что приведёт к смещённой оценке параллакса и снизить вероятность обнаружения.

Выявление систем с невидимыми спутниками основано на анализе невязок, описывающих отклонение от стандартной астрометрической модели. Анализ невязок с помощью метода максимального правдоподобия позволил как найти смещение параллакса в общем случае, так и ввести удобную количественную меру, характеризующую возможность детектирования подобных систем. Это величина, названная эффективной астрометрической сигнатурой, учитывает орбитальное движение Земли и влияние поглощения параллакса на астрометрические невязки. Примечательно, что эффекты орбитального движения Земли удобно параметризуются одним параметром: корреляционной функцией положений Земли и экзопланеты. Выведены полные наборы формул для расчета астрометрических эффектов, обусловленных взаимодействием между орбитальным движением Земли и орбитальным движением родительской звезды. Эти эффекты значительны для орбит с малым эксцентриситетом ($e \leq 0.5$) и периодом $0.8 \leq P \leq 1.2$ год. В этом диапазоне параметров эффекты в решающей степени зависят от наклона плоскости орбиты по отношению к эклиптике и от относительного положения Земли и звезды.

6. Исследована возможность тестирования постньютоновской гравитации с помощью наблюдений, полученных с борта сканирующего космического аппарата, посредством определения параметра γ . Были изучены четыре аспекта этой проблемы. Во-первых, было рассмотрено влияние гипотетического отклонения от общей теории относительности на появление глобального сдвига параллаксов. Во-вторых, была решена обратная задача о влиянии глобального смещения параллаксов на оценку параметра γ . В-третьих, дан новый вывод для величины корреляции между нуль-пунктом параллаксов и параметром γ , основанный на применении метода наименьших квадратов. В-четвёртых, задача определения параметра γ была обобщена на случай двумерных измерений. Во всех этих случаях были получены новые аналитические выражения, ранее не упоминавшиеся в литературе.

Было установлено, что отклонение параметра γ от единицы – значения, отвечающего ОТО – в пределах известной экспериментальной неопределенности не может вызвать систематического эффекта в параллаксы в пределах точности проекта Gaia. С другой стороны, наличие ненулевого сдвига параллаксов может привести к смещенной оценке параметра γ . Так, нуль-пункт параллаксов, равный 1 мксд, может сместить оценку параметра γ на -3.5×10^{-4} , что представляет собой весьма значительную величину.

В ходе выполнения численных экспериментов была обнаружена зависимость чувствительности сканирующей астрометрии к параметру γ от эллиптической широты. Дальнейшие исследования показали, что этот эффект является следствием неизвестной ранее асимметрии, присущей используемой в проекте Gaia схеме сканирования небесной сферы. Этот результат вошел в список «Важнейших достижений в области астрономии» Научного совета по астрономии ОФН РАН.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность администрации Пулковской обсерватории и всем тем, кто содействовал настоящей работе:

А. Т. Байковой, В. В. Бобылеву, В. В. Витязеву, И. С. Гусевой, А. В. Девяткину, В. Н. Ершову, Н. Р. Ихсанову, И. И. Канаеву, С. А. Клионеру, С. М. Копейкину В. В. Макарову, З. М. Малкину, Ю. А. Наговицыну, К. Н. Наумову, С. Д. Петрову, А. В. Степанову, К. В. Холшевникову, А. С. Цветкову, М. С. Чубею, Б. Буччиарелли, Ф. ван Леувену, А. Веккиато, М. Гаю, М.Т. Кросте, М. Г. Латтанци, Л. Линдегрену, Д. Хоббсу.

Список литературы

1. *Абалакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии. — М. : Наука, 1979. — С. 448.
2. *Андерсон Э., Фрэнсис Ч.* XHIP: Расширенная компилятивная версия каталога HIPPARCOS // Письма в Астрономический журнал. — 2012. — Т. 38. — С. 374—392. — DOI: [10.1134/S1063773712050015](https://doi.org/10.1134/S1063773712050015).
3. *Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л.* Эффект Вавилова - Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме // Успехи физических наук. — 1972. — Т. 106. — С. 577—592. — DOI: [10.1051/0004-6361/201117904](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117904).
4. *Боярчук А. А.* [и др.]. Космическая оптическая интерферометрия для астрометрии // Космические исследования. — 1999. — Т. 37. — С. 3—12.
5. *Брандт З.* Анализ данных: статистические и вычислительные методы для научных работников и инженеров. — М. : Мир, АСТ, 2003. — С. 686.
6. *Буткевич А. Г.* Методика построения астрометрического каталога из наблюдений с борта сканирующего космического аппарата : дисс. канд. физ.-мат. наук / Буткевич А. Г. — ГАО РАН, 2002.
7. *Витязев В. В.* Анализ астрометрических каталогов с помощью сферических функций. — СПб. : Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2017. — С. 224.
8. *Витязев В. В.* Новые методы анализа звездных каталогов и неравномерных временных рядов : дисс. д-ра физ.-мат. наук / Витязев В. В. — ИПА РАН, 1999.
9. *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — Изд. 3-е. — М. : Наука, 1987. — С. 488.

10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Изд. 4-е. — М. : Физматгиз, 1963. — С. 1100.
11. *Девяткин А. В.* Комплексный анализ наблюдений тел Солнечной системы методами астрометрии и фотометрии : дисс. д-ра физ.-мат. наук / Девяткин А. В. — СПбГУ, 2011.
12. *Ершов В.* [и др.]. Космическая астрометрическая система “Струве”. Научное обоснование проекта. — СПб. : Глаголь, 1995. — С. 256.
13. *Жаров В. А.* Сферическая астрономия. — Фрязино : Век 2, 2006. — С. 480.
14. *Кардашев Н. С.* [и др.]. “Радиоастрон” – Телескоп размером 300 000 км: основные параметры и первые результаты наблюдений // *Астрономический журнал.* — 2013. — Т. 90. — С. 179–222. — DOI: [10.1134/S1063772913030025](https://doi.org/10.1134/S1063772913030025).
15. *Копейкин С. М.* Релятивистские системы отсчёта в Солнечной системе // *Астрономический журнал.* — 1989. — Т. 66. — С. 1069–1080.
16. *Копейкин С. М.* Теория относительности в наблюдательной радиоастрономии // *Астрономический журнал.* — 1990. — Т. 67. — С. 10–20.
17. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М. : Наука, 1974. — С. 832.
18. Космический астрономический эксперимент “Ломоносов” / под ред. В. В. Нестерова, А. М. Черепащука, Е. К. Шеффера. — М. : Изд. МГУ, 1992. — С. 257.
19. *Малкин З. М.* К использованию векторных сферических функций // *Известия Главной Астрономической Обсерватории в Пулкове.* — 2024. — Т. 234. — С. 13–21. — DOI: [10.31725/0367-7966-2024-234-13-21](https://doi.org/10.31725/0367-7966-2024-234-13-21).
20. *Маррей К. Э.* Векторная астрометрия. — Киев : Наукова думка, 1986. — С. 327.

21. *Нефедьев Ю. А., Ризванов Н. Г., Шаймухаметов Р. Р.* Сравнительная оценка точности современных астрометрических каталогов // Кинематика и физика небесных тел. — 2003. — Т. 19. — С. 379—384.
22. *Нефедьев Ю. А.* [и др.]. Графический метод оценки точности астрометрических каталогов // Кинематика и физика небесных тел. — 2006. — Т. 22. — С. 219—224.
23. *Понятов А. А.* «Gaia»: Новый взгляд на небо // Наука и жизнь. — 2022. — № 9. — С. 10—16.
24. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Изд. 2-е. — М. : Физматлит, 2002. — С. 496.
25. *Соболь И. М.* Численные методы Монте-Карло. — М. : Наука, 1973. — С. 312.
26. *Турьшев В. Г.* Экспериментальные проверки общей теории относительности: недавние успехи и будущие направления исследований // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179. — С. 3—34. — DOI: [10.3367/UFNr.0179.200901a.0003](https://doi.org/10.3367/UFNr.0179.200901a.0003).
27. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. — М. : Физматгиз, 1963. — С. 734.
28. *Хеерман Д. И.* Методы компьютерного эксперимента в теоретической физике. — М. : Наука, 1990. — С. 176.
29. *Цветков А. С.* Достижения космической астрометрии // Вестник РАН. — 2021. — Т. 91. — С. 142—136. — DOI: [10.31857/S0869587321020109](https://doi.org/10.31857/S0869587321020109).
30. *Цветков А. С.* Основные статистическо-кинематические свойства каталога Gaia EDR3 // Вестник РАН. — 2022. — Т. 92. — С. 57—73. — DOI: [10.31857/S0869587322010108](https://doi.org/10.31857/S0869587322010108).
31. *Arenou F.* [и др.]. Zero-point and external errors of HIPPARCOS parallaxes // Astronomy & Astrophysics. — 1995. — Т. 304. — С. 52—60.

32. *Baan W. A.* [и др.]. H₂O MegaMaser emission in NGC 4258 indicative of a periodic disc instability // *Nature Astronomy*. — 2022. — Т. 6. — С. 976—983. — DOI: [10.1038/s41550-022-01706-y](https://doi.org/10.1038/s41550-022-01706-y).
33. *Bastian U.* Direct Detection of the Sun's Galactocentric Acceleration // *Future Possibilities for astrometry in Space*. Т. 379 / под ред. М. А. С. Perryman, F. van Leeuwen. — 1995. — С. 99—100. — (ESA Special Publication).
34. *Bertotti B., Iess L., Tortora P.* A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft // *Nature*. — 2003. — Т. 425. — С. 374—376. — DOI: [10.1038/nature01997](https://doi.org/10.1038/nature01997).
35. *Bevington P. R., Robinson D. K.* Data reduction and error analysis for the physical sciences. — 3rd edn. — NY : McGraw-Hill, 2002. — С. 352.
36. *Binney J., Merrifield M.* Galactic Astronomy. — Princeton : Princeton University Press, 1998. — С. 816.
37. *Binney J., Tremaine S.* Galactic Dynamics. — 2nd edn. — Princeton : Princeton University Press, 2008. — С. 885.
38. *Blandford R., McKee C., Rees M.* Super-luminal expansion in extragalactic radio sources // *Nature*. — 1977. — Т. 267. — С. 211—216. — DOI: [10.1038/267211a0](https://doi.org/10.1038/267211a0).
39. *Bombrun A.* [и др.]. A conjugate gradient algorithm for the astrometric core solution of Gaia // *Astronomy & Astrophysics*. — 2012. — Т. 538. — A77. — DOI: [10.1051/0004-6361/201117904](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117904).
40. *Borucki W. J., Summers A. L.* The photometric method of detecting other planetary systems // *Icarus*. — 1984. — Т. 58. — С. 121—134. — DOI: [10.1016/0019-1035\(84\)90102-7](https://doi.org/10.1016/0019-1035(84)90102-7).
41. *Brown A. G. A.* [и др.]. Considerations in making full use of the HIPPARCOS catalogue // *Hipparcos-Venice '97 Proceedings*. — 1997. — С. 63—68. — (ESA SP-402).

42. *Brown A. G. A.* Microarcsecond astrometry: Science highlights from Gaia // Annual Review of Astronomy & Astrophysics. — 2021. — Т. 59. — С. 59—115. — DOI: [10.1146/annurev-astro-112320-035628](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-112320-035628).
43. *Butkevich A. G.* Astrometric detectability of systems with unseen companions: effects of the Earth orbital motion // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2018. — Т. 476. — С. 5658—5668. — DOI: [10.1093/mnras/sty686](https://doi.org/10.1093/mnras/sty686).
44. *Butkevich A. G., Lindegren L.* Rigorous treatment of barycentric stellar motion. Perspective and light-time effects in astrometric and radial velocity data // Astronomy & Astrophysics. — 2014. — Т. 570. — A62. — DOI: [10.1051/0004-6361/201424483](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424483).
45. *Butkevich A. G.* Proper motion and secular variations of Keplerian orbital elements // Frontiers in Astronomy and Space Sciences. — 2018. — Т. 5. — С. 18. — DOI: [10.3389/fspas.2018.00018](https://doi.org/10.3389/fspas.2018.00018).
46. *Butkevich A. G.* [и др.]. Constraints on Testing Post-Newtonian Gravity with Scanning Space Astrometry // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2024. — Т. 136. — С. 114508. — DOI: [10.1088/1538-3873/ad8ef6](https://doi.org/10.1088/1538-3873/ad8ef6).
47. *Butkevich A. G.* [и др.]. Impact of basic angle variations on the parallax zero point for a scanning astrometric satellite // Astronomy & Astrophysics. — 2017. — Т. 603. — A45. — DOI: [10.1051/0004-6361/201730781](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730781).
48. *Butkevich A. G.* [и др.]. Post-Newtonian gravity and Gaia-like astrometry. Effect of PPN γ uncertainty on parallaxes // Astronomy & Astrophysics. — 2022. — Т. 663. — A71. — DOI: [10.1051/0004-6361/202243237](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202243237).
49. *Casertano S.* [и др.]. Double-blind test program for astrometric planet detection with Gaia // Astronomy & Astrophysics. — 2008. — Т. 482. — С. 699—729. — DOI: [10.1051/0004-6361:20078997](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20078997).

50. *Casewell S. L.* [и др.]. WD1032 + 011, an inflated brown dwarf in an old eclipsing binary with a white dwarf // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Т. 497. — С. 3571—3580. — DOI: [10.1093/mnras/staa1608](https://doi.org/10.1093/mnras/staa1608).
51. *Cavaliere A., Morrison P., Sartori L.* Rapidly changing radio images // Science. — 1971. — Т. 173. — С. 525—528. — DOI: [10.1126/science.173.3996.525](https://doi.org/10.1126/science.173.3996.525).
52. *Cesare V.* [и др.]. The MPI + CUDA Gaia AVU-GSR parallel solver toward next-generation exascale infrastructures // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2023. — Т. 135, № 1049. — С. 074504. — DOI: [10.1088/1538-3873/acdf1e](https://doi.org/10.1088/1538-3873/acdf1e).
53. *Charpinet S.* [и др.]. A compact system of small planets around a former red-giant star // Nature. — 2011. — Т. 480. — С. 496. — DOI: [10.1038/nature10631](https://doi.org/10.1038/nature10631).
54. *Choi J.* [и др.]. Precise Doppler monitoring of Barnard's star // The Astrophysical Journal. — 2013. — Т. 764. — С. 131. — DOI: [10.1088/0004-637X/764/2/131](https://doi.org/10.1088/0004-637X/764/2/131).
55. *Cohen M. H.* [и др.]. Radio sources with superluminal velocities // Nature. — 1977. — Т. 268. — С. 405—409. — DOI: [10.1038/268405a0](https://doi.org/10.1038/268405a0).
56. *Cox A. N.* Allen's astrophysical quantities. — Fourth. — Springer, 2000.
57. *Damasso M.* [и др.]. A precise architecture characterization of the π Mensae planetary system // Astronomy & Astrophysics. — 2020. — Т. 642. — A31. — DOI: [10.1051/0004-6361/202038416](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038416).
58. *de Bruijne J. H. J.* Science performance of Gaia, ESA's space-astrometry mission // Astrophysics and Space Science. — 2012. — Т. 341. — С. 31—41. — DOI: [10.1007/s10509-012-1019-4](https://doi.org/10.1007/s10509-012-1019-4).

59. *de Bruijne J.* [и др.]. Optimising the Gaia scanning law for relativity experiments // Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis / под ред. S. A. Klioner, P. K. Seidelmann, M. H. Soffel. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010. — С. 331—333. — (IAU Symposium S261). — DOI: [10.1017/S1743921309990597](https://doi.org/10.1017/S1743921309990597).
60. *Dravins D., Lindegren L., Madsen S.* Astrometric radial velocities. I. Non-spectroscopic methods for measuring stellar radial velocity // Astronomy & Astrophysics. — 1999. — Т. 348. — С. 1040—1051. — DOI: [10.48550/arXiv.astro-ph/9907145](https://doi.org/10.48550/arXiv.astro-ph/9907145).
61. *Edwards R. T., Hobbs G. B., Manchester R. N.* TEMPO2, a new pulsar timing package - II. The timing model and precision estimates // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2006. — Т. 372. — С. 1549—1574. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10870.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10870.x).
62. *Eichhorn E., Rust A.* Rigorous Computation of Proper Motions and their Effect on Stellar Positions // Astronomische Nachrichten. — 1970. — Т. 292. — С. 37—38. — DOI: [10.1002/asna.19702920107](https://doi.org/10.1002/asna.19702920107).
63. *Eisner E.* Effect of light Time on Stellar Proper Motion // The Astronomical Journal. — 1967. — Т. 72. — С. 214. — DOI: [10.1086/110219](https://doi.org/10.1086/110219).
64. *ESA.* The Hipparcos and Tycho catalogues. — ESA SP-1200, 1997.
65. *Froeschlé M., Mignard F., Arenou F.* Determination of the PPN parameter γ with the Hipparcos data // Hipparcos-Venice '97 Proceedings. — 1997. — С. 49—52. — (ESA SP-402).
66. *Gai M.* [и др.]. Relative Astrometry in an Annular Field // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2022. — Т. 134. — С. 035001. — DOI: [10.1088/1538-3873/ac50a1](https://doi.org/10.1088/1538-3873/ac50a1).

67. *Gaia Collaboration* [и др.]. Gaia Data Release 1. Summary of the astrometric, photometric, and survey properties // *Astronomy & Astrophysics*. — 2016. — Т. 595. — А2. — DOI: [10.1051/0004-6361/201629512](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629512).
68. *Gaia Collaboration* [и др.]. Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties // *Astronomy & Astrophysics*. — 2018. — Т. 616. — А1. — DOI: [10.1051/0004-6361/201833051](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833051).
69. *Gaia Collaboration* [и др.]. Gaia Early Data Release 3: Summary of the contents and survey properties // *Astronomy & Astrophysics*. — 2021. — Т. 649. — А1. — DOI: [doi:10.1051/0004-6361/202039657](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039657).
70. *Gaia Collaboration* [и др.]. The Gaia mission // *Astronomy & Astrophysics*. — 2016. — Т. 595. — А1. — DOI: [10.1051/0004-6361/201629272](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629272).
71. *Golub G. H., van Loan C. F.* Matrix computations. — 4th edn. — NY : The John Hopkins University Press, 2012. — С. 784.
72. *Gould A., Kollmeier J. A.* Gaia parallax zero point from RR Lyrae stars // *Journal of Korean Astronomical Society*. — 2017. — Т. 50. — С. 1–5. — DOI: [10.5303/JKAS.2017.50.1.1](https://doi.org/10.5303/JKAS.2017.50.1.1).
73. *Hobbs D.* [и др.]. Determining PPN γ with Gaia's Astrometric Core Solution // *Relativity in Fundamental Astronomy, IAU Symposium 261* / под ред. S. A. Klioner, P. K. Seidelman, M. H. Soffel. — 2009. — С. 315–319.
74. *Høg E.* [и др.]. Construction and verification of the Tycho-2 Catalogue // *Astronomy & Astrophysics*. — 2000. — Т. 357. — С. 367–386.
75. *Holl B.* Astrometric planet detectability with Gaia, a short AGISLab study : тех. отч. / Lund Observatory. — 09.2011.
76. *Holl B., Lindegren L., Hobbs D.* Error characterization of the Gaia astrometric solution. II. Validating the covariance expansion model // *Astronomy & Astrophysics*. — 2012. — Т. 543. — А15. — DOI: [10.1051/0004-6361/201218808](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201218808).

77. *Holmberg J., Flynn C.* The local density of matter mapped by Hipparcos // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2000. — Т. 313. — С. 209—216. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.2000.02905.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.02905.x).
78. *Horner S. D.* [и др.]. Full-sky Astrometric Mapping Explorer: an optical astrometric survey mission // UV, Optical, and IR Space Telescopes and Instruments, SPIE Conference Series Vol. 4013 / под ред. J. B. Breckinridge, P. Jakobsen. — 2000. — С. 473—481. — DOI: [10.1117/12.394030](https://doi.org/10.1117/12.394030).
79. *IAU.* Resolution B2 on the re-definition of the astronomical unit of length. — 2012.
80. *Ilin A. E.* [и др.]. Project STRUVE // Hipparcos-Venice '97 Proceedings. — 1997. — С. 831—834. — (ESA SP-402).
81. *Kervella, P.* [и др.]. Stellar and substellar companions of nearby stars from Gaia DR2 - Binarities from proper motion anomaly // Astronomy & Astrophysics. — 2019. — Т. 623. — A72. — DOI: [10.1051/0004-6361/201834371](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201834371).
82. *Klioner S.* A practical relativistic model for microarcsecond astrometry in space // The Astronomical Journal. — 2003. — Т. 125. — С. 1580—1597. — DOI: [10.1086/367593](https://doi.org/10.1086/367593).
83. *Klioner S. A.* [и др.]. Data timing, time transfer and on-board clock monitoring for space astrometry with Gaia // Space Science Reviews. — 2017. — Т. 212. — С. 1423—1432. — DOI: [10.1007/s11214-017-0419-8](https://doi.org/10.1007/s11214-017-0419-8).
84. *Kopeikin S. M.* Relativistic reference frames for astrometry and navigation in the Solar System // New trends in astrodynamics and applications III, American Institute of Physics Conference Series, Vol. 886 / под ред. E. Belbruno. — 2007. — С. 268—283. — DOI: [10.1063/1.2710062](https://doi.org/10.1063/1.2710062).
85. *Kovalevsky J.* Aberration in proper motions // Astronomy & Astrophysics. — 2003. — Т. 404. — С. 743—747. — DOI: [10.1051/0004-6361:20030560](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20030560).

86. *Kovalevsky J.* First results from HIPPARCOS // Annual Review of Astronomy & Astrophysics. — 1998. — Т. 36. — С. 99—130. — DOI: [10.1146/annurev.astro.36.1.99](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.36.1.99).
87. *Kovalevsky J.* [и др.]. The HIPPARCOS catalogue as a realisation of the extragalactic reference system // Astronomy & Astrophysics. — 1997. — ИЮЛЬ. — Т. 323. — С. 620—633.
88. *L. Lindegren.* Scientific requirements for basic angle stability monitoring : тех. отч. / Lund Observatory. — 2004.
89. *Lambert S. B., Poncin-Lafitte C. L.* Improved determination of γ by VLBI // Astronomy & Astrophysics. — 2011. — Т. 529. — A70. — DOI: [10.1051/0004-6361/201016370](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201016370).
90. *Lattanzi M. G.* [и др.]. Space-borne global astrometric surveys: the hunt for extrasolar planets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2000. — Т. 317. — С. 211—224. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.2000.03637.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03637.x).
91. *Lebreton Y.* Stellar structure and evolution: Deductions from Hipparcos // Annual Review of Astronomy & Astrophysics. — 2000. — Т. 38. — С. 35—77. — DOI: [10.1146/annurev.astro.38.1.35](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.38.1.35).
92. *Lindegren L.* Thermal stability and the determination of parallaxes : тех. отч. / Lund Observatory. — 1977.
93. *Lindegren L., Bastian U.* Basic principles of scanning space astrometry // EAS Publications Series. Т. 45 / под ред. C. Turon, F. Meynadier, F. Arenou. — 2010. — С. 109—114. — DOI: [10.1051/eas/1045018](https://doi.org/10.1051/eas/1045018).
94. *Lindegren L., Dravins D.* The fundamental definition of “radial velocity” // Astronomy & Astrophysics. — 2003. — Т. 401. — С. 1185—1201.

95. *Lindegren L., Perryman M. A. C.* GAIA: Global Astrometric Interferometer for Astrophysics // Hipparcos-Venice '97 Proceedings. — 1997. — С. 799—802. — (ESA SP-402).
96. *Lindegren L.* [и др.]. Gaia Data Release 1. Astrometry: one billion positions, two million proper motions and parallaxes // Astronomy & Astrophysics. — 2016. — Т. 595. — А4. — DOI: [10.1051/0004-6361/201628714](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201628714).
97. *Lindegren L.* [и др.]. Gaia Early Data Release 3: Parallax bias versus magnitude, colour, and position // Astronomy & Astrophysics. — 2021. — Т. 649. — А4. — DOI: [doi:10.1051/0004-6361/202039653](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039653).
98. *Lindegren L.* [и др.]. Gaia Early Data Release 3. The astrometric solution // Astronomy & Astrophysics. — 2021. — Т. 649. — А2. — DOI: [10.1051/0004-6361/202039709](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039709).
99. *Lindegren L.* [и др.]. The astrometric core solution for the Gaia mission. Overview of models, algorithms, and software implementation // Astronomy & Astrophysics. — 2012. — Т. 538. — А78. — DOI: [10.1051/0004-6361/201117905](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117905).
100. *Lindegren L.* [и др.]. The NDAC Hipparcos data analysis consortium // Astronomy & Astrophysics. — 1992. — Т. 258. — С. 18—30.
101. *Liu J.-C., Xie Y., Zhu Z.* Aberration in proper motions for stars in our Galaxy // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2013. — Т. 433. — С. 3597—3604. — DOI: [10.1093/mnras/stt1006](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1006).
102. *Makarov V. V.* Absolute measurements of trigonometric parallaxes with astrometric satellites // Astronomy & Astrophysics. — 1998. — Т. 340. — С. 309—314.
103. *Makarov V. V.* Large-Scale Distortions of Hipparcos-like Coordinate Systems // Hipparcos - Venice '97. Т. 402 / под ред. R. M. Bonnet [и др.]. — 08.1997. — С. 823—826. — (ESA Special Publication).

104. *Merat P.* [и др.]. Gaia: a Leading Step in the Understanding of the Galactic Structure // *Baltic Astronomy*. — 1999. — Т. 8. — С. 1–24. — DOI: [10.1515/astro-1999-0104](https://doi.org/10.1515/astro-1999-0104).
105. *Michalik D., Lindegren L., Hobbs D.* The Tycho-Gaia astrometric solution - How to get 2.5 million parallaxes with less than one year of Gaia data // *Astronomy & Astrophysics*. — 2015. — Т. 574. — A115. — DOI: [10.1051/0004-6361/201425310](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201425310).
106. *Michalik D.* [и др.]. Gaia astrometry for stars with too few observations. A Bayesian approach // *Astronomy & Astrophysics*. — 2015. — Т. 583. — A68. — DOI: [10.1051/0004-6361/201526936](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526936).
107. *Michalik D.* [и др.]. Joint astrometric solution of HIPPARCOS and Gaia. A recipe for the Hundred Thousand Proper Motions project // *Astronomy & Astrophysics*. — 2014. — Т. 571. — A85. — DOI: [10.1051/0004-6361/201424606](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424606).
108. *Mora A.* [и др.]. Gaia on-board metrology: basic angle and best focus // *Space Telescopes and Instrumentation 2014: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*. Т. 9143. — 2014. — С. 91430X. — (Proceedings SPIE). — DOI: [10.1117/12.2054602](https://doi.org/10.1117/12.2054602).
109. *Mueller I. I.* Spherical and practical astronomy. — New York : Frederick Ungar Publishing, 1969. — С. 615.
110. *Murdin P.* Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics. — Bristol : Institute of Physics Publishing, 2001. — С. 472.
111. *Perryman M.* [и др.]. Astrometric exoplanet detection with Gaia // *The Astrophysical Journal*. — 2014. — Т. 797. — С. 14. — DOI: [10.1088/0004-637X/797/1/14](https://doi.org/10.1088/0004-637X/797/1/14).

112. *Perryman M. A. C.* Astronomical Applications of Astrometry. Ten Years of Exploitation of the Hipparcos Satellite Data. — Cambridge : Cambridge University Press, 2009. — C. 670.
113. *Perryman M. A. C.* The Exoplanet Handbook. — 2nd edn. — Cambridge : Cambridge University Press, 2018. — C. 972.
114. *Perryman M. A. C., Schulze-Hartung T.* The barycentric motion of exoplanet host stars. Tests of solar spin-orbit coupling // *Astronomy & Astrophysics*. — 2011. — T. 595. — A65. — DOI: [10.1051/0004-6361/201015668](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015668).
115. *Perryman M. A. C.* [и др.]. GAIA: Composition, formation and evolution of the Galaxy // *Astronomy & Astrophysics*. — 2001. — T. 369. — C. 339—363. — DOI: [10.1051/0004-6361:20010085](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20010085).
116. *Poisson E., Will C. M.* Gravity: Newtonian, post-Newtonian and relativistic. — Cambridge : Cambridge University Press, 2014. — C. 792.
117. *Press W. H.* [и др.]. Numerical recipes. The art of scientific computing. — 3rd edn. — New York : Cambridge University Press, 2007. — C. 1235.
118. *Ranalli P., Hobbs D., Lindgren L.* Astrometry and exoplanets in the Gaia era: a Bayesian approach to detection and parameter recovery // *Astronomy & Astrophysics*. — 2018. — T. 614. — A30. — DOI: [10.1051/0004-6361/201730921](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201730921).
119. *Rappaport S.* [и др.]. Possible disintegrating short-period super-Mercury orbiting KIC 12557548 // *The Astrophysical Journal*. — 2012. — T. 752. — C. 1. — DOI: [10.1088/0004-637X/752/1/1](https://doi.org/10.1088/0004-637X/752/1/1).
120. *Rees M. J.* Studies in radio source structure-I. A relativistically expanding model for variable quasi-stellar radio sources // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1967. — T. 135. — C. 345—360. — DOI: [10.1093/mnras/135.4.345](https://doi.org/10.1093/mnras/135.4.345).

121. *Rees M. J., Simon M.* Evidence for relativistic expansion in variable radio sources // *The Astrophysical Journal Letters*. — 1968. — T. 152. — C. L145. — DOI: [10.1086/180200](https://doi.org/10.1086/180200).
122. *Reid I. N.* The HR diagram and the galactic distance scale after HIPPARCOS // *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*. — 1999. — T. 37. — C. 191–237. — DOI: [10.1146/annurev.astro.37.1.191](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.37.1.191).
123. *Reid M. J.* [и др.]. Trigonometric parallaxes of massive star-forming regions. VI. Galactic structure, fundamental parameters, and noncircular motions // *The Astrophysical Journal*. — 2009. — T. 700. — C. 137–148. — DOI: [10.1088/0004-637X/700/1/137](https://doi.org/10.1088/0004-637X/700/1/137).
124. *Robin A. C.* [и др.]. Gaia Universe model snapshot. A statistical analysis of the expected contents of the Gaia catalogue // *Astronomy & Astrophysics*. — 2012. — T. 543. — A100. — DOI: [10.1051/0004-6361/201118646](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201118646).
125. *Röser S.* DIVA - A Space-Borne Fizeau Interferometer for Global Astrometry and Photometry // *Working on the Fringe: Optical and IR Interferometry from Ground and Space*. ASP Conference Series Vol. 194 / под ред. S. Unwin, R. Stachnik. — 1999. — C. 121–127.
126. *Röser S.* DIVA - Beyond HIPPARCOS and Towards GAIA // *Reviews in Modern Astronomy*. — 1999. — T. 12. — C. 97–106.
127. *Sahlmann J., Triaud A. H. M. J., Martin D. V.* Gaia's potential for the discovery of circumbinary planets // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — T. 447. — C. 287–297. — DOI: [10.1093/mnras/stu2428](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2428).
128. *Schlesinger F.* On the secular changes in the proper-motion other elements of certain stars // *The Astronomical Journal*. — 1917. — T. 30. — C. 137–138. — DOI: [10.1086/104203](https://doi.org/10.1086/104203).

129. *Schwarzschild K.* Ueber den Einfluss der saecularen Aberration auf die Fixsternörter // *Astron. Nachr.* — 1894. — T. 136. — C. 81–84. — DOI: [10.1002/asna.18941360602](https://doi.org/10.1002/asna.18941360602).
130. *Scott F. P., Hughes J. A.* Computation of apparent places for the southern reference star program // *The Astronomical Journal.* — 1964. — T. 69. — C. 368–371. — DOI: [10.1086/109286](https://doi.org/10.1086/109286).
131. *Shao M., Baron R.* The Practice of Astrometry in Space with the Space Interferometry Mission Instrument // *Working on the Fringe: Optical and IR Interferometry from Ground and Space.* ASP Conference Series Vol. 194 / под ред. S. Unwin, R. Stachnik. — 1999. — C. 107–113.
132. *Sivia D. S., Skilling J.* Data analysis: A Bayesian tutorial. — Oxford : Oxford University Press, 2006. — C. 260.
133. *Soffel M. H.* Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy. — Springer-Verlag, 1989.
134. *Sozzetti A.* Extrasolar planets // *Astrometry for Astrophysics* / под ред. W. F. van Altena. — Cambridge : Cambridge University Press, 2013. — Гл. 27.
135. *Sozzetti A.* [и др.]. Astrometric detection of giant planets around nearby M dwarfs: the Gaia potential // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* — 2014. — T. 437. — C. 497–509. — DOI: [10.1093/mnras/stt1899](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1899).
136. *Stumpff P.* Rigorous treatment of the heliocentric motion of stars // *Astronomy & Astrophysics.* — 1985. — T. 144. — C. 232–240.
137. *Taff L. G.* Computational spherical astronomy. — New York : Wiley-Interscience, 1991. — C. 233.
138. *Tanga P.* [и др.]. Gaia Data Release 3. The Solar System survey // *Astronomy & Astrophysics.* — 2023. — T. 674. — A12. — DOI: [10.1051/0004-6361/202243796](https://doi.org/10.1051/0004-6361/202243796).

139. The HIPPARCOS and TYCHO catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA HIPPARCOS Space Astrometry Mission. T. 1200 / под ред. ESA. — 1997. — (ESA Special Publication).
140. *van Altena W. F.* Astrometry for Astrophysics. — Cambridge University Press, 2013.
141. *van de Kamp P.* Perspective secular changes in stellar proper motion, radial velocity and parallax // *Vistas in Astronomy*. — 1977. — T. 21. — C. 289—310. — DOI: [10.1016/0083-6656\(77\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0083-6656(77)90034-4).
142. *van Leeuwen F.* Hipparcos, the New Reduction of the Raw Data. — NY : Springer, 2007. — C. 481.
143. *van Leeuwen F.* Rights and wrongs of the Hipparcos data. A critical quality assessment of the Hipparcos catalogue // *Astronomy & Astrophysics*. — 2005. — T. 439. — C. 805—822. — DOI: [10.1051/0004-6361:20053192](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20053192).
144. *van Leeuwen F., Fantino E.* A new reduction of the raw Hipparcos data // *Astronomy & Astrophysics*. — 2005. — T. 439. — C. 791—803. — DOI: [10.1051/0004-6361:20053193](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20053193).
145. *Vecchiato A.* [и др.]. Testing general relativity by micro-arcsecond global astrometry // *Astronomy & Astrophysics*. — 2003. — T. 399. — C. 337—342. — DOI: [10.1051/0004-6361:20021785](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20021785).
146. *Vecchiato A.* [и др.]. The global sphere reconstruction (GSR) - Demonstrating an independent implementation of the astrometric core solution for Gaia // *Astronomy & Astrophysics*. — 2018. — T. 620. — A40. — DOI: [10.1051/0004-6361/201833254](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833254).
147. *Vityazev V. V., Tsvetkov A. S.* Intercomparison of kinematics derived from catalogues UCAC4, PPMXL and XPM with vector spherical harmonics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2014. — T. 442. — C. 1249—1264. — DOI: [10.1093/mnras/stu953](https://doi.org/10.1093/mnras/stu953).

148. *Will C. M.* The Confrontation between General Relativity and Experiment // Living Reviews in Relativity. — 2014. — T. 17. — C. 4. — DOI: [10.12942/lrr-2014-4](https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4).
149. *Windmark F., Lindegren L., Hobbs D.* Using Galactic Cepheids to verify Gaia parallaxes // Astronomy & Astrophysics. — 2011. — T. 530. — A76. — DOI: [10.1051/0004-6361/201116929](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116929).
150. *Woolard E. W., Clemence G. M.* Spherical astronomy. — NY : Academic Press, 1966. — C. 453.
151. *Wright J. T., Eastman J. D.* Barycentric corrections at 1 cm s^{-1} for precise Doppler velocities // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2014. — T. 126. — C. 838. — DOI: [10.1086/678541](https://doi.org/10.1086/678541).
152. *Wright J. T., Howard A. W.* Efficient fitting of multiplanet Keplerian models to radial velocity and astrometry data // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 2009. — T. 182. — C. 205–215. — DOI: [10.1088/0067-0049/182/1/205](https://doi.org/10.1088/0067-0049/182/1/205).
153. *Butkevich A. G., Lindegren L.* Gaia DR3 Documentation. Transformations of astrometric data and error propagation. — URL: https://gea.esac.esa.int/archive/documentation/GDR3/Data_processing/chap_cu3ast/sec_cu3ast_intro/ssec_cu3ast_intro_transforms.html.
154. NASA Exoplanet Archive. — URL: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu>.
155. Encyclopaedia of exoplanetary systems. — URL: <https://exoplanet.eu>.

Приложение А

Дифференцирование векторов в сканирующей системе отсчёта

Ниже рассматривается вопрос о вычислении дифференциалов векторов в сканирующей системе отсчёта (ССО), введённой в разделе 2.1.

Рассмотрим подвижную систему отсчёта с координатными ортами \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 . Произвольный вектор \mathbf{a} в этой системе координат имеет компоненты a_1 , a_2 , a_3 и выражается через орты следующим образом

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3. \quad (\text{A.1})$$

Поскольку орты подвижной системы не являются фиксированными, то вычисление дифференциала вектора \mathbf{a} должно выполняться согласно общему правилу, которое описывается формулой (16.10-3) из [17],

$$d\mathbf{a} = a_1d\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1da_1 + a_2d\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2da_2 + a_3d\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3da_3. \quad (\text{A.2})$$

В нашем случае роль подвижных ортов играют единичные векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} , отвечающие осям ССО, изображённой на рисунке 2.1. Для простоты мы отвлекаемся от прецессии оси вращения и считаем ось \mathbf{z} неподвижной. Пусть она направлена в точку с экваториальными координатами α_0 , δ_0 , тогда её координатное представление в экваториальной системе координат имеет вид

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} вращаются вокруг оси \mathbf{z} с постоянной угловой скоростью $\omega = \dot{\Omega}$. Координатное представление этих векторов зависит от выбора начала отсчёта времени. Удобно наложить условие, чтобы в момент $t = 0$ вектор \mathbf{y} лежал в

плоскости небесного экватора, тогда его координатное представление принимает вид

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \omega t - \sin \alpha_0 \cos \omega t \\ -\sin \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \omega t + \cos \alpha_0 \cos \omega t \\ \sin \delta_0 \sin \omega t \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Далее, вектор \mathbf{x} вычисляется как член правой тройки посредством $\mathbf{x} = \mathbf{y} \times \mathbf{z}$, что даёт

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \omega t - \sin \alpha_0 \sin \omega t \\ \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \omega t + \cos \alpha_0 \sin \omega t \\ -\sin \delta_0 \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Вычислим теперь дифференциал вектора \mathbf{x} . Поскольку его координаты зависят только от времени, получаем

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \omega t - \omega \sin \alpha_0 \cos \omega t \\ -\omega \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \omega t + \omega \cos \alpha_0 \cos \omega t \\ \omega \sin \delta_0 \sin \omega t \end{pmatrix} dt. \quad (\text{A.6})$$

Сопоставление этого выражение с уравнением (A.4) показывает, что

$$d\mathbf{x} = \omega \mathbf{y} dt. \quad (\text{A.7})$$

Аналогичным образом находим дифференциал вектора \mathbf{y} :

$$d\mathbf{y} = -\omega \mathbf{x} dt. \quad (\text{A.8})$$

Таким образом, видим, что дифференциал вектора \mathbf{x} направлен вдоль оси \mathbf{y} , тогда как дифференциал вектора \mathbf{y} направлен вдоль оси \mathbf{x} . Это результат имеет наглядное геометрическое истолкование. Производная любого единичного вектора всегда ему ортогональна, поэтому дифференциал вектора \mathbf{x} может лежать только в плоскости \mathbf{yz} , а дифференциал вектора \mathbf{y} может лежать только в плоскости \mathbf{xz} . В нашем случае ось \mathbf{z} неподвижна, поэтому она не фигурирует в полученных дифференциалах. Учёт прецессии оси вращения привёл бы к появлению в формулах (A.7) и (A.8) членов по оси \mathbf{z} , однако, как указано в

разделе 2.1, они были бы малыми поправками, чья величина была бы на два порядка ниже имеющихся членов.

Рассмотрим произвольный вектор \mathbf{a} в ССО:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{x} + a_y \mathbf{y} + a_z \mathbf{z}, \quad (\text{A.9})$$

причём компоненты представляют собой скалярные произведения

$$a_x = \mathbf{a}'\mathbf{x}, \quad a_y = \mathbf{a}'\mathbf{y}, \quad a_z = \mathbf{a}'\mathbf{z}. \quad (\text{A.10})$$

Поэтому мы можем записать вектор \mathbf{a} как

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}'\mathbf{x}) \mathbf{x} + (\mathbf{a}'\mathbf{y}) \mathbf{y} + (\mathbf{a}'\mathbf{z}) \mathbf{z}. \quad (\text{A.11})$$

Вычисляя дифференциал согласно общему правилу (A.2), получаем

$$d\mathbf{a} = (\mathbf{a}'\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mathbf{x} (\mathbf{a}'d\mathbf{x}) + (\mathbf{a}'\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \mathbf{y} (\mathbf{a}'d\mathbf{y}) + (\mathbf{a}'\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \mathbf{z} (\mathbf{a}'d\mathbf{z}). \quad (\text{A.12})$$

Далее, учитывая формулы (A.7) и (A.8) и принимая во внимание, что $d\mathbf{z} = 0$, находим

$$d\mathbf{a} = \omega (\mathbf{a}'\mathbf{x}) \mathbf{y} + \omega \mathbf{x} (\mathbf{a}'\mathbf{y}) - \omega (\mathbf{a}'\mathbf{y}) \mathbf{x} - \omega \mathbf{y} (\mathbf{a}'\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Это соотношение показывает, что вращение сканирующей системы координат не даёт вклада в дифференцирование векторов. Мы можем поэтому заключить, что все дифференциальные соотношения, полученные в системе ICRS справедливы и в ССО. Тем самым найден ответ на поставленный в конце раздела 1.1 вопрос, сохраняет ли формула (1.27) свой вид при переходе от неподвижной системы отсчёта к вращающейся. Полученный результат свидетельствует, что ответ является положительным.